Дискретная математика. Лекция 25.03.

С. В. Ткаченко

25.03.2022

Алгеброй Жегалкина называют алгебру на множестве булевых функций, которая включает две операции: конъюнкцию ($\wedge$) и сумму по mod 2 ($\oplus$), а также константы 0 и 1.

Равносильности алгебры Жегалкина

Коммутативность	
$x \wedge y = y \wedge x$	$x \oplus y = y \oplus x$
Ассоциативность	
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
Дистрибутивность	
$x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$	
Равносильности идемпотентности, дополнения, тождества и констант	
$x \wedge x = x$	$x \oplus x = 0$
$x \wedge 0 = 0$	$x \oplus 0 = x$
$x \wedge 1 = x$	$x \oplus 1 = \overline{x}$

Замена операций

1)$x \vee y = \overline{(\overline{x} \wedge \overline{y})} = (x \oplus 1) \wedge (y \oplus 1) \oplus 1 = x \wedge y \oplus x \oplus y$;

2)$x \sim y = \overline{(\overline{x} \oplus \overline{y})} = \overline{x} \oplus \overline{y} \oplus 1 = x \oplus 1 \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1$.

Полином Жегалкина функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется полином вида

$$P(x_1, ..., x_n) = \\ a_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} a_i \wedge x_i \oplus \sum_{i,j=1; i \neq j}^{n} a_{ij} \wedge x_i \wedge x_j \oplus ... \oplus \\ a_{12...n} \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n,$$

где коэффициенты $a_0, a_i, a_{ij}, ..., a_{12...n}$ принимают значение 0 или 1.
Теорема 9 (теорема Жегалкина). Каждая булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина и притом единственным образом, с точностью до порядка слагаемых.

Пример. Построить полином Жегалкина для

$$f(x, y, z) = (\overline{y} \sim x) \vee \overline{z}.$$

1 способ
$f(x, y, z) = (\overline{y} \sim x) \vee \overline{z} =$
$= [(\overline{y} \sim x) \wedge \overline{z}] \oplus [\overline{y} \sim x] \oplus [\overline{z}] =$
$= [(\overline{y} \oplus x \oplus 1) \wedge (z \oplus 1)] \oplus [\overline{y} \oplus x \oplus 1] \oplus [z \oplus 1] =$
$= [(y \oplus 1 \oplus x \oplus 1) \wedge (z \oplus 1)] \oplus [y \oplus 1 \oplus x \oplus 1] \oplus [z \oplus 1] =$
$= [(y \oplus x) \wedge (z \oplus 1)] \oplus [y \oplus x] \oplus [z \oplus 1] =$
$= [yz \oplus y \oplus xz \oplus x] \oplus [y \oplus x] \oplus [z \oplus 1] =$
$= yz \oplus y \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus x \oplus z \oplus 1 = (y \oplus y = 0, x \oplus x = 0) =$
$= 1 \oplus z \oplus xz \oplus yz = P(x, y, z).$

2 способ
$P(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz$

x	y	z	$\overline{y}$	$\overline{y} \sim x$	$\overline{z}$	$f(x, y, z)$	Коэффициент
0	0	0				1	a_0
0	0	1				0	a_3
0	1	0				1	a_2
0	1	1				1	a_{23}
1	0	0				1	a_1
1	0	1				1	a_{13}
1	1	0				1	a_{12}
1	1	1				0	a_{123}

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$P(0, 0, 0) = a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1,$
$P(0, 0, 1) = a_0 \oplus a_3 = 0,\ 1 \oplus a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1,$
$P(0, 1, 0) = a_0 \oplus a_2 = 1,\ 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0,$
$P(0, 1, 1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1, 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{23} = 1 \Rightarrow a_{23} = 1,$
$P(1, 0, 0) = a_0 \oplus a_1 = 1,\ 1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0,$
$P(1, 0, 1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1, 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 1,$
$P(1, 1, 0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1, 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 1 \Rightarrow a_{12} = 0,$

$P(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} =$
$1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{123} = 0,$