EJERCICIOST1.pdf

martasw99

Métodos Numéricos Ii

3º Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

RELACIÓN - 1: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES Y SIST. NO LINEALES

1 Se considera el problema de encontrar las soluciones de la ecuación $x + 1/2 - 2\operatorname{sen}(\pi x) = 0$ en $[1/2, 3/2]$

a) ¿Se puede utilizar el método de bisección para resolver dicho problema tomando $[1/2, 3/2]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo calcule las tres primeras iteraciones de dicho método.

b) cota de error después de 3 iteraciones

c) ¿Cuántas iteraciones son necesarias para una cota de error $< 10^{-5}$?

▷ Para aplicar el método de bisección:

1) f continua en $[1/2, 3/2]$

2) $f(1/2) = -1$, $f(3/2) = 6 \Rightarrow f(1/2) f(3/2) < 0$

$\Rightarrow$ Sí se puede aplicar.

▷ Iteraciones: $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

n	a_n	b_n	m_n	$f(m_n)$	cota e_n	
0	$1/2$	$3/2$	1	+	0'5	$f(a_n)f(m_n) < 0$
1	$1/2$	1	0'75	-	0'25	$f(b_n)f(m_n) < 0$
2	0'75	1	0'875	+	0'125	$f(a_n)f(m_n) < 0$
3	0'75	0'875	0'8125	?	0'625	

$\Rightarrow |e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$

▷ Cota de error $< 10^{-5}$

$$|e_n| < \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \Rightarrow 10^{-5} < \frac{(b-a)}{2^{n+1}} \Rightarrow 2^{n+1} \geq \frac{1}{10^{-5}} = 10^5$$

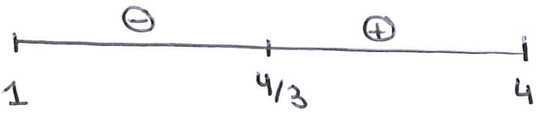
$$\Rightarrow 2^{17} > 100000 \Rightarrow n \geq -1 + \log_2 10^5 = \boxed{16'6} \Rightarrow \underline{17 \text{ iteraciones}}$$

3 Demuestre que la ecuación $x^3-2x^2-5=0$ tiene una única solución en el intervalo $[1,4]$. Elegir un x_0 que permita asegurar que NR converge y calcular las dos primeras it.

$f(x)=x^3-2x^2-5$; $f\in C[1,4]$ $f(1)f(4)<0 \Rightarrow \exists$ raíz

$f'(x)=3x^2-4x$ $f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4/3 \end{cases}$

$f(1)=-6$ $f(4)=27$



En $[1,4/3]$ no hay raíz porque f decrece y $f(1)<0$

En $[4/3,4]$ f crece $\Rightarrow$ hay raíz

Veamos si cumple las condiciones de NR: No los cumple por eso dem la exist. de la raíz así

$f\in C^2[1,4]$ por ser polinómica

1) $f(1)f(4)<0$ $(f(1)=-6, f(4)=27)$

2) $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$ X $f'(4/3)=0$ y $4/3\in[1,4]$

$f''(x)=6x-4=0 \Rightarrow x=2/3$

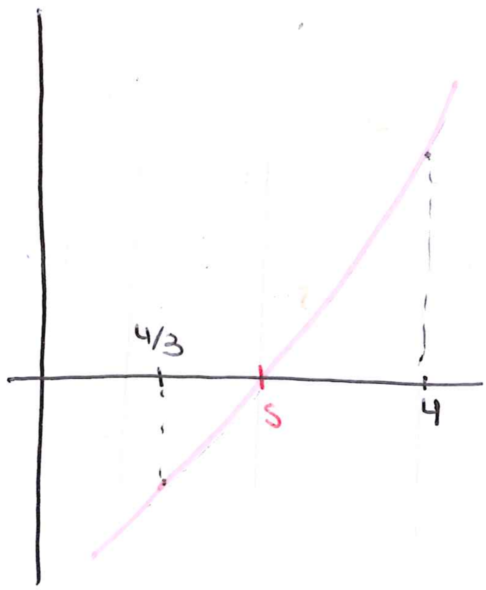
Para elegir x_0:

$f(x_0)f''(x_0)\geq 0$ $\Rightarrow x_0=4$

$x_0=4$ $x_1=3,15625$

$x_2=2'6946599$

$x_3=2'690647$



5 Dada la ecuacion $x - 1/2 \cos x = 0$, se pide:

a) Dem que tiene una única sol real en $[0, \pi/2]$

b) Describe un metodo diferente a NR de iteracion funcional para aproximar dicha raiz

c) Realice los dos primeros iteraciones a partir de $x_0 = \pi/4$

d) ¿Cuantas it garantizan un $e_n \leq 10^{-2}$?

