Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2017/2018
Klassen 11/12

Große Zahlen

Korrespondenzzirkel vom 4. April 2018

Ahoi! Mit diesem Brief möchten wir Neugierde an etwas ganz Alltäglichem wecken: natürlichen Zahlen. Wir möchten euch allerlei Sorten von Zahlen vorstellen:

a) Zahlen, von denen man genau weiß, dass sie höchstens zwei Stellen haben, aber die Bestimmung ihres exakten Werts noch völlig außerhalb unserer Möglichkeiten steht.

b) Zahlen, die absurd groß sind: So groß, dass es nicht genügend Atome im sichtbaren Universum gibt, um sie jemals aufzuschreiben – ja sogar so groß, dass es nicht genügend Atome gibt, um die Anzahl ihrer Stellen zu verewigen – sogar so groß, dass es nicht genügend Atome gibt, um die Anzahl der Stellen der Anzahl der Stellen niederzuschreiben – ja sogar so groß … Das geht noch eine lange Zeit so weiter (wie lange, können wir nicht aufschreiben).

c) Zahlenfolgen, die so schnell anwachsen, dass sie selbst im Prinzip nicht berechenbar sind – die absurd großen Zahlen aus dem letzten Absatz können zwar schon nicht in unserem physischen Universum berechnet werden, aber die Zahlenfolgen an die wir jetzt denken setzen noch einen drauf: Bewiesenermaßen könnten sie auch nicht in einem hypothetischen größeren Universum berechnet werden. Bei denen ist es *mathematisch unmöglich*, ihren Zahlenwert algorithmisch zu bestimmen, und weder Unmengen an Speicherplatz und Energie noch Intelligenz kann daran etwas ändern.

Dabei geht es uns stets primär um *endliche Zahlen*. Nur die gehören konventionsgemäß zu der Menge der natürlichen Zahlen. In der Mathematik werden aber auch *unendlich große Zahlen* untersucht, welche zum einen für sich selbst interessant sind und uns zum anderen zur Konstruktion absurd großer endlicher Zahlen helfen werden. Hier ein Vorgeschmack auf den *ordinalen Zahlenstrahl*, der auch unendlich große Zahlen umfasst:

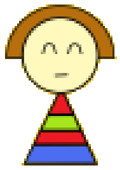
$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega \cdot 2, \ldots\ldots, \omega \cdot 3, \ldots\ldots\ldots, \omega^2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \omega^3$$

Und ja, es gibt sogar Ungetüme wie

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}},$$

etwas schwammig ausgesprochen „unendlich hoch unendlich hoch unendlich hoch …, insgesamt unendlich oft“. Spoiler: Gestandene Mengentheoretikerinnen lächeln nur müde über ε_0; in ihrer Forschung beschäftigen sie sich mit weit größeren Zahlen. Aber alles zu seiner Zeit.

Wenn du diese Figur siehst:



Dann halte beim Lesen kurz inne und überzeuge dich von der Behauptung, um die es gerade geht. Oder lies erst mal weiter, ganz wie du magst. Aber wir laden dich herzlich ein, über diesen Stellen zu grübeln – sie machen Spaß! Wenn du nicht siehst, wie man eine solche Stelle genauer begründet, dann schreib uns einfach. Die Illustration haben wir übrigens von SpikedMath.com übernommen, einem nerdigen Comic.

1 Kleine Zahlen, deren exakter Wert uns noch lange verschlossen bleiben wird

1.1 Einstieg in die Partymathematik

Proposition 1. *Auf jeder Party mit mindestens sechs Gästen gibt es stets mindestens drei Gäste, die sich vorher schon alle untereinander kannten, oder drei Gäste, die sich vorher alle untereinander nicht kannten.*

Lasst uns dieses Kuriosum beweisen!

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Party mit mindestens sechs Gästen und möchten unser Augenmerk auf einen der Gäste, Gast A, richten. Es gibt entweder

a) noch mindestens drei Leute, Gäste B, C und D, sodass sich A–B, A–C und A–D schon vorher kannten; oder

b) es gibt mindestens drei Leute, Gäste B, C und D, sodass sich A–B, A–C und A–D vorher nicht kannten. (Oder beides.)

