Пример решения контрольной работы № 1

1. Вычислить

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^4}.$$

Решение:

умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю

$$\frac{(1+i)^8}{(1-i)^4}=\frac{(1+i)^8(1+i)^4}{(1-i)^4(1+i)^4}=\frac{(1+i)^{12}}{(1-i^2)^4}=\frac{(1+i)^{12}}{(1+1)^4}=\frac{(1+i)^{12}}{2^4}.$$

Приведем комплексное число $z=1+i$ к тригонометрическому виду. Для этого найдем модуль и аргумент числа

$$|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \varphi=arctg\,\frac{1}{1}=arctg\,1=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Продолжим вычисления, воспользовавшись формулой Муавра

$$\frac{(1+i)^{12}}{2^4}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4}\right)}{2^4}=\frac{2^6(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)}{2^4}=$$

$$=2^{6-4}(-1+i\cdot 0)=-2^2=-4.$$

Ответ: – 4.

2. Записать комплексное число в тригонометрической форме

$$z = 6 - 6i.$$

Решение:

найдем модуль и аргумент комплексного числа

$$|z| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2},$$

так как $x = 6 > 0, y = -6 < 0$, то угол φ расположен в IV четверти, поэтому

$$\varphi = arctg\,\frac{-6}{6} + 2\pi = -arctg\,1 + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

Тогда $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$

Ответ: $z = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$

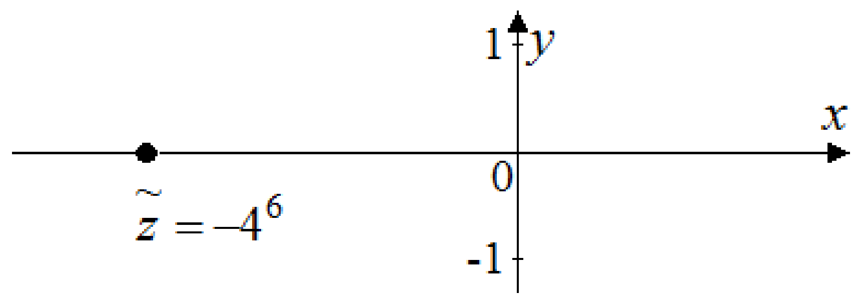
3. Решить уравнение и изобразить корни на чертеже

$$z^6 + 4^6 = 0.$$

Решение:

$$z^6 + 4^6 = 0 \Rightarrow z^6 = -4^6.$$

Найдем модуль и аргумент числа $\tilde{z} = -4^6$:



$$|\tilde{z}| = \sqrt{(-4^6)^2 + 0} = \sqrt{(4^6)^2} = 4^6.$$

Так для числа $\tilde{z} = -4^6$ действительная часть $\operatorname{Re}\tilde{z} = -4^6 < 0$, а мнимая часть $\operatorname{Im}\tilde{z} = 0$, то аргумент $\varphi = \pi$.

Тригонометрическая форма

$$\tilde{z} = 4^6(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Воспользуемся формулой извлечения корня из комплексного числа

$$\sqrt[6]{z} = \sqrt[6]{\tilde{z}} = \sqrt[6]{4^6}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right), \;\; k = 0,1,2,3,4,5;$$

$$k=0:\;\; z_0 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k=1:\;\; z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4(0+i) = 4i;$$