Veamos que cumple las condiciones del Teorema de convergencia global de NR:

▷ $f(x) = x - 1/2 \cos x$ $\quad f \in C^2[0, \pi/2]$ por ser composicion de funciones de $C^2[0, \pi/2]$ y verifica:

1) $f(0) f(\pi/2) < 0$

2) $f'(x) = 1 + 1/2 \operatorname{sen} x > 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$

3) $f''(x) = 1/2 \cos x > 0 \quad \forall x \in [0, \pi/2]$

4) Tomando un x_0 adecuado $\Rightarrow f(x_0) f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ La ecuacion admite una única raiz $s \in]0, \pi/2[$

Def otro método de it funcional

$$\left. \begin{array}{l} x = 1/2 \cos x = g(x) \\ x_0 \text{ dado} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_{n+1} = 1/2 \cos x_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

$$g'(x_n) = -1/2 \operatorname{sen} x \qquad |g'(x)| \leq 1/2 \underbrace{|\operatorname{sen} x|}_{\leq 1} \leq \boxed{1/2 = L}$$

▷ Errores:

$$|x_n - s| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$e_n = \frac{(1/2)^n}{1/2} \cdot 0'431845 \leq 10^{-2}$$

$$\boxed{n = 7}$$

▷ Iteraciones

$x_0 = \pi/4$

$x_1 = 0'3535$

$x_2 = 0'4459$

$x_3 = 0'4499$

7 Para resolver la ecuación $f(x)=0$ se considera el método $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$ $m \neq 0$.

¿Qué condiciones para la función f, para la cte m y para el valor de x_0 asegurarán la unicidad de solución y convergencia a dicha solución del método considerado?

llamamos $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$

$g'(s) = 1 - \frac{f'(s)}{m}$

▷ Condiciones:
- → f derivable
- → x_0 suficientemente próximo a la raíz
- → $\frac{f'(s)}{m} < 2$

$|g'(s)| < 1 \Rightarrow \left|1 - \frac{f'(s)}{m}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{f'(s)}{m} - 1 < 1$

$$\boxed{0 < \frac{f'(s)}{m} < 2}$$

9 Sea $s = \sqrt{3}$. Para calcular s se considera el método de iteración funcional:

$x_{n+1} = g(x_n)$ con $g(x) = \frac{ax + x^3}{3 + bx^2}$

Hallar a y b partiendo de un x_0 suficientemente próximo a s que asegure convergencia al menos cuadrática. Para tales valores calcule x_3 con $x_0 = 1$

Sabemos que $\begin{cases} g(s) = s \\ g'(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(\sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3 + 3b} = \sqrt{3}$

$$\boxed{a = 3b}$$

$g'(x) = \frac{(a+3x^2)(3+3bx^2) - (ax + x^3)2bx}{(3+bx^2)^2}$

$g'(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (a+9)(3+a) - 2a^2 - 6a = 0$

$a^2 - 6a - 27 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 9 \\ -3 \end{cases}$

Si $\boxed{a = 9 \rightarrow b = 3}$

Si $a = -3 \rightarrow b = -1$!! no vale.

