# 9. Простейшие отображения

## 9.1. Целая линейная функция

Рассмотрим 3 функции

$$w = z + c, \qquad (9.1) \qquad\qquad w = rz, \quad (9.2) \qquad\qquad w = e^{i\theta} z, \qquad (9.3)$$

где $c$ – постоянное комплексное число, $r$>0, $\theta$ – произвольное действительное число.

Все эти функции отображают плоскость $z$ на всю плоскость $w$ (рис. 9.1, 9.2, 9.3).

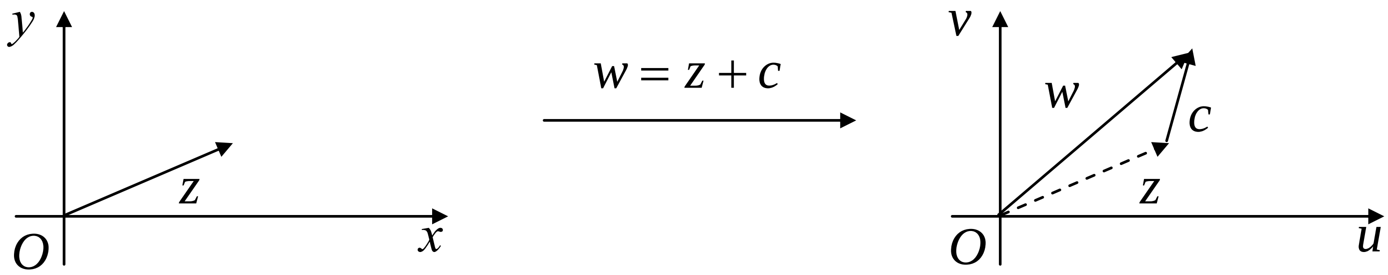



Рис. 9.1. Сдвиг плоскости $z$ на вектор $c$

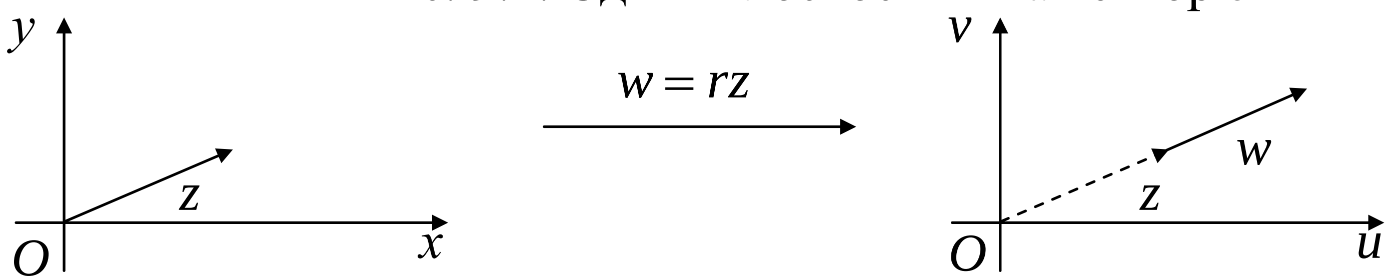



Рис. 9.2. Растяжение (сжатие) плоскости $z$ в $r$ раз: $|w|=r|z|$, Arg $w$=Arg $z$

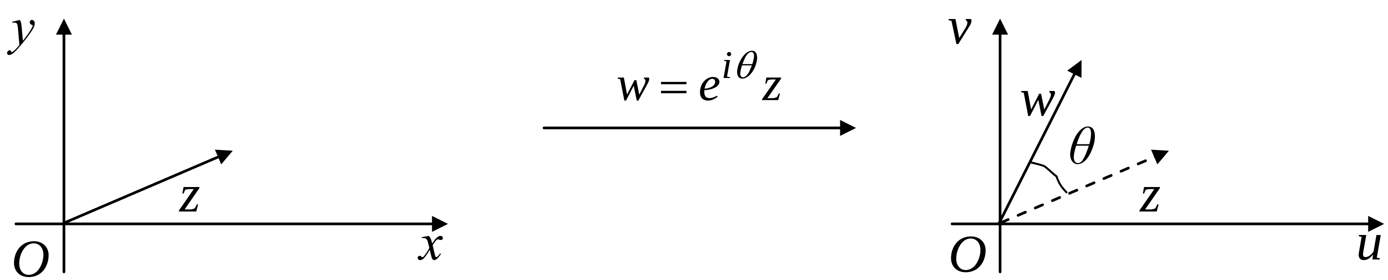



Рис. 9.3. Поворот плоскости $z$ вокруг нулевой точки на угол $\theta$

Найдем производные аналитических функций (9.1), (9.2), (9.3):

$$w' = (z+c)' = 1 \neq 0; \;\; w' = (rz)' = r \neq 0; \;\; w' = (e^{i\theta} z)' = e^{i\theta} \neq 0.$$

Самостоятельно проверить условия К-Р.

По определению эти функции осуществляют конформное отображение. Причем они являются частными случаями более общей целой линейной функции

$$w = az + b, \;\; (a \neq 0), \tag{9.4}$$

где $a$ и $b$ – постоянные комплексные числа.

Преобразуем (9.4):

$$w = a(z+c) = re^{i\theta}(z+c), \;\; c = \frac{b}{a}, \;\; a = re^{i\theta}.$$

Отсюда следует, что функция (9.4) сводится к функциям (9.1), (9.2), (9.3):

$$w = ru, \;\; u = e^{i\theta} v, \;\; v = z + c.$$

Таким образом, преобразование плоскости $z$, осуществляемое функцией (9.4), сводится к переносу на вектор $c$, потом к повороту на угол $\theta$ и затем к растяжению (сжатию) в $r$ раз.

