Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2017/2018
Klassen 11/12

Der eulersche Pentagonalsatz

Korrespondenzzirkel vom 8. Dezember 2017

Definition 1. Eine *Partition* einer natürlichen Zahl n ist ein Tupel $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ von natürlichen Zahlen mit $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k > 0$ sodass $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Jedes n_i in einer solchen Partition heißt *Teil* der Partition. Man sagt, dass $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ eine Partition von n in k Teile ist.

Eine Partition von n ist also eine Möglichkeit, die Zahl n als Summe von positiven natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k$ zu schreiben, wobei Summen, die sich nur in ihrer Reihenfolge der Summanden unterscheiden, als gleich angesehen werden.

Beispiel 2. Als Beispiel listen wir mal alle 11 Partitionen von 6 auf:

$$
\begin{array}{lll}
(6) & (3,3) & (2,2,1,1) \\
(5,1) & (3,2,1) & (2,1,1,1,1) \\
(4,2) & (3,1,1,1) & (1,1,1,1,1,1). \\
(4,1,1) & (2,2,2) &
\end{array}
$$

Definition 3. Mit $p(n)$ bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen Partitionen einer natürlichen Zahl n. Die Funktion $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto p(n)$, heißt die *Partitionsfunktion*.

Einzelne Partitionen sind für uns eher uninteressant. Wir interessieren uns dafür umso mehr für die Anzahl $p(n)$ der Partitionen einer beliebigen natürlichen Zahl n. Wie Du Dir vorstellen kannst, wächst diese Anzahl sehr schnell an. Das Beispiel zeigte, dass $p(6) = 11$ ist. Hier ein paar weitere Beispielwerte: $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(30) = 5604$, $p(40) = 37\,338$ und $p(100) = 190\,569\,292$. Die Anzahl der Partitionen der Zahl 10 000 hat bereits 107 Stellen und die Anzahl der Partitionen der Zahl 1 000 000 hat 1108 Stellen. Zum Vergleich: Es wird vermutet, dass die Anzahl der Atome im Universum etwa 80 bis 100 Stellen hat. Lächerlich wenig sozusagen …

Partitionen sind für manche Mathematikerinnen und Mathematiker hochinteressant, vor allem deswegen, weil sie Teilgebiete miteinander verknüpfen, die auf den ersten Blick überhaupt nichts miteinander gemeinsam haben. Ihr ursprüngliches Zuhause war die Kombinatorik. Dann stellten die Leute aber fest, dass sie auch in der Theorie der Gruppendarstellungen (dieses Theoriegebäude verwendet man, um den Teilchenzoo mit seinen je nach Zählung 17 verschiedenen Elementarteilchen in der modernen Physik zu verstehen) und in der statistischen Physik wichtig sind.

An sich ist es nicht schwer, $p(n)$ durch Auflisten aller Partitionen von n herauszufinden, aber aufgrund der gewaltigen Anzahl der Möglichkeiten ist dieser Ansatz in der Praxis nicht durchführbar. Gibt es andere Möglichkeiten? Die Antwort ist glücklicherweise ja! Die drei genialen Mathematiker Hardy, Ramanujan und Rademacher fanden folgende Formel:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)} \right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right),$$

wobei

$$A_k(n) = \sum_{h=1}^{k} \delta_{gcd(h,k),1} \exp\left(\pi i \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \left(\frac{hj}{k} - \left\lfloor \frac{hj}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right) - \frac{2\pi i h n}{k} \right).$$

Wow! Bei dieser Formel können wir nur gemeinsam staunen, denn leider verstehen auch wir Zirkelleiter diese Formel nicht.[1] Alleine darüber, wie man mithilfe dieser Formel geschickt einen Wert berechnet, haben Mathematikerinnen und Mathematiker ganze Arbeiten geschrieben.

Es gibt aber noch einen anderen Weg, den wir auch nachvollziehen können: Wir können *Rekursionsprinzipien* herleiten, mit deren Hilfe wir aus uns bereits bekannten Werten der Partitionsfunktion neue Werte mit relativ wenig Aufwand berechnen können. Bevor es die Formel von Hardy, Ramanujan und Rademacher gab, war diese Möglichkeit die einzige praktikable, um größere Werte der Partitionsfunktion zu berechnen. Der Nachteil dieser Methode ist, wie wir sehen werden, dass man alle (zumindest viele) kleineren Werte der Partitionsfunktion kennen muss, bevor man den nächsten berechnen kann. Das soll uns aber nicht stören.

Bevor es richtig losgeht, möchten wir noch einen großen Durchbruch nicht verschweigen, der 2011 Jan Bruinier, Amanda Folsom, Ken Ono und Zach Kent gelang. Sie entdeckten, dass Partitionen in einem gewissen Sinn *fraktalen Charakter* haben (so ähnlich wie das Mandelbrotfraktal (nach dessen Bildern Du unbedingt im Internet suchen solltest, falls du das noch nie gemacht hast) selbstähnlich ist). Damit ist eine noch mal weit effizientere Berechnung der Partitionsfunktion möglich. Der eulersche Pentagonalsatz, den wir in diesem Zirkelbrief behandeln, war grundlegend für diesen Durchbruch.

Bemerkung 4. Die üblichen Konventionen in der Mathematik führen dazu, dass es eine Partition der Null und eine der Eins gibt, also $p(0) = 1$ und $p(1) = 1$. Die Partition der Null ist das *leere Tupel* und die Partition der Eins ist das einelementige Tupel (1). Es gibt mehrere gute Gründe, das so zu sehen und nicht anders. Einer ist, das alle noch folgenden Formeln in diesem Brief schön und elegant funktionieren und keine Sonderbehandlung für die Zahlen 0 und 1 benötigen.

[1] Etwas präziser: Wir kennen schon jedes in der Formel vorkommende Symbol. Wieso die Formel stimmt oder woher sie kommt, bleibt uns aber verborgen: Denn keiner von uns beiden ist Zahlentheoretiker. Mit „i" in der Formel ist übrigens die *imaginäre Einheit* gemeint, eine *komplexe Zahl* mit der wundersamen Eigenschaft $i^2 = -1$. Was wohl komplexe Zahlen mit Partionen zu tun haben? Im weiteren Verlauf werden wir „i" übrigens einfach als Platzhalter für natürliche Zahlen verwenden, nicht als Bezeichner für die imaginäre Einheit.

Aufgabe 1. *Dreifaches Ausmultiplizieren*

a) Überzeuge dich von folgender Regel zum Ausmultiplizieren. Falls sie schon in der Schule behandelt wurde, bist Du natürlich fein raus. :-)

„Wenn man ein dreifaches Produkt wie

$$(a + A)(b + B)(c + C)$$

ausmultiplizieren möchte, so ist das Ergebnis

$$abc + abC + aBc + aBC + Abc + AbC + aBc + aBC.\text{“}$$

Pro Summand des Ergebnisses muss man also für jeden der drei Faktoren entscheiden, welchen der beiden Summanden aus ihm man nehmen möchte.

b) Was ergibt ein vierfaches Produkt wie $(a+A)(b+B)(c+C)(d+D)$? Schreib keinesfalls das Ergebnis aus. Es genügt, wenn Du verstehst, wie sich das Ergebnis zusammensetzt.

c) Was ergibt $(a + A + \alpha)(b + B + \beta)(c + C + \gamma)$?

