



Große Zahlen

Korrespondenzzirkel vom 4. April 2018

Ahoi! Mit diesem Brief möchten wir Neugierde an etwas ganz Alltäglichem wecken: natürlichen Zahlen. Wir möchten euch allerlei Sorten von Zahlen vorstellen:

- Zahlen, von denen man genau weiß, dass sie höchstens zwei Stellen haben, aber die Bestimmung ihres exakten Werts noch völlig außerhalb unserer Möglichkeiten steht.
- Zahlen, die absurd groß sind: So groß, dass es nicht genügend Atome im sichtbaren Universum gibt, um sie jemals aufzuschreiben – ja sogar so groß, dass es nicht genügend Atome gibt, um die Anzahl ihrer Stellen zu verewigen – sogar so groß, dass es nicht genügend Atome gibt, um die Anzahl der Stellen der Anzahl der Stellen niederzuschreiben – ja sogar so groß ... Das geht noch eine lange Zeit so weiter (wie lange, können wir nicht aufschreiben).
- Zahlenfolgen, die so schnell anwachsen, dass sie selbst im Prinzip nicht berechenbar sind – die absurd großen Zahlen aus dem letzten Absatz können zwar schon nicht in unserem physischen Universum berechnet werden, aber die Zahlenfolgen an die wir jetzt denken setzen noch einen drauf: Bewiesenermaßen könnten sie auch nicht in einem hypothetischen größeren Universum berechnet werden. Bei denen ist es *mathematisch unmöglich*, ihren Zahlenwert algorithmisch zu bestimmen, und weder Unmengen an Speicherplatz und Energie noch Intelligenz kann daran etwas ändern.

Dabei geht es uns stets primär um *endliche Zahlen*. Nur die gehören konventionsgemäß zu der Menge der natürlichen Zahlen. In der Mathematik werden aber auch *unendlich große Zahlen* untersucht, welche zum einen für sich selbst interessant sind und uns zum anderen zur Konstruktion absurd großer endlicher Zahlen helfen werden. Hier ein Vorgeschmack auf den *ordinalen Zahlenstrahl*, der auch unendlich große Zahlen umfasst:

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega \cdot 2, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3$$

Und ja, es gibt sogar Ungetüme wie

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}},$$

etwas schwammig ausgesprochen „unendlich hoch unendlich hoch unendlich hoch ... , insgesamt unendlich oft“. Spoiler: Gestandene Mengentheoretikerinnen lächeln nur müde über ε_0 ; in ihrer Forschung beschäftigen sie sich mit weit größeren Zahlen. Aber alles zu seiner Zeit.

Wenn du diese Figur siehst:



Dann halte beim Lesen kurz inne und überzeuge dich von der Behauptung, um die es gerade geht. Oder lies erst mal weiter, ganz wie du magst. Aber wir laden dich herzlich ein, über diesen Stellen zu grübeln – sie machen Spaß! Wenn du nicht siehst, wie man eine solche Stelle genauer begründet, dann schreib uns einfach. Die Illustration haben wir übrigens von SpikedMath.com übernommen, einem nerdigen Comic.

1 Kleine Zahlen, deren exakter Wert uns noch lange verschlossen bleiben wird

1.1 Einstieg in die Partymathematik

Proposition 1. *Auf jeder Party mit mindestens sechs Gästen gibt es stets mindestens drei Gäste, die sich vorher schon alle untereinander kannten, oder drei Gäste, die sich vorher alle untereinander nicht kannten.*

Lasst uns dieses Kuriosum beweisen!

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Party mit mindestens sechs Gästen und möchten unser Augenmerk auf einen der Gäste, Gast A , richten. Es gibt entweder

- a) noch mindestens drei Leute, Gäste B , C und D , sodass sich $A-B$, $A-C$ und $A-D$ schon vorher kannten; oder
- b) es gibt mindestens drei Leute, Gäste B , C und D , sodass sich $A-B$, $A-C$ und $A-D$ vorher nicht kannten. (Oder beides.)

Überzeuge dich davon! 🧐 An dieser Stelle geht ein, dass es insgesamt mindestens sechs Gäste gibt. Lasst uns die beiden Fälle separat untersuchen:

In Fall a) könnte es sein, dass sich $B-C$, $B-D$ oder $C-D$ schon kannten. Dann bilden die drei Gäste $A-B-C$ bzw. $A-B-D$ bzw. $A-C-D$ ein Dreiergrüppchen, das sich schon vorher kannte. Es kann aber auch sein, dass sich $B-C$, $B-D$ oder $C-D$ alle nicht kannten. Dann bilden $B-C-D$ ein Dreiergrüppchen, das sich vorher nicht kannte. So oder so stimmt die Behauptung des Theorems.