$$k=2:\;\; z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i;$$

$$k=3:\;\; z_3 = 4\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

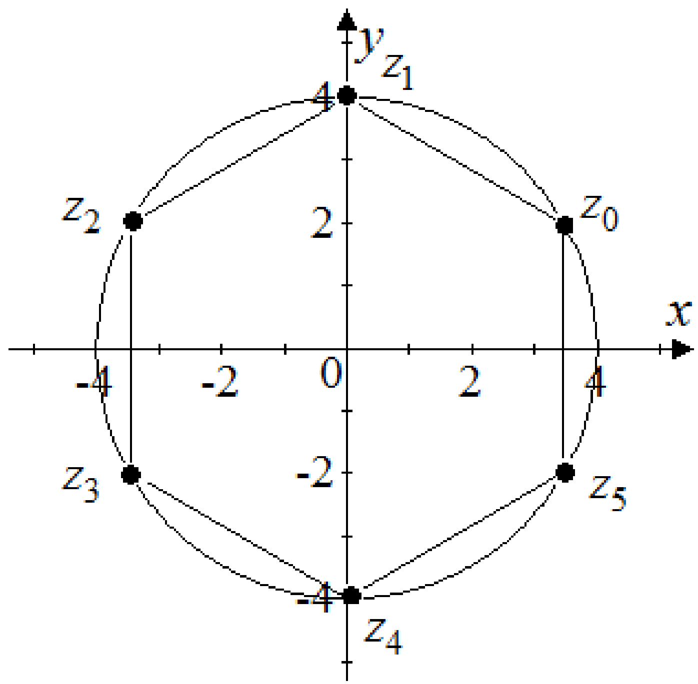
$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} - 2i;$$

$$k=4:\ z_4=4\left(\cos\frac{\pi+8\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+8\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=4(0-i)=-4i;$$

$$k=5:\ z_5=4\left(\cos\frac{\pi+10\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+10\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=$$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}-2i.$$

Изобразим корни на окружности с центром в точке O (0; 0) и радиусом $r=4$.



Ответ: $z_0=2\sqrt{3}+2i,\ z_1=4i,\ z_2=-2\sqrt{3}+2i,\ z_3=-2\sqrt{3}-2i,$

$z_4=-4i,\ z_5=2\sqrt{3}-2i.$

4. Выяснить, какая линия определяется уравнением

$$|z-i|+|z+i|=4.$$

Решение:

так как в алгебраической форме комплексное число записывается в виде $z=x+iy$, то

$$|z-i|=|x+iy-i|=|x+i(y-1)|=\sqrt{x^2+(y-1)^2},$$

$$|z+i|=|x+iy+i|=|x+i(y+1)|=\sqrt{x^2+(y+1)^2};$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4;$$

возведем обе части уравнения во вторую степень

$$\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2=4^2;$$

$$x^2+(y-1)^2+2\sqrt{x^2+(y-1)^2}\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2=16;$$

$$2x^2+2y^2+2+$$

$$+2\sqrt{x^4+x^2y^2+x^2\cdot 2y+x^2+x^2y^2-x^2\cdot 2y+x^2+y^4-2y^2+1}=16;$$

$$2\sqrt{x^4+2x^2y^2+2x^2+y^4-2y^2+1}=14-2x^2-2y^2;$$

разделим обе части уравнения на 2 и возведем во вторую степень

$$\left(\sqrt{x^4+2x^2y^2+2x^2+y^4-2y^2+1}\right)^2=\left(7-x^2-y^2\right)^2;$$

$$x^4+2x^2y^2+2x^2+y^4-2y^2+1=$$

$$=49-7x^2-7y^2-7x^2+x^4+x^2y^2-7y^2+x^2y^2+y^4;$$

после упрощения получаем

$$16x^2+12y^2=48;$$

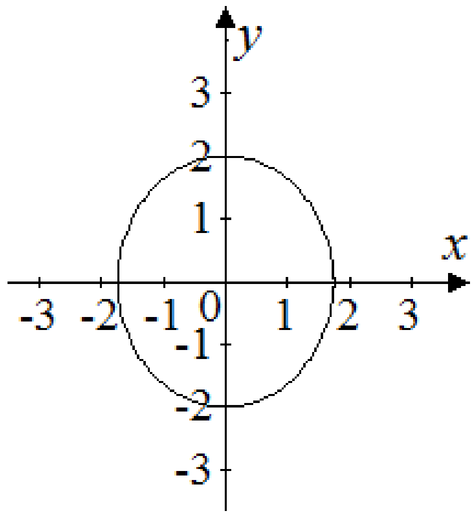
разделим обе части уравнения на 48

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$$

или

$$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{2^2}=1.$$

Данное уравнение описывает эллипс с центром в точке O (0; 0) с полуосями по оси Ox $a=\sqrt{3}$ и по оси Oy $b=2$.