Aufgabe 2. *Effiziente Notation für Summen*

Im Folgenden werden wir immer wieder mit Summen bestehend aus vielen Summanden zu tun haben. Um Schreibaufwand zu sparen, hat sich dabei folgende Kurznotation eingebürgert:

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum_{j=3}^{5} 2j = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 24$$

$$\sum_{j=3}^{5} 2k = 2k + 2k + 2k$$

$$\sum_{k=4}^{2} k = 0$$

a) Vollziehe anhand dieser Beispiele nach, was diese Notation bedeutet. Wenn die Systematik dir gerade nicht klar ist, dann schreib uns eine Mail!

b) Was ist $\sum_{i=0}^{5}(2i + 1)$? Was hat das mit ungeraden Zahlen zu tun?

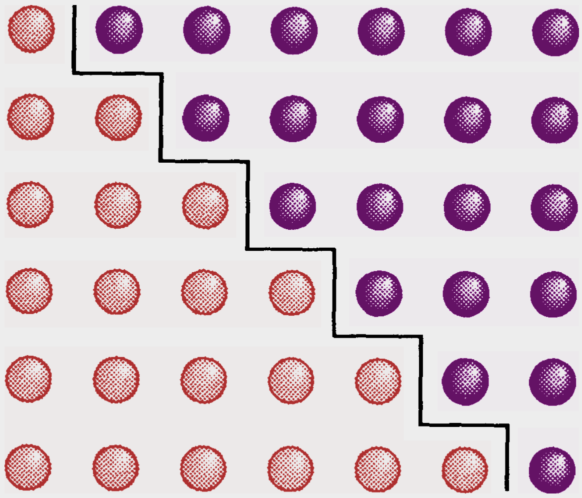
Aufgabe 3. *Der kleine Gauß*

Erstsemesterstudierende bezeichnen die folgende für jede natürliche Zahl n gültige Formel als „den kleinen Gauß“, weil es die Anekdote gibt, dass Carl Friedrich Gauß sie als kleiner Junge fand.

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Oder kürzer: $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

Starre folgende Grafik lange genug an, bis Du verstehst, wieso diese Formel stimmt. Die Grafik illustriert den Spezialfall $n = 6$.



Aufgabe 4. *Bock auf Programmieren?*

Kannst Du Programmieren und hast Du Spaß daran? Dann entwickle doch ein Programm, das die Partitionsfunktion berechnet. Du wirst leider feststellen, dass Dein Programm große Mühe haben wird, die Werte $p(n)$ für große Eingaben n zu berechnen. Der eulersche Pentagonalsatz wird Abhilfe bringen.

1 Eine erzeugende Funktion

Was jetzt kommt, hat auf den ersten Blick rein gar nichts mit unserer Fragestellung zu tun: Wir multiplizieren mal

$$\begin{aligned} P(X) := (1 + X + X^2 + \dots + X^i + \dots) \cdot \\ (1 + X^2 + X^4 + \dots + X^{2j} + \dots) \cdot \\ (1 + X^3 + X^6 + \dots + X^{3k} + \dots) \cdot \\ (1 + X^4 + X^8 + \dots + X^{4r} + \dots) \cdots \end{aligned} \tag{$\star$}$$

aus. Vorsicht: Dieses Produkt hat unendlich viele Faktoren und jeder Faktor wiederum endlich viele Summanden. Das ist vielleicht ungewöhnlich, aber wir können ganz normal damit rechnen. Wir können natürlich nie komplett ausmultiplizieren, aber wir können durchaus die ersten Koeffizienten berechnen:

$$P(X) = 1 + X + 2X^2 + 3X^3 + 5X^4 + \dots$$

Schauen wir uns mal ganz genau an, wie wir oben den Koeffizienten vor X^4 berechnen: Zu diesem erhalten wir wie Du weißt einen Beitrag, wenn wir aus dem ersten Faktor X^4 und aus allen anderen 1 auswählen, oder wenn wir aus dem ersten Faktor X, aus dem dritten X^3 und aus allen anderen 1 auswählen und so weiter. Zur besseren Übersicht hier eine Tabelle mit allen Möglichkeiten:

(Summand aus dem) 1. Faktor	2. Faktor	3. Faktor	4. Faktor	allen anderen Faktoren
X^4	1	1	1	1
X^2	X^2	1	1	1
X	1	X^3	1	1
1	X^4	1	1	1
1	1	1	X^4	1

Wie Du siehst, steht in der letzten Spalte immer nur eine 1, da die Exponenten aller anderen X-Potenzen in diesen Faktoren schon zu groß sind.[2] Wir können uns also auf die ersten vier Faktoren konzentrieren. Wenn wir nur die ersten vier Faktoren ausmultiplizieren, so haben die Exponenten k in der ausmultiplizierten Form folgende Gestalt:

$$k = 1k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4$$

Dabei ist $i \cdot k_i$ der Exponent der X-Potenz, welche wir im i-ten Faktor gewählt haben.[3] Wir suchen speziell nach solchen Kombinationen, sodass der Exponent gleich 4 ist, wir erhalten also die Gleichung

$$4 = 1k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4.$$

[2] Das ist übrigens der Grund, warum wir so gut mit diesem Produkt umgehen können. Zwar ist das Produkt „unendlich lang“, aber für jeden einzelnen Koeffizienten in der ausmultiplizierten Form brauchen wir nur endlich viele Faktoren zu beachten.

[3] Die Zahl 1 sehen wir dabei als X^0 an.

Wir müssen also passende Werte für die k_i finden.

Jetzt kommt der Clou: Jede solche Lösung entspricht einer Partition der Zahl 4. Wir können nämlich k_i auch als Anzahl der Teile der Größe i sehen. Da die k_i eine Lösung der Gleichung sind, summieren sich die Teile dann genau zu 4. Zeit für ein konkretes Beispiel: Aus

$$4 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0$$

erhalten wir die Partition der 4 mit einem Teil der Größe 1 und mit einem Teil der Größe 3, also $4 = 3 + 1$ bzw. $(3, 1)$ in der ganz korrekten Tupelschreibweise. Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht über alle Partitionen der 4.