Линейное отображение обладает *круговым свойством*: переводит окружности плоскости $z$ в окружности плоскости $w$, прямые переводит в прямые.

***Пример.*** Найти образ отрезка $AB$, где $z_A = 2 + i$, $z_B = 5 + 3i$, при отображении $w = -3iz + 10i$.

**Решение:**

найдем образы точек $A$ и $B$ при отображении $w$:

$$w_A = -3iz_A + 10i = -3i(2+i) + 10i = -6i - 3i^2 + 10i = 3 + 4i,$$
$$w_B = -3iz_B + 10i = -3i(5+3i) + 10i = -15i - 9i^2 + 10i = 9 - 5i.$$

построим отображение отрезка $AB$ на плоскость $w$

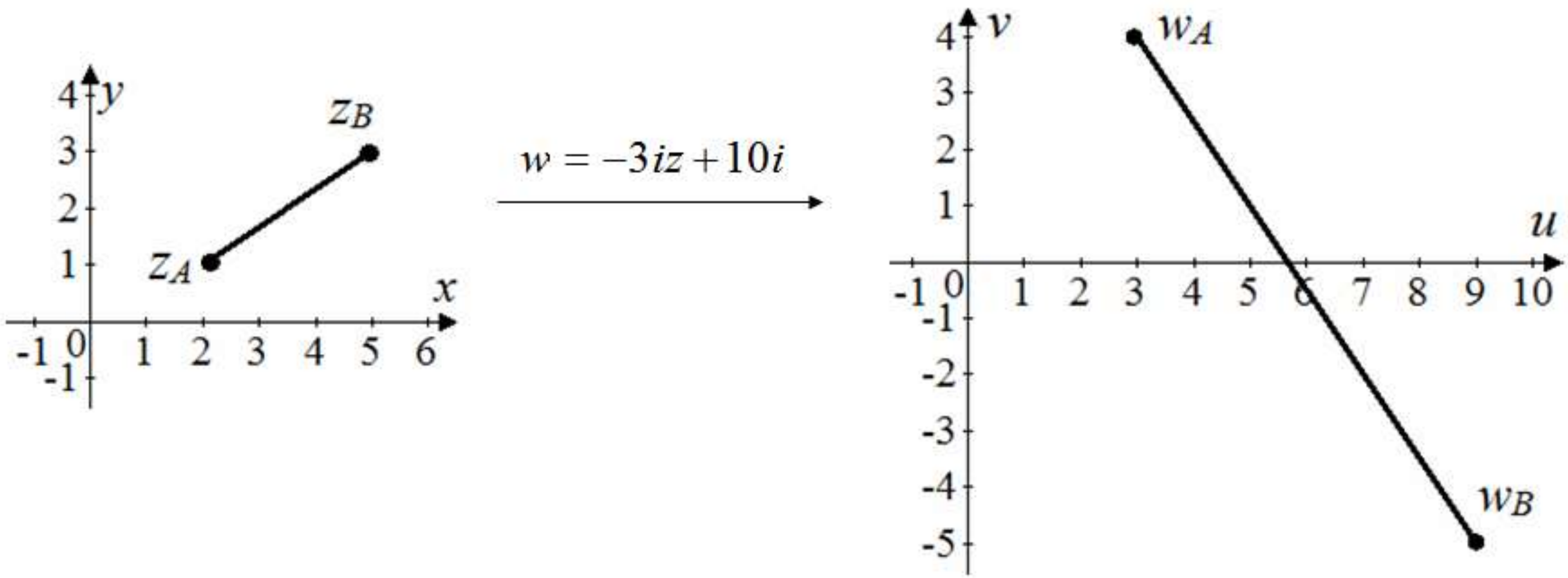



Рис. 9.4. Отображение отрезка $AB$

**_Пример._** Найти образ окружности $|z-2|=1$ при отображении $w=2z-3+i$.

**Решение:**

выразим $z$ из $w=2z-3+i$:

$$z=\frac{w+3-i}{2},$$

подставим в уравнение окружности

$$\left|\frac{w+3-i}{2}-2\right|=1 \Rightarrow \left|\frac{w+3-i-4}{2}\right|=1 \Rightarrow |w-(1+i)|=2;$$

получили окружность с центром в точке $w_0=1+i$ и радиусом $r_w=2$ (рис. 9.5).

