Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Ingo Blechschmidt
Kathrin Helmsauer
Rolf Wittmann

Schuljahr 2017/18
Klassenstufen 11/12

Hackenbusch und andere Spiele

Korrespondenzbrief vom 7. November 2017

Was sind Spiele?

In diesem Brief geht es um Spiele. Bestimmt kennst Du einige Gesellschaftsspiele wie Poker, Schach oder Monopoly. In diesem Brief soll es um ganz bestimmte Spiele gehen, deswegen definieren wir, was ein *Spiel* für uns sein soll.

Definition. Ein *Spiel* besteht für uns aus

- zwei *Spielern*,
- *Positionen* oder *Stellungen*, in welchen sich das Spiel befinden kann (insbesondere eine besondere *Startposition*) und
- klar definierten *Regeln*, welche die möglichen *Züge* festlegen.

Außerdem fordern wir, dass beide Spieler abwechselnd ziehen.

Im Folgenden sind ein paar mögliche Eigenschaften von Spielen zusammen mit Beispielen und Nicht-Beispielen zusammengefasst. Wenn man über Spiele diskutiert, muss man sich immer klarmachen, ob diese in eine der folgenden Kategorien passen.

Eigenschaft	Erklärung	Beispiel	Nicht-Beispiel
Vollständige Informationen	Alle Spieler kennen den gesamten Spielzustand, d. h. es gibt keine verdeckten Informationen.	Nim, Schach	Poker, Bridge, Schiffe versenken
Kein Zufall	Es gibt kein zufälliges Element.	Tic-Tac-Toe, Schiffe versenken	Monopoly, Poker
Normales Spiel	Der Spieler, der als erstes nicht mehr ziehen kann, verliert.	Nim, Hackenbusch	Schach (Patt!)
Endliches Spiel	Das Spiel hört immer(!) nach einer endlichen Zahl von Zügen auf.	Schach, Nim	Poker
Neutrales Spiel	In einer gegebenen Position haben beide Spieler die gleichen Zugmöglichkeiten.	Nim, Käsekuchen	Schach, Vier-gewinnt

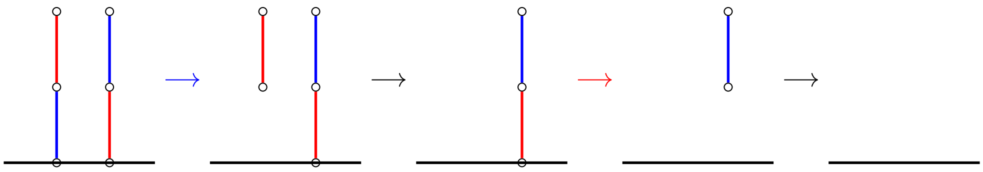
Hackenbusch

Hackenbusch ist ein Spiel, das man mit roten und blauen Stiften auf einem Blatt Papier spielen kann. Die Regeln sind wie folgt:

- Es gibt einen *Boden* sowie beliebige aufeinander gestellte *Kanten* von zwei Farben, Blau und Rot.
- Der *linke Spieler* darf nur blaue Kanten entfernen und der *rechte Spieler* nur die roten.
- Die beiden Spieler ziehen abwechselnd und müssen pro Zug genau eine Kante ihrer Farbe entfernen.
- Wenn Kanten nicht mehr mit dem Boden verbunden sind, werden diese entfernt.
- Derjenige Spieler verliert, der als erstes nicht mehr ziehen kann.

Damit ist Hackenbusch ein Spiel mit *vollständigen Informationen*, *ohne Zufall*, *normal* und *endlich*, aber *nicht neutral*.

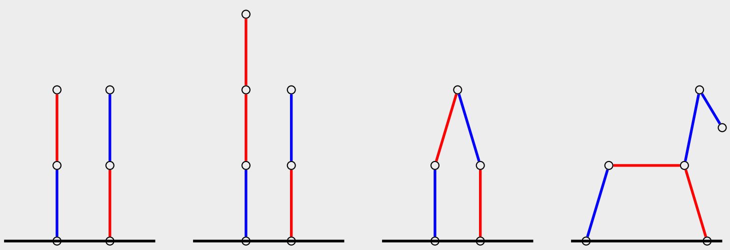
Beispiel. Wir nehmen an, dass der linke Spieler an der Reihe ist, also als nächstes eine blaue Kante entfernt wird. Im ersten Schritt könnte der linke Spieler also die blaue Kante links unten entfernen.



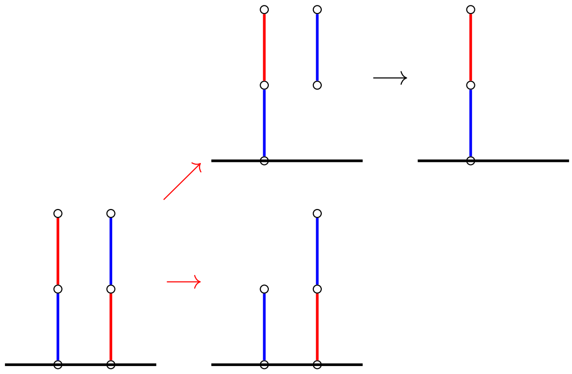
Da dann die rote Kante nicht mehr mit dem Boden verbunden ist, verschwindet sie auch. Als nächstes ist der rechte Spieler, der nur rote Kanten entfernen darf, an der Reihe. Er entfernt also die verbleibende rote Kante. Da wieder die blaue Kante nicht mehr mit dem Boden verbunden ist, muss sie auch entfernt werden. Der blaue Spieler, der jetzt wieder an der Reihe ist, kann aber nun keine Kante mehr entfernen (weil ja keine mehr da ist). Also hat der blaue Spieler in diesem Fall verloren.

