

# Лекция 3

## Динамика материальной точки

# Лекция 3 - Динамика материальной точки

## ТОЧКИ

- 3.1. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы
- 3.2 Принцип относительности Галилея
- 3.3. Масса и импульс тела. Сила. Второй закон Ньютона.
- 3.4. Принцип суперпозиции.
- 3.5. Третий закон Ньютона.
- 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.
- 3.7. Движение центра масс.
- 3.8. Закон сохранения импульса.
- 3.9. Силы в механики.

### 3.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона.

■ Классическая динамика основана на трех законах сформулированных Ньютоном. Классическая ньютоновская динамика (механика) описывает обширный круг явлений. Однако существуют **границы** ее **применимости**. Классическая динамика применима при скоростях на много меньших скоростей света  $3 \cdot 10^8$  м/с и на расстояниях значительно больших

В специальной теории относительности, созданной А. Эйнштейном в 1905 г., подверглись радикальному пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Этот пересмотр привёл к созданию **«механики больших скоростей»** или, как её называют, **релятивистской механикой**. Новая механика не привела, однако, к полному отрицанию старой ньютоновской механики. Уравнение релятивистской механики, в пределе (для скоростей, малых по сравнению со скоростью света), переходят в уравнения классической механики. Таким образом, классическая механика вошла в релятивистскую механику как её частный случай и сохранила своё прежнее значение для описания движений



## 3.1 Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона.

Аналогично обстоит дело и с соотношениями между классической и квантовой механикой, возникшей в 20-ых годах прошлого века в результате развития физики атома.

Уравнения квантовой механики также дают в пределе (для масс, больших по сравнению с массами атомов) уравнения классической механики. Следовательно, классическая механика вошла в квантовую механику в качестве её предельного случая.

Таким образом, развитие науки не перечеркнуло классическую механику, а лишь показало её ограниченную применимость. *Классическая механика, основывающаяся на законах Ньютона, является механикой тел больших (по сравнению с массой атомов) масс, движущихся с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями..*

*Динамика – описывает движение тел с учетом причин, вызывающих это движение.* (от латинского «дина» – сила).

**Границы применимости** 1)  $v \ll c$  2)  $m \gg m_e$

Это законы – постулаты, опытные, не выводятся



# Исаак Ньютон

(Isaac Newton)

*4 января 1643*

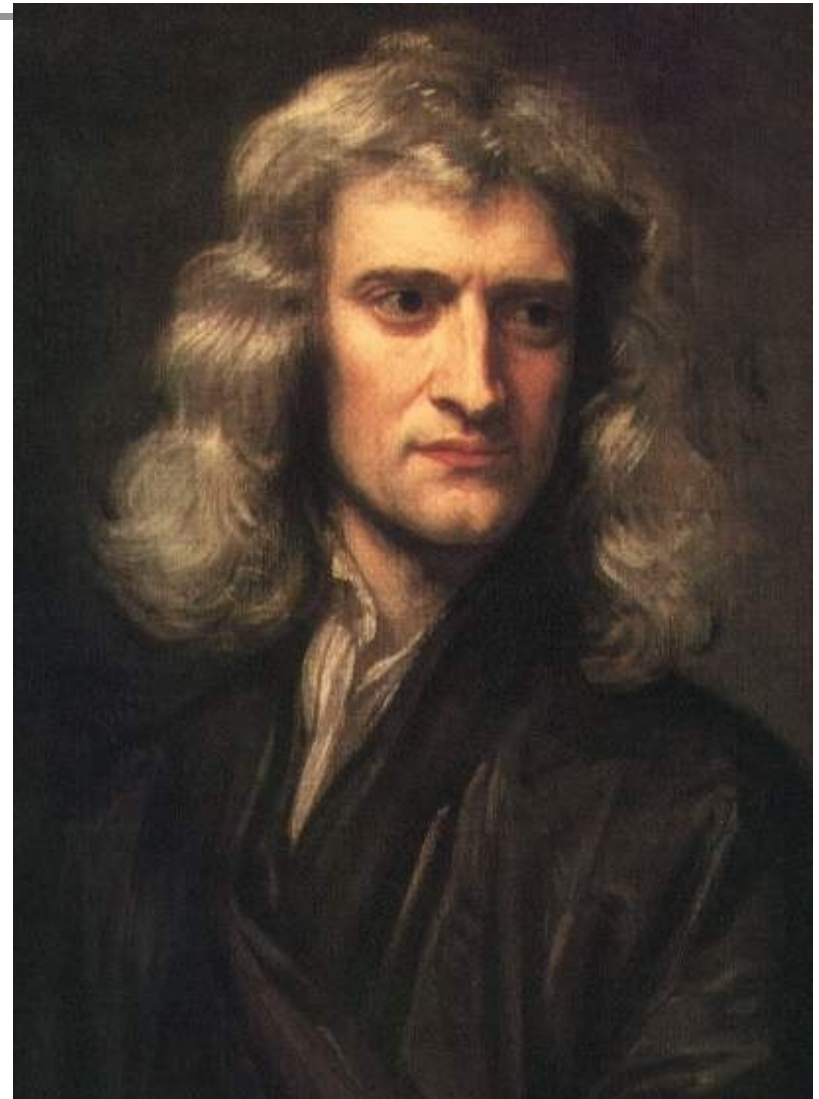
Родился *Вулсторп (Woolsthorpe)*  
*Англия*

*31 марта 1727*

Умер *Лондон (London)*  
*Англия*

**физик, математик, астроном,  
алхимик и философ**  
**важнейшие работы**

**закон всемирного тяготения**  
**дифференциальное и интегральное исчисления**  
**изобрел зеркальный телескоп**





# Эпитафия

**Ньютон умер в 1727 г. в Кинсингтоне и был похоронен  
в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве**

**На его могиле высечено:**

*"Здесь покоится Сэр Исаак Ньютон*

*Который почти божественной силой своего ума*

*Впервые объяснил*

*С помощью своего математического метода*

*Движения и формы планет*

*Пути комет, приливы и отливы океана.*

*Он первый исследовал разнообразие световых лучей*

*И истекающие отсюда особенности цветов,*

*Каких до того времени никто даже не подозревал.*

*Прилежный, проницательный и верный истолкователь*

*Природы, древностей и священного писания,*

*Он прославил в своем учении Всемогущего Творца.*

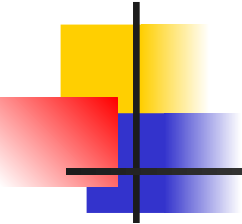
*Требуемую Евангелием простоту он доказал своей жизнью.*

***Пусть смертные радуются, что в их среде***

***Жило такое украшение человеческого рода.***

*Родился 25 декабря 1642 г.*

*Умер 20 марта 1727 года"*



## 3.1. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

---

**Первый закон Ньютона** формулируется следующим образом:  
**всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.**

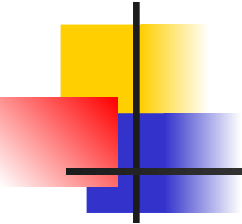
$$\vec{F} = 0, \vec{v} = const \text{ или } 0$$

Закон инерции

Оба этих состояния характеризуются тем, что ускорение тела равно нулю. Формулировке первого закона можно придать следующий вид: **скорость любого тела остается постоянной, в частности равной нулю, пока воздействие на это тело со стороны других тел не вызовет ее изменение.**

Стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**.

**Первый закон Ньютона - закон инерции**

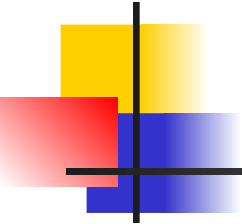


### 3.1. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

---

- Механическое движение **относительно**, и его характер зависит от системы отсчёта. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчёта, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются *инерциальными системами отсчёта*.
- ***Инерциальной системой отсчёта*** является такая система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо **покоится, либо движется прямолинейно и равномерно** (т.е. с постоянной скоростью).
- Таким образом, **первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчёта.**
-





## 3.1. Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона

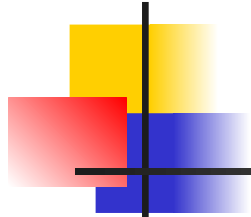
---

Сущность первого закона Ньютона может быть сведена к трём основным положениям:

- ***все тела обладают свойствами инерции;***
- ***существуют инерциальные системы отсчёта,*** в которых выполняется первый закон Ньютона;
- ***движение относительно.*** (Если тело А движется относительно тела отсчета В со скоростью  $u$ , то и тело В, в свою очередь, движется относительно тела А с той же скоростью, но в обратном направлении) .