Überzeuge dich davon! An dieser Stelle geht ein, dass es insgesamt mindestens sechs Gäste gibt. Lasst uns die beiden Fälle separat untersuchen:

In Fall a) könnte es sein, dass sich B–C, B–D oder C–D schon kannten. Dann bilden die drei Gäste A–B–C bzw. A–B–D bzw. A–C–D ein Dreiergrüppchen, das sich schon vorher kannte. Es kann aber auch sein, dass sich B–C, B–D oder C–D alle nicht kannten. Dann bilden B–C–D ein Dreiergrüppchen, das sich vorher nicht kannte. So oder so stimmt die Behauptung des Theorems.

In Fall b) verhält es sich ähnlich. (Wie genau?) $\square$

1.2 Ramsey-Theorie

Die Proposition zur Partymathematik illustriert den *Hauptsatz der Ramsey-Theorie*, einem großen Teilgebiet der Kombinatorik. Er besagt:

Satz 2. *Zu jeder natürlichen Zahl r und jeder natürlichen Zahl b gibt es eine natürliche Zahl N mit folgender Eigenschaft: In jeder Party mit mindestens N Gästen gibt es ein Grüppchen aus r Gästen, die sich alle schon vorher kannten, oder ein Grüppchen aus b Gästen, die sich alle vorher noch nicht kannten.*

Die eben bewiesene Proposition ist ein Spezialfall dieses Satzes, nämlich für den Fall $r = 3$ und $b = 3$. Wenn man den Satz auf Wikipedia nachschlägt, ist nicht von Partys, sondern von *Graphen* die Rede, und es geht nicht darum, ob sich Gäste schon kannten, sondern darum, ob Kanten zwischen je zwei Knoten rot oder blau gefärbt sind (so erklären sich auch die Variablennamen). Es können auch beide Fälle eintreten; wenn man in der Mathematik das Wort „oder“ verwendet, meint man damit nicht, dass *genau* einer der beiden Fälle eintritt.

Es ist mühsam, immer von Leuten, die sich schon kannten, oder Leuten, die sich noch nicht kannten, zu sprechen. Lasst uns ab jetzt folgende Sprechweise übernehmen: Grüppchen aus Leuten, die sich schon kannten, heißen *rote Grüppchen*, und Grüppchen aus Leuten, die sich noch nicht kannten, heißen *blaue Grüppchen*. Statt „Grüppchen bestehend aus k Leuten“ wollen wir auch kurz „k-Grüppchen“ schreiben.

Vor vornherein ist es überhaupt nicht einsichtig, wieso der Satz stimmen sollte, wieso es also in Abhängigkeit von r und b eine Anzahl N geben sollte, sodass es in *jeder* Party mit N Gästen mit ihren irgendwie gearteten Bekanntheitsbeziehungen stets ein rotes r-Grüppchen oder ein blaues b-Grüppchen geben sollte. Dass der Satz trotzdem stimmt, zeigt sein Beweis, den wir weiter unten präsentieren.

Die kleinstmögliche Zahl N mit den genannten Eigenschaften schreibt man auch als „$R(r, g)$“. Die Eingangsproposition kann man also in folgende Sprache kleiden: Die Zahl $R(3, 3)$ ist höchstens sechs. Man kann sich nun zusätzlich überlegen, dass es bei nur fünf Gästen mindestens eine Gästekonstellation gibt, in der weder ein Dreiergrüppchen aus Leuten, die sich schon kannten, noch ein Dreiergrüppchen aus Leuten, die sich noch nicht kannten, gibt. Daher ist $R(3, 3)$ genau gleich sechs.

1.3 Unser Wissensstand

Wie kann man die *Ramsey-Zahlen* $R(r, g)$ bestimmen? Prinzipiell ist das leicht, man muss nur einen Computer beauftragen, alle möglichen Gästekonstellationen durchzugehen und dabei zu prüfen, ab welcher Partygröße es immer mindestens ein rotes r-Grüppchen oder ein blaues b-Grüppchen gibt. Allerdings gibt es unzählige solcher Konstellationen,[1] und es sind nur wenige Abkürzungen bekannt, die es dem Computer ermöglichen, ein paar Fälle nicht überprüfen zu müssen. Deswegen sind die meisten Ramsey-Zahlen unbekannt.