Ответ: эллипс $\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1.$

5. а) Дана действительная часть дифференцируемой функции. Найти эту функцию

$$u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Решение:

запишем условия Коши-Римана

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, & (1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. & (2)\end{cases}$$

1. Используя условие (1), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+5-y\cdot(-1)\cdot(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2x=2x+5+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

тогда и

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+5+\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \qquad (*)$$

2. Проинтегрируем уравнение (*) по переменной y и найдем v

$$v = \int\left(2x + 5 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right)dy = 2xy + 5y + x\int\frac{d(y^2 + x^2)}{(y^2 + x^2)^2} =$$

$$= 2xy + 5y + x \cdot \frac{(y^2 + x^2)^{-2+1}}{-1} + \varphi(x);$$

$$v = 2xy + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2} + \varphi(x). \qquad (**)$$

3. Используя условие (2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + 1 - \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -2y + 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Продифференцируем уравнение (**) по переменной x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y - \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x) = 2y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(x).$$

Тогда

$$-2y+1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\left(2y+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)\right);$$

$$-2y+1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-2y-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\varphi'(x);$$

$$\varphi'(x)=-1. \qquad (***)$$

Найдем функцию $\varphi(x)$, проинтегрировав уравнение (***) по переменной x

$$\varphi(x)=\int -1dx=-x+C.$$

Запишем функцию v

$$v=2xy+5y-\frac{x}{x^2+y^2}-x+C.$$

4. Запишем функцию $f(z)=u+iv$

$$f(z)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(2xy+5y-\frac{x}{x^2+y^2}-x+C\right)=$$

$$=(x^2+2x\cdot iy+(iy)^2)+5(x+iy)+(y-xi)-\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{xi}{x^2+y^2}+iC=$$

$$=(x+iy)^2+5(x+iy)-i(x+iy)-i\frac{x-iy}{x^2+y^2}=(\bar{z}=x-iy, z\cdot\bar{z}=x^2+y^2)=$$

$$=z^2+5z-iz-i\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}+iC=z^2+5z-iz-\frac{i}{z}+iC.$$

Ответ: $f(z)=z^2+5z-iz-\dfrac{i}{z}+iC.$

б) Дана мнимая часть дифференцируемой функции. Найти эту функцию

$$v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

Решение:

запишем условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. & (2) \end{cases}$$

1. Используя условие (2), получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - \frac{1}{2} y \cdot (-1) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \cdot 2x = 2x + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

тогда и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}. \qquad (*)$$

2. Проинтегрируем уравнение (*) по переменной y и найдем u

$$u=\int\left(-2x-\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right)dy=-2xy-\frac{1}{2}x\int\frac{d(y^2+x^2)}{(y^2+x^2)^2}=$$

$$=-2xy-\frac{1}{2}x\cdot\frac{(y^2+x^2)^{-2+1}}{-1}+\varphi(x);$$

$$u=-2xy+\frac{x}{2(x^2+y^2)}+\varphi(x). \qquad (**)$$

3. Используя условие (1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=-2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Продифференцируем уравнение (**) по переменной x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2y+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=-2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x).$$

Тогда

$$-2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(x)=-2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\varphi'(x) = 0. \qquad (***)$$

Найдем функцию $\varphi(x)$, проинтегрировав уравнение (***) по переменной x

$$\varphi(x) = C.$$

Запишем функцию u

$$u = -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C.$$

4. Запишем функцию $f(z) = u + iv$

$$f(z) = -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C + i\left(3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}\right) =$$

$$= -2xy + \frac{x}{2(x^2 + y^2)} + C + 3i + ix^2 - iy^2 - i\frac{y}{2(x^2 + y^2)} =$$

$$= i(x^2 + 2x \cdot iy + (iy)^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + 3i + C = (\bar{z} = x - iy, z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2) =$$

$$= iz^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} + 3i + C = iz^2 + \frac{1}{2z} + 3i + C.$$

Ответ: $f(z) = iz^2 + \dfrac{1}{2z} + 3i + C.$