Дискретная математика. Лекция 11.03.

С. В. Ткаченко

11.03.2022

Две формулы A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения на одном и том же списке переменных $X_1, X_2, ..., X_n$, входящих в A и B.
Обозначение $A \equiv B$.

Основные равносильности формул

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности

1. Коммутативность а) $A \vee B \equiv B \vee A$, б) $A \wedge B \equiv B \wedge A$.	2. Ассоциативность а) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$, б) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
3. Дистрибутивность а) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, б) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.	4. Равносильность де Моргана а) $\overline{(A \vee B)} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$, б) $\overline{(A \wedge B)} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.
5. Идемпотентность а) $A \vee A \equiv A$, б) $A \wedge A \equiv A$.	6. Формулы поглощения а) $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, б) $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.
7. Равносильность тождества а) $A \vee \text{Л} \equiv A$, б) $A \wedge \text{И} \equiv A$.	8. Формулы констант а) $A \vee \text{И} \equiv \text{И}$, б) $A \wedge \text{Л} \equiv \text{Л}$.
9. Формулы дополнения а) $A \vee \overline{A} \equiv \text{И}$, б) $A \wedge \overline{A} \equiv \text{Л}$, в) $\overline{\text{И}} \equiv \text{Л}$, г) $\overline{\text{Л}} \equiv \text{И}$.	10. Закон инволюции (снятие двойного отрицания) $\overline{\overline{A}} \equiv A$
11. Формулы расщепления а) $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$, б) $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$	

Замена логических операций

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$	$A \to B \equiv \overline{A \wedge \overline{B}}$
$A \sim B \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$	$A \sim B \equiv (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$
$A \oplus B \equiv (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$	$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$
$A \vee B \equiv \overline{A} \to B$	$A \vee B \equiv \overline{(\overline{A} \wedge \overline{B})}$
$A \wedge B \equiv \overline{(A \to \overline{B})}$	$A \wedge B \equiv \overline{(\overline{A} \vee \overline{B})}$
$A \vert B \equiv \overline{(A \wedge B)}$	$A \downarrow B \equiv \overline{(A \vee B)}$

Пусть $X_1, ..., X_n$ - все входящие в формулу А элементарные высказывание. Формула

$$A^*(X_1, ..., X_n) \equiv \overline{A}(\overline{X}_1, ..., \overline{X}_n)$$

называется двойственной к формуле A.
Пример.
1. $A = X \vee Y; A^*(X, Y) \equiv \overline{A}(\overline{X}, \overline{Y}) \equiv \overline{(\overline{X} \vee \overline{Y})} \equiv \overline{\overline{X}} \wedge \overline{\overline{Y}} \equiv X \wedge Y$.
Дизъюнкция ($\vee$) двойственна конъюнкции ($\wedge$), и наоборот.

Пусть формула A зависит от списка переменных $X_1, ..., X_n$.

Формула A называется *тождественно-истинной* (или *тавтологией*), если на всех оценках списка переменных $X_1, ..., X_n$ она принимает значение И.
Пример. $X \vee \overline{X}$.

Формула A называется *выполнимой*, если она хотя бы на одной оценке списка переменных $X_1, ..., X_n$ она принимает значение И.
Пример. $\overline{X} \wedge Y$.

Формула A называется *тождественно-ложной*, если на всех оценках списка переменных $X_1, ..., X_n$ она принимает значение Л.
Пример. $X \wedge \overline{X}$.

Формула A называется *опровержимой*, если хотя бы на одной оценке списка переменных $X_1, ..., X_n$ она принимает значение Л.
Пример. $X \vee Y$.

Утверждение 1.

1. A - тавтология $\Leftrightarrow$ A не является опровержимой.
2. A - тождественно-ложна $\Leftrightarrow$ A не является выполнимой.
3. A - тавтология $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ - тождественно-ложна.
4. A - тождественно-ложна $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ - тавтология.
5. $A \sim B$ - тавтология $\Leftrightarrow$ $A \equiv B$.

Некоторые тавтологии (A, B, C - произвольные формулы)

$A \vee \overline{A}$	$A \to A$
$A \to (B \to A)$	$A \to (B \to (A \wedge B))$
$(A \wedge B) \to A$	$A \to (A \vee B)$
$(A \wedge B) \to B$	$B \to (A \vee B)$
$(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$	$((A \to B) \to A) \to A$
$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Формулу называют *элементарной дизъюнкцией*, если она является дизъюнкцией переменных или отрицаний переменных.
Пример.
$A_1(X,Y) = \overline{Y}; A_2(X,Y,Z) = Z;$
$A_3(X,Y,Z) = X \vee Y; A_4(X,Y,Z) = \overline{Z} \vee \overline{Y} \vee X.$

Формула находится в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.
Пример.
$A_1(X,Y) = Y; A_2(X,Y) = (Y) \wedge (X);$
$A_3(X,Y,Z) = (\overline{Y} \vee \overline{X} \vee Z);$
$A_4(X,Y,Z) = \overline{Z} \wedge (\overline{Y} \vee X);$
$A_5(X,Y,Z) = (\overline{X} \vee \overline{Z} \vee \overline{Y}) \wedge (X \vee \overline{Y}) \wedge Z.$

Пусть формула A зависит от n переменных. Формула A находится в **СДНФ** относительно этих переменных, если выполняются следующие условия:
а) A находится в ДНФ (дизъюнкция элементарных конъюнкций);
б) в ней нет двух одинаковых дизъюнктивных членов (т.е. элементарных конъюнкций);
в) каждый дизъюнктивный член (элементарная конъюнкция) формулы A является n-членной конъюнкцией, причем на i-ом месте ($1 \leq i \leq n$) этой конъюнкции обязательно стоит либо переменная X_i, либо ее отрицание $\overline{X}_i$.

Пример. Пусть (X_1, X_2, X_3) - список переменных.
$A(X_1, X_2, X_3) = X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge X_3$;
$B(X_1, X_2, X_3) = (\overline{X}_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \overline{X}_2 \wedge \overline{X}_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)$;
$C(X_1, X_2, X_3) = (\overline{X}_2 \wedge X_3) \vee (\overline{X}_3 \wedge X_1 \wedge X_2)$;

A и B - СДНФ, C - не является СДНФ.

Формула A находится в **СКНФ** относительно списка переменных, если выполняются следующие условия:
а) A находится в КНФ (конъюнкция элементарных дизъюнкций);
б) в ней нет двух одинаковых конъюнктивных членов (т.е. элементарных дизъюнкций);
в) каждый конъюнктивный член (элементарная дизъюнкция) формулы A является n-членной дизъюнкцией, причем на i-ом месте $(1 \leq i \leq n)$ этой дизъюнкции обязательно стоит либо переменная X_i, либо ее отрицание $\overline{X}_i$.
Пример. Пусть (X_1, X_2, X_3) - список переменных.
$A(X_1, X_2, X_3) = \overline{X}_1 \vee \overline{X}_2 \vee X_3$;
$B(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_2 \vee \overline{X}_3) \wedge (X_1 \vee \overline{X}_2 \vee X_3)$;
$C(X_1, X_2, X_3) = (\overline{X}_1 \vee X_3 \vee X_2) \wedge (\overline{X}_1)$;

A и B - СКНФ, C - не является СКНФ.