$x_{n+1} = \frac{9x_n + x_n^3}{3 + 3x_n^2}$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1'66$

$x_2 = 1'7320508 8$

$x_3 = 1'73205080$

Para el orden de conv:

$\lim \frac{e_n}{e_n^2} = cte.$

8 Localizar un intervalo $[a,b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación

$$2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$$

Tomando $x_0 = -2$ como semilla calcule los tres primeros iteraciones del método de NR usando el algoritmo de Horner

a) Utilizamos una de las propiedades de las ecuaciones polinómicas: <u>Acotación de raíces</u>

$|S| < 1 + \alpha$, donde $\alpha = \max\left\{ \left| \frac{a_i}{a_k} \right| : i = 0, 1, \ldots, k-1 \right\}$

$\Rightarrow$ El intervalo $[-1-\alpha, \alpha + 1]$ contiene todas las raíces reales

$$\alpha = \max\left\{ \left|\frac{-3}{2}\right|, \left|\frac{3}{2}\right|, \left|\frac{-4}{2}\right| \right\} = 4/2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$[-1-\alpha, 1+\alpha] = [-1-2, 1+2] = \boxed{[-3,3]}$$

$\Rightarrow$ El intervalo $[-3,3]$ contiene todas las soluciones reales.

b) <u>NR</u>: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$ Obtenemos la derivada mediante el algoritmo de Horner

$x_0 = -2$

<u>Algoritmo de Horner</u>: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$

	2	0	-3	3	-4
$x_0 = -2$		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	10 $= b_0 \Rightarrow P(-2) = 10$
-2		-4	16	-42	
	2	-8	21	-49 $= c_0 \Rightarrow P'(-2) = -49$	

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)} = -2 - \frac{P(-2)}{P'(-2)} = -2 - \frac{10}{(-49)} = \frac{-88}{49}}$$

$x_1 = -88/49$

	2	0	-3	3	-4
$x_1 = \frac{-88}{49}$		-3'5918	6'4506	-6'1968	5'7412
	2	-3'5918	8'4506	-3'1968	$\boxed{1'7412} = b_0 \Rightarrow P(x_1) = 1'7412$
$\frac{-88}{49}$		-3'5918	12'9012	-29'3663	
	2	-7'1836	16'3517	$\boxed{-32'5631} = c_0 \Rightarrow P'(x_1) = -32'5631$	

$$\boxed{x_2} = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = \boxed{-1'7424}$$

	2	0	-3	3	-4
$x_2 = -1'7424$		-3'4848	6'0719	-5'3525	4'099
	2	-3'4848	3'0719	-2'3525	$\boxed{0'099} = b_0 \Rightarrow P(x_2) = 0'099$
-1'7424		-3'4828	12'1438	-26'5118	
	2	-6'9096	15'2157	$\boxed{-28'8643} = c_0 \Rightarrow P'(x_2) = -28'8643$	

$$\boxed{x_3} = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_1)} = \boxed{-1'73897}$$

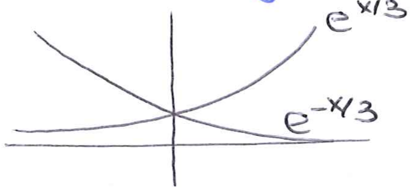
13 Se considera la ecuación $xe^{-x/3}+1=0$ y los métodos de iteración funcional: $x_{n+1}=g(x_n)$

1) $g_1(x) = -e^{x/3}$ 3) $g_3(x) = 3\ln(-x)$

2) $g_2(x) = e^{x/3}$ 4) $g_4(x) = \dfrac{x-e^{x/3}}{2}$

a) Encuentre un intervalo de amplitud 1 donde haya una única raíz de la ecuación:

$f(x) = xe^{-x/3}+1$ $\quad -x/3 > 0 \Rightarrow$ por el dibujo $\longrightarrow$



$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(-1) < 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Th Bolzano}}{\Longrightarrow} \exists s \in]-1,0[\text{ tq } f(s)=0$ (Existencia)

vamos a probar la unicidad:

$f''(x) = \underbrace{e^{-x/3}}_{>0}\underbrace{(1-x/3)}_{>0} > 0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente en $[-1,0]$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x/3 > 0 \Leftrightarrow 1 > x/3 \Leftrightarrow x < 3$ ✓

$\Rightarrow \exists!\, s \in]-1,0[\text{ tq } f(s)=0$ (unicidad)

b) ¿Cuáles de los métodos propuestos son compatibles con la ecuación dada? es decir, ¿cuáles de ellos la solución es pto fijo?

