Дискретная математика. Лекция 08.04.

С. В. Ткаченко

08.04.2022

Системы булевых функций

Система булевых функций $\{f_1, \dots f_m\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть выражена через функции $f_1, \dots, f_m$ с помощью *суперпозиций*.
Пусть $K^0 = \{f_1(x_1, \dots, x_{k_1}), f_2(x_1, \dots, x_{k_2}) \dots, f_m(x_1, \dots, x_{k_m})\}$ - конечная система булевых функций.
Функция f называется суперпозицией ранга 1 функций $f_1, \dots, f_m$, если она может быть получена одним из следующих способов:
1) замена переменной x_j на некоторую переменную y в любой функции $f_i \in K^0 : f = f_i(x_1 \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_{k_i})$, где y может совпадать с любой переменной;
2) замена переменной x_j на некоторую функцию $f_1 (1 \leq l \leq m)$ в любой функции $f_i \in K^0$:
$f = f_i(x_1, \dots, x_{j_1}, f_1(x_1, \dots, x_{k_1}), x_{j+1}, \dots, x_{k_i})$

Теорема 10 (теорема Поста). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов T_0, T_1, S, M, L нашлась хотя бы одна функция f_i из системы, не принадлежащая этому классу.

Система булевых функций $\{f_1, \dots, f_m\}$ является полной, если в каждом столбце таблицы

f	T_0	T_1	S	M	L
f_1					
$\dots$ f_m					

есть хотя бы один минус («-»).

Пример.
Проверить на полноту систему функций $\{0, 1, \overline{x}\}$.

x	0	1	$\overline{x}$
0	0	1	1
1	0	1	0

f	T_0	T_1	S	M	L
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\overline{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

Так как классу L принадлежат все три функции, то данная система функций не является полной.

1) T_0 - класс булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 0:

$$f(0, \ldots, 0) = 0.$$

2) T_1 - класс булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, сохраняющих константу 1:

$$f(1, \ldots, 1) = 1.$$

3) S - класс самодвойственных функций:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

4) M - класс монотонных функций
Введем отношение частичного порядка на множестве оценок списка переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Оценка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *предшествует*
оценке $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$,
если $\alpha_i \leq \beta_i$,

где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\beta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$.
Обозначение: $\alpha \prec \beta$.

Пример.

x_1	x_2	Предшествование
0	0	$(0,0) \prec (0,1), (0,0) \prec (1,0), (0,0) \prec (1,1)$
0	1	$(0,1) \prec (1,1)$
1	0	$(1,0) \prec (1,1)$
1	1	$-$

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых оценок α, β, находящихся в отношении предшествования ($\alpha \prec \beta$), выполняется неравенство $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

5) L - класс линейных функций

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если полином Жегалкина имеет вид

$$P(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \ \wedge \ x_i \ .$$

$$P(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n.$$

Пример.

1. Константа 0 и константа 1 - линейные функции:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

$$f_2(x_1, \ldots, x_n) = 1, \ P_2(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

2. $f_3(x, y) = x \oplus y$ - линейная функция: $P_3(x, y) = x \oplus y$,
$f_4(x, y) = x \sim y$ - линейная функция: $P_4(x, y) = 1 \oplus x \oplus y$.

3. $f_5(x, y) = xy$ - нелинейная функция: $P_5(x, y) = xy$,
$f_6(x, y) = x \vee y$ - нелинейная функция: $P_6(x, y) = x \oplus y \oplus xy$.