Aufgabe 1.

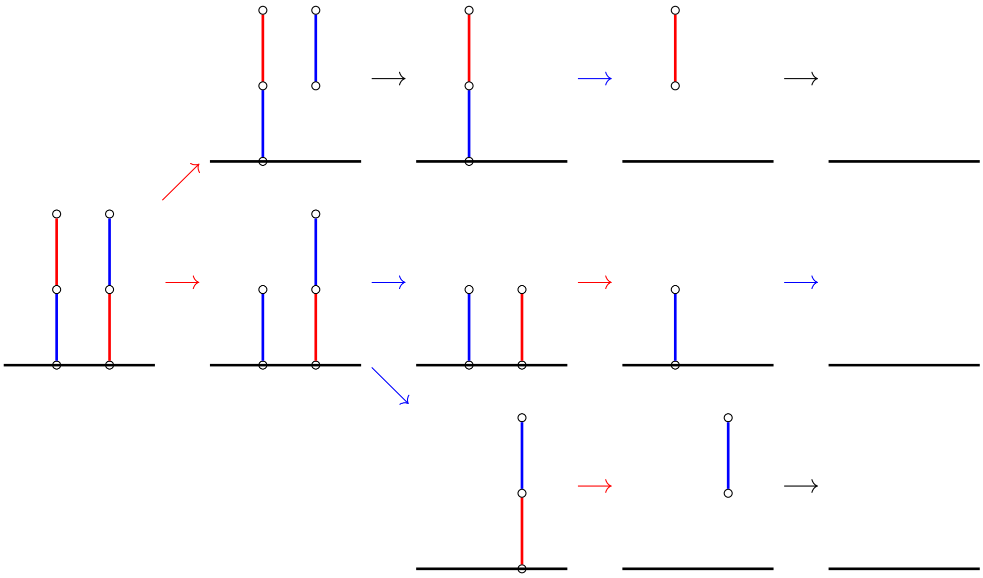
Spiele die folgenden Hackenbuschspiele durch, um ein Gefühl für das Spiel zu entwickeln. Nimm sowohl die Rolle des linken als auch des rechten Spielers ein.



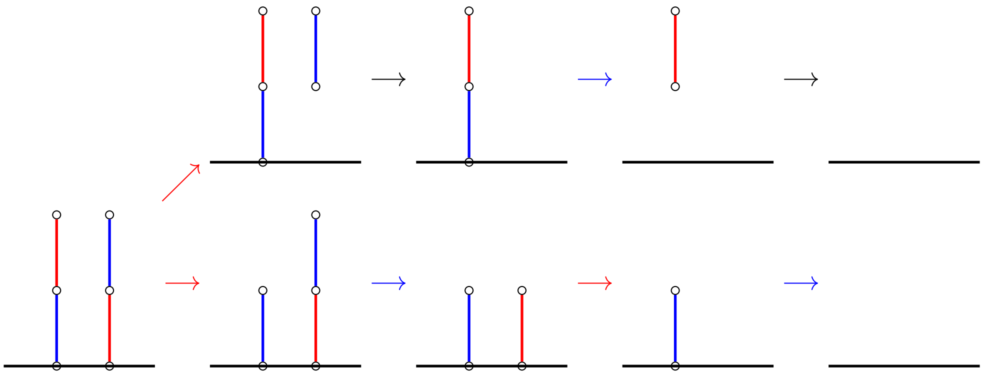
Als nächstes möchten wir die erste Situation genauer analysieren und alle Möglichkeiten auflisten. Diesmal nehmen wir dabei an, dass der rote Spieler beginnt, also im ersten Schritt eine der beiden roten Kanten entfernt wird. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich kann der rote Spieler entweder die rote Kante rechts unten oder links oben entfernen. Bei der ersten Möglichkeit verschwindet wieder die blaue Kante rechts oben automatisch, weil sie nicht mehr mit dem Boden verbunden ist.



In der oberen Zeile kann nun der blaue Spieler nur die letzte verbleibende blaue Kante entfernen, wohingegen sich die untere Zeile wieder in zwei Möglichkeiten spaltet: Der blaue Spieler kann entweder die blaue Kante links unten oder rechts oben entfernen.