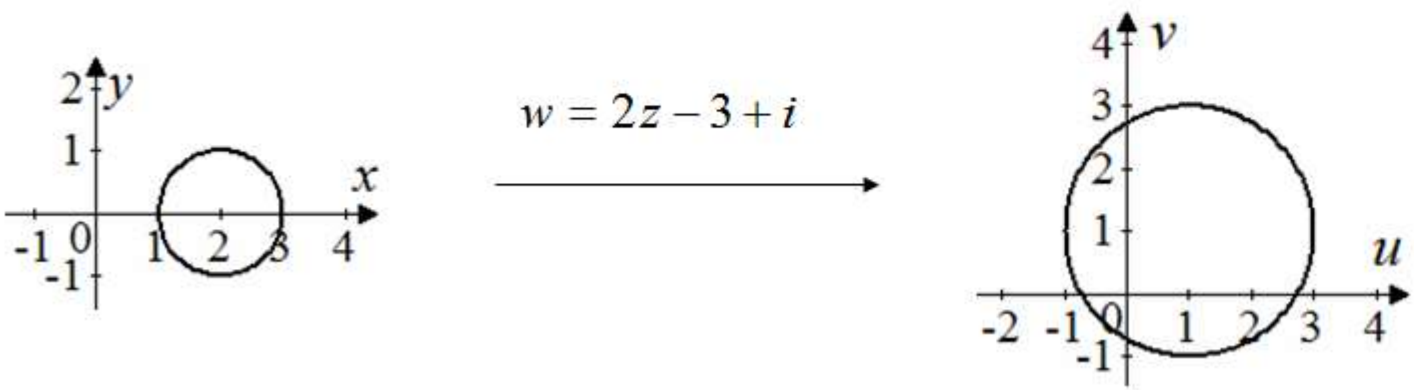



Рис. 9.5. Отображение окружности с центром в точке $z_0=2$ и радиусом $r_z=1$

## 9.2. Функция $w = \dfrac{1}{z}$

Рассмотрим функцию $w = \dfrac{1}{z}$.

Если $z = re^{i\varphi}$ и $w = \rho e^{i\theta}$, то

$$\rho e^{i\theta} = \frac{1}{re^{i\varphi}} \;\Rightarrow\; \rho e^{i\theta} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{1}{r},\;\; \theta = -\varphi.$$

Отсюда следует, что окружность радиуса 1, т.е. $|z| = 1$, переходит в окружность того же радиуса, т.е. $|w| = 1$. Однако при этом каждая точка переходит в точку, симметричную относительно действительной оси.

Преобразование с помощью функции $w = \dfrac{1}{z}$ разбивается на два преобразования.

1. Инверсия относительно единичной окружности

$$r' = \frac{1}{r},\;\; \varphi' = \varphi. \tag{9.5}$$

2. Зеркальное отображение относительно действительной оси

$$\rho = r',\;\; \theta = -\varphi'. \tag{9.6}$$

1. Точки, лежащие на луче $Oz$, переходят в точки, лежащие на этом же луче. Рассмотрим два случая.

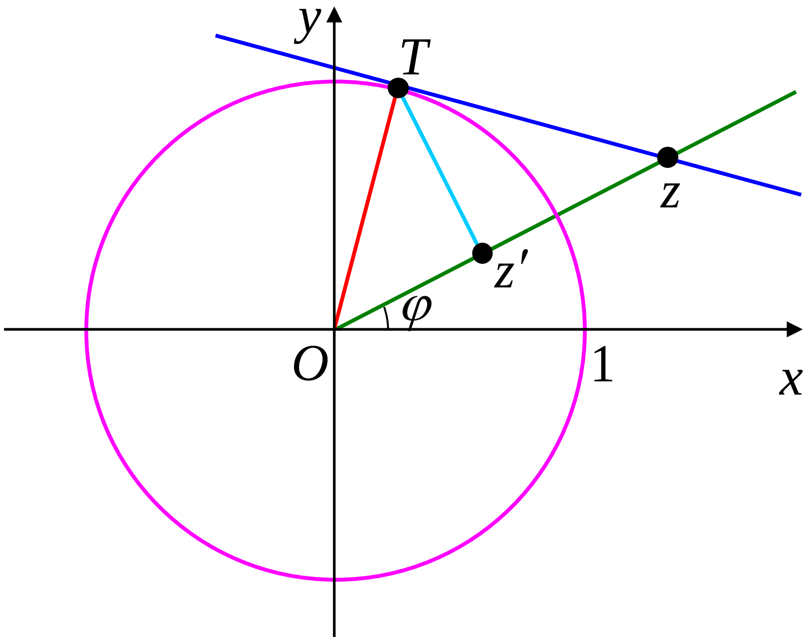



Рис. 9.6. Точка $z$ вне окружности

а) точка $z$ вне окружности (рис. 9.6)

1) из точки $z$ проводим касательную к окружности, обозначаем точку $T$, $OT = 1$

2) из точки $T$ опускаем перпендикуляр на луч $Oz$, обозначаем точку $z'$

3) треугольники $\Delta OTz$ и $\Delta Oz'T$ подобны, т.к. их углы равны

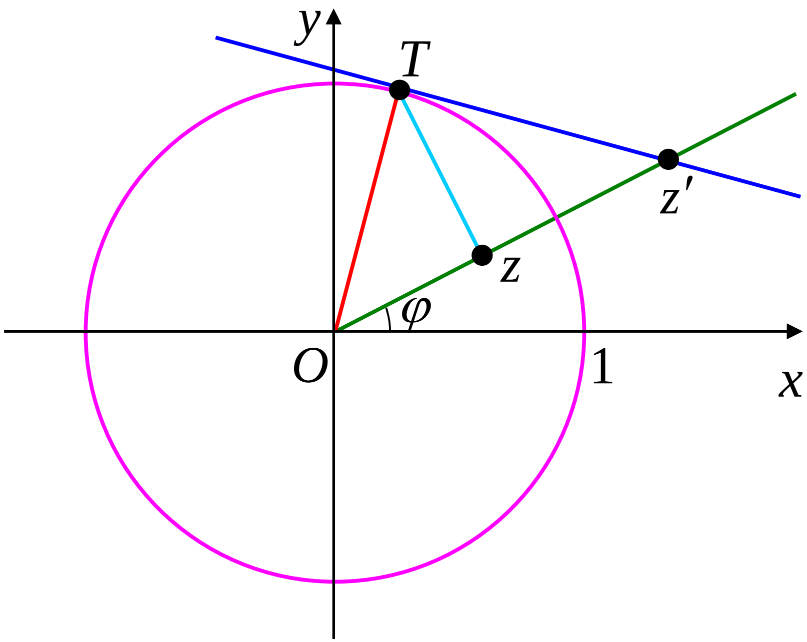
$$\angle OTz = \angle Oz'T = 90^\circ,$$

$$\angle TOz = \angle z'OT, \quad \angle TzO = \angle z'TO.$$

4) покажем, что $r' = \frac{1}{r}$, где $r' = Oz'$, $r = Oz$

из подобия треугольников

$$\frac{OT}{Oz'} = \frac{Oz}{OT} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r'} = \frac{r}{1} \quad \Rightarrow \quad r'r = 1 \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{1}{r}.$$