1. Faktor	2. Faktor	3. Faktor	4. Faktor	(k_1, k_2, k_3, k_4)	Partition
X^4	1	1	1	$(4, 0, 0, 0)$	$1 + 1 + 1 + 1$
X^2	X^2	1	1	$(2, 1, 0, 0)$	$2 + 1 + 1$
X	1	X^3	1	$(1, 0, 1, 0)$	$3 + 1$
1	X^4	1	1	$(0, 2, 0, 0)$	$2 + 2$
1	1	1	X^4	$(0, 0, 0, 1)$	4

Wir erhalten natürlich auch für andere Zahlen als die Zahl 4 Partitionen. Wenn wir Partitionen für n auf diese Art und Weise finden wollen, können wir uns auf die ersten n Faktoren von $P(X)$ beschränken und erhalten Gleichungen der Form

$$n = 1k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n.$$

Das Tolle dabei: Wir lassen keine Partition aus, erhalten auf diese Weise also wirklich jede Partition! Gleichzeitig erhalten wir jede Partition nur genau einmal. Was bedeutet das für den Koeffizienten vor X^n in $P(X)$? Dieser ist nichts anderes als $p(n)$, die Anzahl der Partitionen von n, d. h.

$$P(X) = p(0) + p(1)X + p(2)X^2 + p(3)X^3 + \dots \tag{1}$$

Wenn wir also wissen wollen, wie viele Partitionen die Zahl 10 hat, können wir einfach beginnen, die ersten 10 Faktoren von $P(X)$ auszumultiplizieren und uns anschließend ansehen, welcher Koeffizient vor X^{10} steht, das ist die Antwort. Das ist aber noch nicht zufriedenstellend, denn kein Mensch hat Lust ein solch unübersichtliches Produkt zu berechnen. Es ginge auch gar nicht schneller, als direkt, ohne Umweg übers Ausmultiplizieren, die Anzahl der Partitionen zu bestimmen.

Man nennt $P(X)$ auch die *erzeugende Funktion* der Partitionsfunktion. Das ist aber nicht so zu verstehen, dass wir in diese erzeugende Funktion $P(X)$ irgendwelche Werte für X einsetzen möchten, das ergibt in den meisten Fällen überhaupt keinen Sinn.[4] Man kann sich eine solche erzeugende Funktion eher als Wäscheleine vorstellen, an der man die Folgenglieder einer Folge

[4] Was zum Beispiel sollte das Ergebnis sein, wenn man in die Potenzreihe $1 - X + X^2 - X^3 + X^4 \mp \cdots$ für X die Zahl 1 einsetzt? Klammert man als $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$, so sollte das Ergebnis Null sein; klammert man dagegen als $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$, so sollte das Ergebnis Eins sein. Noch vor gar nicht so langer Zeit stellten Reihen wie diese Mathematikerinnen und Mathematiker vor ein Rätsel. Heute wissen wir: Manche Reihen sind *konvergent* – solchen lässt sich ein konkreter Zahlwert zuordnen – und andere sind *divergent*. Da wir an keiner Stelle für X eine reelle Zahl einsetzen werden, muss uns das aber gar nicht interessieren.

der Reihe nach neben den Potenzen einer Variable aufhängt, so wie wir es (ohne es explizit zu betonen) auch getan haben. Die Potenzen dieser Variable haben keine besondere Bedeutung, sie helfen uns nur, den Überblick zu behalten und sorgen für Ordnung auf der Leine.

Das Verblüffende ist, dass man mit erzeugenden Funtionen sinnvolle Ergebnisse über die Folge herausfinden kann, indem man einfach mit ihr rechnet, als wäre sie eine gewöhnliche Funktion. Dabei hat man oft kein ein Gefühl dafür, was diese Rechenoperationen auf der Folge direkt für Auswirkungen haben. Genau das werden wir gleich auch machen.

Aufgabe 5. *Konkrete Zahlenwerte*

Jetzt ist ein guter Moment, um kurz inne zu halten. Verstehst Du, was wir in diesem Abschnitt bisher entwickelt haben? Fang doch mal an, die Formel ($\star$) auszumultiplizieren. Am besten per Hand, weil man dadurch ein besseres Gefühl für die Systematik erhält, Du kannst aber auch ein Computeralgebrasystem wie wolframalpha.com zu Hilfe nehmen. Verifiziere damit Formel (1) (bis zu irgendeiner Stelle, bei der Dir die Lust vergeht).

Betrachten wir den m-ten Faktor von $P(X)$. Die Multiplikation von diesem mit $(1 - X^m)$ liefert:

$$\begin{aligned}
&(1 + X^m + X^{2m} + X^{3m} + X^{4m} + \dots)(1 - X^m) \\
&= (1 + X^m + X^{2m} + X^{3m} + X^{4m} + \dots) - (X^m + X^{2m} + X^{3m} + X^{4m} + X^{5m} \dots) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Das ermöglicht es uns, diesen Faktor sehr kompakt zu schreiben, indem wir einfach durch $(1 - X^m)$ teilen:

$$(1 + X^m + X^{2m} + X^{3m} + X^{4m} + \dots) = \frac{1}{1 - X^m}.$$

Wenn wir das für jeden Faktor von $P(X)$ machen, können wir

$$P(X) = \frac{1}{(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3)\cdots}$$

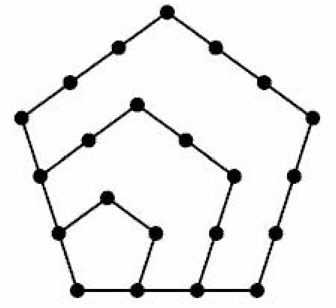
schreiben. Das scheint uns erst mal nichts zu bringen. Doch Leonhard Euler entdeckte einen Zusammenhang zwischen dem Nenner $(1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3) \cdots$ von $P(X)$ und den sogenannten Pentagonalzahlen, die Du vielleicht schon mal kennen gelernt hast. Durch Ausnutzung dieses Zusammenhangs können wir uns dann endlich Rekursionsformeln herleiten. Zunächst sollten wir aber klären, was Pentagonalzahlen überhaupt sind.

2 Pentagonalzahlen

Definition 5. Als *Pentagonalzahlen* bezeichnen wir natürliche Zahlen der Form

$$n = \frac{k(3k \pm 1)}{2}$$

für ein k, wobei $\pm$ entweder für $+$ oder für $-$ steht.[5] Oft werden die Zahlen der Form $\frac{k(3k-1)}{2}$ als *echte* Pentagonalzahlen bezeichnet, während die Zahlen der Form $\frac{k(3k+1)}{2}$ als *erweiterte* Pentagonalzahlen bezeichnet werden. Die Folge der echten Pentagonalzahlen beginnt mit $0, 1, 5, 12, 22, \ldots$, die der erweiterten Pentagonalzahlen mit $0, 2, 7, 15, 26, \ldots$. Das folgende Bild erklärt die Herkunft des Namens für die echten Pentagonalzahlen.



Zähle doch mal, aus wie vielen Punkten die einzelnen regelmäßigen Fünfecke (= Pentagone, die kleineren Fünfecke zählen zum nächstgrößeren dazu) bestehen. Richtig, aus $1, 5, 12, 22, \ldots$ Punkten.

Satz 6 (Eulerscher Pentagonalsatz). *Es gilt*

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\cdots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left(X^{k(3k+1)/2} + X^{k(3k-1)/2}\right).$$

Beachte: Die Exponenten auf der rechten Seite sind gerade die Pentagonalzahlen.