Bis 2012 wusste man von $R(4, 6)$ etwa nur, dass diese Zahl zwischen 35 und 41 liegt (jeweils einschließlich). Seit einem neuen Ergebnis im Jahr 2012 weiß man: Die Zahl $R(4, 6)$ liegt

[1] Lasst uns grob überschlagen, wie viele verschiedene Gästekonstellationen es bei insgesamt zehn Gästen gibt. Es gibt $\binom{10}{2} = 10 \cdot 9/2 = 45$ viele Paare von je zwei Gästen. Also gibt es 2^{45} Möglichkeiten für die „kannten sich schon“/„kannten sich noch nicht“-Optionen, die es für jedes Paar gibt. Das sind etwa 35 Trillionen. Die tatsächlich relevante Anzahl Möglichkeiten ist etwas geringer, da es auf die Reihenfolge der Personen nicht ankommt.

zwischen *36* und 41 (jeweils einschließlich). Diese Erkenntnis war einen mathematischen Fachartikel wert.[2]

Überlege dir, wie man grundsätzlich vorgehen muss, um *untere Schranken* für die Ramsey-Zahlen zu finden – also herauszufinden, dass eine bestimmte Ramsey-Zahl mindestens so und so groß ist. Wie man vorgehen kann, um (nicht optimale, aber immerhin irgendwelche) *obere* Schranken zu finden, behandeln wir im nächsten Abschnitt.

1.4 Obere Schranken

Unendlich viele Ramsey-Zahlen sind heute unbekannt, aber unendlich viele andere lassen sich leicht bestimmen: Überzeuge dich davon, dass für alle positiven natürlichen Zahlen r und b gilt: $R(r, 1) = 1$ und $R(1, b) = 1$. (Was bedeutet das? Hat was mit etwas einsamen *Einergrüppchen* zu tun.)

Nächstschwieriger sind folgende Erkenntnisse:

- Für alle natürlichen Zahlen r gilt $R(r, 2) = r$.
- Für alle natürlichen Zahlen b gilt $R(2, b) = b$.
- Für alle natürlichen Zahlen r und b gilt: $R(r, b) = R(b, r)$.

Mit solchen Erkenntnissen setzt man folgende allgemeine Beobachtung in Gang, die dann den Hauptsatz der Ramsey-Theorie beweist. Nimm dir Zeit, die Formulierung des Lemmas und den Beweis zu verstehen!

Lemma 3. *Seien r und b beliebige natürliche Zahlen. Sei schon bekannt, dass es Zahlen P und Q mit folgenden Eigenschaften gibt:*

- *Auf jeder Party mit P Gästen gibt es mindestens ein rotes $(r-1)$-Grüppchen oder mindestens ein blaues b-Grüppchen. (Kurz: $R(r-1, b) \leq P$.)*
- *Auf jeder Party mit Q Gästen gibt es mindestens ein rotes r-Grüppchen oder mindestens ein blaues $(b-1)$-Grüppchen. (Kurz: $R(r, b-1) \leq Q$.)*

Dann gibt es auf jeder Party mit mindestens $P + Q$ Gästen mindestens ein rotes r-Grüppchen oder mindestens ein blaues b-Grüppchen. (Kurz: Die Zahl $R(r, b)$ gibt es wirklich, und zwar gilt $R(r, b) \leq P + Q$.)

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Gästekonstellation mit insgesamt mindestens $P + Q$ Gästen und richten unser Augenmerk auf einen der Gäste, Gast A. Wir müssen beweisen, dass es mindestens ein rotes r-Grüppchen oder mindestens ein blaues b-Grüppchen gibt.

Sei M die Menge derjenigen restlichen Gäste, die A schon vorher kannten (und die A vorher schon kannte), und N die Menge derjenigen restlichen Gäste, die A vorher noch nicht kannten (und die A auch vorher noch nicht kannte).

[2] Interessiert? Eine Suchmaschine wird ihn auftreiben: *On the Ramsey Number* $R(4, 6)$ von Geoffrey Exoo, The Electronic Journal of Combinatorics, 2012.

Nun folgt, dass a) zu M mindestens P Gäste gehören oder b) dass zu N mindestens Q Gäste gehören. Denn angenommen, zu M würden höchstens $P-1$ und zu N würden höchstens $Q-1$ Gäste gehören: Dann gäbe es auf der Party insgesamt nur $1+(P-1)+(Q-1)=P+Q-1$ Gäste. Es gibt ja aber mindestens $P+Q$ Gäste.

