2. Понятие функции комплексного переменного (ФКП)

2.1. Область определения и область значений ФКП

Пусть заданы два множества D и G комплексных чисел. Если каждому значению $z \in D$ ставится в соответствие число $w \in G$, то говорят, что на множестве D задана *функция* $w = f(z)$ *комплексного переменного* z (рис. 2.1).

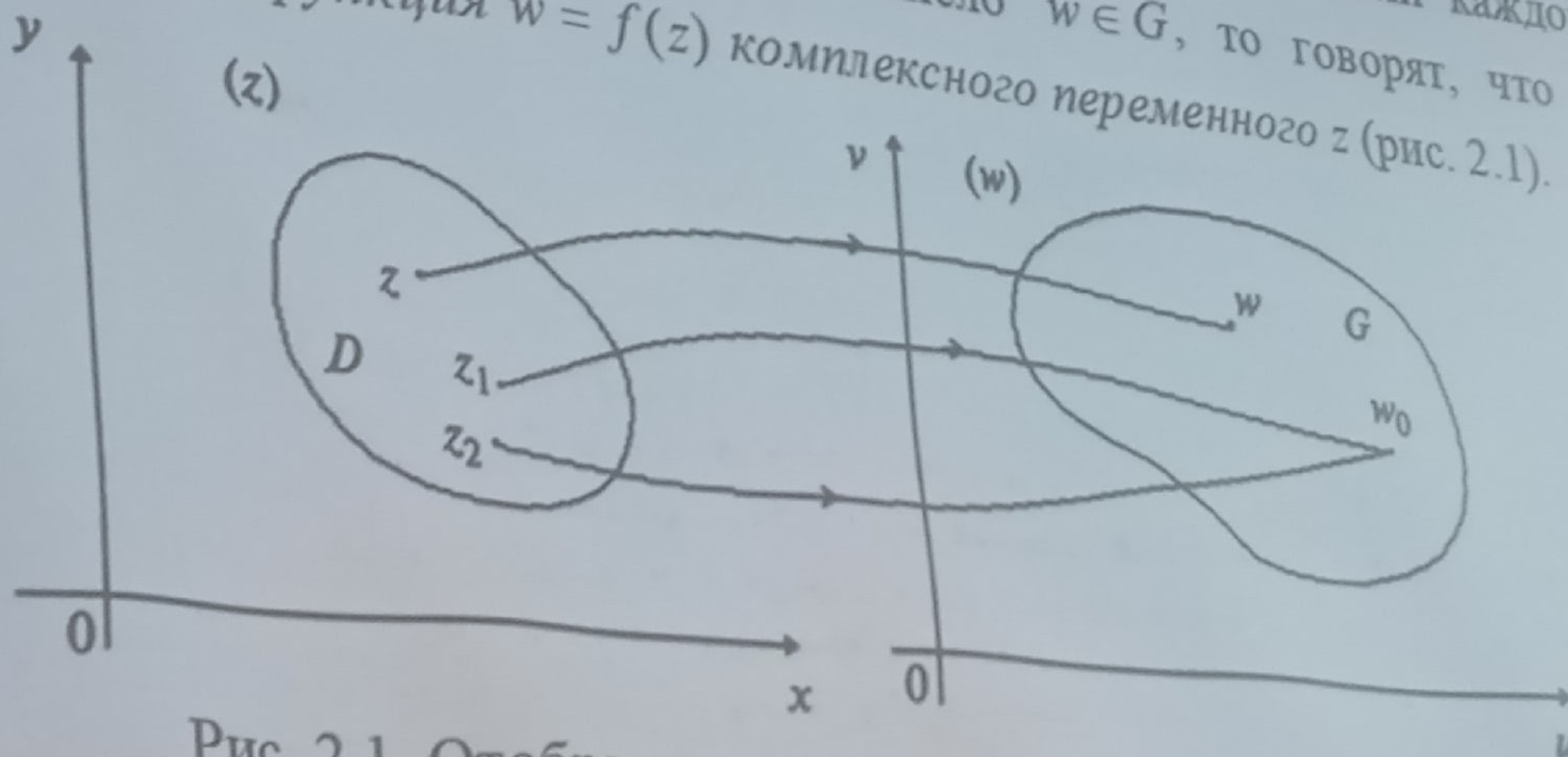


Рис. 2.1. Отображение множества D на множество G

Таким образом, задание функции комплексного переменного $f(z)$ с *областью определения* D и *областью значений* G есть *отображение множества D на множество G*: $f : D \to G$. Точка $w \in G$ называется *образом* точки z, точка $z \in D$ – *прообразом* при отображении $w = f(z)$.

Если записать числа z и w в алгебраической форме: $z = x + iy$, $w = u + iv$, то получаем, что $u = \operatorname{Re} f(z)$ – *действительная часть функции* $f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$ – *мнимая часть функции* $f(z)$. При этом $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ – две функции двух действительных переменных x и y.