# 3.1. Инерциальные системы отсчета.

## Первый закон Ньютона



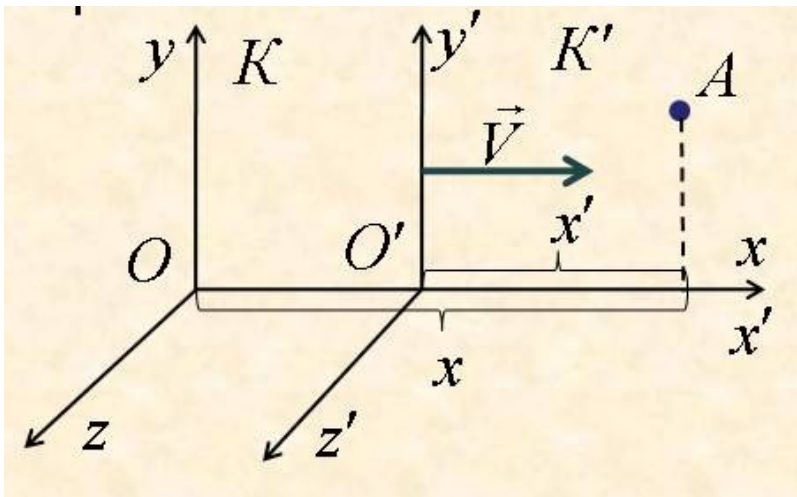
- Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется **инерциальной**, в которой не выполняется - **неинерциальной системой отсчета**.
- Любая система, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета прямолинейно и равномерно тоже будет **инерциальной**.

Для инерциальных систем справедлив

- **принцип относительности**, согласно которому все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Данное утверждение составляет содержание **принципа относительности Галилея**.
- Система отсчёта, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальная, однако эффекты, обусловленные её неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца) при решении многих задач малы, и в этих случаях её можно считать инерциальной.
- Из приведённых выше примеров легко понять, что **основным признаком инерциальной системы является отсутствие ускорения**.

## 3.2. Принцип относительности Галилея

- Согласно первому закону Ньютона находится тело в покое или движется с постоянной скоростью можно определить относительно системы отсчета.
- Пусть есть две системы отсчета  $K(x, y, z)$  и  $K'(x', y', z')$ .
- Пусть инерциальная система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{V}$  относительно другой инерциальной системы  $K$ . Выберем оси координат систем параллельно друг другу. *Движение равномерное и прямолинейное.*
- Предполагается, что *время есть абсолютное понятие во всех системах отсчета* (предположение механики Ньютона).
- В момент времени  $t=0$  начала координат обеих систем совпадают.



Ось X – общая  
Оси Y и Z – параллельны друг  
другу

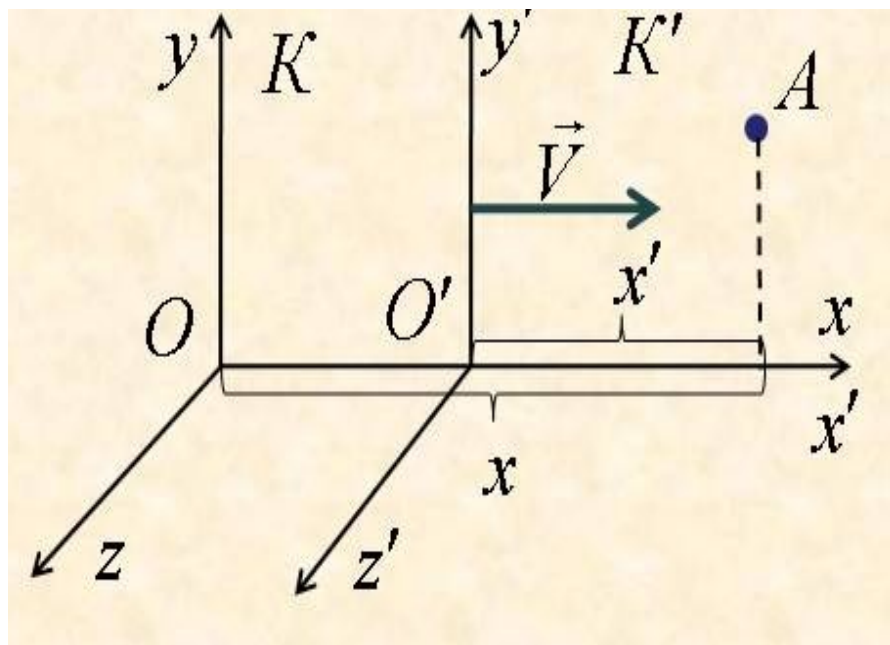
$K'(x', y', z')$

Система  
со скоростью  $\mathbf{V}$

двигается

## 3.2. Принцип относительности Галилея

- В любой момент времени  $t$  координаты точки  $A$  можно записать:



$$K(x, y, z)$$

$$K'(x', y', z')$$

$$x = x' + Vt'$$

$$x' = x - Vt$$

$$y = y'$$

$$y' = y$$

$$z = z'$$

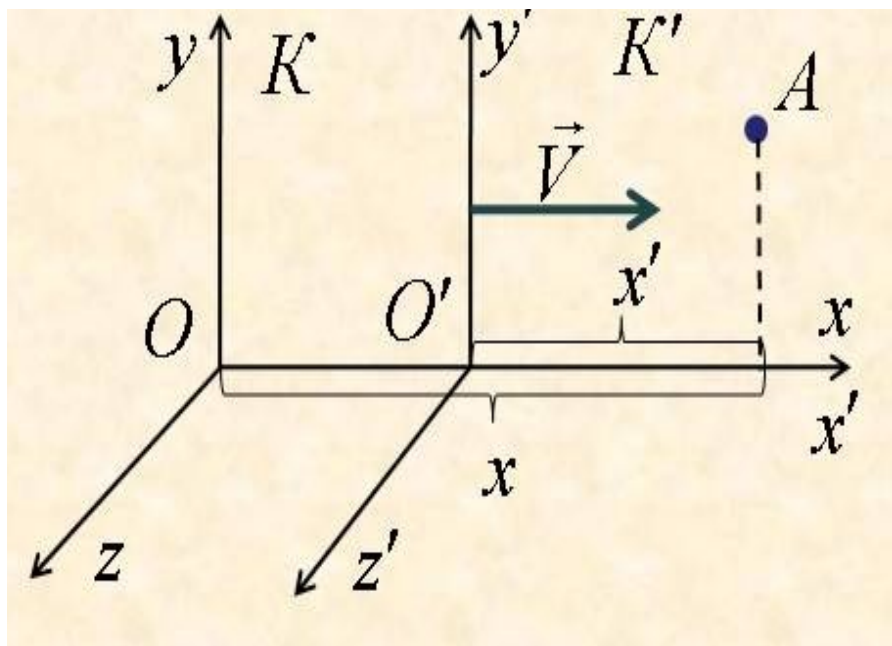
$$z' = z$$

$$t' = t$$

Преобразования Галилея связывают кинематические параметры в двух ИСО.

## 3.2. Принцип относительности Галилея

Если скорость  $\mathbf{V}$  если скорость направлена произвольно, то уравнения примут вид: любой момент времени  $t$  координаты точки  $A$  можно записать:



$$K(x, y, z)$$

$$x = x' + V_x t'$$

$$y = y' + V_y t' \quad t' = t$$

$$z = z' + V_z t'$$

Или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t'$$

- это преобразование Галилея для координат

## 3.2. Принцип относительности Галилея

Продифференцируем по времени:

$$\begin{array}{lll} x = x' + V_x t' & \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V_x \frac{dt'}{dt} & v_x = v'_x + V_x \\ y = y' + V_y t' & \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + V_y \frac{dt'}{dt} & v_y = v'_y + V_y \\ z = z' + V_z t' & \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + V_z \frac{dt'}{dt} & v_z = v'_z + V_z \\ t = t' & \frac{dt}{dt} = \frac{dt'}{dt} & v = v' + V \end{array}$$

$$v = v' + V$$

- преобразование  
скоростей

Продифференцируем по времени еще раз:

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

$$a = a'$$




## 3.2. Принцип относительности Галилея

---

Следствия:

1. Во всех ИСО свойства пространства и времени *одинаковы*.
2. Следствием преобразований Галилея – закон преобразования скоростей.
3. Ускорение в любых ИСО *одинаково*.
4. Уравнения динамики при переходе из одной ИСО к другой формулируются одинаково, т.е. уравнения динамики *инвариантны* по отношению к преобразованию ИСО.
5. Все ИСО в механике *равноценны*.
6. Никакими механическими опытами, проведенными в данной ИСО, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно.



## 3.3. Масса и импульс материальной точки. Сила.

■ В динамике рассматривается движение материальной точки в связи с теми причинами (взаимодействиями), которые обуславливают тот или иной характер движения.

*Силой* называется всякое воздействие на данное тело, сообщаемое ему ускорение или вызывающее его деформацию

*Влияние другого тела или тел, вызывающее ускорение тела (изменение скорости), называют **силой**.*

**Сила -мера взаимодействия**, векторная величина.

Опыт показывает, что всякое тело оказывает сопротивление при любых попытках изменить его скорость – как по модулю, так и по направлению.

- *Свойство, выражающее степень сопротивления тела изменению его скорости, называют инертностью.*

**Мерой инертности служит величина, называемая массой.**

Чтобы определить *массу* некоторого тела, нужно сравнить её с массой тела, принятого за эталон массы (или сравнить с телом уже известной массы).





## 3.3. Масса и импульс материальной точки. Сила.

---

- Понятие массы  $m$ , вводится по определению отношений масс двух различных тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами:

- В рамках классической механики масса обладает следующими важными свойствами:

- 1) *Масса – величина аддитивная*, т.е. масса составного тела равна сумме масс его частей:

- 2) *Масса тела – величина постоянная*, не изменяющаяся при его движении (в классической механике Ньютона)

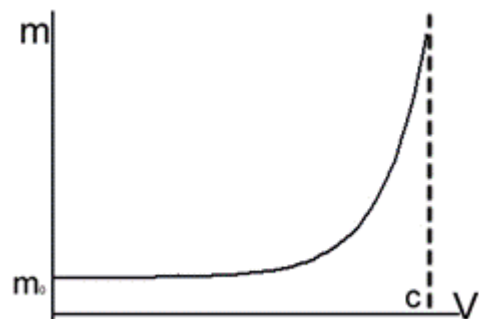
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

### 3.3. Масса и импульс материальной точки. Сила.

- В СТО Эйнштейна масса зависит от скорости движения.

