

Дискретная математика. Лекция 22.04.

С. В. Ткаченко

22.04.2022

Минимизация булевых функций

Непосредственная минимизация

Метод непосредственной минимизации основан на применении равносильностей алгебры логики. Функция может быть задана в ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ.

Пример.

а) $f(x, y) = x \rightarrow (y \wedge x)$

x	y	$y \wedge x$	$x \rightarrow (y \wedge x)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

ДНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)] \vee (x \wedge y) = \\ &= [\bar{x} \wedge (\bar{y} \vee y)] \vee (x \wedge y) = \\ &= [\bar{x} \wedge 1] \vee (x \wedge y) = \bar{x} \vee xy; \end{aligned}$$

КНФ:

$$f(x, y) = \bar{x} \vee y.$$

б) $f(x, y) = x \downarrow y$

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ДНФ:

$$f(x, y) = \bar{x} \wedge \bar{y};$$

КНФ:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x \vee \bar{y}) \wedge [(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})] = \\ &= (x \vee \bar{y}) \wedge [\bar{x} \vee (y \wedge \bar{y})] = (x \vee \bar{y}) \wedge [\bar{x} \vee 0] = \\ &= (x \vee \bar{y}) \wedge \bar{x} = (\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \\ &= 0 \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \bar{x} \wedge \bar{y}. \end{aligned}$$

Карты Карно

Карты Карно были изобретены в 1952 американским ученым Эдвардом В. Вейчем (8 сентября 1924 - 23 декабря 2013) и усовершенствованы в 1953 американским физиком Морисом Карно (род. 4 октября 1924 года, Нью-Йорк); использовались для упрощения цифровых электронных схем.

Карта Карно имеет вид

$\begin{array}{c} \backslash \\ yz \end{array}$	00	01	11	10
x				
0				
1				

значения yz подчиняются **двоичному коду Грея**:
любые два соседних кода различаются ровно в одном разряде.

Правильная конфигурация - это прямоугольник, который состоит только из 1 или только из 0.

Этот прямоугольник может быть расположен горизонтально или вертикально.

Этот прямоугольник может быть квадратом.

Площадь прямоугольника: 2^{n-i} , $i = 0, \dots, n$, где n - число переменных в функции.

Правила определения правильной конфигурации

1. В правильной конфигурации возможно объединение крайних полей, расположенных на противоположных сторонах карты.
2. Число правильных конфигураций должно быть минимально, а площадь каждой конфигурации - максимальна.

3. При объединении полей, в которых стоят единицы, булева функция записывается в ДНФ значений переменных, не меняющихся в пределах правильной конфигурации.

4. При объединении полей, в которых стоят нули, булева функция записывается в КНФ инверсных значений переменных, не меняющихся в пределах правильной конфигурации.

Пример.

x	y	z	$(x \wedge (y \vee \bar{z})) \oplus (\bar{x} z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

СДНФ: $f(x, y, z) = (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z);$

СКНФ: $f(x, y, z) = (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Карта Карно

x \ yz	yz			
	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

1)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$$\bar{x} \wedge \bar{z}$$

2)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$$x \wedge \bar{y} \wedge z$$

$$\text{ДНФ: } f(x, y, z) = (\bar{x}\bar{z}) \vee (x\bar{y}z)$$

Карта Карно

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

1)

xyz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$$x \vee \bar{z}$$

2)

xyz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$$\bar{y} \vee \bar{z}$$

3)

xyz	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0

$$\bar{x} \vee z$$

$$\text{KH}\Phi: f(x, y, z) = (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z).$$