Если каждому $z \in D$ соответствует несколько разных значений w, то функция $w = f(z)$ называется многозначной (рис. 2.2.).

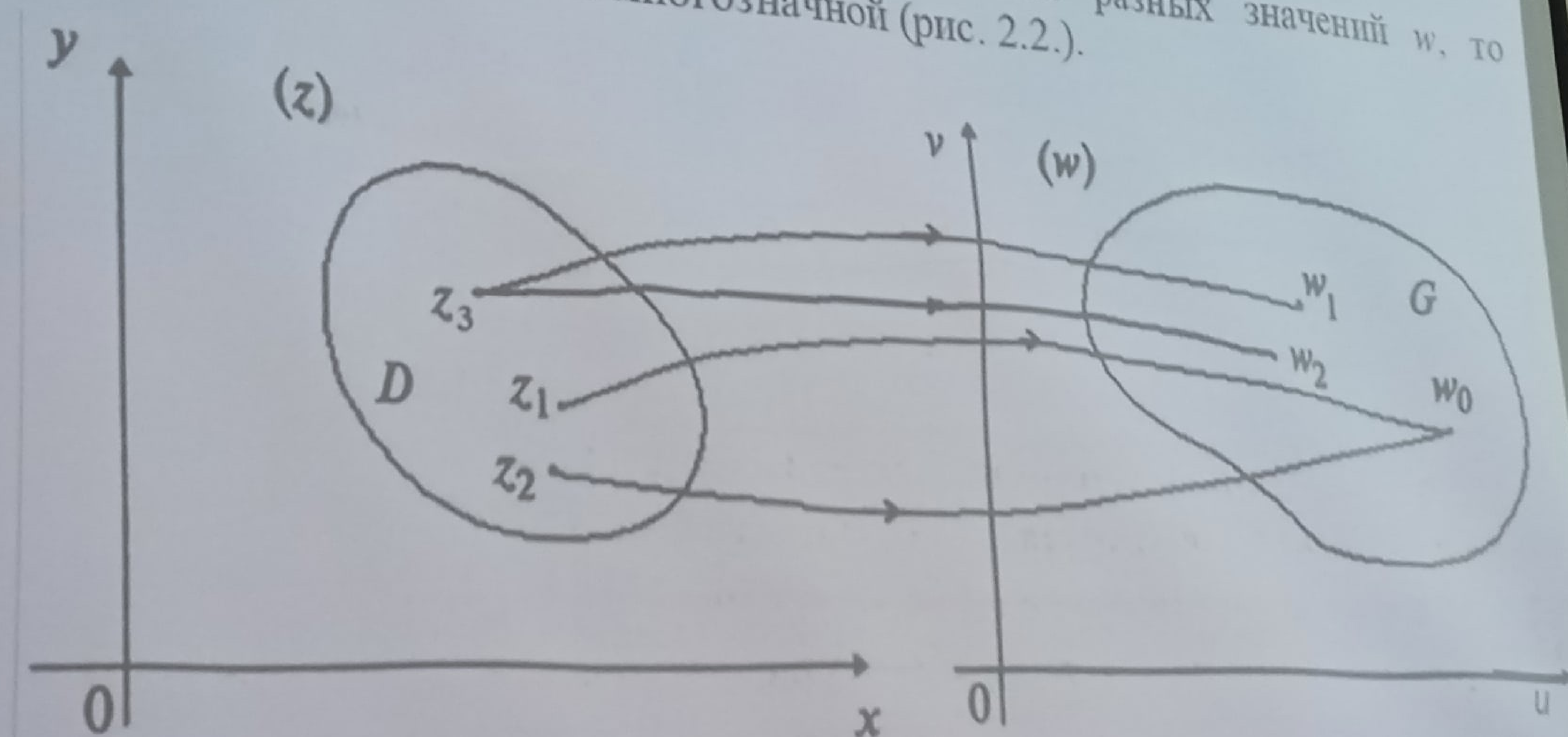


Рис. 2.2. Многозначная функция $w = f(z)$

$y = f(x)$

$w = f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$

$z = x + iy$

2.2. Множества на комплексной плоскости

1. Множество точек z, удаленных от заданной точки z_0 на расстояние, меньшее чем заданное число ε, называется *ε-окрестностью точки* z_0 (рис. 2.3).

Обозначение $O_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

2. Множество точек z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, образует *проколотую окрестность точки* z_0 (рис. 2.4).

Обозначение $O_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$.