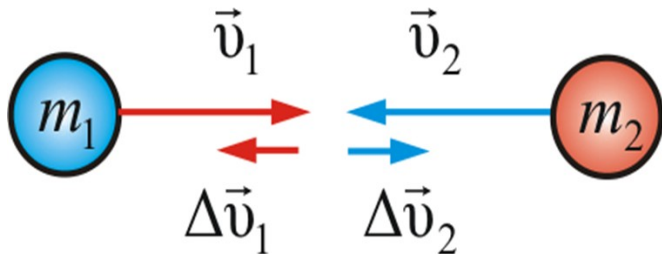
- $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$



### 3.3. Масса и импульс материальной точки.

#### Сила.

- Система тел, взаимодействующих только между собой, называется **замкнутой**.
- Рассмотрим замкнутую систему двух тел массами  $m_1$  и  $m_2$ . Столкнём эти два тела. Опыт показывает, что приращение скоростей  $\Delta \vec{v}_1$  и  $\Delta \vec{v}_2$  всегда имеют противоположное направление (отличное знаком), а модули приращений скорости относятся как:



$$\frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Тело, обладающее большей массой, меньше изменяет скорость, с учетом направления скоростей, имеем:

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \Delta \vec{v}_2$$

### 3.3. Масса и импульс материальной точки. Сила. Второй закон Ньютона

- В классической механике при  $v \ll c$  масса  $m = \text{const}$  имеем:

$$\Delta(m_1 v_1) = - \Delta(m_2 v_2)$$

- Произведение массы тела  $m$  на его скорость  $v$  называется импульсом тела
- Импульс – количественное определение состояния механической системы – количество движения.

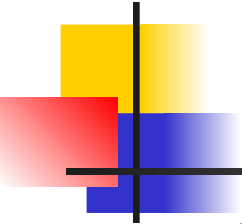
$$p = mv$$

- $m$  – масса тела,  $v$  – скорость тела.

В случае инерциального движения импульс не меняется:  
 $v = \text{const}, \quad p = \text{const/}$

$v$

$p$



### 3.3. Масса и импульс материальной точки. Сила.

---

■ *Сила – мера воздействия одного тела на другое.*

Полная характеристика силы включает следующую информацию:

- 1) природу взаимодействия;
- 2) тело, со стороны которого действует сила;
- 3) тело, на которое действует сила (точка приложения силы);
- 4) линия действия силы;
- 5) направление силы;
- 6) величина силы.
- $\vec{F}$  – сила
- Единицы измерения – Н (Ньютон)  $= \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$

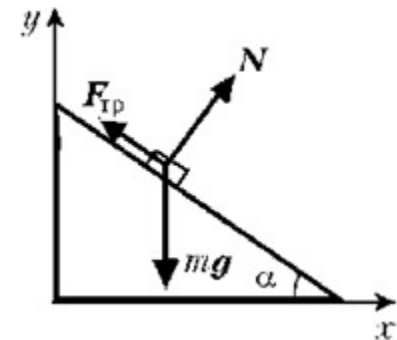
## 3.4. Второй закон Ньютона

**Второй закон Ньютона** устанавливает связь динамических и кинематических параметров и формулируется следующим образом: *ускорение всякого тела прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе тела.*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Опыт показывает, что если на тело действуют несколько сил, то результирующая сила  $\mathbf{F}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots,$$





## 3.4. Второй закон Ньютона

- **Второй закон Ньютона** – изучает, как воздействие одних тел влияет на характер движения других.
- **Второй закон Ньютона** *утверждает, что состояние движения тела меняется пока и поскольку на него действует сила.*
- Если на тело действует несколько сил одновременно, то каждая сила действует независимо и сообщает телу ускорение:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}$$

или

$$F_p = ma$$

## 3.4. Второй закон Ньютона

- Зная, что  $p = mv$  второй закон Ньютона можно записать в форме, которую дал Ньютон:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

II закон Ньютона - результирующая сила, действующая на тело, равна скорости изменения импульса тела.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Запишем второй закон в другой форме:

II закон Ньютона - изменение импульса тела равно импульсу силы, действующего на него.

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$$

$\vec{p}$  - конечный импульс тела,  $p_0$  - начальный импульс тела.



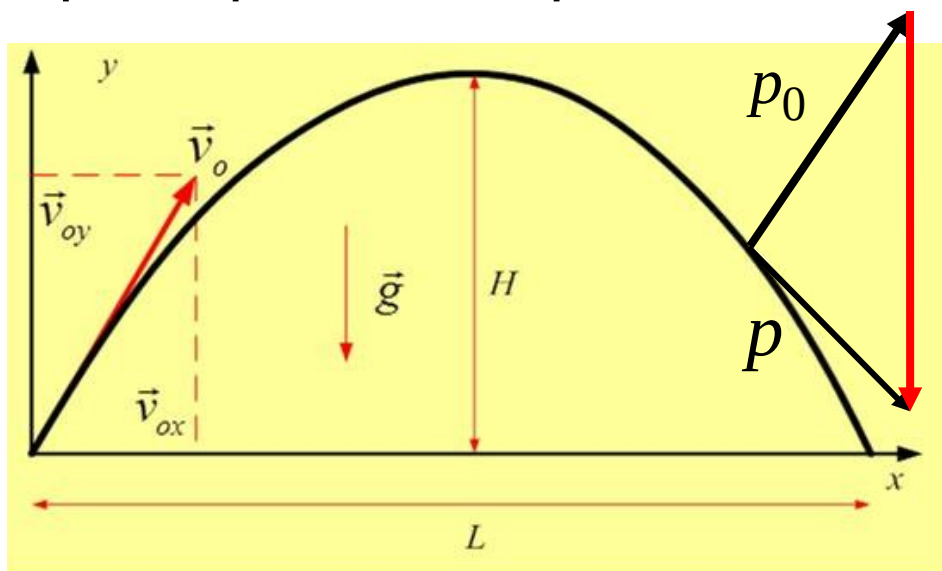
### 3.4. Второй закон Ньютона

Если сила, действующая на тело, постоянная, не зависит от времени  $t$ , то

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Вектор изменения импульса тела  $\Delta \vec{p}$  ( ) совпадает по направлению с вектором результирующей силы (импульсом силы) - .

Пример: Тело, брошенное под углом к горизонту



$$\Delta p = mg \cdot \Delta t$$

$$\Delta p \uparrow \uparrow mg$$

## 3.4. Второй закон Ньютона

- Еще одно выражение **второго закона Ньютона**:

$$\frac{dp}{dt} = \vec{F}$$

*тела  
тело силе.*

- скорость изменения импульса  
равна действующей на

Отсюда можно заключить, что:

$$dp = F \cdot dt$$

- изменение импульса тела равно  
импульсу силы

$$\frac{d(mv)}{dt} = F, \text{ так как } m = \text{const, то } m \frac{dv}{dt} = F \quad \text{или} \quad ma = F$$

Второй закон Ньютона ( в любой форме  
записи) – это **основное уравнение динамики**  
поступательного движения материальной точки



## принцип независимости действия сил

- Если на материальное тело действуют несколько сил, то результирующую силу можно найти из выражения:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i,$$

- Из второго закона Ньютона, имеем

где  $\vec{a}_i$  - ускорение тела, под действием силы  $\vec{F}_i$ .

Тогда:

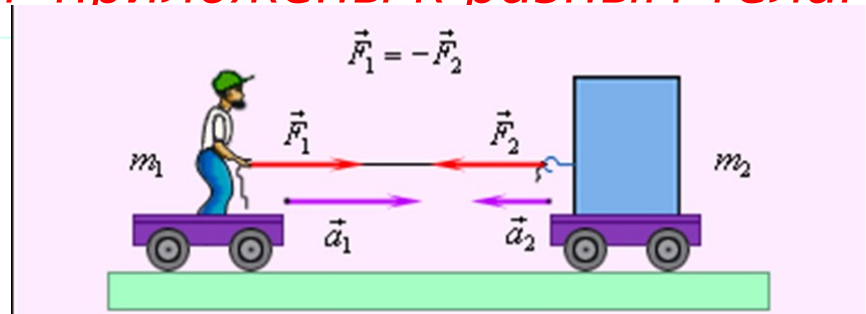
$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

*Если на материальную точку действует несколько сил, то каждая из них сообщает точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.*

## 3.5. Третий закон Ньютона

Действие тел друг на друга носит характер **взаимодействия**. Третий закон Ньютона отражает тот факт, что сила есть результат взаимодействия тел, и устанавливает, что *силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, и приложены к разным телам, т.е.*

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$



Третий закон Ньютона в общем случае является универсальным законом взаимодействий: **всякое действие вызывает равное по величине противодействие.**

Подчеркнем, что силы, связанные по третьему закону Ньютона, **приложены к различным телам** и,

## 3.5. Третий закон Ньютона

- Из третьего закона Ньютона следует:

$$F_{12} = F_{21} \rightarrow m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \rightarrow$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Из второго и третьего законов следует:

$$\overrightarrow{\Delta p_1} = \int_0^t \overrightarrow{F_{12}} \cdot dt$$

$$\overrightarrow{\Delta p_2} = \int_0^t \overrightarrow{F_{21}} \cdot dt = - \int_0^t \overrightarrow{F_{12}} \cdot dt = -\overrightarrow{\Delta p_1}$$

$$\overrightarrow{\Delta p_2} = -\overrightarrow{\Delta p_1}$$

- *Изменение импульсов взаимодействующих тел одинаковы по величине и противоположны по направлению*



## 3.5. Третий закон Ньютона

---

- 1. Силы в природе возникают парами.
- 2. Эти силы одной природы.
- 3. Они равны по модулю и противоположны по направлению.
- 4. Силы действуют вдоль одной прямой.
- 5. Приложены к разным телам.