Jeden der beiden Fälle untersuchen wir nun separat.

a) Nach Voraussetzung an P gibt es unter den zu M gehörenden Gästen mindestens ein rotes $(r-1)$-Grüppchen G oder mindestens ein blaues b-Grüppchen. Falls letzteres, sind wir mit unserem Beweis fertig (wieso?). Falls ersteres, dann sind wir ebenfalls fertig, da das r-Grüppchen bestehend aus den Gästen in G und zudem Gast A rot ist.

b) Wenn du die Überlegung zu Fall a) verstanden hast, dann versuche, die Überlegung zu Fall b) selbstständig zu führen! □

Kurz zusammengefasst besagt das Lemma, dass

$$R(r,b) \leq R(r-1,b) + R(r,b-1),$$

und mit dieser Abschätzung kann man für jede Ramsey-Zahl obere Schranken angeben. Wenn wir zum Beispiel noch nicht wüssten, dass $R(3,2)=3$ ist, könnten wir uns diesem Resultat wie folgt nähern:

$$R(3,2) \leq R(2,2) + R(3,1) \leq R(1,2) + R(2,1) + R(3,1) = 1+1+1 = 3.$$

Wir können etwa auch folgern:

$$R(4,3) \leq R(3,3) + R(4,2) = 6 + 4 = 10.$$

(Tatsächlich gilt $R(4,3)=9$, die obere Schranke ist hier also sehr nah am tatsächlichen Wert.) Und weiter:

$$R(4,4) \leq R(3,4) + R(4,3) = R(4,3) + R(3,4) \leq 10 + 10 = 20.$$

(Der tatsächliche Wert von $R(4,4)$ ist 18.)

Wenn du Spaß am Programmieren hast, oder es lernen möchtest, dann schreibe doch ein Programm, dass nach diesem Schema obere Schranken für die Ramsey-Zahlen ausgibt.

2 Sehr große Zahlen

2.1 Hyperoperationen

Addition, Multiplikation, Exponentiation – wie geht es weiter? Mit der *Tetration*!

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 &= 2+2+2+2+2 \\ 2 \uparrow 5 &= 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 2 \uparrow\uparrow 5 &= 2^{2^{2^{2^{2}}}} \qquad \text{(eine Zahl mit 19729 Stellen)} \end{aligned}$$

Der Potenzturm könnte missverständlich sein – ist $2^{(2^{(2^{(2^2)})})}$ oder ist $\left(\left((2^2)^2\right)^2\right)^2$ gemeint? Man hat sich dazu entschieden, die erste Möglichkeit zu meinen, denn die andere Möglichkeit könnte man noch vereinfachen (wozu?). Übrigens liefert die erste Möglichkeit auch den größeren Zahlenwert (wieso?).

Jedenfalls: Wieso bei zwei Pfeilen aufhören? Nach der Tetration kommt …

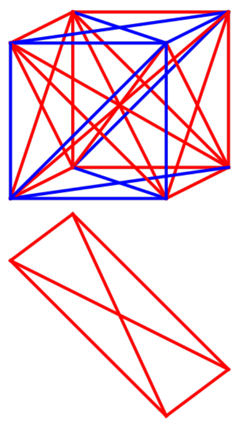
$$2 \uparrow\uparrow\uparrow 5 = 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2$$

Auch hier sollte man wieder präzisieren, was gemeint ist: nämlich die Zahl $2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)))$, nicht die Zahl $(((2 \uparrow\uparrow 2) \uparrow\uparrow 2) \uparrow\uparrow 2) \uparrow\uparrow 2$. Die Zahl $2 \uparrow\uparrow\uparrow 5$ ist ein gewaltiger Potenzturm aus Zweiern – genauer gesagt: einer aus $2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2))$ vielen Zweien. Die Anzahl dieser Zweien ist also selbst ein riesiger Potenzturm – einer aus $2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2) = 65536$ Zweien.

Diese Rechenoperationen – und die weiteren, die man analog definieren kann, wie etwa $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$ – heißen auch *Hyperoperationen*. Hier ein paar Aufgaben zum Vertrautwerden:

- Welche der Zahlen $2 \uparrow\uparrow (2 \uparrow\uparrow 2)$ und $(2 \uparrow\uparrow 2) \uparrow\uparrow 2$ ist größer?
- Wieso ist $2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 4$?
- Wieso ist $2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 1 = 2$?