Aufgabe 6. *Wieder Zahlenwerte*

Puh! Die Formel im eulerschen Pentagonalsatz sieht nicht völlig einfach aus. Multipliziere die linke Seite aus (beachte dabei nur so viele Produkte, wie Du Lust hast) und berechne die ersten paar Summanden der rechten Seite. Damit ist rein logisch nichts gewonnen. Solche konkreten Rechnungen helfen aber, um ein Gefühl dafür zu entwickeln, was die Formel überhaupt aussagt.

Die Formel im eulerschen Pentagonalsatz erscheint zunächst kryptisch und unmotiviert. Wie wir aber im letzten Abschnitt sehen werden, ist es genau diese Formel, die den entscheidenden Durchbruch ermöglicht.

Der Beweis des eulerschen Pentagonalsatzes wird uns den gesamten nächsten Abschnitt beschäftigen. Möglicherweise ist das das erste Mal in deinem Leben, dass Du versuchst, einen Beweis auf universitärem Niveau nachzuvollziehen. Falls dem so ist: Willkommen im Club! Studierende und Promovierende verbringen viel Zeit damit, Beweise nachzuvollziehen. (Mit viel Kreativität eigene Beweise zu finden und als Promovierender dann sogar überhaupt erst interessante Behauptungen zu finden, steht ebenfalls auf dem Plan.)

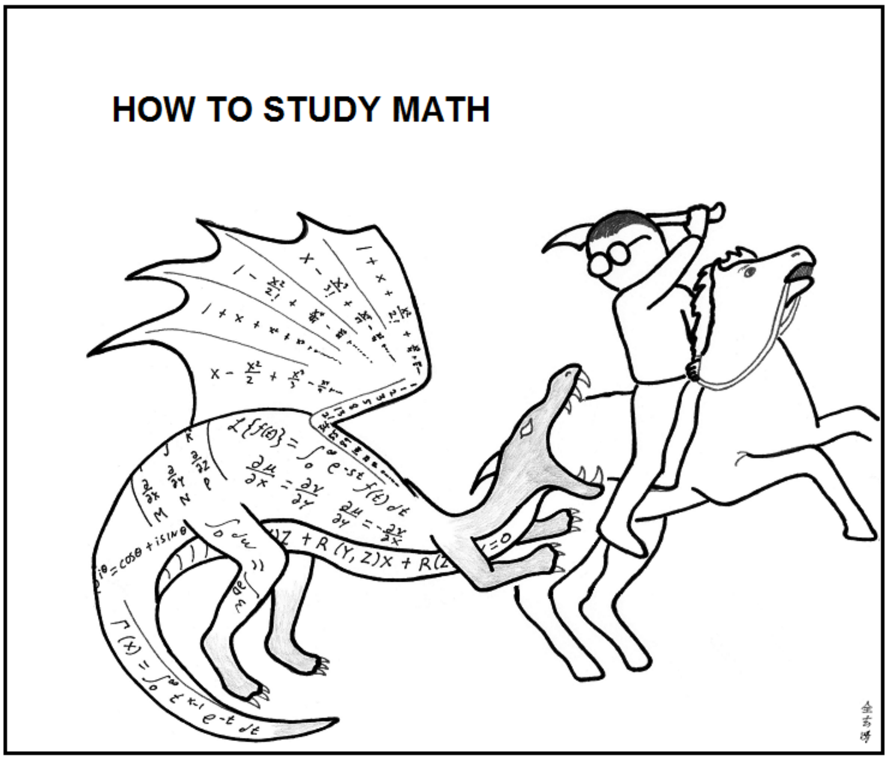
[5] Es handelt sich tatsächlich immer um eine natürliche Zahl und nicht um einen Bruch: Wenn k gerade ist, ist das klar. Ansonsten ist aber $3k \pm 1$ gerade, und somit ist n auch in diesem Fall eine natürliche Zahl.

Es ist aber auch eine Warnung angebracht: Einen Beweis wie den folgenden kann man nicht einfach so herunterlesen. Man muss jeden einzelnen Satz kritisch hinterfragen: Verstehe ich, was gerade ausgesagt wurde? Weiß ich, wieso stimmt, was ausgesagt wurde? An manchen Stellen haben wir das explizit gekennzeichnet, aber auch an allen übrigen Stellen ist es nötig, dass man sich diese Fragen stellt. Das benötigt viel Zeit. Belohnt wird man durch ein tolles Aha-Gefühl, wenn man versteht, wie alle Puzzleteile ineinandergreifen.[6]

Es ist auch üblich, Teile des Beweises zunächst zu überfliegen, um ein Gefühl für die Grobstruktur der Argumentation zu entwickeln. Wenn Du möchtest, kannst Du sogar beim ersten Lesen den Beweis ganz überspringen und gleich beim letzten Abschnitt weiterlesen.

Wenn Dich das Thema aber interessiert, dann ermutigen wir Dich, den Kampf mit dem Beweis aufzunehmen. Wenn Du hängenbleibst und nicht weiter weißt, dann schreib uns einfach eine Mail!

http://abstrusegoose.com/353



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

[6] Ich, Ingo, habe sehr positive Erinnerungen an eine bestimmte Woche während ich meine Masterarbeit anfertigte. Ich musste einen gewissen englischen Originalartikel verstehen. Mit einem Absatz war ich eine Woche lang beschäftigt. Es war toll, jeden Abend einen weiteren Satz verstanden zu haben!

3 Beweis des eulerschen Pentagonalsatzes

Der erste Schritt zum Durchblick ist es, eine geeignete Interpretation für die linke Seite der Gleichung zu finden. Wir wollen schließlich irgendwie wieder zu unseren Partitionen kommen. Wir können uns noch mal das Produkt

$$(1+X+X^2+\cdots+X^i+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots+X^{2j}+\cdots)(1+X^3+X^6+\cdots+X^{3k}+\cdots)\cdots$$

ansehen, wo wir bereits einen solchen Zusammenhang herstellen konnten. Die Wahl des i-ten Summanden im j-ten Faktor entsprach in der zugehörigen Partition der Wahl von $i-1$ Teilen der Größe j. Im Produkt

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^3)\cdots$$

(wir ignorieren erstmal die Minuszeichen) haben wir pro Faktor immer nur zwei Summanden zur Auswahl. Für die dadurch beschriebenen Partitionen heißt das, dass wir zu jeder Größe entweder keinen Teil oder genau ein Teil aufnehmen können, nicht aber mehrere. Das bedeutet, dass wir so nur Partitionen beschreiben, die aus lauter verschieden großen Teilen bestehen. Als erzeugende Funktion geschrieben:

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^3)\cdots = p_{\text{dist}}(0) + p_{\text{dist}}(1)X + p_{\text{dist}}(2)X^2 + p_{\text{dist}}(3)X^3 + \ldots,$$

wobei $p_{\text{dist}}(n)$ die Anzahl der Partitionen von n in verschieden große Teile ist.[7] Wenn wir das verstanden haben, können wir auch über die Minuszeichen in

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\cdots$$

nachdenken: Das Vorzeichen eines Koeffizienten in der ausmultiplizierten Form ist abhängig von der Anzahl der Teile der beschriebenen Partition. So erhalten die Terme, die zu Partitionen mit gerade vielen Teilen korrespondieren, positives Vorzeichen, während die Terme, die Partitionen mit ungerader Teileanzahl beschreiben, negatives Vorzeichen erhalten. Überlege Dir das an ein paar Beispielen. Wir erhalten

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\cdots = p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(0) + p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(1)X + p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(2)X^2 + p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(3)X^3 + \cdots,$$

wobei $p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(n) = p^{\text{g}}_{\text{dist}}(n) - p^{\text{u}}_{\text{dist}}(n)$ die Anzahl der Partitionen von n in verschieden große Teile mit gerader Anzahl von Teilen minus die Anzahl der Partitionen von n in verschieden große Teile mit ungerader Anzahl von Teilen ist.

