Orthogonalität und Produkte von Vektoren.

Ein Kurs zum selbständigen Lernen.

Alexander Ruhri

a.ruhri@widarschule.de

Aktuelle Version unter http://www.ruhri.net/

Lösungen: Tim Strunkheide

Version 0.4, Mai 2016

Vorbemerkungen

Bitte beachten Sie beim Bearbeiten dieser Blätter, dass an geeigneten Stellen Zusammenfassungen mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Bitte machen Sie Ihren Lehrer darauf aufmerksam, wenn Sie das Bedürfnis nach einer solchen Besprechung haben.

Voraussetzungen

Um mit den Inhalten des Kurses zurechtzukommen ist es notwendig, dass Sie wissen, was ein Vektor ist, wie man die Länge eines Vektors berechnet und die Parameterdarstellung von Geraden bereits gelernt haben. Außerdem sollten Sie die Winkelfunktionen $(\sin, \cos)$ wiederholt haben.

Arbeitsweise

Notieren Sie Ihre Rechnungen in einem Heft oder auf Blättern. Heben Sie dabei Regeln optisch hervor und übertrgen Sie diese nach Überprüfung in ein eigenes Regelheft.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Kurs

1 Orthogonale Vektoren

Das Wort orthogonal leitet sich vom griechischen $o\rho\theta o\varsigma$ (orthos) „richtig, recht-“ und $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ (gonia) „Ecke, Winkel“ ab (vergl. `http://de.wikipedia.org/wiki/Orthogonalität`) und bedeutet „rechtwinklig“. Wenn zwei Vektoren zueinander orthogonal sind, kann man das in Zeichen so schreiben:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

1.1 Orthogonale Vektoren finden

1.) Zeichnen Sie Pfeile der Vektoren in ein Koordinatensystem ein und finden Sie (gleich lange) zu ihnen orthogonale Vektoren. Zeichnen Sie die orthogonalen Vektoren vom gleichen Punkt ausgehend ein und geben Sie ihre Koordinaten an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.) Wenn Sie eine einfache Regel gefunden haben, mit der man gleich lange orthogonale Vektoren aus den Koordinaten des gegebenen Vektors (im $\mathbb{R}^2$) bilden kann, dann formulieren und notieren Sie diese Regel. Ansonsten versuchen Sie anhand weiterer Beispiele die Regel zu finden.

3.) Beschreiben Sie das geometrische Objekt, das entsteht, wenn ein Punkt mit allen zu einem Vektor (im $\mathbb{R}^2$) orthogonalen Vektoren (aller Längen), verschoben wird.

4.) Wie viele gleich lange orthogonale Vektoren hat ein Vektor im $\mathbb{R}^3$?

5.) Beschreiben Sie das geometrische Objekt, das entsteht, wenn ein Punkt mit allen zu einem gegebenen Vektor orthogonalen Vektoren im $\mathbb{R}^3$ verschoben wird. Welches Objekt erhalten Sie, wenn die Vektoren alle gleich lang sind?

6.) Finden Sie eine Methode, wie man zu einem gegebenen Vektor im $\mathbb{R}^3$ einen orthogonalen Vektor finden kann. Erweitern Sie dazu die Regel, die Sie in 2.) gefunden haben. (Tipp: nehmen Sie die 0 zu Hilfe.) Geben Sie orthogonale Vektoren zu den folgenden Vektoren an:

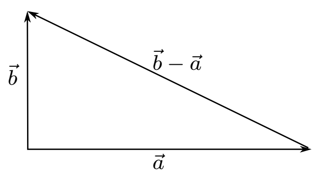
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.) Untersuchen Sie, welche der folgenden Vektoren orthogonal zueinander sind:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.2 Vektoren auf Orthogonalität prüfen

Als Test auf Orthogonalität zweier Vektoren kann man den Satz des Pythagoras verwenden, denn er gilt nur in orthogonalen Dreiecken.