2.2 Grahams Zahl

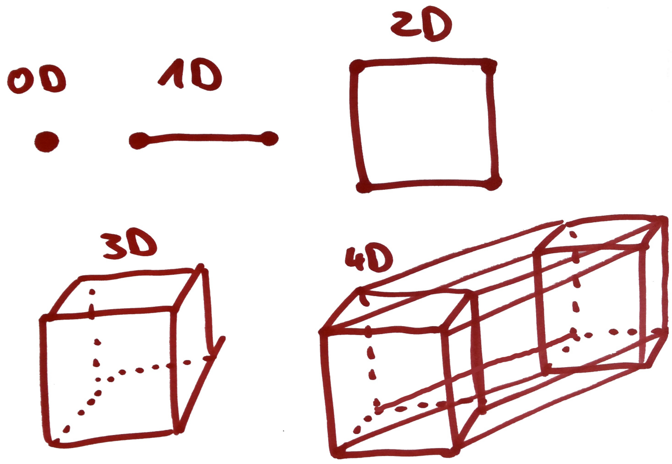


Mit den Hyperoperationen ausgerüstet, können wir uns ans Werk machen, um *Grahams Zahl* zu definieren – eine Zahl, die auf eine kombinatorische Untersuchung von Ronald Graham zurückgeht und für eine Weile den Titel beanspruchte, die größte natürliche Zahl zu sein, die jemals in einem mathematischen Beweis explizit verwendet wurde.

Graham fragte sich: Stimmt es eigentlich, dass es, egal mit welchen zwei Farben man die 28 Kanten des dreidimensionalen Würfels einfärbt (Flächen- und Raumdiagonalen dazugezählt), stets mindestens vier Eckpunkte gibt, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und deren Verbindungen alle dieselbe Farbe haben?

Das ist etwa bei der Färbung in der oberen Skizze der Fall. Allerdings würde es keine solchen vier Eckpunkte geben, wenn die von unten vorne rechts nach unten hinten rechts verlaufende Kante blau eingefärbt wäre. Die Antwort auf Grahams Frage lautet daher: Nein, das stimmt nicht immer.

Das war auch Graham schnell klar, und so stellte er die analoge Frage für den vierdimensionalen Würfel mit seinen 16 Ecken und 135 Querverbindungen. Aber auch bei ihm gibt es eine Färbung, sodass kein Satz aus vier in einer gemeinsamen Ebene liegenden Eckpunkten mit lauter gleichfarbigen Querverbindungen existiert.



Beim fünf-, sechs-, …, dreizehndimensionalen Würfel ist das genauso. Für den vierzehndimensionalen Würfel ist die Frage offen. Graham zeigte: Zumindest wenn man den G-dimensionalen Würfel nimmt, dann stimmt es – dann gibt es immer mindestens vier Eckpunkte gibt, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und deren Querverbindungen alle dieselbe Farbe haben. Die Zahl G ist die *Grahamsche Zahl.* Sie ist wie folgt definiert:

$$G \;=\; \left.\begin{matrix} \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3} \\ \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\cdots\cdots\uparrow 3} \\ \vdots \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad} \\ \underbrace{3\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow 3} \\ 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \end{matrix}\right\}\text{ 64 Schichten}$$

In Worten: Man beginnt mit der Zahl $g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3$. Dann nimmt man $g_2 = 3 \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow 3$ mit insgesamt g_1 vielen Pfeilen. Dann folgt $g_3 = 3 \uparrow\uparrow \ldots \uparrow\uparrow 3$ mit insgesamt g_2 vielen Pfeilen. Und so macht man noch eine ganz Zeit lang weiter, bis man bei g_{64} angekommen ist. Das ist Grahams Zahl.

Zu Grahams Zahl ist noch viel, viel mehr zu berichten; wir sind uns aber nicht sicher, was euch interessiert. Deswegen hören wir an dieser Stelle auf und bitten euch, uns zu schreiben:

- Interessiert ihr euch für vierdimensionale Geometrie? Möchtet ihr mehr über den vierdimensionalen Würfel erfahren? Möchtet ihr wissen, wie die Zahlenfolge $1, \infty, 5, 6$ weiter geht? Welche wundersamen Formen es ausschließlich im Vierdimensionalen gibt?

- Die erste Ziffer von Grahams Zahl ist unbekannt. Die letzten Ziffern kann man aber recht einfach berechnen. Möchtet ihr wissen, wie das geht?

Die letzten 200 Ziffern von Grahams Zahl:

17830837018340236474548882222161573228010132974509
27344594504343300901096928025352751833289884461508
94042482650181938515625357963996189939679054966380
03222348723967018485186439059104575627262464195387

2.3 Große Zahlen in der Knotentheorie

Es gibt noch andere Stellen in der Mathematik, in der große Zahlen explizit vorkommen. Eine ist die Knotentheorie, das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Knoten und ihrer Klassifizierung beschäftigt. Ein grundlegendes Phänomen der Knotentheorie ist allgemein bekannt: Ein und derselbe Knoten kann, wenn man ihn aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtet oder die Schnur anders hält, ganz anders aussehen.