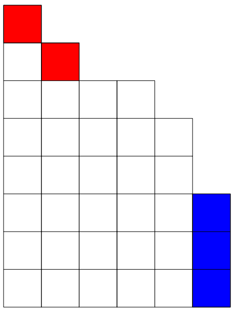
Aufgabe 7. *Eine gute Stelle zum Innehalten*

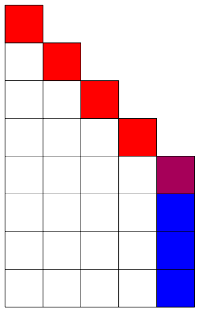
Multipliziere die ersten paar Faktoren der linken Seiten der vorhergehenden Gleichung aus und berechne die ersten paar auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung vorkommenden Zahlen $p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(0)$, $p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(1)$, $p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(2)$, $p^{\text{g}-\text{u}}_{\text{dist}}(3)$.

[7] Zum Beispiel hat die Zahl 4 genau zwei solche Partitionen, nämlich $(3,1)$ und (4). Bei allen anderen Partitionen der 4, $(1,1,1,1)$, $(2,1,1)$ und $(2,2)$, treten dagegen einige Teile gleicher Größe mehrfach auf.

Wir werden sehen, dass für alle natürlichen Zahlen n die Differenz $p_{\text{dist}}^{\text{g}-\text{u}}(n)$ nur -1, 0 oder 1 sein kann und dass $p_{\text{dist}}^{\text{g}-\text{u}}(n) \neq 0$ nur gilt, wenn n eine Pentagonalzahl ist. Dazu benötigen wir Ferrers-Diagramme, die Partitionen visualisieren.

Definition 7. Ein *Ferrers-Diagramm* (benannt nach dem englischen Mathematiker Norman Ferrers) zu einer Partition $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ von n ist ein Säulendiagramm mit k Säulen, wobei die i-te Säule n_i Kästchen hoch ist. Wir veranschaulichen dies mal anhand der Partitionen $(8, 7, 6, 6, 5, 3)$ und $(8, 7, 6, 5, 4)$ der Zahlen 35 und 30:





Die Kästchen der k-ten (rechtesten) Säule nennen wir *Front* (im Bild blau markiert). Diejenigen jeweils obersten Kästchen der ersten Säulen, sodass die jeweils folgende Säule genau ein Kästchen niedriger ist, werden ebenfalls zusammengefasst. Diese werden wir als *Schräge* bezeichnen. Im Bild sind diese Kästchen rot markiert. Es kann sein, dass sich die Front und die Schräge ein Kästchen teilen, wie das lila farbene Kästchen bei der rechts abgebildeten Partition. Es kann auch sein, dass die Schräge leer ist (fällt Dir ein Beispiel ein?).

Die Anzahl der Kästchen der Front, der Schräge und des Schnitts der beiden werden wir mit F, S bzw. Δ abkürzen.

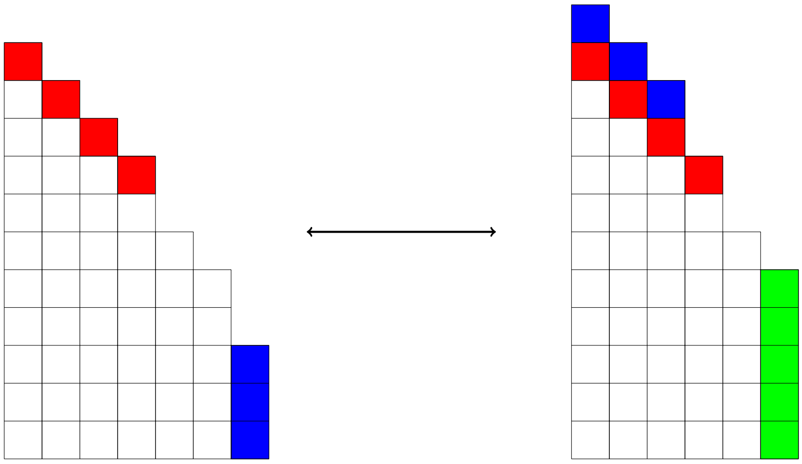
Wir halten zunächst einige kleine Beobachtungen fest: Eine Partition von n ist genau dann eine Partition in lauter verschieden große Teile, wenn alle Säulen im zugehörigen Ferrers-Diagramm unterschiedlich hoch sind. Ferner ist die Gesamtzahl der Kästchen des Ferrers-Diagramms gleich n. Außerdem ist $\Delta = 0$ oder $\Delta = 1$, d. h. die Front und Schräge können sich maximal ein Kästchen teilen. Die Anzahl der Kästchen der Schräge ist kleiner gleich der Anzahl der Säulen k, d. h. $S \leq k$ und Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $\Delta = 1$.

Wie können uns diese Diagramme nun weiterhelfen? Zur Erinnerung: Wir wollten herausfinden, was $p_{\text{dist}}^{\text{g}-\text{u}}(n) = p_{\text{dist}}^{\text{g}}(n) - p_{\text{dist}}^{\text{u}}(n)$ ist. Wir werden uns also nur Ferrers-Diagramme mit unterschiedlich hohen Säulen ansehen. Wir könnten nun versuchen, $p_{\text{dist}}^{\text{g}}(n)$ und $p_{\text{dist}}^{\text{u}}(n)$ separat zu berechnen und danach die Differenz bilden. Wir werden aber anders verfahren.

Unser Trick wird darin bestehen, soweit möglich zu versuchen, jeder Partition p von n in verschieden große Teile eine „Partner"-Partition p^* von n zuzuordnen, die ebenfalls nur aus verschieden großen Teilen besteht. Dabei soll genau eine der verpartnerten Partitionen p und p^* ungerade viele Teile besitzen und die andere entsprechend gerade viele Teile haben. Außerdem soll der Partner von p^* wieder p sein (verpartnerte Partitionen sind sich treu), d. h. $(p^*)^* = p$. Wie im echten Leben haben einige Partitionen keinen Partner, aber die meisten Partitionen sind nicht alleine.