Da derjenige Spieler verliert, der nicht mehr ziehen kann, verliert in der ersten und letzten Zeile der rote Spieler und in der zweiten Zeile der blaue Spieler. Damit gewinnt in der ersten und letzten Zeile der blaue Spieler und in der zweiten Zeile der rote Spieler. Falls der blaue Spieler also im zweiten Zug die untere der beiden Möglichkeiten wählt, gewinnt er immer, egal, wie der rote Spieler spielt! Wir köennen daher eine blaue Gewinnstrategie angeben! Dafür müssen wir *für jeden möglichen* roten Zug (mindestens) *eine* passende blaue Antwort parat haben, so dass am Schluss der blaue Spieler gewinnt. Eine Gewinnstrategie für den blaue Spieler wird also durch dieses Diagramm dargestellt:



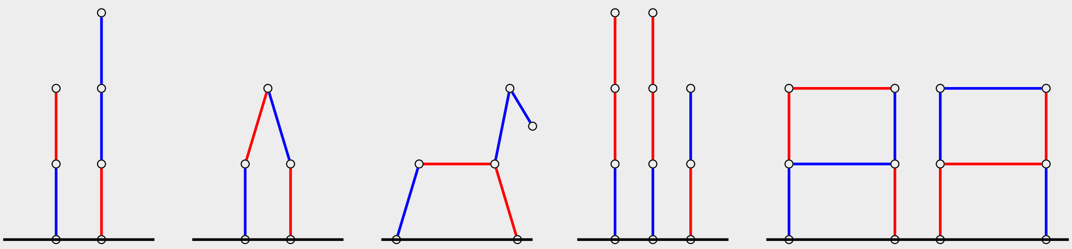
In diesem Diagramm ist für jeden möglichen roten Zug ein blauer Zug gegeben, der dazu führt, dass der blaue Spieler schlussendlich gewinnt.

Aufgabe 2.

Kannst du auch eine Gewinnstrategie für den roten Spieler angeben, wenn der rote Spieler beginnt? Warum (nicht)?

Aufgabe 3.

Versuche Gewinnstrategien für entweder den blauen oder den roten Spieler in den folgenden Positionen zu finden, wenn der rote Spieler beginnt. Was ändert sich, wenn der blaue Spieler beginnt?



Im nächsten Kapitel möchten wir herausfinden, wie man gleich aus der Zeichnung berechnen kann, für welchen der beiden Spieler es eine Gewinnstrategie gibt.

Bewertungen von Stellungen

Ganz allgemein wollen wir zwei Notationen einführen:

Definition. Sei ein Spiel in unserem Sinne gegeben.

(a) Eine Stellung wird durch

$$\{\text{Zugmöglichkeiten des linken Spielers} \mid \text{Zugmöglichkeiten des rechten Spielers}\}$$

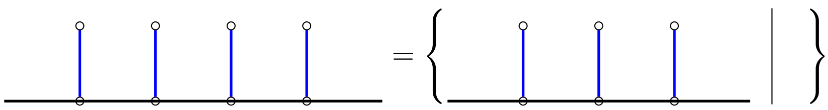
beschrieben. Bei Hackenbusch war der linke Spieler der blaue Spieler und der rechte Spieler der rote Spieler.

(b) Eine Stellung wird mit einer Zahl *bewertet*. Diese Zahl gibt an, wieviele Züge der linke(!) Spieler im Vorteil ist. Falls diese Zahl also positiv ist, gibt es einen Gewinnstrategie für den linken Spieler und anderenfalls für den rechten Spieler. Ist die Bewertung gleich 0, verliert immer der Spieler, der gerade an der Reihe ist.

Wenn wir eine Stellung wie oben beschreiben wollen, nehmen wir für die linken Spielzüge an, dass links am Zug ist und für die rechten Zugmöglichkeiten, dass rechts am Zug ist. Das heißt, wir beschreiben die Stellung unabhänging davon, wer eigentlich am Zug ist. So können wir beide Möglichkeiten gleichzeitig behandeln.

Beispiel. Die einfachste Hackenbusch-Position ist die, in der gar keine Kante vorhanden ist. Das heißt, dass derjenige Spieler, der beginnt, sofort verliert. Da niemand eine Zugmöglichkeit hat, wird diese Stellung mit $\{\,|\,\}$ bezeichnet und hat den Wert 0. Wir schreiben $0 = \{\,|\,\}$.

Beispiel. Wenn n blaue Kanten einzeln am Boden stehen und keine rote Kante vorhanden ist, kann der linke Spieler nur auf $n-1$ blaue Kanten ziehen und der rechte hat keine Zugmöglichkeit. Anstatt die Position mit vielen Bildern zu bezeichnen, wollen wir direkt die Werte der durch Züge von links oder rechts erreichbaren Stellungen notieren.



Wieviele Züge ist Blau im Vorteil gegenüber Rot? Blau hat im linken Bild n mögliche Züge, nämlich je einen für jede Kante. Damit die mögliche Anzahl der Züge ausgeglichen ist, wir also ein *Nullsummenspiel* mit Wert 0 kommen, müssten wir Rot auch n einzelne rote Kanten geben. Überprüfe das:

Aufgabe 4.

Welchen Wert haben die Stellungen mit n einzelnen blauen Kanten und n einzelnen roten Kanten? Finde sowohl deren Wert als auch eine Beschreibung der Zugmöglichkeiten.