Die beiden Vektoren in nebenstehender Skizze sind also genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2.$$

Dabei ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Wir betrachten nun die rechte und linke Seite der obigen Gleichung (Satz des Pythagoras) getrennt voneinander. Für die rechte Seite der Gleichung gilt nun:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

Anwenden der binomischen Formeln ergibt dann:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2) + (b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2)$$

Durch Umstellen und Ausklammern erhalten wir:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2)$$

Für die linke Seite der obigen Gleichung erhalten wir auf gleiche Weise:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)$$

Insgesamt habe wir den Satz des Pythagoras folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) \end{aligned}$$

Wenn wir linke und rechte Seite vergleichen, merken wir, dass der Satz des Pythagoras nur dann gilt, wenn $2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) = 0$, also wenn gilt:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

Insgesamt gilt also:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

1.) Überprüfen Sie die von Ihnen gefundenen Vektoren mit dieser Regel auf Orthogonalität.

2.) Überprüfen Sie folgende Paare von Vektoren auf Orthogonalität:

a) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}14\\-8\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\end{pmatrix}$

3.) Formulieren Sie diese Regel für den $\mathbb{R}^3$ indem Sie $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ verwenden.

4.) Überprüfen Sie folgende Paare von dreidimensionalen Vektoren auf Orthogonalität:

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

5.) Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren orthogonal zueinander stehen.

a) $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\2\\a\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}7\\1\\5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}10\\27\\0{,}5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}a\\1\\-14\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}8\\3\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\a\\a\end{pmatrix}$

2 Skalarprodukt

Der im vorigen Abschnitt verwendete Term heißt das *Skalarprodukt* zweier Vektoren und es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Der Name Skalarprodukt weist darauf hin, dass das Ergebnis des Produktes ein *Skalar*, eine Maßzahl ist. Das Skalarprodukt wird *immer* mit einem Punkt geschrieben. Mit dem Ergebnis von oben gilt also:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Formulieren Sie diesen Satz in eigenen Worten.

2.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

1.) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-11\\4\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

2.) Überprüfen Sie, ob die sich schneidenden Geraden g und h zueinander orthogonal sind ($s \in \mathbb{R}$).

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix} ; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

3.) Geben Sie eine Parameterdarstellung einer Geraden h an, die die Gerade g orthogonal schneidet($s \in \mathbb{R}$).

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

4.) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

a) $A(3|4|-8);\ B(6|5|-4);\ C(5|2|-9)$
b) $A(-1|6|-10);\ B(0|3|-11);\ C(-5|0|-7)$

5.) Bestimmen Sie *alle* Vektoren, die sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal sind.

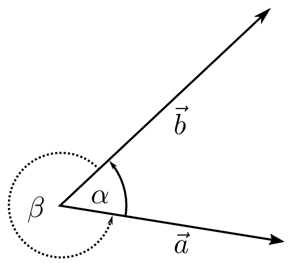
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

6.) Überprüfen Sie, ob das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

a) $A(0|4|3);\ B(-1|2|2);\ C(-12|3|11);\ D(-11|5|12)$
b) $A(13|-4|-5);\ B(12|-5|2);\ C(7|3|1);\ D(8|4|4)$

7.) Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A(-2|-2)$, $B(0|3)$, $C(3|3)$ und $D(3|0)$ durch Vektoren aus. Überprüfen sie diese Vektoren auf Orthogonalität.

2.2 Winkelberechnung mithilfe des Skalarprodukts



Wenn man vom Winkel zwischen zwei Vektoren spricht, meint man immer den kleineren Winkel zwischen den Vektoren. In diesem Beispiel ist α der kleinere Winkel. β ist überstreckt und es gilt: $\alpha + \beta = 360°$. Sind die Vektoren kollinear, so ist ihr Winkel offensichtlich 0°.

