Лабораторная работа №3. Моделирование непрерывных псевдослучайных величин.
(Срок сдачи до 28.11.2023)

Основные задания (4 балла)

1) Осуществить моделирование $n = 1000$ реализаций случайной величины из нормального закона распределения $N(m, s^2)$ с заданными параметрами. Для моделирования воспользоваться алгоритмом, основанным на ЦПТ; (в качестве количества используемых слагаемых можно взять $N = 48$, или 192, или другое на свой выбор; учтите, что от этого значения зависят коэффициенты нормировки). Вычислить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, сравнить их с истинными значениями.

Вариант:

1) $m = 0$, $s^2 = 9$;	2) $m = -3$, $s^2 = 16$;	3) $m = 4$, $s^2 = 25$;	4) $m = 0$, $s^2 = 1$;
5) $m = -4$, $s^2 = 4$;	6) $m = 5$, $s^2 = 9$;	7) $m = 0$, $s^2 = 16$;	8) $m = -5$, $s^2 = 25$;
9) $m = 0$, $s^2 = 64$;	10) $m = 1$, $s^2 = 9$;	11) $m = 0$, $s^2 = 1$;	12) $m = -1$, $s^2 = 4$;
13) $m = 2$, $s^2 = 16$;	14) $m = 0$, $s^2 = 25$;	15) $m = -2$, $s^2 = 1$;	16) $m = 3$, $s^2 = 4$.

2) Смоделировать $n = 1000$ случайных величин из заданных абсолютно непрерывных распределений. Вычислить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, сравнить их с истинными значениями (если это возможно). Если математического ожидания не существует, то вычислить выборочное значение медианы и сравнить его с теоретическим.

Вариант:

1) χ^2-распределение с m степенями свободы (χ^2_m), $m = 4$. Лапласа $L(a)$, $a = 2$.
2) *Логнормальное $LN(m, s^2)$, $m = 0$, $s^2 = 4$, Коши $C(a,b)$, $a = 1$, $b = 2$.
3) Экспоненциальное $E(a)$, a = 0.5, Вейбулла $W(a,b)$, $a = 4$, $b = 0.5$.
4) Логистическое $LG(a,b)$, $a = 2$, $b = 3$; Фишера с l и m степенями свободы ($F_{m,l}$) $l = 5$, $m = 3$.
5) Экспоненциальное $E(a)$, a = 0.5, Логистическое $LG(a,b)$, $a = 0$, $b = 1.5$.
6) Коши $C(a,b)$, $a = -1$, $b = 3$; Стьюдента с m степенями свободы (t_m), $m = 6$.
7) *Логнормальное $LN(m, s^2)$, $m = 2$, $s^2 = 16$; Логистическое $LG(a,b)$, $a = 1$, $b = 1$.
8) Лапласа $L(a)$, $a = 1$; Экспоненциальное $E(a)$, a = 4.
9) χ^2-распределение с m степенями свободы (χ^2_m), $m = 4$; Лапласа $L(a)$, $a = 2$.
10) *Логнормальное $LN(m, s^2)$, $m = 1$, $s^2 = 9$.Экспоненциальное $E(a)$, a = 2.
11) Лапласа $L(a)$, $a = 0.5$; Вейбулла $W(a,b)$, $a = 1$, $b = 0.5$.
12) Коши $C(a,b)$, $a = -1$, $b = 1$, Логистическое $LG(a,b)$, $a = 2$, $b = 3$.
13) *Логнормальное $LN(m, s^2)$, $m = -1$, $s^2 = 4$; Лапласа $L(a)$, $a = 1.5$.
14) Экспоненциальное $E(a)$, a = 0.25, Коши $C(a,b)$, $a = 1$, $b = 2$.
15) Вейбулла $W(a,b)$, $a = 0.5$, $b = 1$; Логистическое $LG(a,b)$, $a = -1$, $b = 2$.
16) χ^2-распределение с m степенями свободы (χ^2_m), $m = 4$; Фишера с l и m степенями свободы ($F_{m,l}$) $l = 5$, $m = 3$.