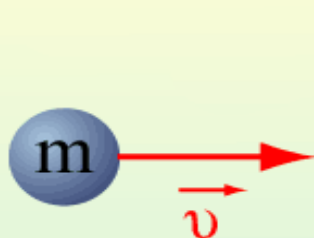
## 3.5. Третий закон Ньютона

---

- Однако, третий закон справедлив не всегда. Он выполняется в случае контактных взаимодействий, т.е. при соприкосновении тел, а также при взаимодействии тел, находящихся на расстоянии друг от друга, но покоящихся друг относительно друга.
- Законы Ньютона плохо работают при  $v \approx c$  (релятивистская механика) а также, при движении тел очень малых размеров, сравнимых с размерами элементарных частиц. Так, например, нуклоны внутри ядра, кварки внутри нуклонов, и даже электроны внутри атома, **не подчиняются законам Ньютона.**

# Законы Ньютона

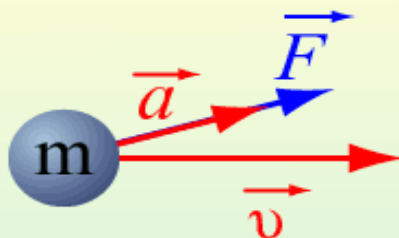
## Законы Ньютона



$$\vec{v} = \text{const}, \text{ при } \vec{F} = 0$$

### I закон

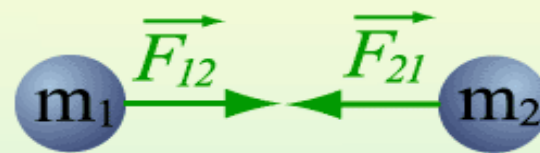
Существуют такие системы отсчета, в которых всякое тело будет сохранять состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не заставит его изменить это состояние.



$$\vec{F} = m \vec{a}$$

### II закон

Под действием силы тело приобретает такое ускорение, что его произведение на массу тела равно действующей силе.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

### III закон

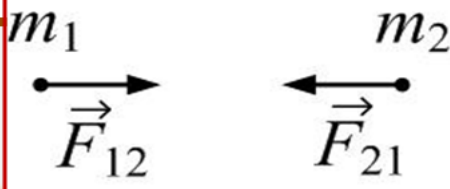
Силы, с которыми взаимодействующие тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.



## 3.5. Третий закон Ньютона

### Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



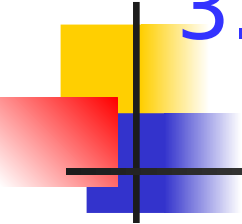
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению

Если система двух тел замкнута, по второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} d\vec{p}_1 = \vec{F}_{12} \cdot dt \\ d\vec{p}_2 = \vec{F}_{21} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) \cdot dt = 0$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$



## 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.

Рассмотрим систему из  $N$  взаимодействующих тел (материальных точек). Каждая точка имеет массу  $m_i$  и скорость  $v_i$ , т.е. обладает импульсом:  $p_i = m_i v_i$ .

Тогда импульс системы тел:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_i = \sum_{i=1}^N p_i$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Для системы тел (материальных точек) вводят понятие *центра масс системы*.

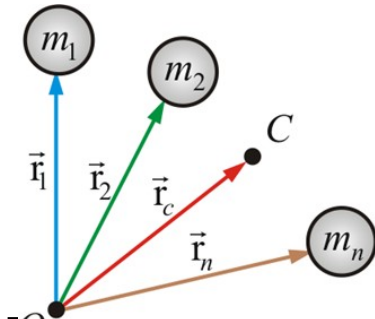
*Центром масс системы тел называют такую точку  $C$ , радиус-вектор которой, относительно произвольной точки  $O$*

-  $r_c$

## 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.

*Центром инерции* или *центром масс системы материальных точек* называют такую точку  $C$ , радиус-вектор которой:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

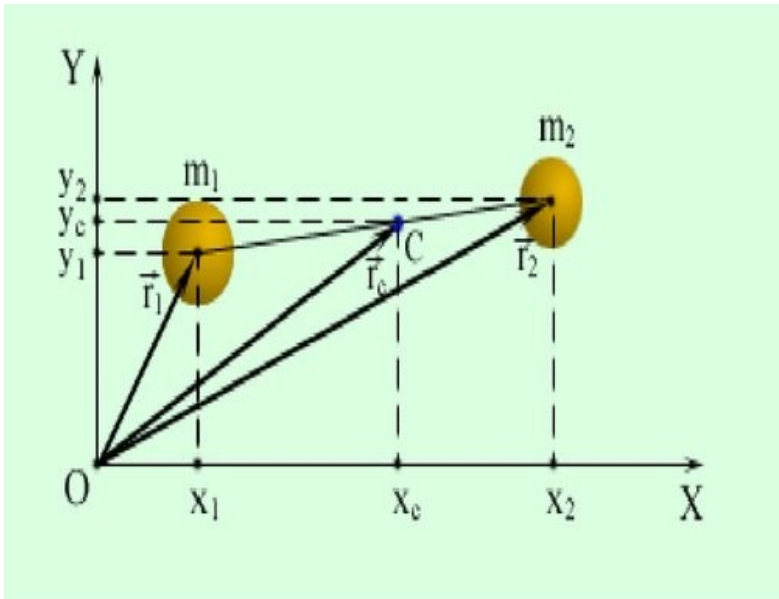


где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — общая масса системы,  $n$  — число тел системы.

При этом не надо путать центр масс с центром тяжести системы — с точкой приложения равнодействующей сил тяжести всех тел системы.

Центр тяжести совпадает с центром масс (центром инерции), если  $g$  (ускорение силы тяжести) для всех тел системы одинаково (когда размеры системы гораздо меньше размеров Земли).

## 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M}, z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}$$

Если тело протяженное, то:

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

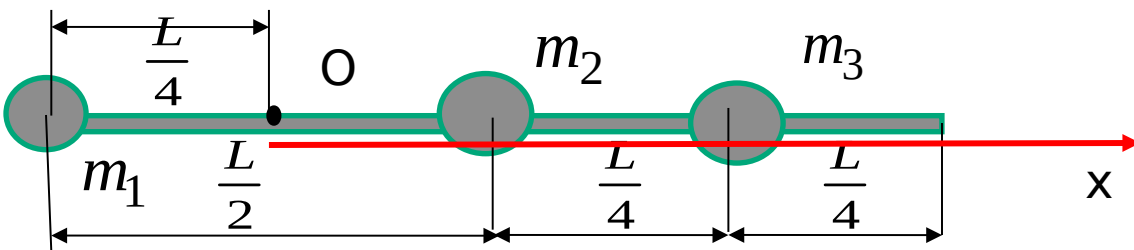
или

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} \rho dV}{\int \rho dV}$$

### 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.

*Пример:* Физический маятник состоит из стержня, длиной  $L$  и массой  $M$ , и трех шаров, массами  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , которые расположены на стержне как показано на рис. Найти центр масс системы относительно оси, находящейся на расстоянии  $\frac{L}{4}$  от левого конца стержня, точка  $O$ .