Wenn beide also die gleiche Anzahl von alleinstehenden Kanten haben, verliert immer derjenige Spieler, der gerade an der Reihe ist; damit hat keiner der beiden Spieler einen Vorteil gegenüber dem anderen und die Bewertung ist folglich 0. Die ursprüngliche Stellung mit n blauen Kanten ist entsprechend n wert. Da genauso die Stellung mit $n-1$ einzelnen blauen und keinen roten Kanten $n-1$ wert ist, können wir die obige Gleichung nun als

$$n = \{n-1 \mid \}$$

schreiben, also insbesondere $0 = \{\,|\,\}$, $1 = \{0\,|\,\}$, $2 = \{1\,|\,\}$, ...

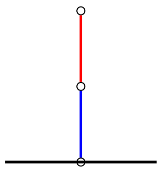
Aufgabe 5.

Welchen Wert haben $\{\,|\,0\}$, $\{\,|\,-1\}$, $\{\,|\,-2\}$, ...? Welchen Stellungen in Hackenbusch entsprechen diese Werte?

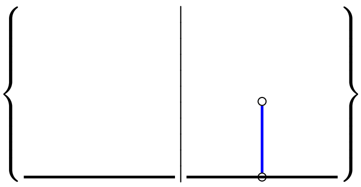
Weitere Beispiele

Nicht alle Stellungen können mit ganzen Zahlen bewertet werden. In diesem Abschnitt betrachten wir daher Positionen, deren Bewertung eine rationale Zahl ergibt. Wenn man zusätzlich zu den blauen und roten Kanten auch noch grüne Kanten hinzufügt, die von beiden Spielern entfernt werden dürfen, braucht man dafür sogar völlig neue Zahlen! Die sogenannten *surreellen Zahlen* werden wir ein andermal behandeln.

Zuerst betrachten wir das Beispiel aus einer roten Kante, die an einer blauen Kante hängt. In diesem Fall hat sowohl der linke als auch der rechte Spieler nur genau eine Zugmöglichkeit: die Kante der eigenen Farbe entfernen. Deshalb ist



$=$

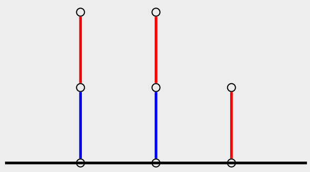


$= \{0 \mid 1\} = ?$

Was ist die Bewertung von $\{0 \mid 1\}$? Sicherlich ist die Stellung ein Vorteil für den linken Spieler, also erwarten wir eine positive Bewertung, d. h. $\{0 \mid 1\} > 0$. Versuchen wir einmal, zwei der $\{0 \mid 1\}$-Stellungen mit $\{\ \mid 0\}$ zu vergleichen.

Aufgabe 6.

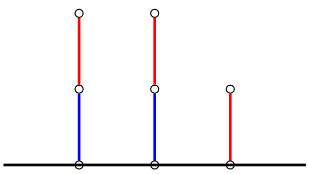
Zeige, dass die folgende Stellung eine Nullstellung ist, das heißt, dass der anziehende Spieler sicher verliert (wenn beide Seiten perfekt spielen).



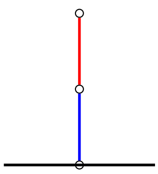
Du musst also sowohl einmal annehmen, dass der blaue Spieler zuerst spielt und dann eine Gewinnstrategie für den roten Spieler finden, als auch einmal annehmen, dass der rote Spieler zuerst spielt und dann eine Gewinnstrategie für den blauen Spieler finden.

Mit dieser Aufgabe haben wir also gezeigt, dass

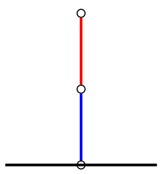
$0 =$



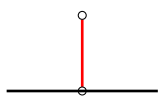
$=$



$+$

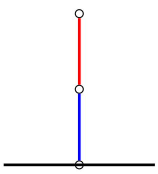


$+$



$$
\begin{aligned}
&= \{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} + \{\mid -1\} \\
&= 2 \cdot \{0 \mid 1\} - 1
\end{aligned}
$$

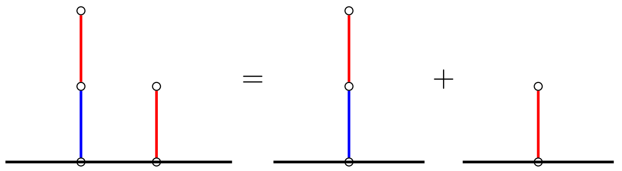
$\Rightarrow$



$= \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}.$

Das heißt, dass eine rote Kante auf einer blauen Kante auf dem Boden einen *halben* Zug Vorteil für den linken Spieler ist. Dabei haben wir verwendet, dass *zwei* Hackenbusch-Haufen zusammen wieder *ein* Spiel werden und wir einfach deren Bewertungen addieren können!

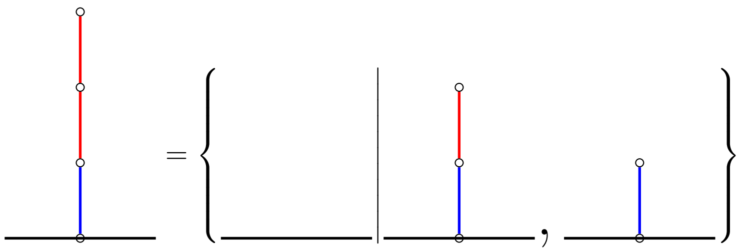
Wenn wir nun eine weitere rote Kante hinzufügen, erhalten wir



$$= \{0|1\} + \{|0\} = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}.$$

Da wir in diesem Fall bereits die Bewertung aller Haufen des Hackenbuschspiels kannten, können wir in diesem Fall die Bewertung des gesamten Spiels einfach berechnen.