Für das Skalarprodukt gilt folgende Beziehung, die sich aus dem Kosinussatz ergibt und die wir hier ohne Herleitung verwenden:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

Stellt man nach $\cos(\alpha)$ um, so erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{mit } 0° \leq \alpha \leq 180°$$

Mit dem Arkuskosinus (arccos bzw. $\cos^{-1}$) als Umkehrfunktion des Kosinus können wir nach α auflösen und erhlaten so eine Formel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

1.) Überlegen Sie, wie der Satz von der Orthogonalität ($\alpha = 90°$) mit diesem Satz in Übereinstimmung gebracht werden kann.

2.) * Beweisen Sie den Satz mithilfe des Kosinussatzes.

3.) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren.

a) $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-11\\4\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

4.) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel im Dreieck ABC. Zeichnen Sie für die Teilaufgabe a) und b) das Dreieck und messen Sie nach.

a) $A(2|1); B(5|-1); C(4|3)$
b) $A(1|1); B(9|-2); C(3|8)$
c) $A(5|0|4); B(3|0|0); C(5|4|0)$
d) $A(5|1|5); B(5|5|3); C(3|3|5)$

5.) Der Winkel zwischen den Vektoren is α. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\b\\0\end{pmatrix};\ \alpha = 30°$
b) $\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix};\ \alpha = 60°$

6.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $-\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ sowie $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$.

7.) Finden Sie heraus, für welche Winkel das Skalarprodukt negativ ist.

8.) Für welche Vektoren gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$?

9.) Ein Quader ist 8 cm lang, 5 cm breit und 3 cm hoch. A, B, C und D seien die Ecken seiner Grundfläche. M ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen. Berechnen Sie $\angle AMB$ und $\angle BMC$. ($\angle ABC$ ist der Winkel mit Scheitelpunkt B zu den Punkten A und C. Der Scheitelpunkt steht immer in der Mitte.)

3 Vektorprodukt

Es gibt ein weiteres Produkt von Vektoren: das Vektorprodukt. Wie der Name schon sagt, ist das Ergebnis dieses Produkts wieder ein Vektor. Das Vektorprodukt existiert nur für 3-dimensionale Vektoren, es wird immer mit einem Kreuz geschrieben: $\vec{a}\times\vec{b}$ (lies: „a Kreuz b“).
Für $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$$

1.) Berechnen Sie jeweils $\vec{a}\times\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$
b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$
c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-9\\-1\end{pmatrix}$
d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}8\\-8\\5\end{pmatrix}$

2.) Berechnen Sie jeweils mit den Vektoren aus 1b und 1c.

a) $\vec{b} \times \vec{a}$ **b)** $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ **c)** $\vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

Notieren Sie Ihre Schlussfolgerungen!

3.) Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm mit den folgenden gegebenen Punkten: $A(0|1|-3)$, $B(-1|1|-2)$ und $D(1|3|1)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.

b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelograms.

c) Berechnen Sie $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$.

d) Notieren Sie Ihre Schlussfolgerung und versuchen Sie anhand Ihrer Ergebnisse und Überlegungen eine Formel für die Länge des Vektorprodukts zu finden ($|\vec{a} \times \vec{b}| = \ldots$).

4.) Berechnen Sie weitere Vektorprodukte zur Übung mit folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ 5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

4 Gemischte Übungen

Welche Terme sind berechenbar?

Teil II

Lösungen

1 Orthogonale Vektoren

1.1 Orthogonale Vektoren finden

1.) Die nächstliegendsten Vektorkombinationen sind:

a) $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

2.) Man findet einen orthogonalen Vektor zu einem anderen, indem man seine Koordinaten vertauscht und bei einer Koordinate das Vorzeichen wechselt.

3.) Der Punkt wird entlang einer Geraden verschoben.

4.) Es gibt unendlich viele, da man die Gerade aus 3.) in einem dreidimensionalen Raum einfach im Kreis drehen könnte. Demnach sind es genauso viele Vektoren, wie ein Kreis Punkte hat. Veranschaulicht: Halte einen Stift in die Luft und bilde mit einem Finger eine dazu rechtwinklige Gerade. Dann drehe den Finger. Jegliche mögliche Position des Fingers bildet einen möglichen orthogonalen Vektor.

