Дискретная математика. Лекция 25.02.

С. В. Ткаченко

25.02.2022

Высказывание - это предложение, смысл которого может быть **истинным** или **ложным**.

Если суждение, составляющее смысл некоторого высказывания, истинно, то высказывание истинно.

Если суждение, составляющее смысл некоторого высказывания, ложно, то высказывание ложно.

Истинность и ложность называются логическими, или истинностными, значениями высказываний.

Сложное высказывание - это высказывание, составленное из других высказываний с помощью логических операций.

Элементарное высказывание - это высказывание, которое представляет собой только одно утверждение. Такие высказывания утверждают что-то о *свойствах* объекта или об *отношениях* между объектами (чаще всего - двумя).

Обозначение высказываний: A, B, C, ...

значения высказываний: Л - ложь, И - истина.

Операции над высказываниями

Пусть даны два произвольных высказывания A и B.

1. **Отрицанием** высказывания A называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

Обозначается $\bar{A}$ (или $\neg A$, A'), читается "не A".

2. **Конъюнкцией** двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Обозначается $A \wedge B$ (или $A\&B$), читается "А и В".

3. **Дизъюнкцией** двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $A \vee B$, читается "А или В".

4. **Импликацией** двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда А истинно, а В ложно.

Обозначается $A \to B$ (или $A \supset B$, $A \Rightarrow B$), читается "А влечет В"(или "если А, то В", "из А следует В").

5. **Эквивалентностью** двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения А и В совпадают.

Обозначается $A \sim B$, читается "А эквивалентно В".

6. **Суммой по mod 2** двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения А и В различны.

Обозначается $A \oplus B$, читается "А сумма по модулю 2 В".

7. **Штрих Шеффера -** антиконъюнкция.
Антиконъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Обозначается $(A|B) = \overline{(A \wedge B)}$, читается "А штрих Шеффера В".

8. **Стрелка Пирса -** антидизъюнкция.
Антидизъюнкцией двух высказываний А и В называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначается $(A \downarrow B) = \overline{(A \vee B)}$, читается "А стрелка пирса В".

Булевы функции. Представления булевой функции формулой алгебры высказываний

Булевой функцией $f(x_1, ..., x_n)$ называется произвольная n-местная функция, действующая из множества $\{0,1\}^n$ во множество $\{0,1\}$:

$f(x_1, ..., x_n) : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$
аргументы функции $x_1, ..., x_n$ принимают значения 0 или 1,
функция f также принимает значения 0 или 1.

Пусть значению Л соответствует значение 0,
значению И соответствует значение 1.

Тогда каждой формуле алгебры высказываний F можно поставить в соответствие булеву функцию f.

Представление булевой функции таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	Число	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	f(0, 0, 0)
0	0	1	1	f(0, 0, 1)
0	1	0	2	f(0, 1, 0)
0	1	1	3	f(0, 1, 1)
1	0	0	4	f(1, 0, 0)
1	0	1	5	f(1, 0, 1)
1	1	0	6	f(1, 1, 0)
1	1	1	7	f(1, 1, 1)

Каждая строка таблицы - двоичная запись числа из множества $\{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$

Пример. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x_3} \to (x_1 \sim x_2)$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x_3}$	$x_1 \sim x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Если булева функция f зависит от n переменных $(x_1, ..., x_n)$, то существует ровно 2^{2^n} различных n-местных булевых функций.

При $n = 1 :$ $\qquad 2^{2^n} = 2^{2^1} = 4$ функции.

При $n = 2$: $\quad 2^{2^n} = 2^{2^2} = 16$ функций.

При $n = 3$: $\quad 2^{2^n} = 2^{2^3} = 256$ функций.

Булева функция $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ *существенно зависит* от переменной x_i, если существует такой набор значений α_1, ..., α_{i-1}, α_{i+1}, ..., α_n, что

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n).$$

В этом случае x_i называют *существенной* переменной, в противном случае x_i называют *фиктивной* переменной.

Булевы функции одной переменной

	Переменная x	0	1	
Название	Обозначение			Фиктивная
константа ноль	$f_0 = 0$	0	0	x
тождественная x	$f_1 = x$	0	1	
отрицание x	$f_2 = \bar{x}$	1	0	
константа единица	$f_3 = 1$	1	1	x

Булевы функции двух переменных

	Переменная x	0	0	1	1	
Название	Обозначение					Фиктивные
константа ноль	$f_0 = 0$	0	0	0	0	x, y
конъюнкция	$f_1 = x \wedge y$	0	0	0	1	
запрет по y	$f_2 = \overline{(x \to y)}$	0	0	1	0	
тождественная x	$f_3 = x$	0	0	1	1	y
запрет по x	$f_4\overline{(y \to x)}$	0	1	0	0	
тождественная y	$f_5 = y$	0	1	0	1	x
сумма по mod 2	$f_6 = x \oplus y$	0	1	1	0	
дизъюнкция	$f_7 = x \vee y$	0	1	1	1	
стрелка Пирса	$f_8 = x \downarrow y$	1	0	0	0	
эквивалентность	$f_9 = x \sim y$	1	0	0	1	
отрицание y	$f_{10} = \bar{y}$	1	0	1	0	
конверсия	$f_{11} = y \to x$	1	0	1	1	
отрицание x	$f_{12} = \bar{x}$	1	1	0	0	y
импликация	$f_{13} = x \to y$	1	1	0	1	
штрих Шеффера	$f_{14} = x\|y$	1	1	1	0	
константа единица	$f_{15} = 1$	1	1	1	1	x, y

Формула алгебры высказываний - это сложное высказывание, составленное из элементарных высказываний с помощью операций 1 - 8.

Пример.
Пусть высказывание X принимает значение Л, высказывание Y - Л, высказывание Z - И,

тогда формула

$$A = (Y \wedge (Z \to X)) \vee (\bar{X} \sim \bar{Y})$$

примет значение

$$A = (\text{Л} \wedge (\text{И} \to \text{Л})) \vee (\text{И} \sim \text{И}) = (\text{Л} \wedge \text{Л}) \vee \text{И} = \text{Л} \vee \text{И} = \text{И}.$$