Лабораторная работа №5. Метод Монте-Карло.
(Срок сдачи дополнительных заданий 26.12.2023)

1) (Первые два интеграла – основное задание (4 балла), третий интеграл – дополнительное задание на 3 балла) По методу Монте-Карло вычислить приближенное значение определенного интеграла. Параметр числа итераций *n* выбрать б**о**льшим 1000. Сравнить полученное значение либо с точным значением (если его получится вычислить), либо с приближенным, полученным в каком-либо математическом пакете (например, в wolfram mathematica).

Варианты:

1) а) $\int_0^{\pi}\left(2x\sin x\right)^2 dx$; б) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$; в) $\iint\limits_{|x|+|y|<3}\frac{(4+x)\ln(5+y)}{x^2+y^2+1}dxdy$

2) а) $\int_0^1 x^8\sqrt{5+2x^4}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1/2\right)^2}$; в) $\iint\limits_{x^2+y^2<9}\frac{10\ln(5+x)\ln(4+y)}{x^2+y^2+1}dxdy$

3) а) $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-2x\cos(\pi/7)+1}$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{8+x^3}$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sqrt{1+\sin^2(x+2y)}dxdy$;

4) а) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{0.4\cos(x)+1}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}x^6\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx$; в) $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 9}\frac{2x^2+e^y}{x^4+y^2}dxdy$

5) а) $\int_0^{\pi}\left(x\sin\frac{x}{2}\right)^2dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{1+\sin^2 x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx$; в) $\iint\limits_{|x|+|y|<3}(y^2+1)\cos x dxdy$

6) а) $\int_0^1 x^{10}\sqrt{x+2x^4}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{1+\cos^2 x}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\ln\left(1+\left(2x-3y\right)^2\right)dxdy$;

7) а) $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+2\right)^2}$; в) $\iint\limits_{1\le x^2+y^2\le 4}\frac{dxdy}{x^4+y^4}$;

8) а) $\int_0^{\sqrt{3}}x\arctan x dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^4-3x^2+1\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx$; в) $\iint\limits_{|x|<2,\, x^2\le y\le 4}\frac{\sqrt{(y+1)y+\sin^2 x}}{y-0.7x^2+0.3}dxdy$.

9) а) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$; в) $\iint\limits_{|x|+|y|<1}\frac{x^3+2xy}{e^{-y}}dxdy$

10) а) $\int_0^1 x^{16}\sqrt{1+3x^8}dx$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$; в) $\iint\limits_{|x|<2,\, x^2\le y\le 4}\frac{\sqrt{y+\sin^2 x}}{e^{-xy}}dxdy$.

11) а) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^6}dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\frac{\sqrt{1+\sin^2(x+2y)}}{1+x^2}dxdy$

12) а) $\int_0^{\pi}\left(x\cos x\right)^2dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; в) $\iint\limits_{x^2+y^2<1}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$;

13) а) $\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2+2x+4}$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{8+x^3}dx$; в) $\iint\limits_{|x|+|y|<3}\frac{10\ln(4+x)\ln(5+y)}{x^2+y^2+1}dxdy$

14) а) $\int_0^1 x^{10}\sqrt{1+2x^8}dx$; б) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$; в) $\iint\limits_{x^2+y^2<4}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$;

15) а) $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx$; в) $\iint_{4 \le x^2+y^2 \le 9} \frac{xy}{x^4+y^2} dxdy$

16) а) $\int_1^2 \left(\frac{2}{4x+1} + 3 \right) dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{2+x^2}{8+x^6} dx$; в) $\iint_{x^2+y^2<4} y^2 \tan \frac{x^2+1}{10} \pi dxdy$

Дополнительные задания

1) (2 балла) Оценить точность вычисления одного из интегралов путем нахождения вариации. Пусть I – точное значение интеграла (либо вычисленное с помощью пакета), затем N = 1000 раз вычисляем значение интеграла методом Монте-Карло: находим I_j. Вариация вычисляется по формуле $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(I_j - I)^2$. Чем вариация ближе к нулю, чем точнее в среднем вычисляется интеграл. (**+ 1 балл**) Рассмотреть, как изменяется вариация при изменении n в экспериментах.

2) (3 балла) Решить систему линейных алгебраических уравнений $x = Ax + f$ методом Монте-Карло. Сравнить с решением данного уравнения, полученным произвольным численным методом или решением в произвольном математическом пакете. В качестве матрицы A взять матрицу P из своего варианта лабораторной работы номер 2 и все ее элементы умножить на 0.9. В качестве вектора f выбрать вектор π из той же лабораторной работы. Если система получается несовместной или имеет не одно решение, то разрешается изменить матрицу A, домножив некоторые ее элементы на -1.