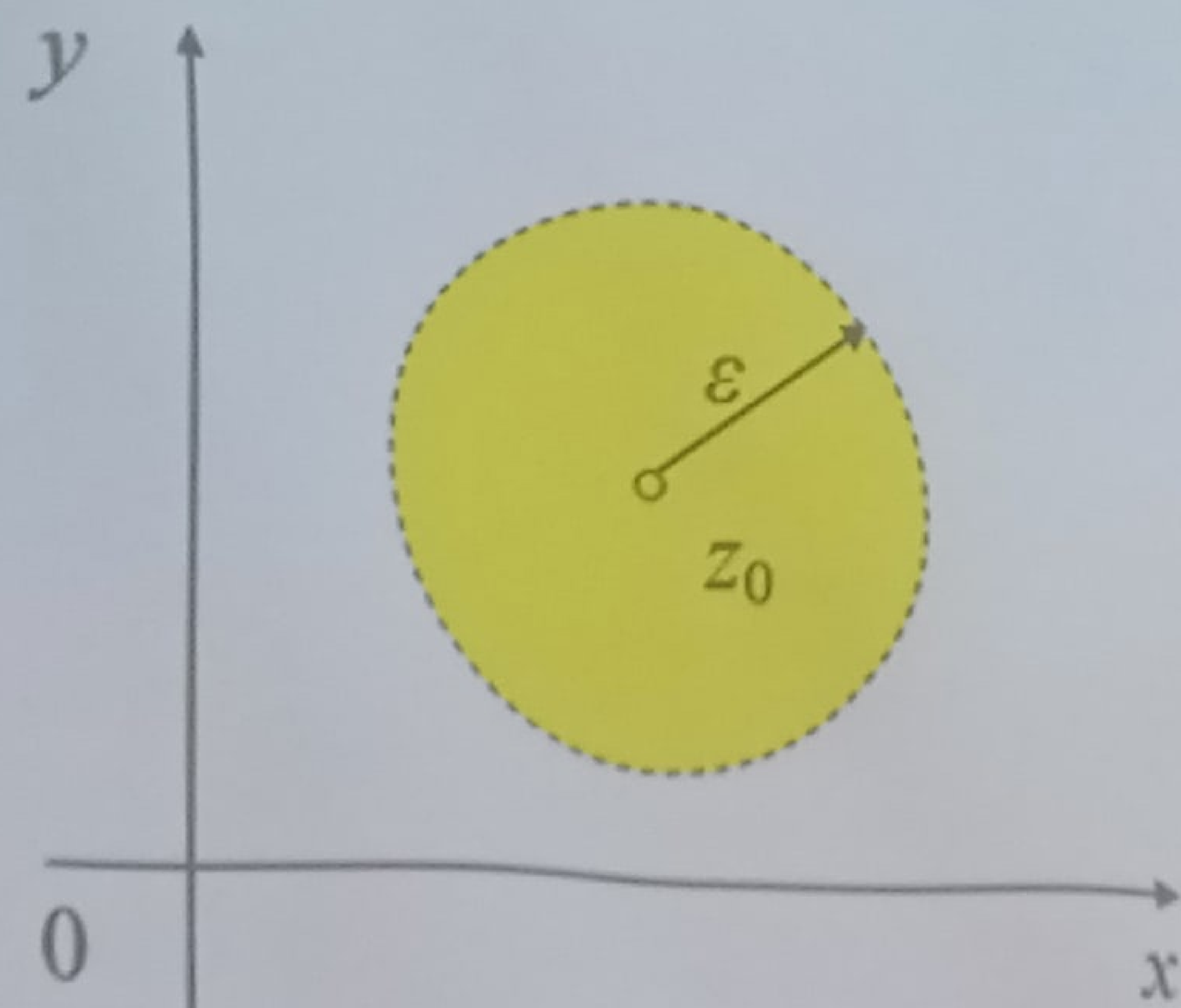


Рис. 2.3. Окрестность точки z_0: $O_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$