Was wird uns das bringen? Wir müssen zu einer Zahl n nur wissen, wie viele Partitionen von n partnerlos bleiben. Denn von einem Partitionenpaar (p, p^*) trägt genau eine Partition zu $p^{\mathrm{g}}_{\mathrm{dist}}(n)$ und die andere zu $p^{\mathrm{u}}_{\mathrm{dist}}(n)$ bei. Zusammengenommen wird das Paar also keinen Beitrag zur Differenz $p^{\mathrm{g-u}}_{\mathrm{dist}}(n) = p^{\mathrm{g}}_{\mathrm{dist}}(n) - p^{\mathrm{u}}_{\mathrm{dist}}(n)$ leisten.

Wir werden die gesuchte Zuordnung nun am Beispiel der Partition $p = (11, 10, 9, 8, 6, 5, 3)$ von 52 motivieren. Wie wir anhand des zugehörigen Ferrers-Diagramm leicht ablesen können, ist die Front hier kleiner als die Schräge (besteht aus weniger Kästchen):



Sehen wir uns nun an, was passiert, wenn wir die Front auf Schräge legen, wie in der Abbildung eingezeichnet. Die so erhaltene Partition $(12, 11, 10, 8, 6, 5)$ ist wieder eine Partition von 52, denn die Anzahl der Kästchen haben wir ja nicht verändert. Diese hat genau eine Säule bzw. Teil weniger (aus einer geraden/ungeraden Teileanzahl wird eine ungerade/gerade Teileanzahl). Ferner sind noch immer alle Säulen bzw. Teile verschieden groß. Somit ist die Partition $(12, 11, 10, 8, 6, 5)$ ein geeigneter Partner für die Partition $(11, 10, 9, 8, 6, 5, 3)$.

Wie sähe nun der Partner von $(11, 10, 9, 8, 6, 5, 3)$ aus? Dieser sollte ja wieder p sein. Wir können nicht einfach erneut die Front von $(11, 10, 9, 8, 6, 5, 3)$ (grün im Bild) wieder auf ihre Schräge legen, denn die Front von $(11, 10, 9, 8, 6, 5, 3)$ ist größer als ihre Schräge. Andererseits hätten wir das gar nicht gewollt, denn wir wollen ja wieder zu p zurück. Ist die Front also zu groß um sie auf die Schräge zu legen, so können wir es umgekehrt probieren, und die Schräge vor die Front stellen. Wir erhalten folgende Idee für eine Zuordnung von Partnern:

Der Partner p^* einer Partition p (falls existent) ist gegeben durch

$$p^* = \begin{cases} \text{die Partition, die aus } p \text{ durch Legen der Front auf die Schräge hervorgeht, falls möglich;} \\ \text{sonst die Partition, die aus } p \text{ durch Stellen der Schräge vor die Front hervorgeht, falls möglich.} \end{cases}$$

Aufgabe 8. *Partnerlose Partitionen*

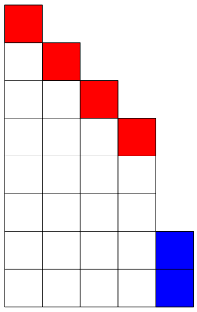
Finde ein Beispiel für eine Partition ohne Partner.

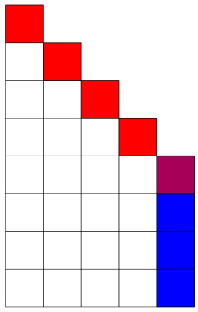
Wir werden nun zeigen, dass diese Idee tatsächlich zum Erfolg führt. Wir werden eine Fallunterscheidung durchführen und drei Typen von Partitionen von n verschieden große Teile separat behandeln: Typ I, Typ II und Typ III.

3.1 Typ I: $S \geq F + \Delta$

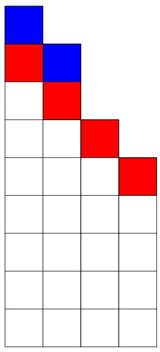
Behauptung: Das sind genau die Partitionen, für welche es möglich ist, die Front auf die Schräge zu legen.

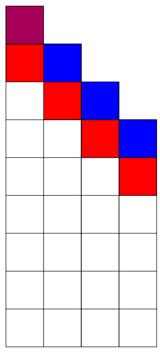
Um den Überblick zu wahren, werden wir die beiden Fälle $\Delta = 0$ und $\Delta = 1$ gesondert betrachten und uns zunächst zwei Beispiele ansehen.





In beiden Beispielen können wir die gesamte Front auf die Schräge legen, diese ist groß genug. Wir erhalten für unsere Beispiele die folgenden Partitionen:





Etwas konkreter: Um unsere Behauptung zu beweisen, müssen wir sicherstellen, dass die Front aus weniger oder genauso vielen Kästchen besteht als der Teil der Schräge, der nach Entfernen der Front übrig bleibt.

Falls $\Delta = 0$, falls sich die Front und die Schräge also kein Kästchen teilen, bleibt nach Entfernen der Front die gesamte Schräge übrig. Da $S \geq F$, ist das Umlegen also möglich.

Ist dagegen $\Delta = 1$, so bleiben von der Schräge nach Entfernen der Front nur noch $S - 1$ Kästchen übrig. Da aus $S \geq F + \Delta$ folgt, dass $S - 1 \geq F$, ist auch in diesem Fall das Umlegen möglich.

Aufgabe 9. *Die Rückrichtung*

Die vorangehenden zwei Absätze zeigen: Wenn $S \geq F + \Delta$, so ist es möglich, die Front auf die Schräge zu legen. Mache Dir nun klar: Wenn es möglich ist, die Front auf die Schräge zu legen, so gilt $S \geq F + \Delta$.

Wir wollen nun noch mehr zeigen: Sei $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ unsere Partition von Typ I und $p^* = (n_1^*, n_2^*, \ldots, n_{k-1}^*)$ ihr Partner, den wir durch Legen der Front auf die Schräge erhalten. Beachte, dass p^* genau eine Säule weniger als p besitzt. Wir bezeichnen mit S^*, F^* bzw. Δ^* die Schräge, die Front bzw. den Schnitt von p^*. Damit gilt

$$S^* = F \qquad \text{und} \qquad F^* > F. \tag{2}$$

Mache Dir das klar! Wir werden nun folgende Behauptung zeigen: Es gilt $S^* < F^* - \Delta^*$.