1) $\boxed{g_1 = -e^{x/3}}$

Suponemos que $g(s)=s \Leftrightarrow -e^{s/3}=s \Leftrightarrow s+e^{s/3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s\cdot e^{-s/3}+e^{-s/3}e^{s/3}=0 \Leftrightarrow se^{-s/3}+1=0$ ✓

$\Rightarrow$ Método 1 compatible.

2) $\boxed{g_2 = e^{x/3}} \rightarrow$ no es compatible

3) $\boxed{g_3 = 3\ln(-x)}$

sup $g(s)=s \Leftrightarrow s=3\ln(-s) \Leftrightarrow s/3 = \ln(-s) \Leftrightarrow e^{s/3}=-s \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow s+e^{s/3}=0 \Leftrightarrow s=-e^{s/3} \Rightarrow$ Método 1

$\hookrightarrow$ Método 3 compatible.

4) $g_4 = \boxed{\dfrac{x_n - e^{x_n/3}}{2}}$

sup que $s=g(s) \Rightarrow s = \dfrac{s - e^{s/3}}{2} \Leftrightarrow 2s = s - e^{s/3} \Leftrightarrow$

$s = -e^{s/3} \Rightarrow$ Método 1

↳ Método 4 si es compatible.

c) De entre los métodos compatibles con la ecuación, ¿cuáles son convergentes localmente? == x_0 suficient. cerca de s.

· Teorema de convergencia local para método de iteración funcional:

si $g \in C^1(I)$ $|g'(x)| < L < 1$ $\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ el método converge $\forall x_0 \in [a,b]$

1) $|g'(x)| = \left|-\tfrac{1}{3} e^{x/3}\right| \leq \tfrac{1}{3} = L < 1 \Rightarrow$ convergente localmente

3) $|g'(x)| = \left|\frac{-3}{x}\right| = |3/x| > 1 \Rightarrow$ NO conv.

4) $|g'(x)| = \left|\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{3}e^{x/3})\right| = \left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}e^{x/3}\right| \leq \left|\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\right| =$

$= \tfrac{1}{3} \Rightarrow$ convergente localmente.

d) De todos los métodos, ¿cuál es más rápido? ¿por qué?

la rapidez de convergencia de un método es tanto mayor cuanto mayor es el orden de convergencia y para métodos de igual orden de convergencia será más rápido el de menor cte asintótica.

$g_1'(x) = -\tfrac{1}{3} e^{x/3} \neq 0$ $\qquad g_4'(x) = \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{3})e^{x/3} \neq 0$

$\Rightarrow$ Ambos tienen convergencia lineal, comparamos las ctes asintóticas $C_p = \tfrac{1}{p!} |g^{p)}(s)|$

NO conocemos s:

↳ sup que la cte asintótica de 1) < que la de 4): $C^1 < C^4$

$\Rightarrow C^1 - C^4 < 0 \Leftrightarrow |g_1'(s)| - |g_4'(s)| < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\tfrac{1}{3}e^{x/3}\right| - \left|\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{3}e^{x/3})\right| = \tfrac{1}{2}(\underbrace{e^{s/3} - 1}_{<0}) < 0$ ✓

$\Rightarrow C^1 < C^4 \Rightarrow \boxed{g_1 \text{ método más rápido}}$

17 Se considera el sist de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2-y^2}{2} - x + 7/24 = 0 \\ xy - y + 1/9 = 0 \end{array}\right\}$$

a) Dem que tiene una única solución en el rectángulo $D = [0, 0'4] \times [0, 0'4]$

b) Encuentre una sucesión que converja a dicha solución, justificando la respuesta.

c) Calcule, tomando $x_0 = (0'1, 0'2)$ los dos primeros it con NR

$G: D \longrightarrow D \qquad \overline{X} = G(\overline{X})$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x^2-y^2}{2} + 7/24 \\ y = xy + 1/9 \end{array}\right\}$$

$$G'(\overline{X}) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\|G'\|_1 = \max\{|x|+|y|, |-y|+|x|\} = 0'8 < 1$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 0'27 \\ 0'18 \end{pmatrix} \longrightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 0'32 \\ 0'1473 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = \begin{pmatrix} 0'334 \\ 0'1584 \end{pmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n - J(F(x_n))^{-1} F(x_n)$$