*Решение:* Так как центры масс всех тел системы лежат на одной оси  $X$ , то по определению центра масс :



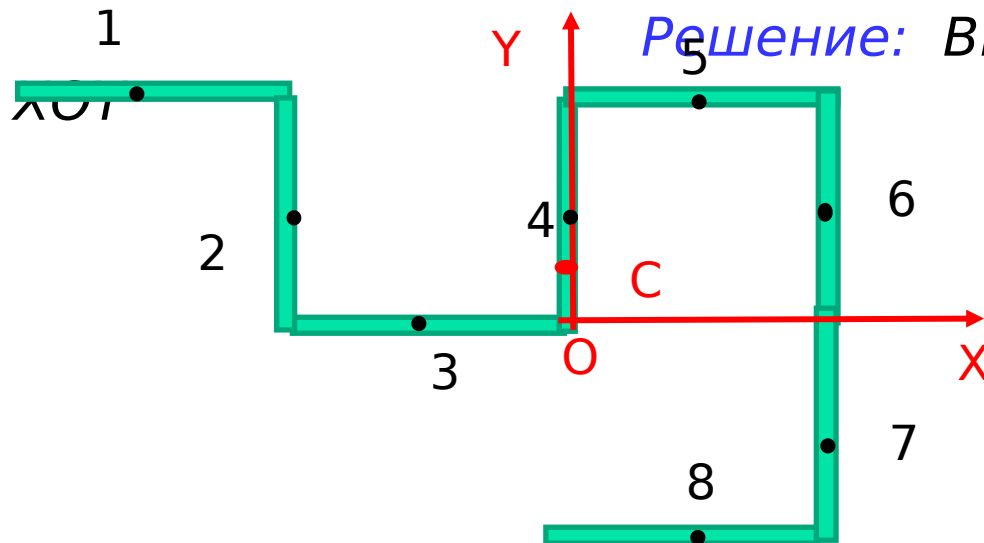
$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Начало оси  $X$  расположим в точке  $O$  и направим вдоль стержня:

$$x_c = \frac{M \cdot \frac{L}{4} - m_1 \cdot \frac{L}{4} + m_2 \cdot \frac{L}{4} + m_3 \cdot \frac{L}{2}}{M + m_1 + m_2 + m_3}$$

## 3.6. Импульс произвольной системы тел. Центр масс.

**Пример:** Система состоит из 8 одинаковых стержней, каждое длиной  $L$  и массой  $m$ . Найти положение центра масс.



**Решение:** Выберем систему координат

Координаты центров масс каждого стержня:

$$3 \rightarrow x_3 = -0,5L; y_3 = 0$$

$$4 \rightarrow x_4 = 0; y_4 = 0,5L$$

$$5 \rightarrow x_5 = 0,5L; y_5 = L$$

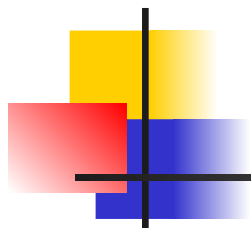
$$6 \rightarrow x_6 = L; y_6 = 0,5L$$

$$7 \rightarrow x_7 = L; y_7 = -0,5L$$

$$8 \rightarrow x_8 = 0,5L; y_8 = -L$$

$$x_c = \frac{-m \cdot 1,5L - m \cdot L - m \cdot 0,5L + m \cdot 0 + m \cdot 0,5L + m \cdot L + m \cdot L + m \cdot 0,5L}{8m} = 0$$

$$y_c = \frac{m \cdot L + m \cdot 0,5L + m \cdot 0 + m \cdot 0,5L + m \cdot L + m \cdot 0,5L - m \cdot 0,5L - m \cdot L}{8m} = \frac{2mL}{8m} = \frac{L}{4}$$



**Дано:**

$d$

$$m_1 = m$$

$$m_2 = 2m$$

$$m_3 = 3m$$

$$m_4 = 4m$$

**Найти:**

$r_c$ —?

**Задача .** Найти положение центра масс квадрата со стороной  $d$ , массы сторон которого равны  $m, 2m, 3m, 4m$ .

**Решение:**

Пронумеруем стороны квадрата в соответствии с их массами. Выберем начало  $O$  системы координат в центре квадрата и направление осей координат. Заменим стороны квадрата материальными точками, находящимися в центрах его сторон. В этой системе координат положения центров сторон квадрата равны

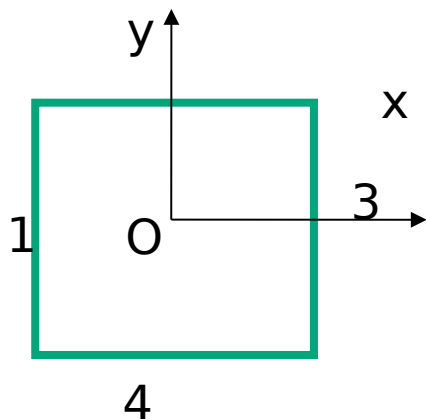
$$\blacksquare \quad x_1 = -\frac{d}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{d}{2}, x_4 = 0; y_1 = 0, y_2 = \frac{d}{2}, y_3 = 0, y_4 = -\frac{d}{2}.$$

■ Координаты  $x_c, y_c$  и положение  $r_c$  центра масс  $C$  квадрата относительно его центра  $O$  (полная масса квадрата  $m_0 = \sum m_i = 10m$ ) равны

$$\blacksquare \quad x_c = \frac{x_1 m_1 + x_3 m_3}{m_0} = \frac{dm}{10m} = \frac{d}{10}, y_c = \frac{y_2 m_2 + y_4 m_4}{m_0} = -\frac{dm}{10m} = -\frac{d}{10}, r_c = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \frac{d\sqrt{2}}{10}$$

■ Угол  $\alpha = \widehat{e_x, r_c}$  между направлением вектора  $r_c$  и осью  $X$  определяется условием  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_c}{x_c} = -1$ , то есть  $\alpha = \widehat{e_x, r_c} = -45^\circ$ .

**Ответ:**  $x_c = \frac{d}{10}, y_c = -\frac{d}{10}, r_c = \frac{d\sqrt{2}}{10}, \alpha = \widehat{e_x, r_c} = -45^\circ$ .





## 3.7. Движение центра масс.

### ■ Скорость центра инерции системы:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

- $\vec{p}$  - импульс системы тел,  $\vec{v}_i$  - скорость i-ого тела системы.

Так как 
$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c$$

то импульс системы тел можно определить так: 
$$\vec{p} = m \vec{v}_c$$

**импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость её центра инерции**



## 3.7. Движение центра масс

- Ускорение центра масс:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{\vec{F}_p}{M}$$

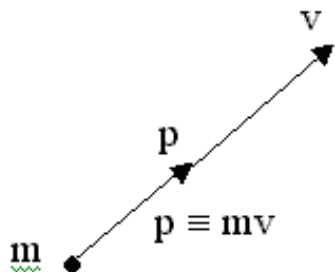
- $\vec{F}_i$  - сила, действующая на i-ое тело системы,
- $\vec{F}_p$  - результирующая сила, действующая на систему.

$\vec{F}_p = M \cdot \vec{a}_c$  - центр масс системы двигается так, как двигалась бы материальная точка с массой равной массе тела, под действием силы, равной равнодействующей внешних сил, что сводит задачу к решению задачи о движении центра масс.

## 3.8. Закон сохранения импульса.

Любое тело или совокупность тел представляет собой систему материальных точек. Для описания системы материальных точек необходимо знать закон движения каждой материальной точки системы, т.е. знать зависимость координат и скоростей каждой материальной точки от времени. Оказывается, есть общие принципы, которые можно применить к описанию системы в целом. Это законы сохранения. Существуют такие величины, которые обладают свойством сохраняться во времени. Среди этих величин наиболее важную роль играют энергия, импульс и момент импульса. Эти три величины имеют важное общее свойство **аддитивности**: их значения для системы, равно сумме значений для каждой из частей системы в отдельности.

По определению, импульс материальной точки:



$$p = mv$$

где  $m$  и  $v$  – ее масса и скорость.



## 3.8. Закон сохранения импульса

Воспользовавшись определением импульса, запишем второй закон Ньютона в иной форме:

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

*т.е. производная импульса материальной точки по времени равна результирующей всех сил действующих на материальную точку. Например если  $\mathbf{F}=0$  то  $\mathbf{p}=const$ .*

Это уравнение позволяет найти приращение импульса материальной точки за любой промежуток времени, если известна зависимость силы  $\mathbf{F}$  от времени:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0 \mathbf{F} dt$$

Таким образом, приращение импульса частицы за любой промежуток времени зависит не только от значения силы, но и от продолжительности ее действия



## 3.8. Закон сохранения импульса

Материальные точки, входящие в систему могут взаимодействовать, как между собой, так и с другими телами не входящими в систему. В соответствии с этим

- *силы взаимодействия между материальными точками системы называются **внутренними**,*
- *а силы обусловленные взаимодействием с телами не входящими в систему называются **внешними**.*
- *В случае, если на систему не действуют внешние силы, она называется **замкнутой**.*

Импульс системы определим, как векторную сумму импульсов ее отдельных частей:

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$$

## 3.8. Закон сохранения импульса

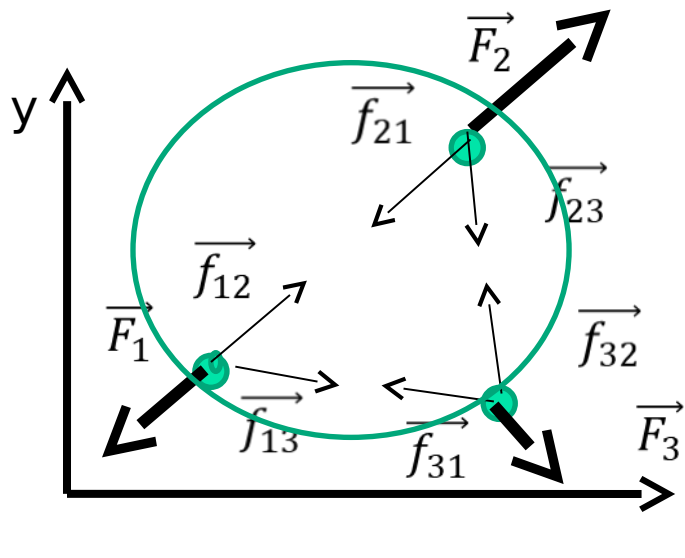
Рассмотрим импульс системы состоящей из  $N$  материальных точек, которые могут взаимодействовать друг с другом (пусть  $N=3$ ). Силы, действующие в системе делятся на внутренние и внешние.

$f_{ik}$  - внутренняя сила, действующая на  $i$ -ую точку со стороны  $k$ -ой.