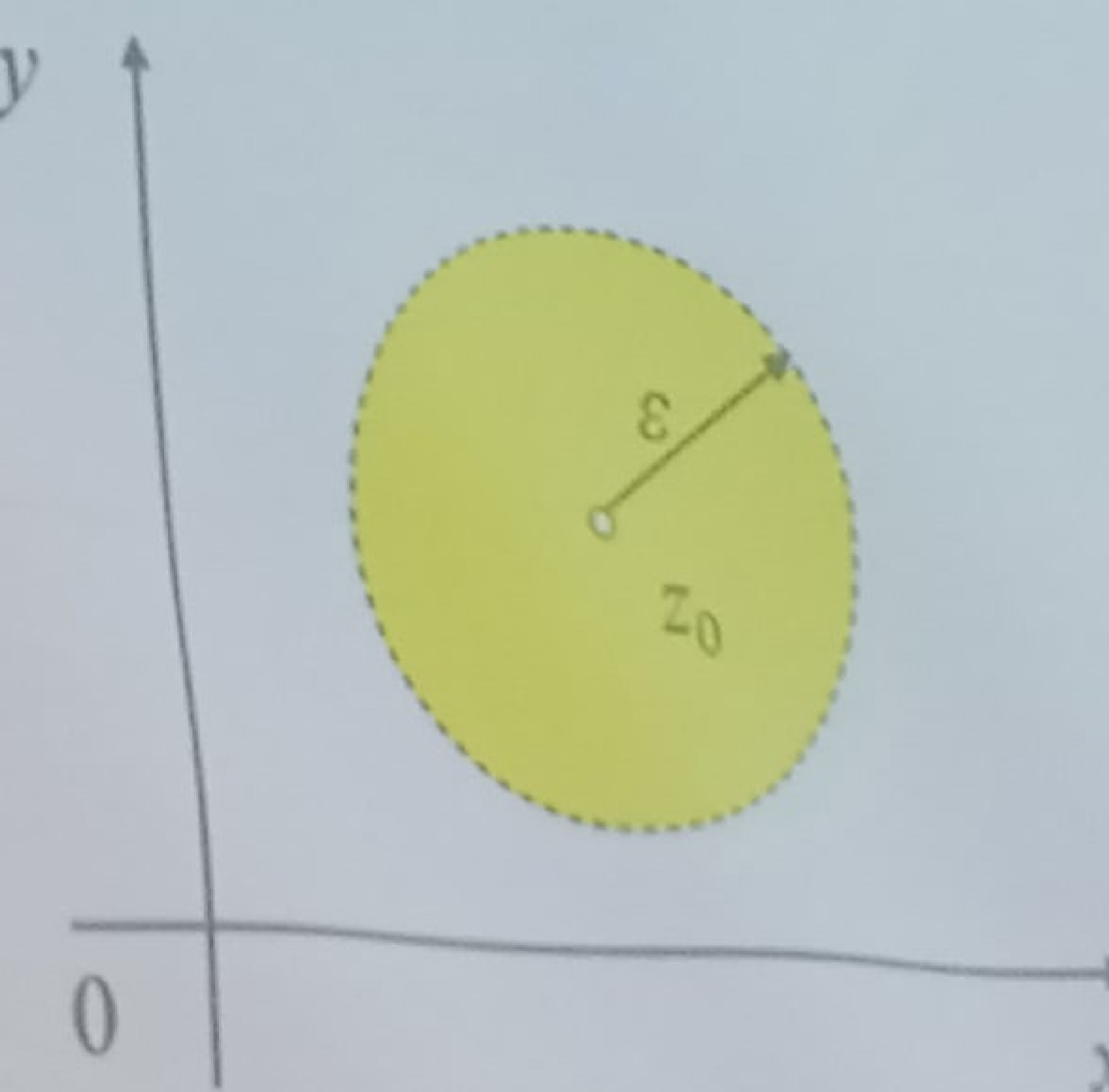


Рис. 2.4. Проколотая окрестность точки z_0: $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

3. Точка называется *внутренней точкой множества*, если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью. Точка z_0 – внутренняя точка множества M, если $z_0 \in M$ и $\exists \varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(z_0) \subset M$ (рис. 2.5).

4. Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым*.

5. Точка называется *граничной точкой множества*, если в любой её окрестности есть точки, принадлежащие множеству, и точки, не принадлежащие ему. Точка z_0 – граничная точка множества M, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ точки z_1 и z_2, $z_1 \in O_\varepsilon(z_0)$, $z_2 \in O_\varepsilon(z_0)$, такие, что $z_1 \in M$, а $z_2 \notin M$ (рис. 2.6).