*) в литературе Лобач В.И. [и др] «Имитационное и статистическое моделирование» приведено не общепринятое описание логнормального распределения. Для его моделирования можно воспользоваться статьей в википедии: http://ru.wikipedia.org/wiki/Логнормальное_распределение.

**) в распределении Вейбулла a – это параметр λ, b – параметр c из учебника. если берете распределение Вейбулла из википедии, то $k = c$, λ (википедия) = $1/\lambda^c$ (из учебника).

Бонусные задания

1) а) (2 балла) Смоделировать $n = 1000$ случайных величин из смеси двух распределений. Распределения взять из своего варианта задания 2, π – вероятность выбора элемента из первого распределения. **Важно:** В случае если у одного из распределений из вашего варианта математическое ожидание или дисперсия не существует, то поменять его на нормальное распределение из своего варианта задания 1.

б) (1 балл) Вычислить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, сравнить их с истинными значениями (найти в литературе или вывести самостоятельно формулы для нахождения математического ожидания и дисперсии смеси распределений **(+1 балл за самостоятельный вывод формулы для дисперсии, засчитывается первому сдавшему)**).

Вариант:

1) $\pi = 0.3$; 2) $\pi = 0.4$; 3) $\pi = 0.5$; 4) $\pi = 0.6$;
5) $\pi = 0.7$; 6) $\pi = 0.8$; 7) $\pi = 0.7$; 8) $\pi = 0.6$;
9) $\pi = 0.5$; 10) $\pi = 0.4$; 11) $\pi = 0.3$; 12) $\pi = 0.2$;
13) $\pi = 0.1$; 14) $\pi = 0.2$; 15) $\pi = 0.8$; 16) $\pi = 0.9$.

2) а) (1 балл) Осуществить моделирование $n = 1000$ реализаций случайной величины из стандартного нормального закона распределения $N(0, 1)$, используя преобразование Бокса — Мюллера http://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Бокса_—_Мюллера (согласно литературе Лобач В.И. [и др] «используя функциональное преобразование»). **б) (1 балл)** вычислить коэффициент корреляции с лагом 1 для сгенерированной реализации.

3) (1 балл) Для сгенерированных выборок из заданных распределений построить гистограммы, сравнить с теоретическими плотностями распределения вероятностей (на одном рисунке 2 графика: гистограмма и теоретическая плотность, всего 3 рисунка для каждого распределения). Сравнить «сближение» графиков из пункта 3а) при n=100, n=1000, n = 10000.

4) (2 балла). Выбрать любой критерий согласия. Сгенерировать N = 1000 выборок объема n = 1000 для первого из ваших распределений и для каждой выборки применить выбранный критерий для проверки принадлежности выборки к первому распределению с уровнем значимости ε. Вывести значение S1 – число, сколько раз гипотеза была отвергнута (число ошибок первого рода). Сгенерировать N = 1000 выборок объема n = 1000 для <u>второго</u> из ваших распределений и для каждой выборки применить выбранный критерий для проверки принадлежности выборки к <u>первому</u> распределению с уровнем значимости ε. Вывести значение S2 – число, сколько раз гипотеза была принята (число ошибок второго рода). Заполнить таблицу

ε	S1	S2
0,01		
0,05		
0,1		

Проинтерпретируйте полученные результаты.

5) а) (2 балла) Смоделировать n = 1000 случайных величин из усеченного распределения из своего варианта (одно из основного задания 2) с уровнями усечения снизу a и сверху b. Параметр a выбрать меньше медианы или мат. ожидания, b – больше. Моделирование проводить по следующему простому алгоритму: генерируем обычную случайную величину из заданного распределения и проверяем, попало ли оно в отрезок $[a, b]$, если да, то хорошо, если нет, то значение отбрасываем и повторяем попытку. Вычислить несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии. **б) (2 балла)** вычислить теоретические значения математического ожидания и дисперсии усеченного распределения (для вычисления соответствующих интегралов можно использовать любые готовые библиотеки или пакеты), провести сравнение с выборочными значениями.