$F_i$  - результирующая внешних сил, действующая на  $i$ -тую точку.

По третьему закону Ньютона:  $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ .

По второму закону Ньютона: для каждой точки:



$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{23} + \vec{f}_{21} + \vec{F}_2$$

$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$



## 3.8. Закон сохранения импульса

■ *Движение системы материальных точек как целого определяется только внешними силами, действующими на систему.*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

***Изменение импульса системы равно равнодействующей всех внешних сил.***

Если внешние силы отсутствуют, или их равнодействующая равна нулю  $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}$  и система называется ***замкнутой.***



## 3.8. Закон сохранения импульса

**Закон сохранения импульса** можно сформулировать следующим образом: **суммарный импульс замкнутой системы материальных точек сохраняется постоянным.**

Импульс остается постоянным и для не замкнутой системы при условии, что внешние силы, действующие на материальные точки системы, в сумме дают ноль. Даже если сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторую ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось будет оставаться постоянной.

$\sum \vec{F}_i = \vec{F}$  - сила, равная сумме все внешних сил,  
приложенных к системе, называется **главным**  
вектором внешних сил.  
 $\frac{dp_x}{dt} = F_x$   $\frac{dp_y}{dt} = F_y$   $\frac{dp_z}{dt} = F_z$

если в данном направлении проекция главного вектора внешних сил равна



## 3.8. Закон сохранения импульса

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_c = \text{const}$$

*Закон сохранения импульса* можно сформулировать следующим образом: **суммарный импульс замкнутой системы материальных точек сохраняется постоянным.**

Импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:

$$\vec{p} = m \vec{v}_c \Rightarrow m \vec{v}_c = \text{const}$$

**При любых процессах, происходящих в замкнутых системах, скорость центра инерции сохраняется неизменной.**





## 3.9. Силы в механике

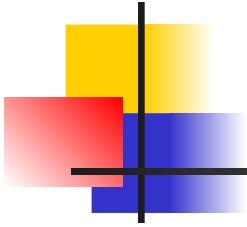
---

**Сила** – мера взаимодействия, влияние одного тела (или поля) на другое, вызывающее ускорение.

Различают четыре типа сил или взаимодействий:

- гравитационные;
- электромагнитные;
- сильные, ответственные за связь частиц в ядрах;
- слабые, ответственные за распад частиц.

-



## 3.9. Силы в механике

Виды фундаментальных взаимодействий:

### 1. Гравитационное

- Присуще всем материальным объектам.
- Определяется наличием у тел массы
- Подчиняется закону всемирного тяготения Ньютона
- Имеет неограниченный радиус действия. В области микромира роль гравитационного взаимодействия ничтожно мала.

### 2. Слабое

- Приводит к определенному виду неустойчивости элементарных частиц.
- Имеет ограниченный радиус действия
- Существенно только в области микромира.



## 3.9. Силы в механике

### 3. Электромагнитное

- Возникает между телами, имеющими электрический заряд.
- Две составляющие: электрическая и магнитная.
- Неограниченный радиус действия.
- Образование атомов, молекул, макроскопических тел.

### 4. Ядерное или сильное взаимодействие

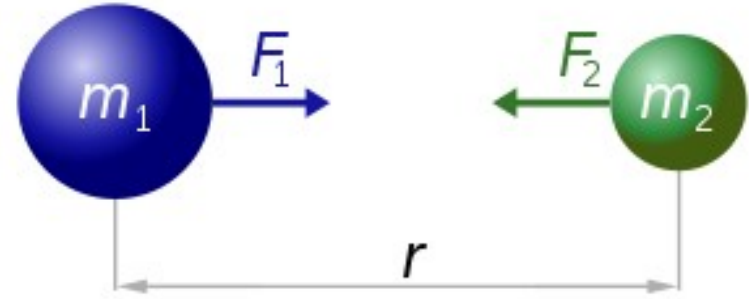
- Имеет конечный ( $\sim 10^{-15}$  м) радиус действия
- Существенно только в микромире.

Если условно принять интенсивность сильного взаимодействия за 1, то интенсивность электромагнитного взаимодействия будет  $10^{-2}$ , слабого взаимодействия  $10^{-13}$ , а гравитационного  $10^{-40}$ .

**Гравитационные и электромагнитные** силы нельзя свести к другим, более простым силам, поэтому их называют **фундаментальными**.

## 3.9. Силы в механике

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{r}{r}$$



$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$$

**Закон всемирного тяготения:** Сила, с которой два тела притягиваются друг другу, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела (центральные силы).



## 3.9. Силы в механике

Физический смысл гравитационной постоянной  $G$  в том, что она равна силе в  $6,67 \cdot 10^{-11}$  Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, центры которых отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения (гравитационное поле). *Поле* это объективная реальность, посредством которой передаётся взаимодействие. Поле, наряду с веществом, является одним из видов материи.

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой  $m$ , внесенную в это поле, действует сила притяжения  $F$ , пропорциональная  $m$ :

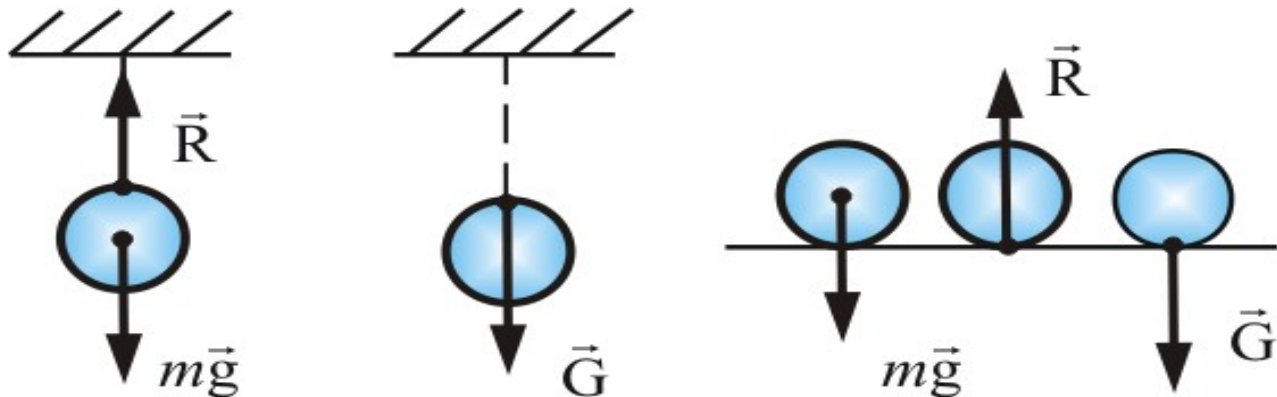
$$F = mg$$

## 3.9. Силы в механике

- **Сила тяжести** - сила притяжения тел к Земле вблизи ее поверхности

$$F = mg \Rightarrow g = G \frac{M}{R_3^2}$$

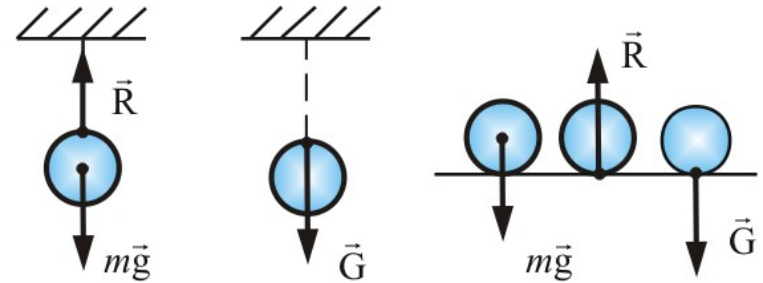
- Если подвесить тело или положить его на опору, то **сила тяжести** уравнивается силой, которую называют **реакцией опоры или подвеса**.



## 3.9. Силы в механике

По третьему закону Ньютона тело действует на подвес или опору с силой, которая *называется весом тела*.

***$P$***  Вес и сила тяжести равны друг другу, но приложены к разным точкам: вес к подвесу или опоре, сила тяжести – к самому телу. Это равенство справедливо, если подвес (опора) и тело покоятся относительно Земли (или движутся равномерно, прямолинейно). Если имеет место движение с ускорением, то справедливо соотношение:

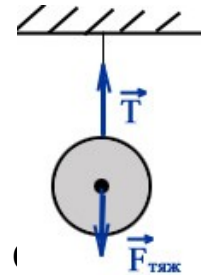
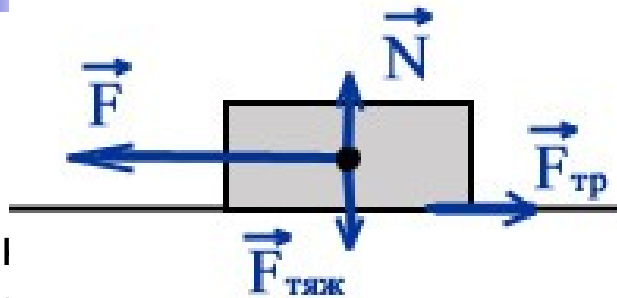


$$P = mg$$

$$P = mg \pm ma = m(g \pm a).$$

### 3.9. Силы в механике.

#### Сила реакции опоры, натяжения



- Все законы механики справедливы для твердых тел.
- Все тела делятся на *свободные* и *связанные*
- *Свободные тела* - тела, перемещение которых не ограничено.
- *Связанные тела* - тела, перемещение которых ограничено другими телами.
- Тела, ограничивающие перемещение других тел. *называются связями.*
- Реакция связи всегда направлена с той стороны, куда нельзя перемещаться.