Als nächstes Beispiel möchten wir die Bewertung von einem blauen und zwei roten Kanten finden. Dafür bestimmen wir also zunächst alle möglichen Züge



wobei das Komma die beiden Möglichkeiten für den roten Spieler trennt. Die drei jetzt auftretenden Situationen haben wir aber eben bereits berechnet, daher ergibt sich

$$= \left\{0 \middle| \{0|1\}, 1\right\} = \left\{0 \middle| \frac{1}{2}, 1\right\}$$

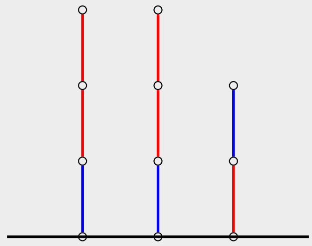
Da jeder Spieler optimal spielt, reicht es, für jeden Spieler nur die jeweils besten Züge zu betrachten. Das heißt, dass der linke Spieler möglichst hohe und der rechte Spieler möglichst niedrige Bewertungen erreichen will. Wegen $\frac{1}{2} \leq 1$ ist daher

$$= \left\{0 \middle| \frac{1}{2}\right\}.$$

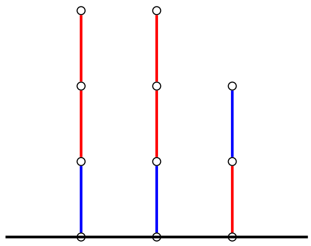
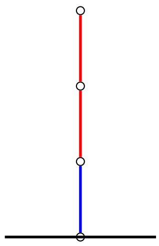
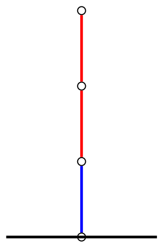
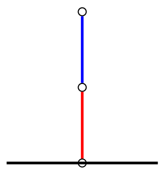
Die Bewertung dieses Spiels ist also gleich der Bewertung von $\left\{0 \middle| \frac{1}{2}\right\}$. Da wir diese aber noch nicht kennen, müssen wir wieder ein Nullsummenspiel finden, das unter anderem auch diesen Haufen als Teilspiel beinhaltet.

Aufgabe 7.

Zeige, dass der anziehende Spieler immer verliert. (Dieses Hackenbuschspiel hat also Bewertung 0.)

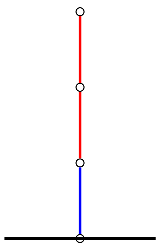


Damit gilt

$0 =$  $=$  $+$  $+$ 

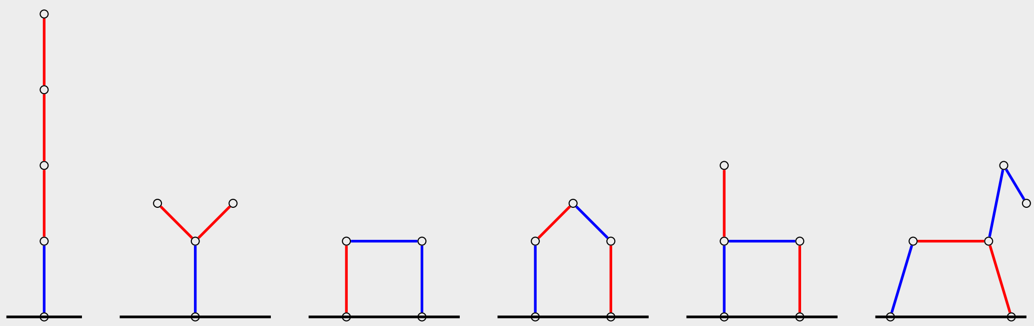
$$= \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} + \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} + \{-1|0\}$$

$$= 2 \cdot \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  $= \left\{0\middle|\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}.$

Aufgabe 8.

Finde Bewertungen für die folgenden Hackenbuschstellungen (Versuche dich an der letzten nicht zu lange :-)).



Aufgabe 9.

Überlege dir, warum $n + \frac{1}{2} = \{n|n+1\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (also auch die negativen Zahlen!) gilt.

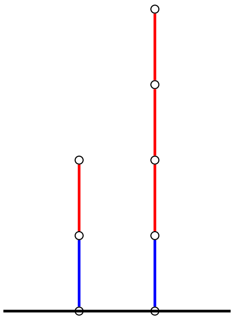
Aufgabe 10.

Bezeichne mit G_L bzw. G_R die Zugmöglichkeiten des linken bzw. rechten Spielers und es sei $p = \{G_L \mid G_R\}$. Überzeuge dich davon, dass dann $-p = \{-G_R \mid -G_L\}$ gilt.

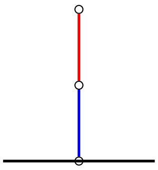
Aufgabe 11.

Was ist die Bewertung für einen Hackenbuschturm aus einem blauen und n roten aufeinander gestapelten Kanten? Schreibe außerdem die jeweils besten Züge der Spieler auf.