б) точка $z$ внутри окружности (рис. 9.7)

1) из точки $z$ восстанавливаем перпендикуляр к окружности, обозначаем точку $T$, $OT = 1$

2) проводим касательную к окружности в точке $T$. Она пересекает луч в точке $z'$

Рис. 9.7. Точка $z$ внутри окружности

*Точки* $z$ и $z'$ называют *взаимно симметричными* относительно окружности $|z| = 1$.

2. Точку $z'$ зеркально отображаем относительно действительной оси (рис. 9.8, 9.9).

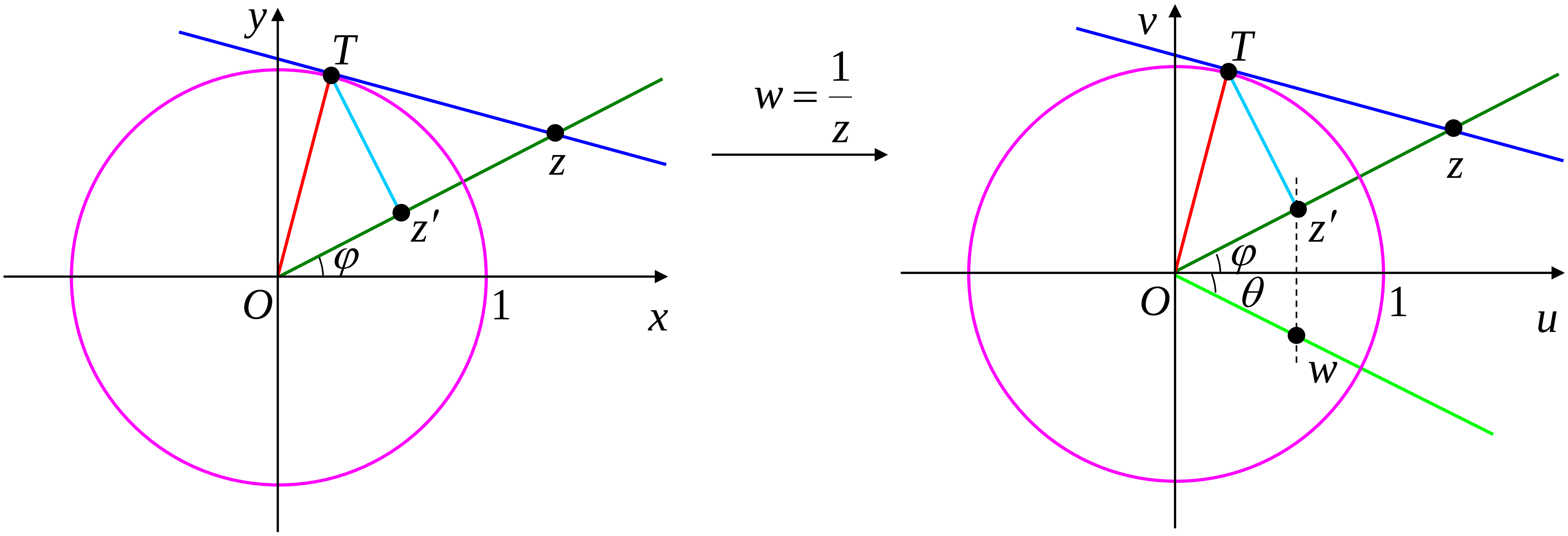



Рис. 9.8. Отображение внешности на внутренность круга

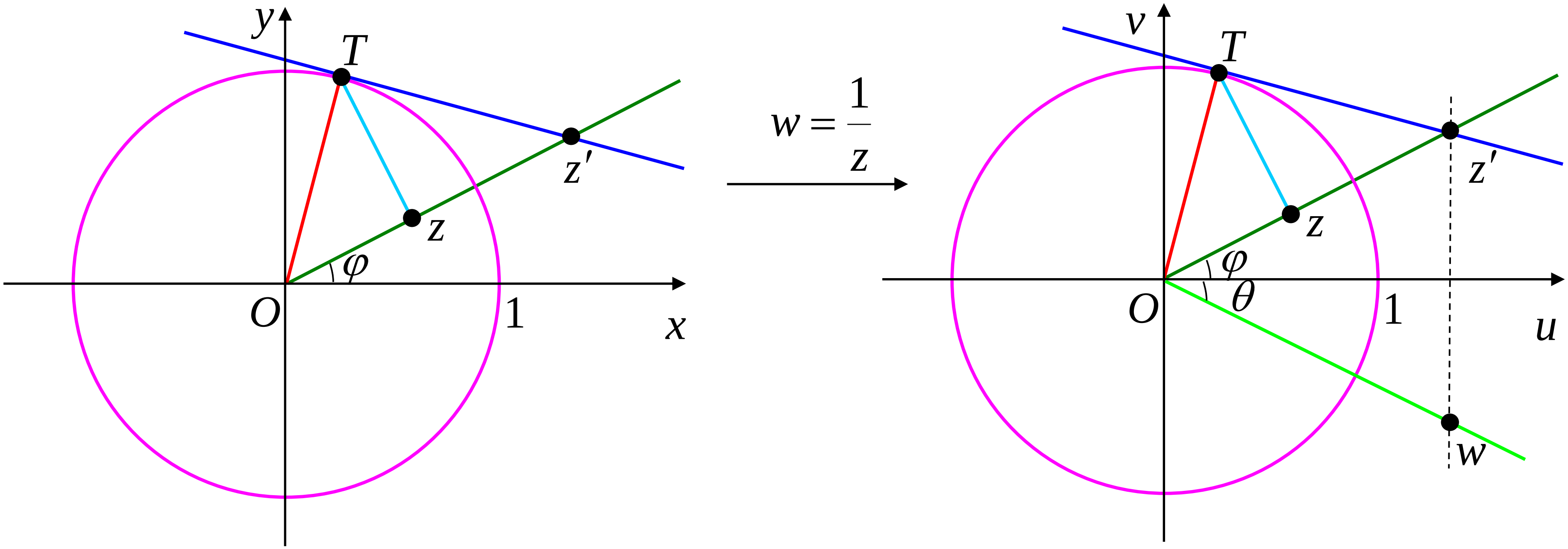



Рис. 9.9. Отображение внутренности на внешность круга

Таким образом, функция $w=\dfrac{1}{z}$ отображает плоскость $z$ на плоскость $w$ при помощи преобразования инверсии относительно окружности $|z|=1$ и зеркального отображения относительно действительной оси. При этом точка $z=0$ переходит в точку $w=\infty$, а точка $z=\infty$ переходит в точку $w=0$.

Найдем производную

$w'=-\dfrac{1}{z^2}\neq 0$ при $\forall z$ с $|z|>0$, поэтому отображение с помощью этой функции является конформным.

Самостоятельно проверить условия К-Р.