### 3.9. Силы в механике

$$P = mg \pm ma = m(g \pm a).$$

Вес тела может быть больше или меньше силы тяжести: если  $g$  и  $a$  направлены в одну сторону (тело движется вниз или падает), то и

если наоборот, то -

$$P > mg$$

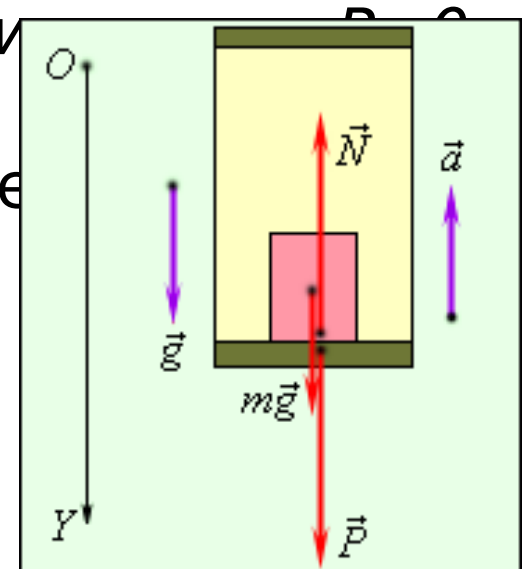
$$P < mg$$

Если тело движется с ускорением - это состояние **невесомости**.

Тело находится в движущемся лифте

$$ma = -mg + N$$

$$m(g + a) = P$$

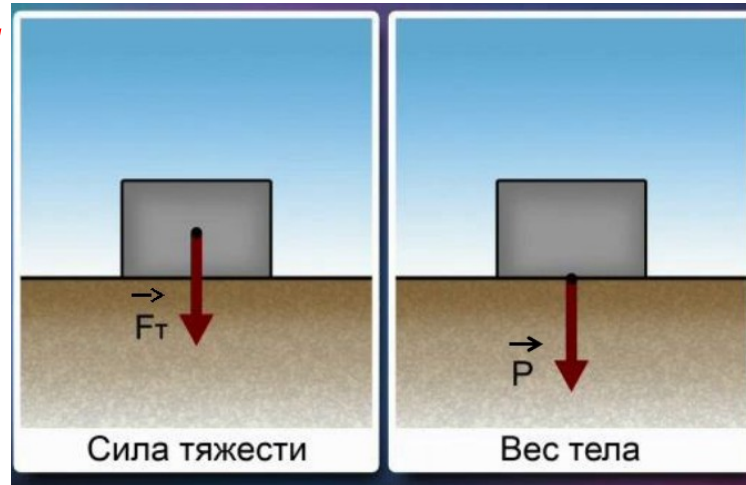


# 3.9. Силы в механике.

## Вес, сила тяжести

**Сила тяжести**

$$\vec{F} = m\vec{g}$$



**Вес**

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

- это сила притяжения действующая со стороны Земли на все тела.
- приложена к центру масс
- Направлена к центру Земли

- приложен к подвесу или опоре, на которую давит тело,
- - направлен перпендикулярно поверхности



## 3.9. Силы в механике

---

Электромагнитные силы проявляют себя как *упругие силы и силы трения*.

Под действием внешних сил возникают *деформации*

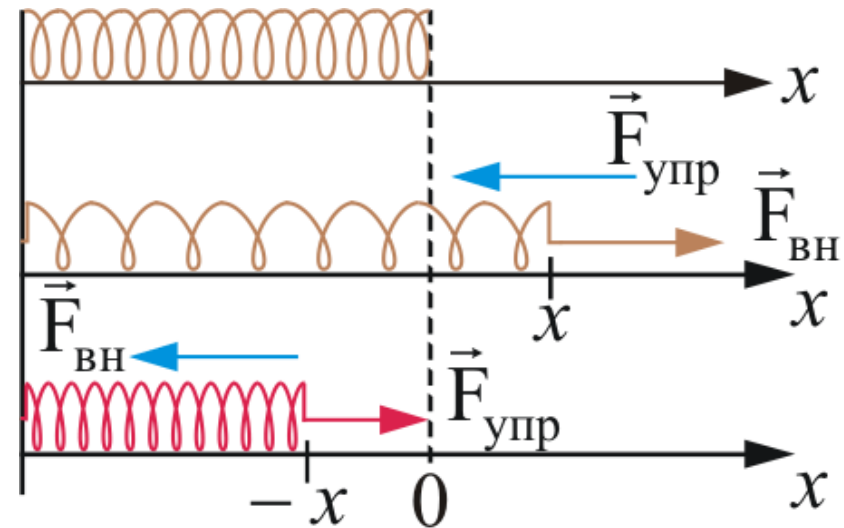
(т.е. изменение размеров и формы) тел. Если после прекращения действия внешних сил восстанавливаются прежние форма и размеры тела, то деформация называется *упругой*. Деформация имеет упругий характер в случае, если внешняя сила не превосходит определенного значения, которая называется *пределом упругости*.

При превышении этого предела деформация становится *пластичной или неупругой*, т.е. первоначальные размеры и форма тела полностью не восстанавливаются.

## 3.8. Силы в механике

Под действием *внешней силы* –  $F_{\text{вн}}$  пружина получает *удлинение*  $x$ , в результате в ней возникает *упругая сила* –  $F_{\text{упр}}$ , *уравновешивающая*  $F_{\text{вн}}$ .

Упругие силы возникают во всей деформированной пружине. Любая часть пружины действует на другую часть с силой упругости  $F_{\text{упр}}$ .  
*Удлинение пружины пропорционально внешней силе и определяется законом Гук:*



$$F_{\text{упр.}} = -kx.$$

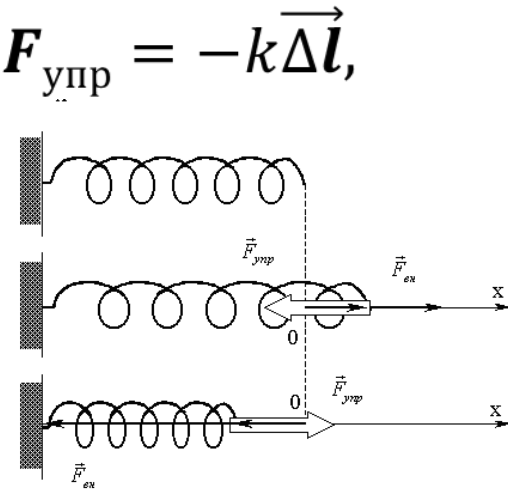
## 3.9. Силы в механике

**Сила упругости** – сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия

и направленная к положению равновесия:  $\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{\Delta l}$ ,

где  $\vec{\Delta l}$  – вектор, характеризующий смещение материальной точки из положения равновесия;

$k$  – положительный коэффициент, зависящий от упругих свойств среды. Закон Гука можно записать так:  $\frac{F}{S} = \frac{kl_0}{S} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \varepsilon$ , где первый множитель – модуль продольной деформации (модуль Гука), второй – относительная деформация



$$E \cdot \varepsilon = \sigma$$



## 3.9. Сила упругости

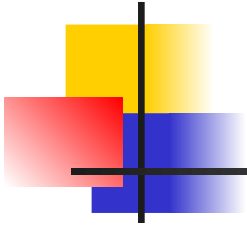
---

$$F_x = F_{\text{упр}} = -kx.$$

- Это соотношение выражает экспериментально установленный закон Гука. *Коэффициент  $k$  называется жесткостью тела.* В системе СИ жесткость измеряется в ньютонах на метр (Н/м). Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала.

## 3.9. Силы в механике.

### Сила трения



Трение подразделяется на **внешнее** и **внутреннее**.

**Внешнее трение** возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся твердых тел (трение скольжения или трение покоя).

**Внутреннее трение** наблюдается при относительном перемещении частей одного и того же сплошного тела (например, жидкость или газ).

Различают **сухое** и **жидкое** (или **вязкое**) трение.

**Жидким (вязким)** называется трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой или ее слоями.

**Сухое трение**, в свою очередь, подразделяется на **трение скольжения** и **трение качения**.

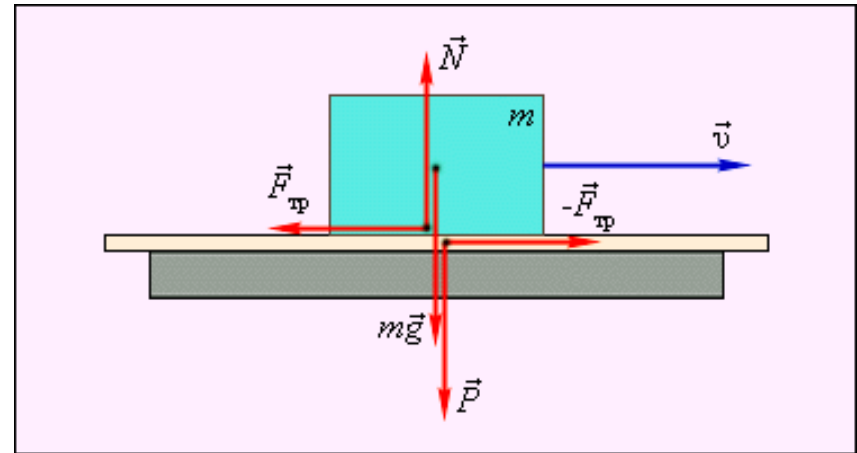
## 3.9. Силы в механике.