Falls $\Delta^* = 0$, so folgt dies direkt aus den obigen (Un)gleichungen (2). Betrachten wir also noch den Fall $\Delta^* = 1$. Wegen $\Delta^* = 1$ wissen wir, dass S^* gleich der Anzahl der Säulen von p^* ist, d. h. $S^* = k - 1$. Also wurde beim Legen der Front auf die Schräge auf jede der Säulen ein Kästchen gelegt, kurz $n_i^* = n_i + 1$ für alle i mit $1 \leq i \leq k - 1$. Insbesondere gilt das also für die $(k-1)$-te Säule von p^*, welche zugleich die Front von p^* bildet. Wir erhalten

$$F^* = n_{k-1}^* = n_{k-1} + 1.$$

Zugleich ist aber die $(k-1)$-te Säule von p höher als die k-te Säule von p, welche als Front von p die kleinste Säule von p sein muss. Somit erhalten wir

$$n_{k-1} > n_k = F = S^*.$$

Durch Kombination dieser Ergebnisse erhalten wir mit $\Delta^* = 1$

$$F^* = n_{k-1} + 1 = n_{k-1} + \Delta^* > S^* + \Delta^*$$

und daraus durch Umstellen $S^* < F^* - \Delta^*$.

Somit ist auch die zweite Behauptung gezeigt. Wir erhalten also aus jeder Typ-I-Partition p durch Legen der Front auf ihre Schräge eine Partition p^* mit $S^* < F^* - \Delta^*$. Partitionen, die diese Eigenschaft erfüllen, werden wir als Typ-II-Partition bezeichnen und im nächsten Fall untersuchen.

3.2 Typ II: $S < F - \Delta$

Zunächst überlegen wir uns, dass eine solche Partition nicht gleichzeitig von Typ-I sein kann: Eine solche Partition müsste $F + \Delta \leq S < F - \Delta$ erfüllen. Falls $\Delta = 0$, würde der Widerspruch $F < F$ und falls $\Delta = 1$, würde der Widerspruch $F + 1 < F - 1$ folgen. Dies ist also nicht möglich und somit ist es dann, wie wir bei der Untersuchung der Typ-I-Partitionen gesehen haben, nicht möglich, die Front auf die Schräge zu legen.

Wir stellen aber folgende Behauptung auf: Die Typ-II-Partitionen sind genau die Partitionen, bei denen es möglich ist, die Schräge vor die Front stellen. Dafür muss sichergestellt sein, dass die zusätzliche Säule, die aus den Kästchen der Schräge entsteht, kleiner als die ursprüngliche Front ist, denn wir wollen weiterhin nur Partitionen mit verschieden hohen Säulen betrachten.

Ist $\Delta = 0$, so behält die ursprüngliche Front beim Entfernen der Schräge ihre Höhe. Das Umlegen ist also genau dann möglich, wenn $S < F$. Ist dagegen $\Delta = 1$, so wird die ursprüngliche Front um ein Kästchen schrumpfen, wenn die Schräge vor die Front gestellt wird. Das Umlegen ist also genau dann möglich, wenn $S < F - 1$ gelten. In beiden Fällen sehen wir: Das Umlegen ist genau dann möglich, wenn $S < F - \Delta$. Das zeigt die Behauptung.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass wir aus einer Typ-II-Partition $p = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ eine Typ-I-Partition $p^* = (n_1^*, n_2^*, \ldots, n_{k+1}^*)$ als Partner erhalten. Beachte, dass p^* diesmal eine Säule mehr hat als p. Wir bezeichnen wieder mit S^*, F^* bzw. Δ^* die Anzahl der Kästchen der Schräge, der Front bzw. des Schnittes von p^*. Dann gilt

$$F^* = S \qquad \text{und} \qquad S^* \geq S. \tag{3}$$

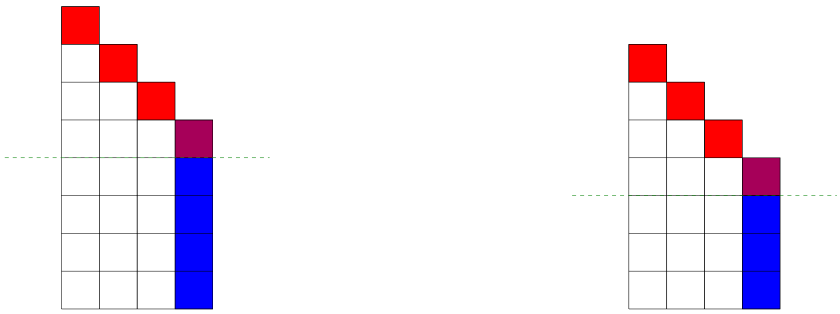
Wir müssen zeigen, dass $S^* \geq F^* + \Delta^*$ gilt.

Im Fall $\Delta^* = 0$ folgt aus den (Un-)gleichungen (3) sofort $S^* \geq F^* + \Delta^*$. Betrachten wir also noch den Fall $\Delta^* = 1$. Wir wissen, dass die Anzahl der Säulen k von p größer oder gleich S ist, d. h. $k \geq S$. Wegen $\Delta^* = 1$ gilt ferner, dass $S^* = k + 1$ ist. Also erhalten wir $S^* = k + 1 = k + \Delta^* \geq S + \Delta^* = F^* + \Delta^*$. Auch hier folgt also $S^* \geq F^* + \Delta^*$.

Wir erhalten also aus jeder Typ-II-Partition durch Stellen der Schräge vor die Front eine Typ-I-Partition. Ferner ist klar, dass $(p^*)^* = p$ für alle Typ-I- und Typ-II-Partitionen p gilt. Eine Frage ist aber noch offen: Gibt es neben den Typ I und Typ II-Partitionen noch andere? Ja, gibt es! Diese werden wir nun als letzten Fall betrachten und Typ-III-Partitionen nennen.

3.3 Typ III: Alle anderen, d. h. $F - \Delta \leq S < F + \Delta$

In diesem Fall gilt schon $\Delta = 1$ (sonst wäre $F < F$) und somit ist die Anzahl der Säulen k schon gleich S. Wir müssen also die beiden Unterfälle $S = F - 1$ und $S = F$ betrachten. (Wieso gibt es keine weiteren Unterfälle? Mache Dir das klar!) In der Abbildung haben wir für beide Unterfälle ein Beispiel:



Wie wir in den vorhergehenden Fällen bereits gesehen haben, ist es für diese Partitionen weder möglich, die Front auf die Schräge zu legen, noch die Schräge vor die Front zu stellen. Also haben diese Partitionen keinen Partner. Überprüfe das anhand der Beispiele.

Für welche n gibt es solche Partitionen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Kästchen zählen. In beiden Fällen haben wir oberhalb der gestrichelten Linie $1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) + k$ Kästchen. Wie Du aus Aufgabe 3 weißt, kann man diese Summe als

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

schreiben. Im Fall $S = F - 1$ haben wir unterhalb der gestrichelten Linie k^2 viele Kästchen, im Fall $S = F$ dagegen nur $k(k-1)$ viele Kästchen. Es gibt also Typ-III-Partitionen genau für die n, die sich als

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + k^2 = \frac{3k^2 + k}{2}$$

oder als

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + k(k-1) = \frac{3k^2 - k}{2}$$

für ein k schreiben lassen. Das sind exakt die Pentagonalzahlen!

