

Простой (первичной) импликантой (минималью) функции $Y=F(x_1, \dots, x_n)$ называется импликанта, которая не склеивается с никакой другой и не поглощается никакой другой импликантой данной функции Y .

Пример.

$$Y(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$$

$y_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ - импликанта функции Y , $y_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 \bar{x}_3$ - простая импликанта функции Y , т.к. она поглощает импликанту y_1 :

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 = x_2 \bar{x}_3 \vee (x_2 \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_1) = x_2 \bar{x}_3$$

Сокращенная ДНФ (СкДНФ) - это ДНФ функции в виде дизъюнкции всех ее простых импликант. СкДНФ в общем случае избыточна, некоторые из составляющих ее простых импликант могут быть исключены при сохранении эквивалентности формул.

Тупиковая ДНФ (ТДНФ) - это ДНФ, из которой нельзя исключить ни одной простой импликанты без потери эквивалентности формулы.

Импlicantой переключательной функции $Y=F(x_1, \dots, x_n)$ называется функция $y=f(x_1, \dots, x_n)$, которая обращается в 1 на некотором подмножестве единичных наборов функции Y .

Пример.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Импlicantы данной функции: $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$, $x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$, $x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3$ - элементарные конъюнкции.

Также импlicantами являются конъюнкции, полученные в результате склеивания (формулы расщепления) или поглощения одних конъюнкций другими.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Импlicants данной функции: $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$,
 $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ - элементарные конъюнкции.

Также импликантами являются конъюнкции, полученные в результате
 склеивания (формулы расщепления) или поглощения одних конъюнкций
 другими.

Пример.

$$((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) = x_1 \wedge x_2.$$

I

2. Поиск всех ТДНФ по импликантной таблице покрытий и выбор из них МДНФ.

Исходная функция должна быть представлена в СДНФ.

Каждая элементарная конъюнкция может быть представлена двоичным числом.

Каждой конъюнкции присваивается *индекс* – число единиц в двоичном представлении конъюнкции

x_1	x_2	x_3	x_4	число	индекс	x_1	x_2	x_3	x_4	число	индекс
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8	I
0	0	0	1	1	I	1	0	0	1	9	II
0	0	1	0	2	I	1	0	1	0	10	II
0	0	1	1	3	II	1	0	1	1	11	III
0	1	0	0	4	I	1	1	0	0	12	II
0	1	0	1	5	II	1	1	0	1	13	III
0	1	1	0	6	II	1	1	1	0	14	III
0	1	1	1	7	III	1	1	1	1	15	IV

Индекс	Конъюнкция (импликанта)		Результат склеивания					
			1 шаг			2 шаг		
0	0000 (0)	✓	0 и 1	000- (a)	✗	b и f c и e	-0-0 (-0-0)	✗
			0 и 2	00-0 (b)	✓			
			0 и 8	-000 (c)	✓			
I	0001 (1)	✓	1 и 5	0-01 (d)	✗			
			1 и 9	-				
	0010 (2)	✓	2 и 5	-				
			2 и 10	-010 (e)	✓			
II	1000 (8)	✓	8 и 5	-				
			8 и 10	+ 10-0 (f)	✓			
	0101 (5)	✓	5 и 7	01-1 (g)	✗			
			5 и 14	-				
III	1010 (10)	✓	10 и 7	-				
			10 и 14	1-10 (h)	✗			
IV	0111 (7)	✓	7 и 15	-111 (i)	✗			
	1110 (14)	✓	14 и 15	111- (j)	✗			
IV	1111 (15)	✓						

СхЛНФ

Индекс	Конъюнкция (импликанта)		Результат склеивания					
			1 шаг			2 шаг		
0	0000 (0)	✓	0 и 1	000- (a)	✗	b и f c и e	-0-0 (-0-0)	✗
			0 и 2	00-0 (b)	✓			
			0 и 8	-000 (c)	✓			
I	0001 (1)	✓	1 и 5 1 и 10	0-01 (d)	✗			
	0010 (2)	✓	2 и 5 2 и 10	-010 (e)	✓			
	1000 (8)	✓	8 и 5 8 и 10	10-0 (f)	✓			
II	0101 (5)	✓	5 и 7 5 и 14	01-1 (g)	✗			
	1010 (10)	✓	10 и 7 10 и 14	1-10 (h)	✗			
III	0111 (7)	✓	7 и 15	-111 (i)	✗			
	1110 (14)	✓	14 и 15	111- (j)	✗			
IV	1111 (15)	✓						