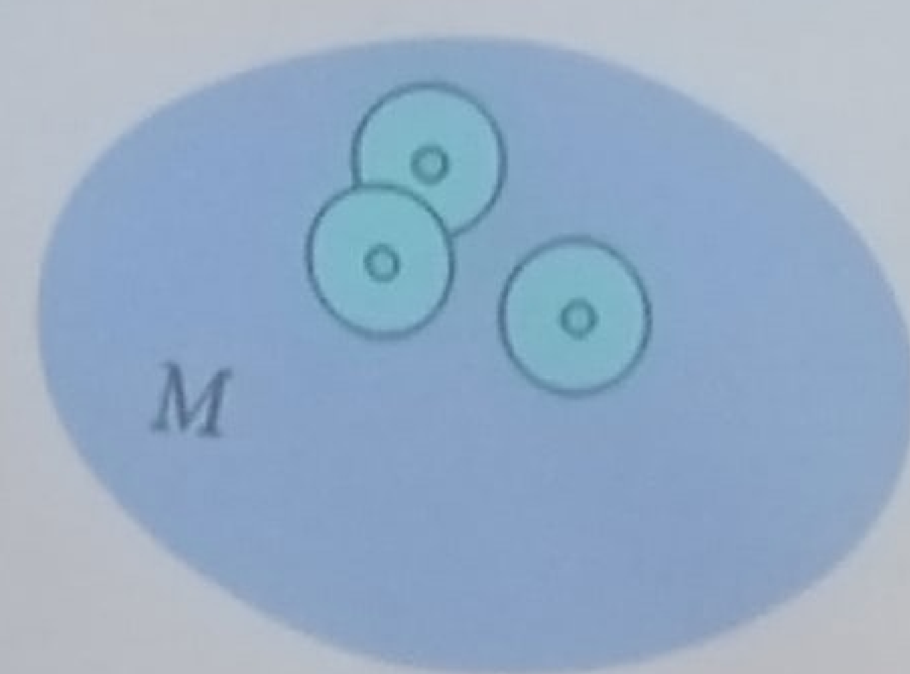


Рис. 2.5. Внутренние точки

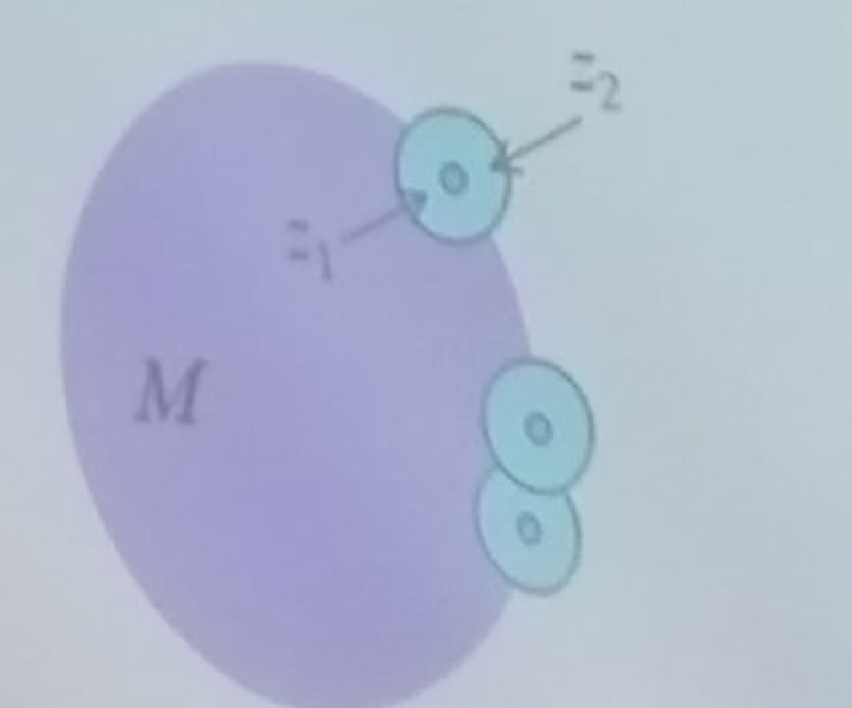


Рис. 2.6. Граничные точки

6. Совокупность граничных точек множества образует *границу* множества.

7. Направление обхода границы называется *положительным*, если область, ограниченная контуром, при обходе расположена слева (рис. 2.7).

8. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Обозначение: $\overline{M}$, т.е. $\overline{M} = M \cup C$, где C – граница множества M (рис. 2.8).