In Fall b) verhält es sich ähnlich. (Wie genau? 🧐)

□

1.2 Ramsey-Theorie

Die Proposition zur Partymathematik illustriert den *Hauptsatz der Ramsey-Theorie*, einem großen Teilgebiet der Kombinatorik. Er besagt:

Satz 2. *Zu jeder natürlichen Zahl r und jeder natürlichen Zahl b gibt es eine natürliche Zahl N mit folgender Eigenschaft: In jeder Party mit mindestens N Gästen gibt es ein Grüppchen aus r Gästen, die sich alle schon vorher kannten, oder ein Grüppchen aus b Gästen, die sich alle vorher noch nicht kannten.*

Die eben bewiesene Proposition ist ein Spezialfall dieses Satzes, nämlich für den Fall $r = 3$ und $b = 3$. Wenn man den Satz auf Wikipedia nachschlägt, ist nicht von Partys, sondern von *Graphen* die Rede, und es geht nicht darum, ob sich Gäste schon kannten, sondern darum, ob Kanten zwischen je zwei Knoten rot oder blau gefärbt sind (so erklären sich auch die Variablennamen). Es können auch beide Fälle eintreten; wenn man in der Mathematik das Wort „oder“ verwendet, meint man damit nicht, dass *genau* einer der beiden Fälle eintritt.

Es ist mühsam, immer von Leuten, die sich schon kannten, oder Leuten, die sich noch nicht kannten, zu sprechen. Lasst uns ab jetzt folgende Sprechweise übernehmen: Grüppchen aus Leuten, die sich schon kannten, heißen *rote Grüppchen*, und Grüppchen aus Leuten, die sich noch nicht kannten, heißen *blaue Grüppchen*. Statt „Grüppchen bestehend aus k Leuten“ wollen wir auch kurz „ k -Grüppchen“ schreiben.

Vor vornherein ist es überhaupt nicht einsichtig, wieso der Satz stimmen sollte, wieso es also in Abhängigkeit von r und b eine Anzahl N geben sollte, sodass es in *jeder* Party mit N Gästen mit ihren irgendwie gearteten Bekanntheitsbeziehungen stets ein rotes r -Grüppchen oder ein blaues b -Grüppchen geben sollte. Dass der Satz trotzdem stimmt, zeigt sein Beweis, den wir weiter unten präsentieren.

Die kleinstmögliche Zahl N mit den genannten Eigenschaften schreibt man auch als „ $R(r, g)$ “. Die Eingangsproposition kann man also in folgende Sprache kleiden: Die Zahl $R(3, 3)$ ist höchstens sechs. Man kann sich nun zusätzlich überlegen, dass es bei nur fünf Gästen mindestens eine Gästekonstellation gibt, in der weder ein Dreiergrüppchen aus Leuten, die sich schon kannten, noch ein Dreiergrüppchen aus Leuten, die sich noch nicht kannten, gibt. 🧐 Daher ist $R(3, 3)$ genau gleich sechs.

1.3 Unser Wissensstand

Wie kann man die *Ramsey-Zahlen* $R(r, g)$ bestimmen? Prinzipiell ist das leicht, man muss nur einen Computer beauftragen, alle möglichen Gästekonstellationen durchzugehen und dabei zu prüfen, ab welcher Partygröße es immer mindestens ein rotes r -Grüppchen oder ein blaues b -Grüppchen gibt. Allerdings sind nur wenige Abkürzungen bekannt, die es dem Computer ermöglichen, ein paar Fälle nicht überprüfen zu müssen. Deswegen sind die meisten Ramsey-Zahlen unbekannt.

Bis 2012 wusste man von $R(4, 6)$ etwa nur, dass diese Zahl zwischen 35 und 41 liegt (jeweils einschließlich). Seit einem neuen Ergebnis im Jahr 2012 weiß man: Die Zahl $R(4, 6)$ liegt zwischen 36 und 41 (jeweils einschließlich). Diese Erkenntnis war einen mathematischen Fachartikel wert.

Überlege dir, wie man grundsätzlich vorgehen muss, um *untere Schranken* für die Ramsey-Zahlen zu finden – also herauszufinden, dass eine bestimmte Ramsey-Zahl mindestens so und so groß ist. 🧐 Wie man vorgehen kann, um (nicht optimale, aber immerhin) *obere Schranken* zu finden, behandeln wir im nächsten Abschnitt.