***Пример.*** При отображении $w=\dfrac{2}{z}$ найти образы линий

1) $x^2+y^2-2x=0$; 2) $(x-1)^2+y^2=4$; 3) $x=1$; 4) $x=0$.

**Решение:**

используем замены

$$w=\frac{2}{z}\Rightarrow z=\frac{2}{w},\ \bar{z}=\frac{2}{\bar{w}};$$

$$w=u+iv,\quad \bar{w}=u-iv;$$

$$\begin{cases} z=x+iy, \\ \bar{z}=x-iy; \end{cases} \quad \begin{cases} z+\bar{z}=2x, \\ z-\bar{z}=2iy; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=-i\dfrac{z-\bar{z}}{2}; \end{cases} \qquad x^2+y^2=z\bar{z}.$$

1) $x^2+y^2-2x=0$ – приведем к каноническому виду

$$x^2-2x+1-1+y^2=0,$$

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

окружность радиуса 1 с центром в точке $(1;0)$.

после замены получим

$$z\bar{z}-2\frac{z+\bar{z}}{2}=0,\qquad \frac{2}{w}\frac{2}{\bar{w}}-\left(\frac{2}{w}+\frac{2}{\bar{w}}\right)=0,$$

$$\frac{4}{w\bar{w}}-\frac{2(\bar{w}+w)}{w\bar{w}}=0,$$

$$2-(\bar{w}+w)=0,\qquad 2-(u-iv+u+iv)=0,$$

$$2u=2\;\Rightarrow\; u=1;$$

Таким образом, окружность отобразится в прямую, параллельную мнимой оси (рис. 9.10).

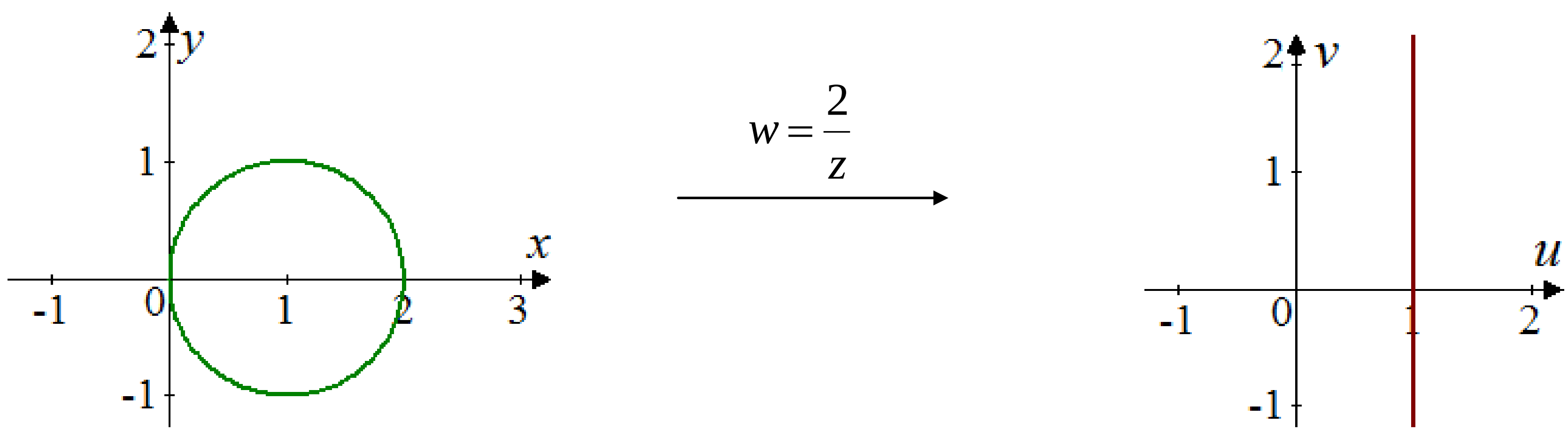



Рис. 9.10. Отображение окружности $x^2+y^2-2x=0$

2) $(x-1)^2+y^2=4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке $(1;\,0)$. Тогда