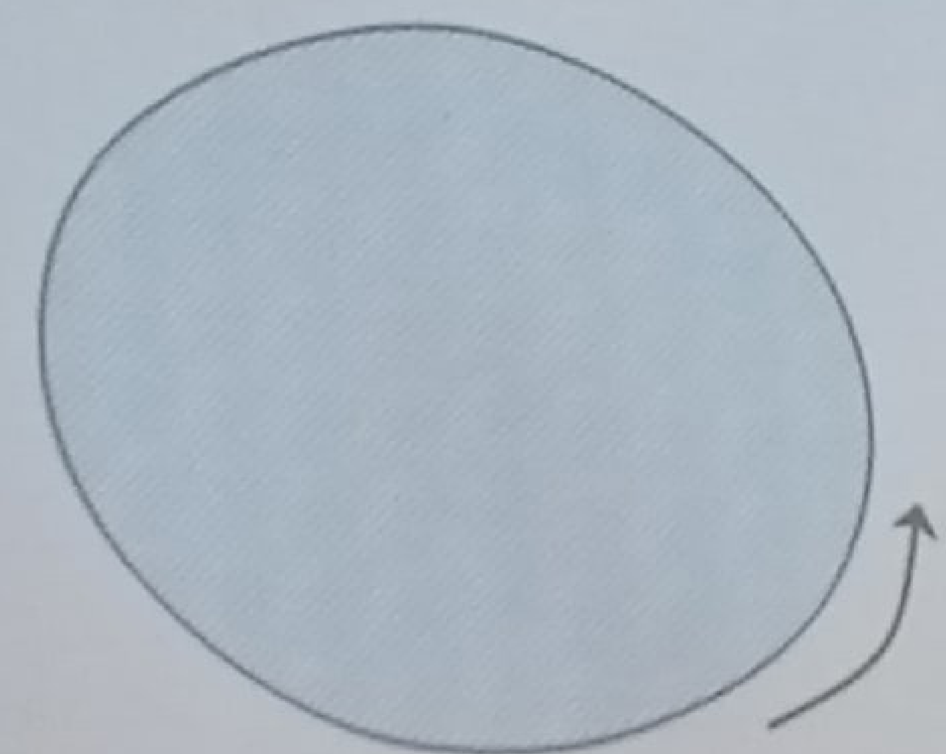


Рис. 2.7. Направление обхода границы

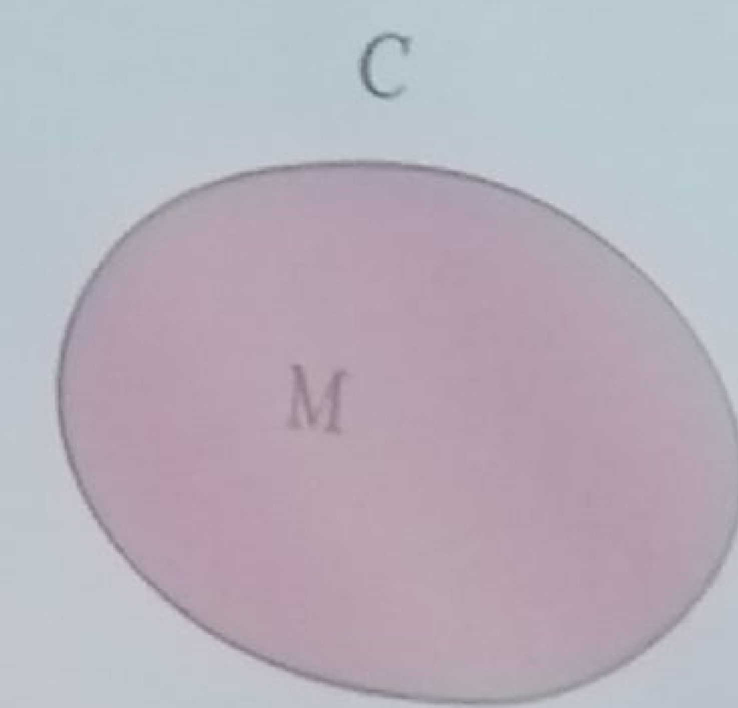
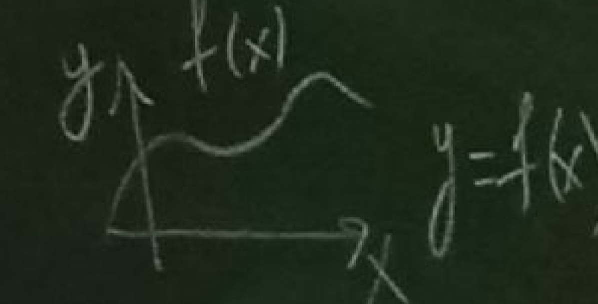


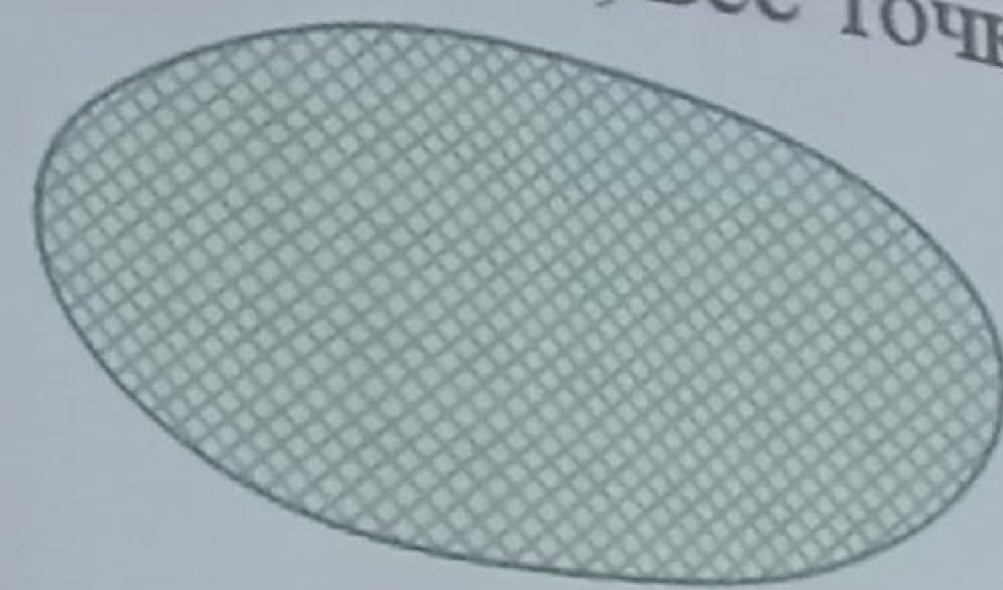
Рис. 2.8. Замкнутое множество



$w = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

$z = x + iy$

9. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству (рис. 2.9).



