

Дискретная математика. Лекция 06.05.

С. В. Ткаченко

06.05.2022

Простой (первичной) импликантой (минималью) функции $Y = F(x_1, \dots, x_n)$ называется импликанта, которая не склеивается с никакой другой и не поглощается никакой другой импликантой данной функции Y .

Пример.

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$$

$y_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ - импликанта функции Y , $y_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \bar{x}_3$ - простая импликанта функции Y , т.к. она поглощает импликанту y_1 :

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = x_2 \bar{x}_3 \vee (x_2 \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_1) = x_2 \bar{x}_3$$

Сокращенная ДНФ (СкДНФ) - это ДНФ функции в виде дизъюнкции всех ее простых импликант. СкДНФ в общем случае избыточна, некоторые из составляющих ее простых импликант могут быть исключены при сохранении эквивалентности формул.

Тупиковая ДНФ (ТДНФ) - это ДНФ, из которой нельзя исключить ни одной простой импликанты без потери эквивалентности формулы.

Минимальная ДНФ (МДНФ) - это ТДНФ, содержащая минимальное число символов среди возможных ТДНФ функции.

Одной из важнейших интерпретаций булевых алгебр является *булева алгебра переключательных функций*. Первоначально этот математический аппарат был применен для анализа и синтеза множества релейно-контактных схем с операциями последовательного (конъюнкции) и параллельного (дизъюнкции) соединения контактов и операцией дополнения. 1 - проводник, 0 - разрыв.

Множество всех переключательных функций (ПФ) обозначают $P2$.

Алгебра $(P2, \wedge, \vee, \neg)$ называется *булевой алгеброй переключательных функций*.

Импликантой переключательной функции $Y = F(x_1, \dots, x_n)$ называется функция $v = f(x_1, \dots, x_n)$, которая обращается в 1 на некотором подмножестве единичных наборов функции Y .

Пример.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Импликанты данной функции: $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$, $x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$, $x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$ - элементарные конъюнкции.

Также импликантами являются конъюнкции, полученные в результате склеивания (формулы расщепления) или поглощения одних конъюнкций другими.

Пример.

$$((\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge \bar{x}_3) \vee ((\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \wedge x_3) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2.$$

Метод Квайна - Мак-Класки состоит из двух этапов:

1. Получение всех простых импликант ПФ (построение СкДНФ).
2. Поиск всех ТДНФ по импликантной таблице покрытий и выбор из них МДНФ.

Исходная функция **должна быть** представлена в СДНФ.

Каждая элементарная конъюнкция может быть представлена двоичным числом.

Каждой конъюнкции присваивается *индекс* - число единиц в двоичном представлении конъюнкции.

x_1	x_2	x_3	x_4	число	индекс	x_1	x_2	x_3	x_4	число	индекс
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8	I
0	0	0	1	1	I	1	0	0	1	9	II
0	0	1	0	2	I	1	0	1	0	10	II
0	0	1	1	3	II	1	0	1	1	11	III
0	1	0	0	4	I	1	1	0	0	12	II
0	1	0	1	5	II	1	1	0	1	13	III
0	1	1	0	6	II	1	1	1	0	14	III
0	1	1	1	7	III	1	1	1	1	15	IV

Одна и та же конъюнкция может быть склеена с другими несколько раз. При этом компонента, меняющая свое значение, заменяется «-».

Пример.

При склеивании 0011 и 0111 получаем 0-11.

Пример.

$$f(x, y, z, t) = \begin{array}{ccccccc} \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} & \vee & \bar{x}\bar{y}\bar{z}t & \vee & \bar{x}\bar{y}z\bar{t} & \vee & \bar{x}y\bar{z}t & \vee \\ 0000(0,0) & & 0001(1,1) & & 0010(2,1) & & 0101(5,II) & \\ \vee & \bar{x}yzt & \vee & x\bar{y}\bar{z}\bar{t} & \vee & x\bar{y}z\bar{t} & \vee & xyz\bar{t} & \vee & xyzt \\ 0111(7,III) & & 1000(8,1) & & 1010(10,II) & & 1110(14,III) & & 1111(15,IV) \end{array}$$