3.4 Fazit

Fazit: Partner einer Typ-I-Partition ist eine Typ-II-Partition und umgekehrt. Typ-III-Partitionen haben keinen Partner. Um $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n) = p_{\text{dist}}^{\text{g}}(n) - p_{\text{dist}}^{\text{u}}(n)$ zu berechnen, genügt es also, (da sich die Säulenanzahl von verpartnerten Typ I und Typ II -Partitionen genau um eins unterscheidet) nur die Typ-III-Partitionen zu kennen: Die Differenz $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n)$ ist gleich der Anzahl der Typ-III-Partitionen von n.

Falls n keine Pentagonalzahl ist, so gibt es keine Typ-III-Partitionen von n, also ist $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n) = 0$. Falls n schon eine Pentagonalzahl ist, so gibt es genau eine Typ-III-Partition von n (wieso?). In diesem Fall ist also

$$n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$$

für ein k, wobei k die Anzahl der Säulen dieser einen Partition ist. Falls k gerade ist, ist somit $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n) = 1$. Falls k ungerade ist, ist $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n) = -1$. Das kann man auch kurz und knapp zusammenfassen: $p_{\text{dist}}^{\text{g-u}}(n) = (-1)^k$ (mache Dir das klar!). Das zeigt gerade den eulerschen Pentagonalsatz. □

4 Herleitung einer Rekursionsformel für die Partitionsfunktion

Puh! Wir haben den eulerschen Pentagonalsatz bewiesen! Aus diesem können wir durch Umstellen direkt folgern, dass

$$P(X)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(X^{k(3k+1)/2} + X^{k(3k-1)/2}\right)\right) = 1.$$

Was bringt uns das? Wir können nun die linke Seite ausmultiplizieren und anschließend einen Koeffizientenvergleich durchführen. Was ist damit gemeint? Wir interpretieren beide Seiten der Gleichung als formale Potenzreihe, so ist z. B.

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(X^{k(3k+1)/2} + X^{k(3k-1)/2}\right) = 1 - X - X^2 + X^5 + X^7 - X^{12} - X^{15} \pm \cdots$$

Wir werden den ℓ-ten Koeffizienten dieser Potenzreihe mit a_l bezeichnen; wir können dann

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(X^{k(3k+1)/2} + X^{k(3k-1)/2}\right) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_l X^\ell$$

schreiben. Wir hatten bereits gesehen, dass

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, \text{ falls } n \text{ von der Form } n = \frac{3k^2 \pm k}{2} \text{ für ein } k \text{ und} \\ \\ 0 \text{ in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Wenn wir nun diese Summe mit $P(X) = p(0) + p(1)X + p(2)X^2 + p(3)X^3 + \cdots$ multiplizieren, erhalten wir wieder eine Potenzreihe, nämlich

$$p(0)a_0 + \Big(p(1)a_0 + p(0)a_1\Big)X + \Big(p(2)a_0 + p(1)a_1 + p(0)a_2\Big)X^2 + \Big(p(3)a_0 + p(2)a_1 + p(1)a_2 + p(0)a_3\Big)X^3 + \cdots$$

Der Koeffizient vor X^t in diesem Produkt, also der Vorfaktor vor X^t, hat die Form

$$\sum_{s=0}^{t} p(t-s)\, a_s,$$

überlege Dir das. Dank des eulerschen Pentagonalsatzes wissen wir aber gleichzeitig, dass diese Koeffizienten alle verschwinden, bis auf den ersten vor X^0, dieser ist 1. Wir erhalten also für $t = 0$, dass $p(0) \cdot a_0 = 1$ und daraus $p(0) = 1$. (Dieses Teilergebnis hätten wir auch ohne den Pentagonalsatz erhalten können.) Für alle anderen $t > 0$ erhalten wir dagegen, dass

$$\sum_{s=0}^{t} p(t-s)\, a_s = 0.$$

Diese Gleichungen können wir nun umformen. Unter Ausnutzung von $a_0 = 1$ können wir $p(t)$ auf die andere Seite bringen und erhalten nach langen Mühen endlich eine Rekursionsformel

$$p(t) = -\sum_{s=1}^{t} p(t-s)\, a_s. \tag{4}$$

für $p(t)$.

Mithilfe der folgenden Tabelle sind wir in der Lage, diese Rekursionsformeln konkret aufzuschreiben.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\frac{3k^2-k}{2}$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	330	376
$\frac{3k^2+k}{2}$	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155	187	222	260	301	345	392

Aus dieser Tabelle können wir nämlich alle Koeffizienten a_1, a_2, bis a_{392} der Potenzreihe

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Big(X^{k(3k+1)/2} + X^{k(3k-1)/2}\Big) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_l X^\ell$$

ablesen. Wollen wir wissen, welchen Wert a_m für ein m mit $1 \leq m \leq 392$ hat, so überprüfen wir als erstes, ob m im rechten unteren Teil der Tabelle, der durch die doppelten Trennlinien definiert ist, auftaucht. Wenn nicht, so ist $a_m = 0$. Taucht m dagegen in diesem Teil der Tabelle auf, so müssen wir überprüfen, in welcher Spalte m steht. Ist die Zahl in der Spalte von m oberhalb der doppelten Trennlinie gerade, so ist $a_m = 1$, ist diese Zahl dagegen ungerade, so gilt $a_m = -1$. Wir erhalten (beachte das Minuszeichen vor der Summe in (4))

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) \pm \dots$$

Diese Summe scheint in dieser Schreibweise aus unendlich vielen Summanden zu bestehen, dies ist aber nicht der Fall. Wir wissen nur nicht genau, wie viele Summanden tatsächlich auftreten. Sobald aber das Argument in $p(\cdot)$ kleiner 0 ist, bricht diese Summe ab.

Mithilfe des Startwerts $p(0) = 1$ können wir nun die ersten Werte der Partitionsfunktion berechnen:

$$\begin{aligned}
p(1) &= p(0) && = 1, \\
p(2) &= p(1) + p(0) && = 2, \\
p(3) &= p(2) + p(1) && = 3, \\
p(4) &= p(3) + p(2) && = 5, \\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) && = 7, \\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) && = 11, \\
p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) && = 15, \\
p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) && = 22, \\
p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) && = 30, \\
p(10) &= p(9) + p(8) - p(5) - p(3) && = 42, \\
p(11) &= p(10) + p(9) - p(6) - p(4) && = 56, \\
p(12) &= p(11) + p(10) - p(7) - p(5) + p(0) && = 77, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Diese Rekursion versetzte Percy Alexander MacMahon noch vor der Entdeckung der eingangs erwähnten Formel von Hardy, Ramanujan und Rademacher in die Lage, die ersten 200 Werte der Partitionsfunktion zu berechnen, was eine nichttriviale Aufgabe darstellt, denn $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$.

Aufgabe 10. *Immer noch Bock auf Programmieren?*

Wenn Du Lust hast, kannst Du dein Programm aus Aufgabe 4 verbessern. Es soll nicht mehr „per Hand“ die Werte der Partitionsfunktion bestimmen, sondern die Rekursionsformel aus dem eulerschen Pentagonalsatz verwenden. Mit dieser Verbesserung wird Dein Programm viel größere Werte bestimmen können!