1.4 Obere Schranken

Unendlich viele Ramsey-Zahlen sind heute unbekannt, aber unendlich viele andere lassen sich leicht bestimmen: Überzeuge dich davon, dass für alle positiven natürlichen Zahlen r und b gilt: $R(r, 1) = 1$ und $R(1, b) = 1$. 🧐 (Was bedeutet das? Hat was mit etwas einsamen *Einergrüppchen* zu tun.)

Nächstschwieriger sind folgende Erkenntnisse:

- Für alle natürlichen Zahlen r gilt $R(r, 2) = r$. 🧐
- Für alle natürlichen Zahlen b gilt $R(2, b) = b$. 🧐
- Für alle natürlichen Zahlen r und b gilt: $R(r, b) = R(b, r)$. 🧐

Mit solchen Erkenntnissen setzt man folgende allgemeine Beobachtung in Gang, die dann den Hauptsatz der Ramsey-Theorie beweist. Nimm dir Zeit, die Formulierung des Lemmas und den Beweis zu verstehen! 🧐

Lemma 3. *Seien r und b beliebige natürliche Zahlen. Sei schon bekannt, dass es Zahlen P und Q mit folgenden Eigenschaften gibt:*

- *Auf jeder Party mit P Gästen gibt es mindestens ein rotes $(r - 1)$ -Grüppchen oder mindestens ein blaues b -Grüppchen. (Kurz: $R(r - 1, b) \leq P$.)*
- *Auf jeder Party mit Q Gästen gibt es mindestens ein rotes r -Grüppchen oder mindestens ein blaues $(b - 1)$ -Grüppchen. (Kurz: $R(r, b - 1) \leq Q$.)*

Dann gibt es auf jeder Party mit mindestens $P + Q$ Gästen mindestens ein rotes r -Grüppchen oder mindestens ein blaues b -Grüppchen. (Kurz: Die Zahl $R(r, b)$ gibt es wirklich, und zwar gilt $R(r, b) \leq P + Q$.)

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Gästekonstellation mit insgesamt mindestens $P + Q$ Gästen und richten unser Augenmerk auf einen der Gäste, Gast A . Wir müssen beweisen, dass es mindestens ein rotes r -Grüppchen oder mindestens ein blaues b -Grüppchen gibt.

Sei M die Menge derjenigen restlichen Gäste, die A schon vorher kannten (und die A vorher schon kannte), und N die Menge derjenigen restlichen Gäste, die A vorher noch nicht kannten (und die A auch vorher noch nicht kannte).

Nun folgt, dass a) zu M mindestens P Gäste gehören oder b) dass zu N mindestens Q Gäste gehören. Denn angenommen, zu M würden höchstens $P - 1$ und zu N würden höchstens $Q - 1$ Gäste gehören: Dann gäbe es auf der Party insgesamt nur $1 + (P - 1) + (Q - 1) = P + Q - 1$ Gäste. Es gibt ja aber mindestens $P + Q$ Gäste. 🧐

Jeden der beiden Fälle untersuchen wir nun separat.

- a) Nach Voraussetzung an P gibt es unter den zu M gehörenden Gästen mindestens ein rotes $(r - 1)$ -Grüppchen G oder mindestens ein blaues b -Grüppchen. Falls letzteres, sind wir mit unserem Beweis fertig (wieso? 🧐). Falls ersteres, dann sind wir ebenfalls fertig, da das r -Grüppchen bestehend aus den Gästen in G und zudem Gast A rot ist. 🧐

- b) Wenn du die Überlegung zu Fall a) verstanden hast, dann versuche, die Überlegung zu Fall b) selbstständig zu führen! 🧐 □

Kurz zusammengefasst besagt das Lemma, dass

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1),$$

und mit dieser Abschätzung kann man für jede Ramsey-Zahl obere Schranken angeben. Wenn wir zum Beispiel noch nicht wüssten, dass $R(3, 2) = 3$ ist, könnten wir uns diesem Resultat wie folgt nähern:

$$R(3, 2) \leq R(2, 2) + R(3, 1) \leq R(1, 2) + R(2, 1) + R(3, 1) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Wir können etwa auch folgern:

$$R(4, 3) \leq R(3, 3) + R(4, 2) = 6 + 4 = 10.$$

(Tatsächlich gilt $R(4, 3) = 9$, die obere Schranke ist hier also sehr nah am tatsächlichen Wert.)
Und weiter:

$$R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = R(4, 3) + R(3, 4) \leq 10 + 10 = 20.$$

(Der tatsächliche Wert von $R(4, 4)$ ist 18.)

Wenn du Spaß am Programmieren hast, oder es lernen möchtest, dann schreibe doch ein Programm, das nach diesem Schema obere Schranken für die Ramsey-Zahlen ausgibt. 🧐