$\boxed{\text{HECHO BIEN PÁG 7}}$

11 sea $f(x) = x^5 + x^2 - 1$

a) ¿cuantos raices tiene la ecuacion $f(x)=0$ en $[0,1]$?

b) Pruebe que el método de iteracion funcional

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3+1}}$$

converge en $[0,1]$ a una raiz de $f(x)=0$.

a) $f_0(x) = x^5 + x^2 - 1$ $\quad f(0) = -1 \quad f(1) = 1$

$f_1(x) = 5x^4 + 2x$ $\quad f(0) = 0 \quad f(1) = 7$

$f_2(x) = -3/2\, x^2 + 1$ -(Resto f / f_1)

$f_2(x) = -3x^2 + 2$ $\quad f(0) = 2 \quad f(1) = -1$

$f_3(x) = -2x - 125/9$ $\quad f(0) = -\frac{125}{9} \quad f(1) = -\frac{125}{9} - 2$

$f_4(x) = \frac{3017}{108}$ cte $\Rightarrow$ hemos terminado. $f(0) > 0 \quad f(1) > 0$

Sucesion de Sturm $\{f_0, f_1, \dots f_4\}$

Nº de raices de f_0 en $[0,1]$ $= 3 - 2 = \boxed{1}$

Nº de " " = cambios de signo $\{f_0(0), f_1(0), \dots, f_4(0)\}$ − cambios de signo $\{f_0(1), \text{——}, f_4(1)\}$

b) $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{\frac{1}{x_n^3+1}}$

$$g'(x) = \frac{-3x^2}{2(1+x^3)^{3/2}}$$

veamos que cumple que $g \in C^1(I)$ $\quad |g'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x_0 \in I$

$$|g'(x)| \leq \left|\frac{-3}{2\sqrt{1}}\right| = 3/2 \nless 1 \Rightarrow \text{No vale}$$

$\Rightarrow$ Tenemos que partir el intervalo $[0,1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$

Ahora vamos a ver si cumple el teorema en los dos subintervalos $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$

• $[0, 1/2]$

$$|g'(x)| = \left|\frac{-3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}\right| \leq \frac{3\cdot(1/2)^2}{2} = 0'375 < 1 \checkmark$$

- $[1/2, 1]$

$$|g'(x)| = \left| \frac{-3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}} \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{((1/2)^3+1)^3}} = 1'257 > 1 \quad \times$$

volvemos a partir el intervalo:

$[1/2, 1] = [0'5, 0'75] \cup [0'75, 1]$

- $[0'5, 0'75]$

$$|g'(x)| = \left| \frac{-3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}} \right| \leq \frac{0'75^2 \cdot 3}{2\sqrt{((0'5)^3+1)^3}} = 0'7071 < 1 \quad \checkmark$$

- $[0'75, 1]$

$$|g'(x)| = \left| \frac{-3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}} \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{((0'75)^3+1)^3}} = 0'8847 < 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ El metodo converge en el intervalo $[0, 1]$ a una raiz de $f(x) = 0$

10 Se desea aplicar un método iterativo del tipo:

$$x_{n+1} = p x_n + q \frac{7}{x_n^2} + \frac{7^2}{x_n^5} r$$

para obtener $\sqrt[3]{7}$. Halle los valores de p, q, r para que la convergencia del método sea al menos cúbica, partiendo de un x_0 suficientemente próximo.

El teorema de orden de convergencia dice que:

sea $s = g(s)$ con $g \in C^3(I)$ verificando $g'(s) = g''(s) = 0$ y $g'''(s) \neq 0 \Rightarrow$ el método de iteración funcional converge a s con orden de convergencia 3 (convergencia cúbica)

∘) comprobamos la condición del pto fijo:

$s = \sqrt[3]{7}$ $\quad g(x) = px + q\frac{7}{x^2} + r\frac{7^2}{x^5}$

$$s = ps + q\,7/s^2 + r\,7^2/s^5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} = p\sqrt[3]{7} + q\frac{7}{\sqrt[3]{7^2}} + r\frac{7^2}{7\sqrt[3]{7^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7}(1-p) = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}(7q + r7) \Leftrightarrow \boxed{1 = p+q+r}$$