Индекс	Конъюнкция		Результат склеивания					
			1 шаг			2 шаг		
0	0000 (0)	✓	0 и 1	000- (a)	×	b и f с и e	-0-0 (-0-0)	×
			0 и 2	00-0 (b)	✓			
			0 и 8	-000 (c)	✓			
I	0001 (1)	✓	1 и 5 1 и 10	0-01 (d) -	×			
	0010 (2)	✓	2 и 5 2 и 10	- -010 (e)	✓			
	1000 (8)	✓	8 и 5 8 и 10	- 10-0 (f)	✓			
II	0101 (5)	✓	5 и 7 5 и 14	01-1 (g) -	×			
	1010 (10)	✓	10 и 7 10 и 14	- 1-10 (h)	×			
III	0111 (7)	✓	7 и 15	-111 (i)	×			
	1110 (14)	✓	14 и 15	111- (j)	×			
IV	1111 (15)	✓						

СкДНФ:

$$f(x, y, z, t) = \begin{array}{ccccccc} \bar{x}\bar{y}\bar{z} & \vee & \bar{x}\bar{z}t & \vee & \bar{x}yt & \vee & xz\bar{t} & \vee & yzt & \vee & xyz & \vee & \bar{y}\bar{t} \\ 000- & & 0-01 & & 01-1 & & 1-10 & & -111 & & 111- & & -0-0 \end{array}$$

Второй этап заключается в построении ТДНФ (МДНФ) по импликантной таблице покрытий.

Импликантная таблица. Строки таблицы отмечаются простыми импликантами (полученными на первом этапе, табл. 1), столбцы - элементарными конъюнкциями (ЭК) из СДНФ (первоначальные). На пересечении i - й строки и j - го столбца ставится 1 или любой другой символ, если i - я импликанта покрывает (формула поглощения) j - ю ЭК из СДНФ.

Правила

П1. Если есть столбец, который покрывается только одной импликантой y_i , то y_i - **обязательная импликанта**, которая включается в ТДНФ. Строку y_i и столбцы, покрываемые y_i , удалить из таблицы.

П2. Если импликанта y_i покрывает подмножество столбцов V_i , y_k покрывает подмножество столбцов V_k , при этом $V_i \leq V_k$, тогда i - ю строку исключить из таблицы.

П3. Если j - й столбец покрывается подмножеством строк Y_i , m - й столбец - подмножеством строк Y_m , при этом $Y_i \leq Y_m$, тогда m - й столбец исключить из таблицы.

2 этап

		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И
		0000	0001	0010	0101	0111	1000	1010	1110	1111
1	000-	*	*							
2	0-01		*		*					
3	01-1				*	*				
4	1-10							*	*	
5	-111					*				*
6	111-								*	*
7	-0-0	*		*			*	*		

П1. Столбцы В и Е покрываются только одной строкой 7. Следовательно, импликанта -0-0 является **обязательной**, она включается в МДНФ. Удаляем строку 7 и столбцы, которые она покрывает: А, В, Е, Ж.

		Б	Г	Д	З	И
		0001	0101	0111	1110	1111
1	000-	*				
2	0-01	*	*			
3	01-1		*	*		
4	1-10				*	
5	-111			*		*
6	111-					*

П2. Строка 1 покрывает столбец Б, строка 2 покрывает столбцы Б и Г. Следовательно, удаляем строк 1. Аналогично, строка 4 покрывает столбец З, строка 6 покрывает столбцы З и И. Удаляем строку 4.

		Б	Г	Д	З	И
		0001	0101	0111	1110	1111
2	0-01	*	*			
3	01-1		*	*		
5	-111			*		*
6	111-				*	*

П3. Столбец Б покрыт строкой 2, столбец Г покрыт строками 2 и 3, следовательно, удалим столбец Г. Аналогично, столбец З покрыт строкой 6, столбец И покрыт строками 5 и 6, следовательно, удалим столбец И.

		Б	Д	З
		0001	0111	1110
2	0-01	*		
3	01-1		*	
5	-111		*	
6	111-			*

П4. Столбец Б покрыт только строкой 2, столбец З покрыт только строкой 6, поэтому импликанты 0-01 и 111- являются **обязательными**. Удалим строки 2, 6, столбцы Б, З.

		Д
		0111
3	01-1	*
5	-111	*

В итоге получаем 2 ТДНФ

$$f_1(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee xyz \vee \bar{x}yt$$

$$f_2(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee xyz \vee yzt$$

Минимальной является та, которая содержит наименьшее количество символов.