$x^2-2x+1+y^2=4,\;\; x^2+y^2-2x=3,$

$4-2(\overline{w}+w)=3w\overline{w},\;\; 3(u^2+v^2)+2(u-iv+u+iv)-4=0, 3u^2+3v^2+2u-4=0,$

$3\left(u^2+2\cdot\frac{2}{3}u+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)+3v^2-4=0,\;\; 3\left(u+\frac{2}{3}\right)^2+3v^2=\frac{16}{3};$

$$\left(u+\frac{2}{3}\right)^2+v^2=\frac{16}{9}.$$

Образом является окружность радиуса $\frac{4}{3}$ с центром в точке $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ (рис. 9.11).

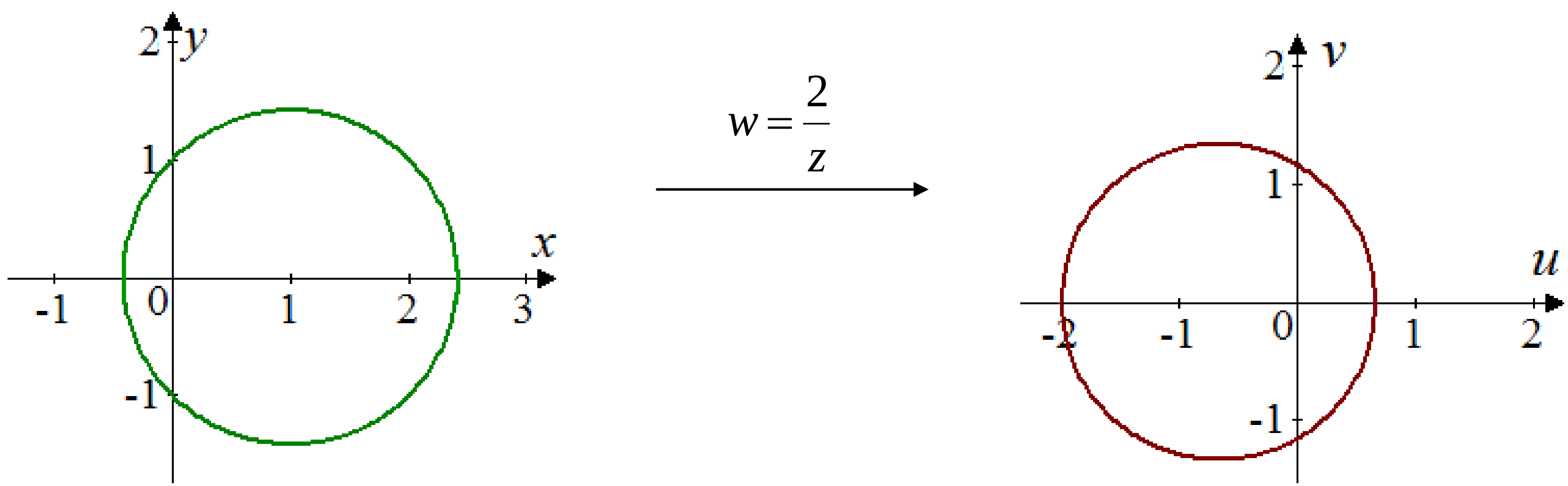



Рис. 9.11. Отображение окружности $(x-1)^2+y^2=4$

3) $x=1$ – прямая, параллельная мнимой оси. После замены

$$\frac{z+\bar{z}}{2}=1,\ \ \frac{2}{w}+\frac{2}{\bar{w}}=2,\ \frac{\bar{w}+w}{w\bar{w}}=1,$$

$$\bar{w}+w=w\bar{w},\ \ u^2+v^2=u-iv+u+iv,$$

$$(u-1)^2+v^2=1.$$

Образом является окружность радиуса 1 с центром в точке (1; 0) (рис. 9.12).

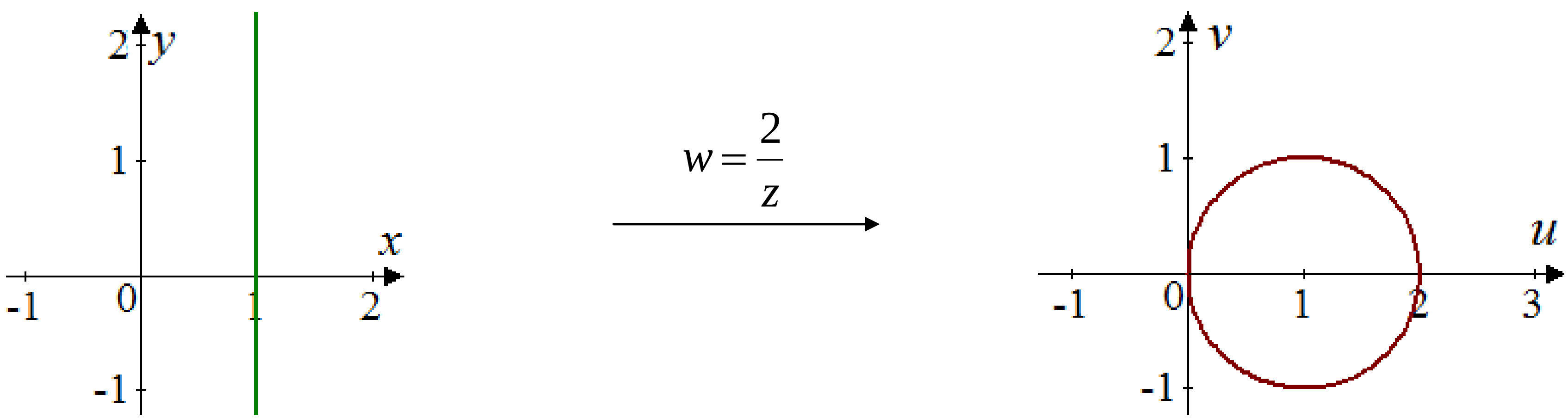



Рис. 9.12. Отображение прямой $x=1$

4) $x = 0$ – прямая (мнимая ось плоскости $z$). После замены

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = 0, \quad \frac{2}{w} + \frac{2}{\bar{w}} = 0,$$