а

б

Рис. 2.9. а – связное множество, б – несвязное множество

10. Открытое связное множество называется *областью*. Область с присоединенной границей, называется *замкнутой областью*: $\overline{D} = D \cup \Gamma$, где Γ (гамма) – граница области D (рис. 2.10).

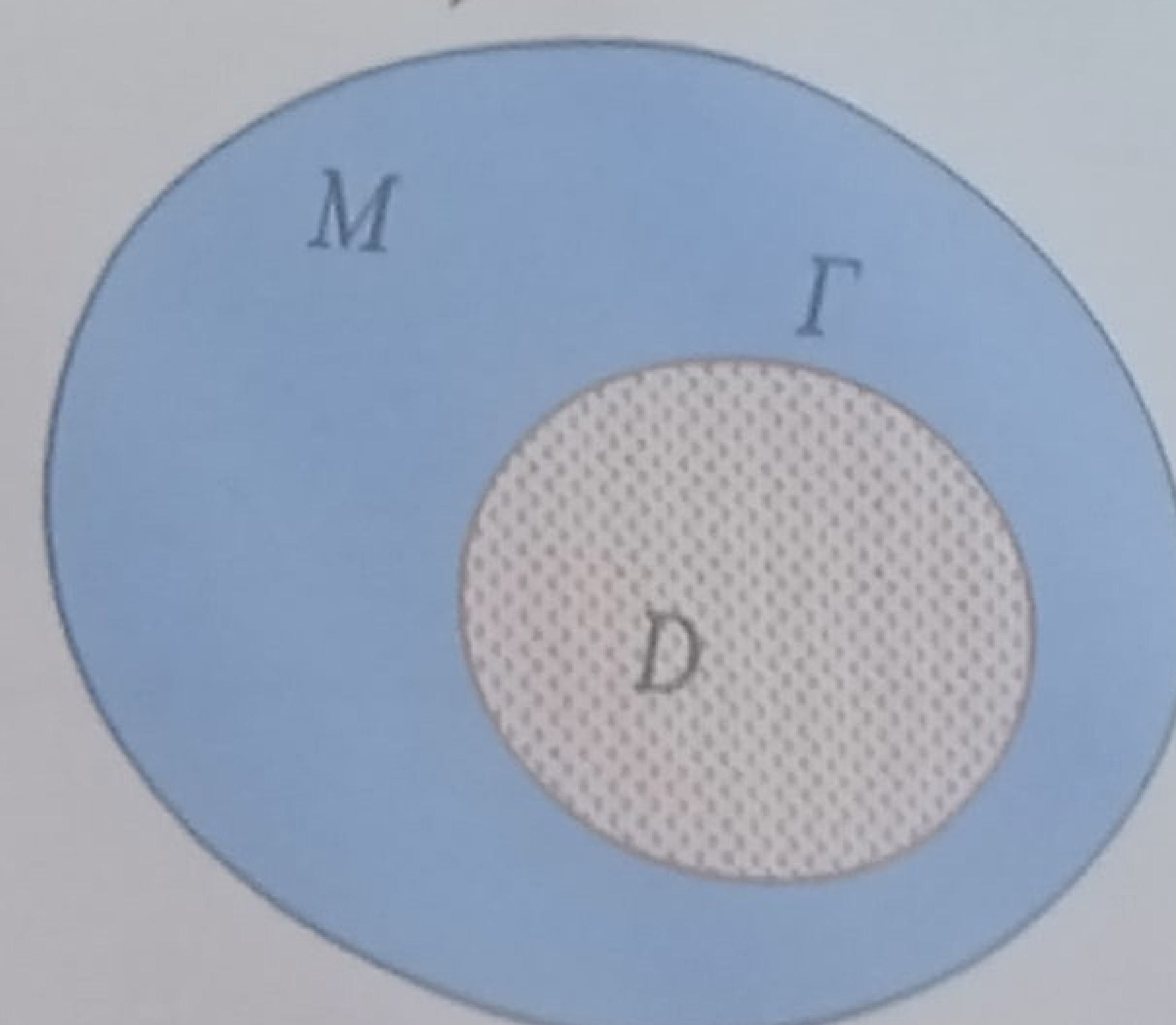


Рис. 2.10. Замкнутая область D

11. Если область D ограничена замкнутой не самопересекающейся линией Γ, то такая область называется *односвязной* (рис. 2.11).