СКЛНФ

I	0010 (2)	✓	2 и 5	-			
			2 и 10	-010 (e)	✓		
	1000 (8)	✓	8 и 5	-			
			8 и 10	10-0 (f)	✓		
II	0101 (5)	✓	5 и 7	01-1 (g)	✗		
			5 и 14	-			
	1010 (10)	✓	10 и 7	-			
			10 и 14	1-10 (h)	✗		
III	0111 (7)	✓	7 и 15	-111 (i)	✗		
	1110 (14)	✓	14 и 15	111- (j)	✗		
IV	1111 (15)	✓					

СкДНФ:

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}z\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{t} \vee xz\bar{t} \vee yz\bar{t} \vee xyz \vee y\bar{t}$$

$\begin{matrix} 1000- & 0-01 & 01-1 & 1-10 & -111 & 111- & -0-0 \end{matrix}$

Второй этап заключается в построении ТДНФ (МДНФ) по импликантной

III	0111 (7)	✓	10 и 14	1-10 (b)	ж			
	1110 (14)	✓	7 и 15	-111 (a)	ж			
IV	1111 (15)	✓	14 и 15	111- (d)	ж			

СКДНФ:

$$f(x, y, z, t) = \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}\overline{z}t \vee \overline{x}yt \vee xz\overline{t} \vee yzt \vee xyz \vee \overline{y}\overline{t}$$

000-
0-01
01-1
1-10
-111
111-
-0-0

Часть 1

Часть 2

Часть 3

Второй этап заключается в построении ТДНФ (МДНФ) по импликантной таблице покрытий.

Импликантная таблица. Строки таблицы отмечаются простыми импликантами (полученными на первом этапе, табл.1), столбцы – элементарными конъюнкциями (ЭК) из СДНФ (первоначальные). На пересечении i – й строки и j – го столбца ставится 1, если i – я импликанта покрывает (формула поглощения) j – ю ЭК из СДНФ.

Правила

П1. Если есть столбец, который покрывается только одной импликантой u_i , то u_i – обязательная импликанта, которая включается в ТДНФ. Строку u_i и столбцы, покрываемые u_i , удалить из таблицы.

П2. Если импликанта u_i покрывает подмножество столбцов V_i , u_k покрывает подмножество столбцов V_k , при этом $V_i \subseteq V_k$, тогда i – ю строку исключить из таблицы.

П3. Если j – й столбец покрывается подмножеством строк Y_j , m – й столбец – подмножеством строк Y_m , при этом $Y_j \subseteq Y_m$, тогда m – й столбец исключить из таблицы.

Второй этап заключается в построении ТДНФ (МДНФ) по импликантной таблице покрытий.

Импликантная таблица. Строки таблицы отмечаются простыми импликантами (полученными на первом этапе, табл.1), столбцы – элементарными конъюнкциями (ЭК) из СДНФ (первоначальные). На пересечении i – й строки и j – го столбца ставится 1 или любой другой символ, если i – я импликанта покрывает (формула поглощения) j – ю ЭК из СДНФ.

Правила

П1. Если есть столбец, который покрывается только одной импликантой y_i , то y_i – обязательная импликанта, которая включается в ТДНФ. Строку y_i и столбцы, покрываемые y_i , удалить из таблицы.

П2. Если импликанта y_i покрывает подмножество столбцов V_i , y_j покрывает подмножество столбцов V_j , при этом $V_i \subseteq V_j$, тогда i -ю строку исключить из таблицы.

П3. Если j -й столбец покрывается подмножеством строк Y_j , m -й столбец – подмножеством строк Y_m , при этом $Y_j \subseteq Y_m$, тогда m -й столбец исключить из таблицы.

2 этап

Таблица 2.1

		А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И
		0000	0001	0010	0101	0111	1000	1010	1110	1111
1	000-	*	*							
2	0-01		*		*					
3	01-1				*	*				
4	1-10							*	*	
5	-111					*				*
6	111-								*	*
7	-0-0	*		*			*	*		

П1. Столбцы В и Е покрываются только одной строкой 7. Следовательно, импликанта -0-0 явл-ся обязательной, она включается в МДНФ. Удаляем строку 7 и столбцы, которые она покрывает: А, В, Е, Ж.

Таблица 2.2

	Б	Г	Д	З	И

		Б	Г	Д	З	И
		0001	0101	0111	1110	1111
2	0-01	*	*			
3	01-1		*	*		
5	-111			*		*
6	111-				*	*

Таблица 2.4

		Д
		0111
3	01-1	*
5	-111	*

В итоге получаем 2 ТДНФ

$$f_1(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}zt \vee xyz \vee \bar{x}yt$$

$$f_2(x, y, z, t) = \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}zt \vee xyz \vee yzt$$

I

Минимальной является та, которая содержит наименьшее количество символов.