Пусть на области D комплексной плоскости z задана аналитическая функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда по определению она имеет на D непрерывные производные любого порядка. При этом и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют на D непрерывные частные производные любого порядка.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Пусть на области D комплексной плоскости z задана аналитическая функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда по определению она имеет на D непрерывные производные любого порядка. При этом и функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют на D непрерывные частные производные любого порядка.

Для функции $f(z)$ выполняются условия К-Р:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ (1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \ (2),$$

продифференцируем равенство (1) по x, а равенство (2) по y:

тогда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'_x = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)'_x \ (1), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_y = \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)'_y \ (2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ (1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ (2),$$

сложим (1) и (2) и получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Обозначим $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Тогда уравнение (5.1)

$$\Delta u = 0 \qquad (5.1)$$

называют *уравнением Лапласа*.

Оператор Лапласа

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функцию u, имеющую непрерывные частные производные 2-го порядка на D и удовлетворяющую уравнению Лапласа, называют *гармонической функцией* на D.

Теперь продифференцируем равенство (1) по y, а равенство (2) по x:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)'_y \quad (1), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_x = \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)'_x \quad (2),$$

тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2),$$

найдем разность (1) и (2) и получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ или } \Delta v = 0. \qquad (5.2)$$

Таким образом, и действительная и мнимая части аналитической функции на D являются гармоническими функциями.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'_x$$

Обратное не всегда верно. Т.е. если u и v – произвольные гармонические функции на D, то $f(z) = u + iv$ не всегда является аналитической функцией на D. Требуется ещё выполнение условий К-Р.

Пример. 1. Проверить, являются ли функции $u = x$, $v = -y$ гармоническими.
2. Проверить условия К-Р.

Решение.
1. Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0;$$

составим уравнения Лапласа (5.1) и (5.2):

$$\Delta u = 0 + 0 = 0 \text{ – верно,}$$
$$\Delta v = 0 + 0 = 0 \text{ – верно,}$$

следовательно, функции u и v являются гармоническими.

2. Условия К-Р:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1 \neq -1) \text{ – первое условия не выполняется,}$$

следовательно, функция $f(z) = u + iv = x - iy = \bar{z}$ не является аналитической.

6. Элементарные и обратные ФКП

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)'_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x$$

Элементарные ФКП

Показательной функцией e^z в комплексной области называется функция, которая является суммой сходящегося во всей комплексной плоскости ряда

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Рассмотрим

$$e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!}=$$

$$=\underbrace{\frac{1\cdot x^0}{0!}}_{\substack{n=0\\k=0}}+\underbrace{\frac{i\cdot x^1}{1!}}_{\substack{n=1\\\tilde{k}=0}}+\underbrace{\frac{-1\cdot x^2}{2!}}_{\substack{n=2\\k=1}}+\underbrace{\frac{-i\cdot x^3}{3!}}_{\substack{n=3\\\tilde{k}=1}}+\underbrace{\frac{1\cdot x^4}{4!}}_{\substack{n=4\\k=2}}+\underbrace{\frac{i\cdot x^5}{5!}}_{\substack{n=5\\\tilde{k}=2}}+\underbrace{\frac{-1\cdot x^6}{6!}}_{\substack{n=6\\k=3}}+\underbrace{\frac{-i\cdot x^7}{7!}}_{\substack{n=7\\\tilde{k}=3}}\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{\tilde{k}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\tilde{k}}x^{2\tilde{k}+1}}{(2\tilde{k}+1)!}=\cos x+i\sin x$$

Если $x=\varphi$, то получаем формулу Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Функции $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ **вводятся аналогично – как суммы соответствующих абсолютно сходящихся во всей комплексной плоскости рядов**

Тригонометрический синус $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	*Гиперболический синус* $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
Тригонометрический косинус $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$	*Гиперболический косинус* $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

Соотношения для тригонометрических и гиперболических ФКП

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$	$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$
$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$	$\operatorname{ctg} z = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$	$\operatorname{th} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}$	$\operatorname{cth} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}$
$e^{iz} = \cos z + i\sin z$	$e^{-iz} = \cos z - i\sin z$	$e^{z} = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$	$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z$
$\sin iz = i\operatorname{sh} z$	$\cos iz = \operatorname{ch} z$	$\operatorname{sh} iz = i\sin z$	$\operatorname{ch} iz = \cos z$
$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$		$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$	
$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$		$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$	
$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$		$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$	

Обратные ФКП

Логарифмом числа $z \neq 0$ называется число A такое, что справедливо равенство $e^A = z$, т.е. $\ln z = A \Leftrightarrow e^A = z,\ z \neq 0$.

Пусть $A = u + iv,\ z = re^{i\varphi}$. Тогда $e^{u+iv} = re^{i\varphi} \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow e^u = r$ и $e^{iv} = e^{i\varphi}$. Следовательно, $u = \ln r,\ v = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \ldots$ Из этого следует, что логарифм комплексного числа определяется неоднозначно, т.е. получаем множество значений логарифма данного числа

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ r = |z|,\ \arg z = \varphi.$$

При $k = 0$ получаем главное значение логарифма $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Степенная функция при любой степени α	*Показательная функция с любым основанием a*
$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z},\ z \neq 0, \alpha \in C.$	$a^z = e^{z \mathrm{Ln}\, a},\ a \neq 0, a \in C.$

Логарифмическая функция вводится, как функшия, обратная к показательной, т.е. как решение уравнения $e^w = z \Rightarrow w = \mathrm{Ln}\, z$.

Обратные тригонометрические и гиперболические ФКП

Арксинус $\mathrm{Arcsin}\ z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$	*Гиперболический арксинус (ареасинус)* $\mathrm{Arsh}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{1 + z^2})$
Арккосинус $\mathrm{Arccos}\ z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$	*Гиперболический арккосинус (ареакосинус)* $\mathrm{Arch}\ z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
Арктангенс $\mathrm{Arctg}\ z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + iz}{1 - iz}$	*Гиперболический арктангенс (ареатангенс)* $\mathrm{Arth}\ z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1 + z}{1 - z}$
Арккотангенс $\mathrm{Arcctg}\ z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z - i}{z + i}$	*Гиперболический арккотангенс (ареакотангенс)* $\mathrm{Arcth}\ z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z + 1}{z - 1}$

Обратные ФКП

Логарифмом числа $z \neq 0$ называется число A такое, что справедливо равенство $e^A = z$, т.е. $\ln z = A \Leftrightarrow e^A = z,\ z \neq 0$.

Пусть $A = u + iv,\ z = re^{i\varphi}$. Тогда $e^{u+iv} = re^{i\varphi} \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow e^u = r$ и $e^{iv} = e^{i\varphi}$. Следовательно, $u = \ln r,\ v = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \dots$ Из этого следует, что логарифм комплексного числа определяется неоднозначно, т.е. получаем множество значений логарифма данного числа

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ r = |z|,\ \arg z = \varphi.$$

При $k = 0$ получаем главное значение логарифма $\ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Степенная функция при любой степени α	*Показательная функция с любым основанием* a
$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},\ z \neq 0,\ \alpha \in C.$	$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a},\ a \neq 0,\ a \in C.$

Логарифмическая функция вводится, как функция, обратная к показательной, т.е. как решение уравнения $e^w = z \Rightarrow w = \operatorname{Ln} z$.