$$\bar{w} + w = 0, \quad u - iv + u + iv = 0,$$

$$u = 0.$$

Образом является прямая – мнимая ось плоскости $w$ (рис. 9.13).

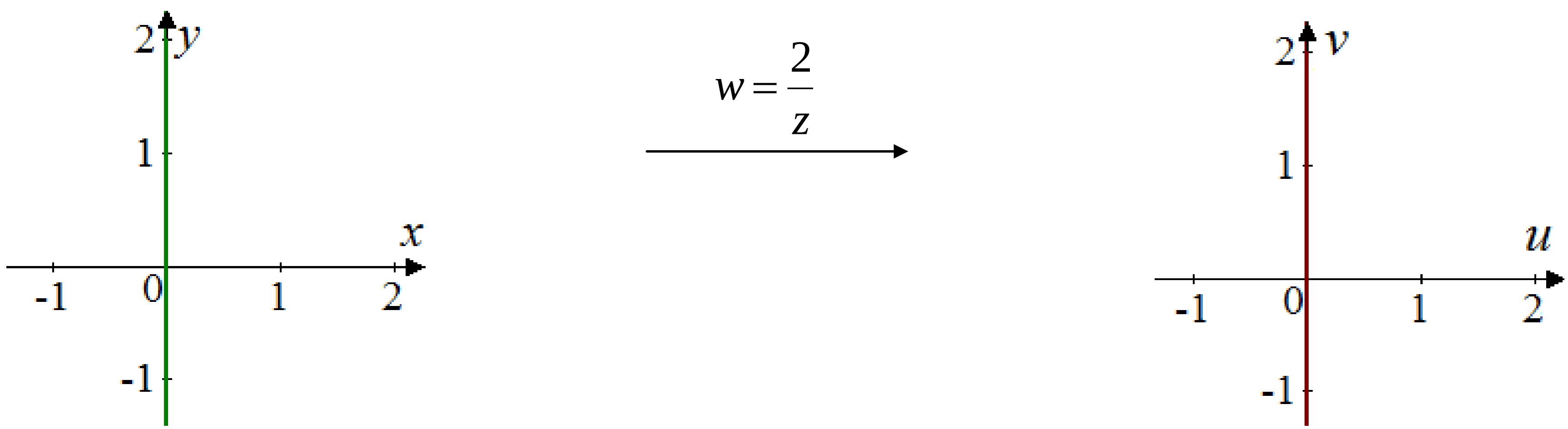



Рис. 9.13. Отображение прямой $x = 0$

# 9.3. Дробно-линейная функция

Рассмотрим дробно-линейную функцию $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$. При этом $ad - bc \neq 0$.

Точка $z = -\dfrac{d}{c}$ $(c \neq 0)$ переходит в точку $w = \infty$.

Выделим целую часть

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}(cz+d)^{-1}.$$

Найдем производную

$$w' = \frac{bc-ad}{c} \cdot (-1) \cdot (cz+d)^{-2} \cdot c = \frac{bc-ad}{(cz+d)^2} \neq 0 \text{ при } cz+d \neq 0.$$

Поэтому отображение с помощью этой функции является конформным.

Самостоятельно проверить условия К-Р.

**Теорема.** Дробно-линейное преобразование переводит обобщенную окружность в обобщенную окружность (круговое свойство).

**Доказательство.**

Отображение $w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\frac{1}{cz + d}$ состоит из трех отображений

$$w_3 = Aw_2 + B,\ w_2 = \frac{1}{w_1},\ w_1 = cz + d,\ A = \frac{bc - ad}{c},\ B = \frac{a}{c}.$$

Функции $w_1$ и $w_3$ являются линейными. Для них очевидно, что при параллельном переносе, растяжении и вращении окружность переходят в окружность. При этом внутренность отображаемой окружности переходит на внутренность отображенной окружности. Поэтому достаточно проверить круговое свойство для функции $w_2$.

Уравнение обобщенной окружности в плоскости $z$ имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0.$$

Используя замену $x^2 + y^2 = z\bar{z},\ x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, получим

$$Az\bar{z} + m\frac{z + \bar{z}}{2} + n\frac{z - \bar{z}}{2i} + l = 0,$$

после преобразований

$$Az\bar{z}+z\frac{m-in}{2}+\bar{z}\frac{m+in}{2}+l=0,$$

пусть $B=\dfrac{m+in}{2}$, тогда $\bar{B}=\dfrac{m-in}{2}$, следовательно,

$$Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+l=0.$$

Поскольку $z=\dfrac{1}{w}$ и $\bar{z}=\dfrac{1}{\bar{w}}$, то

$$A\frac{1}{w\bar{w}}+\bar{B}\frac{1}{w}+B\frac{1}{\bar{w}}+l=0.$$

Окончательно получаем

$$A+\bar{B}\bar{w}+Bw+lw\bar{w}=0.$$

Это уравнение описывает некоторую окружность в плоскости $w$.
*Доказательство завершено.*

**Замечание.** Отображение с помощью дробно-линейной функции может переводить внутренность отображаемой окружности как на внутренность, так и на внешность отображенной окружности.