∘) $g'(x) = p - \frac{7\cdot 2\cdot q}{x^3} - \frac{7^2\cdot 5\cdot r}{x^6}$

$$g'(\sqrt[3]{7}) = p - \frac{\cancel{7}\cdot 2\cdot q}{\cancel{7}} - \frac{\cancel{7^2}\cdot 5\cdot r}{\cancel{7^2}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{p - 2q - 5r = 0}$$

∘) $g''(x) = \frac{7\cdot 3\cdot 2\cdot q}{x^4} + \frac{7^2\cdot 5\cdot 6\cdot r}{x^7}$

$$g''(\sqrt[3]{7}) = \frac{\cancel{7}\cdot 3\cdot 2\cdot q}{\cancel{7}\sqrt[3]{7}} + \frac{\cancel{7^2}\cdot 5\cdot 6\cdot r}{\cancel{7^2}\sqrt[3]{7}} = 0 \Leftrightarrow 6q + 30r = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{q + 5r = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} p+q+r &= 1 \\ p - 2q - 5r &= 0 \\ q + 5r &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{p = 5/9} \quad \boxed{q = 5/9} \quad \boxed{r = -1/9}$$

17 Se considera el sist de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2-y^2}{2} - x + 7/24 = 0 \\ xy - y + 1/9 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \to x = \frac{x^2-y^2}{2} + 7/24 \\ \to y = 1/9 + xy \end{array}$$

a) Demostrar que tiene una única solución en $[0,0'4]\times[0,0'4]$

$$D = \underbrace{[0,0'4]}_{x} \times \underbrace{[0,0'4]}_{y} \qquad G: D \longrightarrow D \qquad \bar{X}_n = G(\bar{X}_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + 7/24 = x \\ g_2(x,y) = xy + 1/9 = y \end{array}\right|$$

1º) Comprobamos si $G(D) = D$ para poder aplicar el Teorema de convergencia para método de iteración funcional para sistemas:

$G: D \to D$ si $g_1([0,0'4]) = [0,0'4]$ y
$g_2([0,0'4]) = [0,0'4]$

$$0 \le g_1(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + 7/24 \le \frac{0'4^2-0}{2} + 7/24 = 0'3717 < 0'4$$

$$0 \le g_2(xy) = xy + 1/9 \le 0'4 \cdot 0'4 + 1/9 = 0'27 < 0'4$$

$$\Rightarrow G: D \longrightarrow D$$

2º) Vemos si se cumple $\|G'(\bar{X})\| \le L < 1$, $\|\cdot\|$ norma

$$G'(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dx} & \frac{dg_1}{dy} \\ \frac{dg_2}{dx} & \frac{dg_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\|G'(\bar{X})\|_1 = \max_{j=1,\dots,k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \right\} = \max \{ |x| + |y|, |-y| + |x| \}$$

$$= |x| + |y| \le 0'4 + 0'4 = 0'8 < 1$$

$$\Rightarrow \exists! \; s \in D \; [0,0'4] \times [0,0'4] \text{ tq } G(s) = 0$$

b) Encuentre una solución que converja a dicha solución justificando la respuesta.

$$\left.\begin{array}{l} x = g_1(x,y) \\ y = g_2(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bar{X}_0 = \text{aprox inicial} \\ \bar{X}_{n+1} = G(\bar{X}_n) \end{array}} \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$G(\bar{X}_n) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

c) Calcule tomando $x_0 = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix}$ las dos primeras iteraciones del método de Newton - Rapshon

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n - (J_n)^{-1} F(\bar{X}_n)$$

$$F(\bar{X}_n) = \begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{2} - x + 7/24 \\ f_2(x,y) = xy - y + 1/9 \end{cases}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} df_1/dx & df_1/dy \\ df_2/dx & df_2/dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & -y \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$|J_f(x,y)| = (x-1)^2 \Rightarrow (J_f(x,y))^{-1} = \frac{1}{(x-1)^2} \begin{pmatrix} x-1 & y \\ -y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0'1 \\ 0'2 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 0'27 \\ 0'13 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 0'32 \\ 0'1473 \end{pmatrix}$$