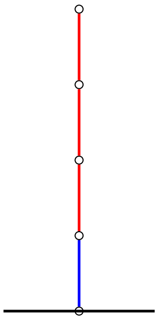
Im nächsten Beispiel betrachten wir eine etwas kompliziertere Position:



$=$



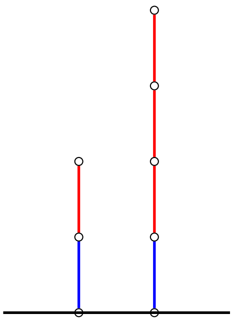
$+$



$$= \{0 \mid 1\} + \left\{0 \middle| \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Wieder konnten wir die Bewertung berechnen, indem wir die Bewertungen der beiden Teilspiele addieren. Stattdessen möchten wir jetzt aber die Zugmöglichkeiten direkt angeben: Beide Spieler können natürlich nur entweder links oder rechts ziehen und müssen daher den anderen Haufen gleich lassen. Im ersten Zug kann der linke Spieler durch einen Zug im linken Haufen auf $0 + \left\{0 \middle| \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{8}$ oder durch einen Zug im rechten Haufen auf $\{0 \mid 1\} + 0 = \frac{1}{2}$ kommen. Dagegen kann im ersten Zug der rechte Spieler durch einen Zug im linken Haufen auf $1 + \left\{0 \middle| \frac{1}{4}\right\} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ oder im rechten Haufen auf $\{0 \mid 1\} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ kommen. Daher ist

$\frac{5}{8} =$



$$= \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \middle| \frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Da der linke Spieler möglichst große Zahlen erreichen möchte und der rechte Spieler umgekehrt natürlich möglichst kleine Zahlen, kann man dies abkürzen zu $\frac{5}{8} = \left\{\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right\}$. Dies ist wegen

$$\frac{5}{8} = \left\{\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{4}\right\} = \left\{\frac{2}{2^2}\middle|\frac{3}{2^2}\right\} = \left\{\frac{2\cdot 2}{2^{2+1}}\middle|\frac{2\cdot 2+1}{2^{2+1}}\right\}$$

bereits ein Spezialfall der nächsten Aufgabe.

Aufgabe 12.

Zeige für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2p+1}{2^{n+1}} = \left\{\frac{2p}{2^{n+1}}\middle|\frac{2p+2}{2^{n+1}}\right\} = \left\{\frac{p}{2^n}\middle|\frac{p+1}{2^n}\right\}.$$

Bis jetzt könnte man denken, dass die Bewertung immer genau der Mittelwert aus den (jeweils) besten Zügen ist. In Wahrheit ist aber die Berechnung etwas komplizierter. Um dies zu zeigen betrachten wir das nächste Beispiel.

Satz. *Es gilt* $\frac{3}{2} = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$.

Der Mittelwerte der beiden Zahlen ist aber $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4} = \frac{13}{8}$, also nicht die viel einfachere Zahl $\frac{3}{2}$.

Beweis des Satzes. Aus Aufgabe 9 wissen wir, dass $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \{1|2\}$ gilt. Entsprechend ist mit Aufgabe 10 dann auch $-\frac{3}{2} = \{-2|-1\}$. Um zu zeigen, dass $\frac{3}{2} = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$, wie im Satz behauptet, genügt es also

$$0 \overset{!}{=} \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + \left(-\frac{3}{2}\right) = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + \{-2 \mid -1\}$$

zu zeigen. Dafür betrachten wir das Hackenbuschspiel, das aus einem Haufen X für $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$, dessen Bewertung wir aber nicht kennen, und dem Haufen Y für $\{-2 \mid -1\}$ mit Bewertung $-\frac{3}{2}$ besteht. Wir müssen nun zeigen, dass der anziehende Spieler immer verliert, das aus den Haufen X und Y bestehende Hackenbuschspiel also Bewertung 0 hat. Jeder Spieler kann seinen Zug in genau einem der beiden Teilspiele X oder Y durchführen. Wie würde der linke Spieler anfangen? Wenn er in X zieht, zieht er in eine Situation mit Bewertung

$$(\text{linker Wert von } X) + \{-2 \mid -1\} = \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} < 0,$$

was also eine Verlustposition für ihn ist. Daher würde der rechte Spieler dieses Spiel gewinnen. Wenn der linke Spieler aber in Y zieht, ergibt sich die Bewertung

$$\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + (\text{linker Wert von } Y) = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + (-2).$$

Daraufhin kann der rechte Spieler mit einem Zug im Haufen X eine Stellung mit Bewertung

$$2 + (-2) = 0,$$

erreichen, also einem Nullsummenspiel! Da als nächstes wieder der linke Spieler an der Reihe wäre, gewinnt auch dann der rechte Spieler. Damit haben wir gezeigt, dass der rechte Spieler eine Gewinnstrategie besitzt, sofern der linke Spieler gewinnt, unabhängig davon, ob der linke Spieler seinen ersten Zug im Haufen X oder im Haufen Y tätigt.