Zwei Knotentheoretiker haben 2014 herausgefunden: Es gibt eine gewisse Obergrenze an sog. *Reidemeister-Zügen*, die man durchführen muss, um eine gegebene Skizze eines Knotens in eine andere desselben Knotens zu überführen. Das war ein großer Durchbruch, denn vorher wusste man überhaupt nicht, ob es eine solche Schranke geben würde. Um die Schranke anzugeben, verwendeten die Autoren die Zahl $2 \uparrow\uparrow (10 \uparrow 1\,000\,000)$.

Theorem 1.1. *Let D_1 and D_2 be connected diagrams for some knot or link in $\mathbb{R}^3$, and let n be the sum of their crossing numbers. Then D_2 may be obtained from D_1 by a sequence of at most $\exp^{(c^n)}(n)$ Reidemeister moves, where $c = 10^{1{,}000{,}000}$.*

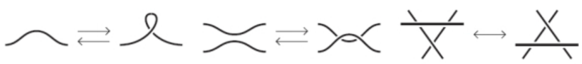


FIGURE 1. Reidemeister moves

Here, a *link diagram* is a 4-valent graph embedded in $\mathbb{R}^2$ with each vertex decorated with 'over' and 'under' crossing information. If a knot or link is oriented, then its diagrams have directed edges that agree with this orientation. Theorem 1.1 applies to link diagrams with or without orientation. We view two diagrams as the same if their decorated (oriented) graphs are ambient isotopic in $\mathbb{R}^2$. The function $\exp(x)$ is the exponential function 2^x, and $\exp^{(r)}(x)$ means iterate this function r times. Thus, $\exp^{(c^n)}(n)$ is shorthand for a tower of 2s with an n at the top, the height of the tower being c^n. This upper bound is very large indeed, but it is explicit and computable.

https://johncarlosbaez.wordpress.com/2018/03/09/an-upper-bound-on-reidemeister-moves/

2.4 Ausblick: Unendlich große Ordinalzahlen

Liebe ist unendlich. Die Freude von Kindern ist unendlich. Das sind vertraute Vorstellungen, die in unserem Denken mit Unendlichkeit verknüpft sind. Weitere, zunächst verborgene Perspektiven eröffnet die Mathematik.

Es stellt sich nämlich heraus, dass der bekannte Zahlenstrahl nicht der Weisheit letzter Schluss ist: Nach 1, 2 und 3, nach der Million und der Trilliarde, nach der Anzahl Sandkörner – nach all diesen Zahlen folgen die unendlich großen Zahlen. Verblüffenderweise können wir Menschen trotz unseres beschränkten Verstands diese unendliche Hierachie unendlich großer Zahlen erkunden und sichere Informationen über sie gewinnen.

Mit diesen sog. *Ordinalzahlen* möchten wir uns im nächsten Brief beschäftigen. Zum einen, weil es für sich faszinierend ist, die Welt der unendlich großen Zahlen zu erkunden. Zum anderen, weil man mit ihrer Hilfe über ein ausgeklügeltes Verfahren auch absurd große, aber immer noch endliche, Zahlen konstruieren kann – solche, die die Hyperoperationen und Grahams Zahl völlig in den Schatten stellen. Ordinalzahlen spielen in manchen Teilgebieten der Mathematik überhaupt keine Rolle, während sie in anderen (wie etwa der Mengenlehre und der abstrakten Homotopietheorie) zum Tagesgeschäft gehören.

Hier nur noch ein kurzer Ausblick. Die Zahl 3 beschreibt diejenige Situation, in der drei Leute in einer Schlange darauf warten, endlich vom Bürgerbüro bedient zu werden. Die Zahl ω – das ist die kleinste unendlich große Ordinalzahl, und sie hat nichts mit der Kreisfrequenz aus der Physik zu tun – beschreibt diejenige Situation, in der unendlich viele Leute in einer Schlange warten: eine erste Person, eine zweite, eine dritte, und immer so weiter, ohne Ende, ohne eine „letzte Person“.

Wir können uns das besser vorstellen, wenn wir gedanklich die unendlich vielen Leute in einen verzauberten Bus packen – einer, der von außen gesehen nur zehn Meter lang ist, von innen betrachtet aber trotzdem genügend Raum für unendlich viele Plätze bietet.

Die Zahl $\omega + 1$ beschreibt dann diejenige Situation, bei der hinter dem Bus aus unendlich vielen Leuten noch eine weitere Person wartet.