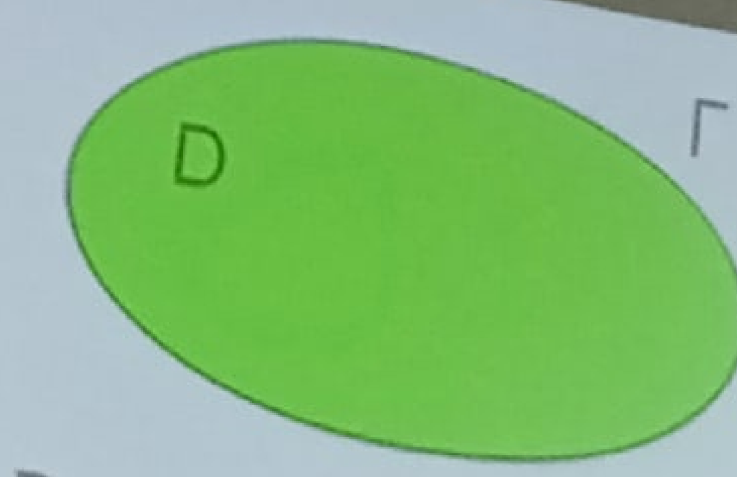


Рис. 2.11. Односвязная область

12. Если область D ограничена двумя замкнутыми и не самопересекающимися линиями Γ_1 и Γ_2, то такая область называется *двусвязной* (рис. 2.12).

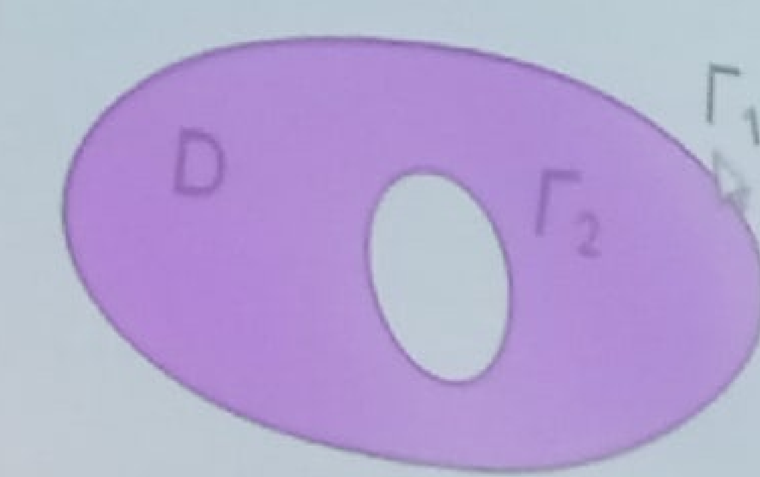


Рис. 2.12. Двусвязная область

13. Пусть Γ_1 – внешняя линия, а Γ_2 – внутренняя. Область является двусвязной и в том случае, если Γ_2 вырождается в точку или в дугу непрерывной линии (рис. 2.13).

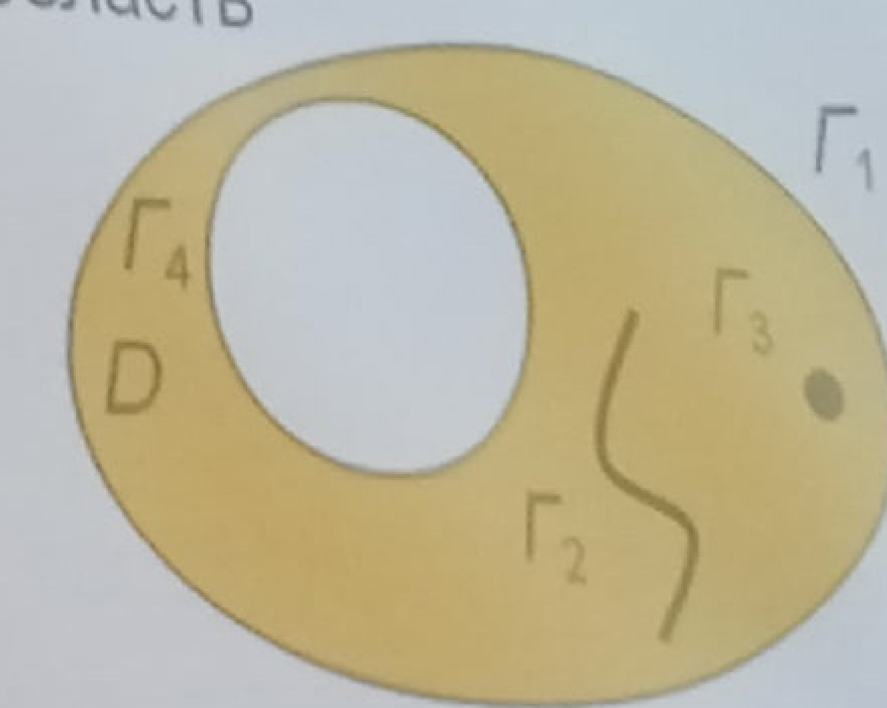


Рис. 2.13. Четырехсвязная область