Wenn jedoch der rechte Spieler beginnt und er in X zieht, hat das Spiel eine Wertung von

$$(\text{rechter Wert von } X) + \{-2 \mid -1\} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

was für diesen eine Verlustposition ist. Wenn er stattdessen in Y zieht, hat die entstehende Stellung die Bewertung

$$\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - (\text{rechter Wert von } Y) = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + (-1),$$

woraufhin der linke Spieler mit einem Zug in X auf $\frac{5}{4} - 1 > 0$, also eine Gewinnstellung für ihn, ziehen kann. Falls also der rechte Spieler beginnt, hat der linke Spieler eine Gewinnstrategie.

Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass $X + Y$ ein Nullsummenspiel ist, da der anziehende Spieler immer gewinnt, und damit

$$\begin{aligned} 0 = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + \{-2 \mid -1\} &= \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

was insbesondere nicht dem Durchschnitt der beiden Züge entspricht. □

Der allgemeine Fall

Es sei X ein Hackenbuschspiel. Wir nehmen an, dass der blaue Spieler m viele Zugmöglichkeiten hat, deren Resultate die Bewertungen $a_1, \ldots, a_m$ haben. Genauso nehmen wir an, dass der rote Spieler n viele Zugmöglichkeiten hat, deren Resultate die Bewertungen $b_1, \ldots, b_n$ haben. Da wir wissen, dass für den blauen Spieler hohe und umgekehrt für den roten Spieler niedrige Bewertungen besser sind, definieren wir außerdem

$$a := \text{Maximum}\,(a_1, \ldots, a_m)\,, \qquad b := \text{Minimum}\,(b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Dann gilt

$$X = \{a_1, \ldots, a_m \,|\, b_1, \ldots, b_n\} = \{a \mid b\}\,.$$

Was können wir jetzt über die Bewertung $x = \{a \mid b\}$ von X sagen? Offensichtlich ist $\{a \mid b\} + \{-b \mid -a\}$ ein Nullsummenspiel, das heißt, dass der anziehende Spieler immer verliert. Falls der linke Spieler an der Reihe ist und einen Zug macht, muss die Bewertung danach also negativ sein (damit der rechte Spieler, der nicht den ersten Zug macht, gewinnt). Durch einen Zug im Haufen $\{a \mid b\}$ hat das entstehende Spiel also die Bewertung

$$0 > a + \{-b \mid -a\} = a - x \quad \Rightarrow \quad x > a$$

und durch einen Zug im Haufen $\{-b \mid -a\}$ wird die Bewertung

$$0 > \{a \mid b\} - b = x - b \quad \Rightarrow \quad b > x.$$

Zusammen ergibt sich also

$$a < x < b,$$

das heißt, dass die Bewertung x eines Spiels $\{a \mid b\}$ immer zwischen a und b liegen muss!

Definition. Es sei X ein Hackenbuschspiel mit $X = \{a_1, \dots, a_m \mid b_1, \dots, b_n\}$. Wir sagen, dass eine Zahl x zu X *passt*, wenn

$$a_1 < x,\ a_2 < x,\ \dots,\ a_m < x \quad \text{und} \quad x < b_1,\ x < b_2,\ \dots,\ x < b_n. \tag{1}$$

Eine passende Zahl x heißt *einfachste Zahl*, falls für jede Darstellung $x = \{a \mid b\}$ gilt, dass a und b beides keine für X passende Zahlen sind, also mindestens eine der Ungleichungen (1) *nicht* stimmen.

Die Bewertung des Hackenbuschspiels ist dann immer die einfachste zu diesem Spiel passenden Zahl. Um also überhaupt auf Ideen für mögliche Bewertungen zu kommen, die wir dann mit einer überprüfen können, müssen wir zunächst die Bewertungen $a_1, \dots, a_m$ aller möglichen Züge des linken Spielers und die Bewertungen $b_1, \dots, b_n$ aller möglichen Züge des rechten Spielers bereits kennen. Das heißt, dass wir von den einfachsten Stellungen ausgehen müssen und dann induktiv kompliziertere Stellungen bewerten müssen. Wir beginnen mit den folgenden uns bereits bekannten Regeln:

(a) $0 = \{\ \mid\ \}$

(b) $n + 1 = \{n \mid\ \}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $-n - 1 = \{\ \mid -n\}$ für $n \in \mathbb{N}$