**Утверждение.** Каковы бы ни были три различные точки $z_1, z_2, z_3$ плоскости $z$ и три различные точки $w_1, w_2, w_3$ плоскости $w$, существует единственное дробно-линейное отображение $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ такое, что $w(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$. При этом справедливо соотношение, называемое *ангармоническим соотношением*

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \qquad (9.7)$$

**Замечание.**

1. Если одна из точек $z_k$ или $w_k$ $(k = 1,2,3)$ есть бесконечно удаленная точка, то в (9.7) соответствующая разность заменяется единицей.

2. Любое дробно-линейное отображение, переводящее точку $z_1$ в 0 и $z_2$ в бесконечно удаленную точку, имеет вид

$$w = A\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

***Пример.*** Найти дробно-линейную функцию $w = f(z)$, такую, что $w(i) = 2i$, $w(\infty) = 1$, $w(-1) = \infty$.

**Решение:**

по условию

$$\begin{array}{ll} z_1 = i & w_1 = 2i \\ z_2 = \infty & w_2 = 1 \\ z_3 = -1 & w_3 = \infty \end{array}$$

тогда по (9.7)

$$\frac{w-2i}{w-1} : \frac{\infty - 2i}{\infty - 1} = \frac{z-i}{z-\infty} : \frac{-1-i}{-1-\infty},$$

$$\frac{w-2i}{w-1} : \frac{1}{1} = \frac{z-i}{1} : \frac{-1-i}{1},$$

$$\frac{w-2i}{w-1} = \frac{z-i}{-1-i},$$

после преобразований получим

$$w = \frac{z+i-2}{z+1}.$$

***<u>Пример.</u>*** При отображении $w=\dfrac{z}{z-1}$ найти образ прямой $\operatorname{Im} z=1$.

**Решение:**

так как $\operatorname{Im} z = y$ и $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, то $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=1$.

Выразим $z$ из функции $w$

$$z=w(z-1)\ \Rightarrow\ z=\frac{w}{w-1},$$

$$z=\frac{u+iv}{u+iv-1}=\frac{(u+iv)(u-1-iv)}{(u-1+iv)(u-1-iv)}=\frac{u(u-1)+v^2-iuv+iuv-iv}{(u-1)^2+v^2}=\frac{u(u-1)+v^2-iv}{(u-1)^2+v^2},$$

тогда

$$\bar{z}=\frac{u(u-1)+v^2+iv}{(u-1)^2+v^2}.$$

Подставим $z$ и $\bar{z}$ в уравнение

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{u(u-1)+v^2-iv}{(u-1)^2+v^2}-\frac{u(u-1)+v^2+iv}{(u-1)^2+v^2}\right)=1,$$

$$\frac{1}{2i}\frac{-2iv}{(u-1)^2+v^2}=1,$$

$$\frac{-v}{(u-1)^2+v^2}=1,$$

$$(u-1)^2+v^2=-v, \qquad (u-1)^2+v^2+2\frac{1}{2}v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=1,$$

$$(u-1)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Образом является окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ (рис. 9.14).

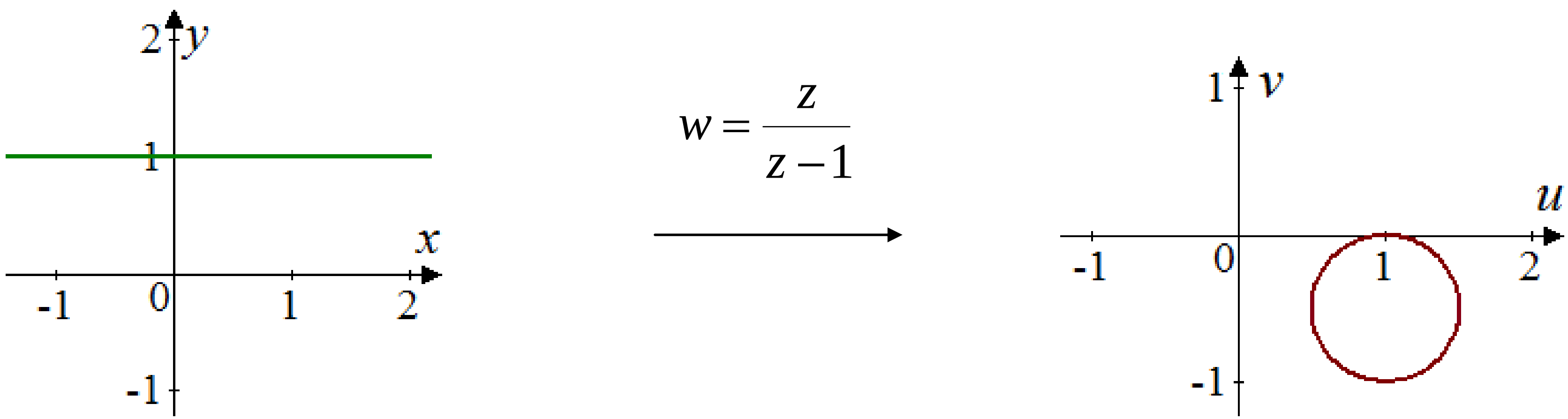



Рис. 9.14. Образ прямой при отображении $w=\dfrac{z}{z-1}$