### Сила трения

Силы трения - тангенциальные силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному перемещению.

$$F_{тр} = \mu N$$

$$F_{тр} = \mu mg$$

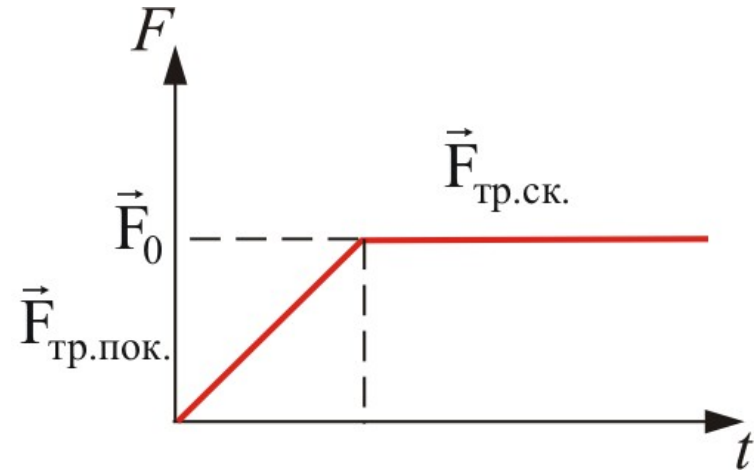
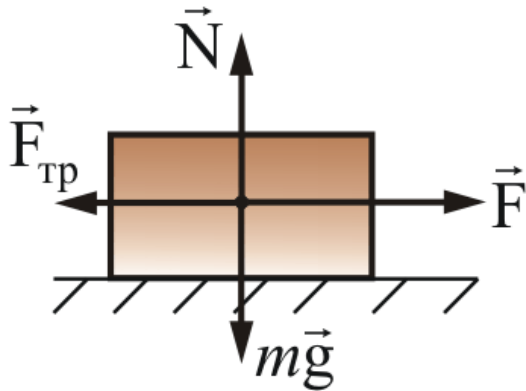


Зависят от относительной скорости тел. Имеют различную природу. В результате действия сил трения механическая энергия превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел



# 3.9. Силы в механике.

## Сила трения



Подействуем на тело внешней силой, постепенно увеличивая ее модуль. Вначале брусок будет оставаться неподвижным, значит внешняя сила уравнивается некоторой силой.

В этом случае  $F_{\text{тр}}$  – и есть **сила трения покоя**.

Когда модуль внешней силы, а следовательно, и модуль силы трения покоя превысит значение  $F_0$ , тело начнет скользить по опоре – **трение покоя  $F_{\text{тр.пок.}}$  сменится трением**

**скольжения  $F_{\text{тр.ск.}}$**

## 3.9. Силы в механике.

### Сила трения

*Сила трения скольжения*, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела:

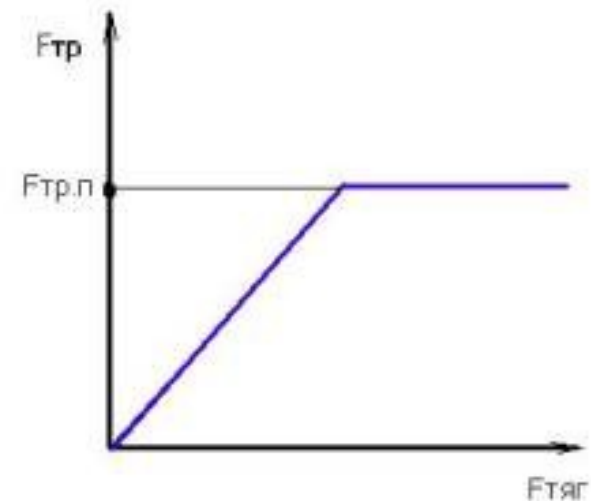
$$F = \mu N$$

где  $\mu$  – *коэффициент трения скольжения*, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей;

$N$  – сила нормального давления, трущиеся поверхности друг к другу;

Сила  $\mathbf{F}$  направлена в сторону противоположную направлению движения данного тела относительно

Другого





## 3.9. Силы в механике

Установлено, что *максимальная сила трения покоя* не зависит от площади соприкосновения тел и приблизительно *пропорциональна модулю силы нормального давления*

$$F_{\text{тр.}} = \mu_0 N,$$

$\mu_0$  – коэффициент трения покоя – зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

Аналогично и **для силы трения скольжения:**

$$F_{\text{тр.}} = \mu N$$

*Трение качения* возникает между катящимся телом и поверхностью, по которой оно катится. Сила трения качения подчиняется тем же законам, что и скольжения, но коэффициент трения  $\mu$  здесь значительно меньше

### 3.9. Силы в механике

$$F = mg \sin \alpha,$$
$$N = mg \cos \alpha$$

$$F_{\text{тр.}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

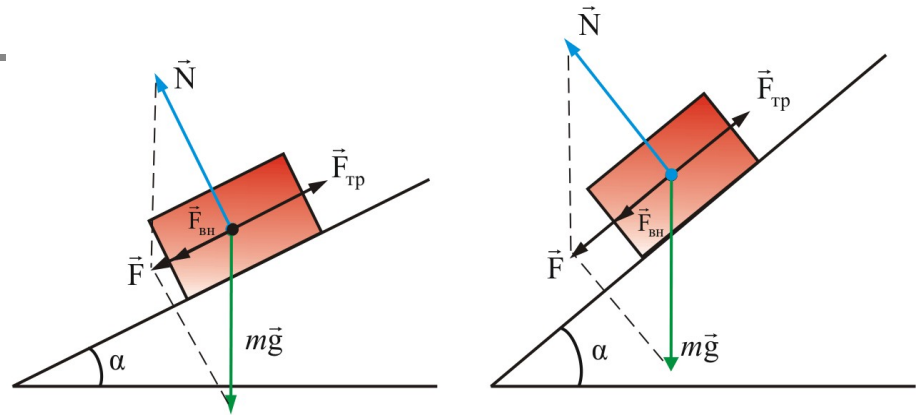
Если  $F < (F_{\text{тр.}})_{\text{max}} = \mu N$  – тело остается неподвижным на наклонной плоскости.

Максимальный угол наклона  $\alpha$  определяется из условия  $(F_{\text{тр.}})_{\text{max}} = F \Rightarrow \mu mg \cos \alpha = mg \sin \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \mu$

где  $\mu$  – коэффициент сухого трения.

При  $\alpha > \alpha_{\text{max}}$  тело будет скатываться с ускорением

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad F_{\text{ск.}} = ma = F - F_{\text{тр.}}$$



## 3.9. Силы сопротивления движению тела в вязкой среде

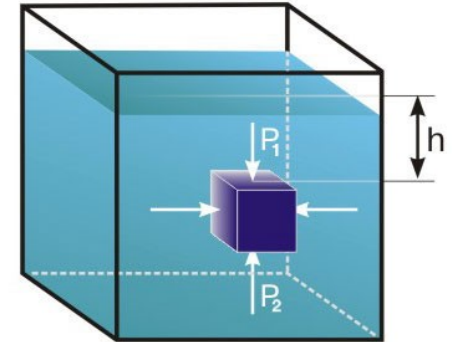
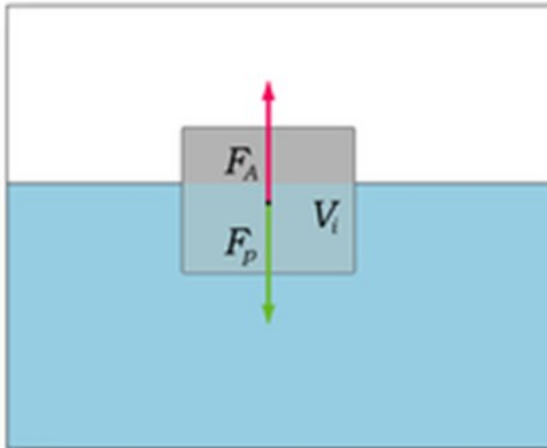
■ *Сила сопротивления движению тела в вязкой среде* – разновидность силы трения.

- При небольших скоростях и небольших размерах тела эта сила обусловлена вязким трением между слоями среды и пропорциональна скорости тела
- $\vec{F}_c = -r\vec{v}$  - закон Стокса.
- *$r$  - коэффициент лобового сопротивления, зависит от формы и размеров тела и вязкости среды.*
- Для шара  $r = 6\pi R\eta$
- $\vec{F}_c = -r\vec{v}^2$  - закон Ньютона, при больших скоростях.

Критерием характера движения слоев жидкости (ламинарного или турбулентного) при падении в ней шарика радиуса  $R$  со скоростью  $v$  является число Рейнольдса  $Re = 2\rho vR / \eta$ . При  $Re < 2300$  движение слоев – *ламинарное*, при  $Re > 2300$  – *турбулентное*

## 3.9. Силы в механике. Сила Архимеда

- Сила Архимеда -  $\vec{F}_{арх} = \rho_{ж} g V$



$V$  – объём погруженной части тела

$\rho_{ж}$  - плотность жидкости