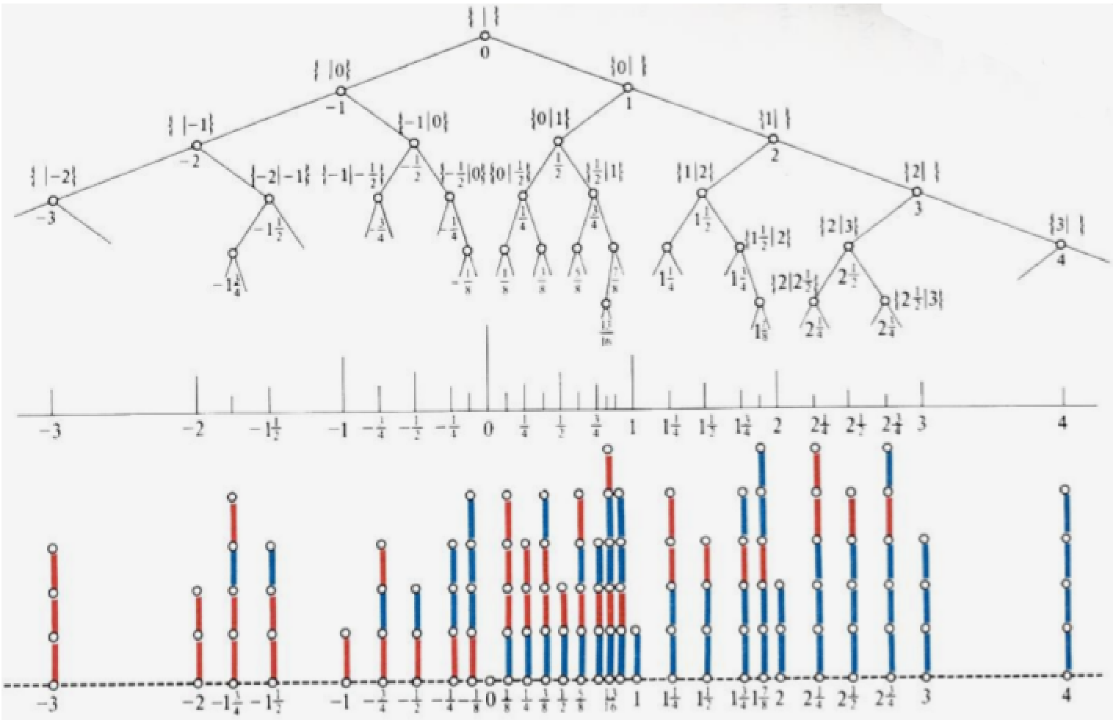
(d) $\frac{2p+1}{2^{q+1}} = \left\{ \frac{p}{2^q} \middle| \frac{p+1}{2^q} \right\}$ für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

Diese Zahlen nennen wir alle Zahlen der *ersten Generation.* Wir setzen die Nummerierungen der sogenannten *Generationen* wie folgt fort. Alle Stellungen, deren Werte mit den ersten n Generationen durch die obigen Überlegungen bestimmt werden können, bilden die $n+1$-te Generation. Außerdem nennen wir eine Zahl *einfacher* als eine andere, wenn sie in einer früheren Generation erzeugt wurde.
Nun wollen wir $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + (-Y) = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} + \{-b \mid -a\} = 0$ mit unserem Versuch $Y = \{a \mid b\}$ für $X = \left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\}$ spielen. Links kann links auf $\frac{5}{4} - Y$ und rechts auf $X - a$ ziehen und Rechts auf $2 - Y$ oder $X - a$. Wir wissen aber bereits, dass Y zwischen $\frac{5}{4}$ und 2 liegen muss, was bedeutet, dass beide Spieler nicht in X (also links) ziehen wollen. Das heißt aber, dass um unseren Tipp Y zu verifizieren, wir erstmal die Spiele $\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - a$ und

$\left\{\frac{5}{4}\middle|2\right\} - b$ spielen müssen. Da wir dazu aber a und b als konkrete Stellungen $\{a_1 \mid a_2\}$ und $\{b_1 \mid b_2\}$ darstellen müssen, sind wir gezwungen, die gleiche Rechnung noch einmal für einfachere Zahlen zu machen. Dies ist dann solange nötig bis die Optionen a_1, a_2, b_1 und b_2 dann sofort zeigen, dass $X - a_2$ für Links verloren ist, etc., wir also ein Nullspiel erhalten. Dann haben wir aber gezeigt, dass z.B. $X + (-\{a_2 \mid a_1\}) = 0$ gilt und damit X berechnet, weil $\{a_1 \mid a_2\}$ so einfach ist, dass wir seinen Zahlenwert kennen. Dies führt auf die *Einfachheitsregel*

Satz. *Sei $\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$ eine Stellung, so dass eine Zahl existiert, die passt. Dann ist die Bewertung der Stellung die einfachste Zahl, die passt.*

Auf der folgenden Seite siehst du eine Übersicht über die einfachsten Zahlen. Dabei hat der Graph einen Ursprung oben und eine Zahl ist umso einfacher, desto weiter oben sie ist.



Aufgabe 13.

Versuche jetzt, den Wert für das Pferd in Aufgabe 8 zu bestimmen, indem du alle möglichen Züge durchgehst, alle möglichen Stellungen bewertest (Wende dazu die Einfachheitsregel an!) und dir so langsam das Pferd zusammen baust. Es ist sehr effizient, an einer Kante in einer Skizze den Wert der Stellung zu schreiben, wenn man diese Kante entfernen würde.

Aufgabe 14.

Wir betrachten folgende etwas seltsame Spielsituationen:

(a) Ein Turm von unendlich vielen roten Kanten.

(b) Ein Turm von unendlich vielen Kanten, bei denen die unterste (die, die mit dem Boden verbunden ist) rot und alle anderen blau sind.

Wie lange dauern diese Spiele höchstens? Welcher Spieler besitzt Gewinnstrategien? Was passiert, wenn man in der ersten Situation endlich viele blaue Kanten dazustellt (jeweils nebeneinander)? Hast du eine Vermutung dafür, welche Bewertung diese Spiele haben?