5.) Es entsteht eine Ebene, die orthogonal zum ausgangsvektor liegt. Sind die Vektoren alle gleich lang, so enteht ein Kreis, dessen Mittelpunkt der nicht verschobene Punkt ist und dessen Radius gleich der Länge der Vektoren ist.

6.) Man vertauscht zwei Koordinaten und ändert bei einer das Vorzeichen. Die dritte Koordinate wird auf 0 gesetzt.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1\\0\\-7\end{pmatrix}$

7.) Sie sind alle paarweise zueinander orthogonal, da sie alle eine jeweils andere Koordinate nicht 0 haben (sie sind jeweils parallel zu einer koordinatenachse).

1.2 Vektoren auf Orthogonalität prüfen

1.)

Beispiel: d) $\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}\Leftrightarrow(-7)\cdot(-2)+2\cdot(-7)=+14-14=0$

$\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\Leftrightarrow(-7)\cdot 2+2\cdot 7=-14+14=0$

2.)

a.) $2\cdot(-6)+1\cdot 12=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$

b.) $14\cdot 4+(-8)\cdot 7=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}$

c.) $(-1)\cdot 4+(-4)\cdot 1=-8\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\not\perp\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$

d.) $7\cdot 1+2\cdot(-3{,}5)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\end{pmatrix}$

3.) Wir übernehmen den Satz des Pythagoras von oben:

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$$

und setzen die Vektoren ein:

$$\left|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|^2+\left|\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right|^2=\left|\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right|^2$$

Wir beginnen mit den Rechenschritten um die Betragsstriche aufzulösen:

$$\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}^2+\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}^2=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}^2$$

Die $\sqrt{\ }$ können wir aufgrund des ^{2} einfach eliminieren und dann mithilfe der zweiten Binomischen Formel die Klammern rechts auflösen:

$$(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 =$$

$$(b_1)^2 - 2b_1a_1 + (a_1)^2 + (b_2)^2 - 2b_2a_2 + (a_2)^2 + (b_3)^2 - 2b_3a_3 + (a_3)^2$$

Nun Streichen wir alles, was auf beiden Seiten vorkommt:

$$\cancel{(a_1)^2} + \cancel{(a_2)^2} + \cancel{(a_3)^2} + \cancel{(b_1)^2} + \cancel{(b_2)^2} + \cancel{(b_3)^2} =$$

$$\cancel{(b_1)^2} - 2b_1a_1 + \cancel{(a_1)^2} + \cancel{(b_2)^2} - 2b_2a_2 + \cancel{(a_2)^2} + \cancel{(b_3)^2} - 2b_3a_3 + \cancel{(a_3)^2}$$

Übrig bleibt:

$$0 = -2b_1a_1 - 2b_2a_2 - 2b_3a_3$$

Wir teilen auf beiden Seiten der Gleichung durch -2 und erhalten:

$$0 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

4.) Wir benutzen unsere Erkenntnis aus **3.)** und setzen die Zahlen aus den Vektoren in die Gleichung ein. Wenn 0 heraus kommt, müssen die Vektoren orthogonal sein.

a.) $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
Also sind die Vektoren orthogonal.

b.) $2 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = -8 + 8 = 0$
Also sind die Vektoren orthogonal.

c.) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 2 + 4 - 6 = 0$
Also sind die Vektoren orthogonal.

d.) $0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2$
Also sind die Vektoren <u>nicht</u> orthogonal.

5.) Wir setzen jeweils in die Gleichung aus **3.)** ein und lösen nach a auf:

a.)

$$3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 1 \cdot a = 0$$

$$-3 + 8 + a = 0 \qquad | +3 - 8$$

$$\underline{\underline{a = -5}}$$

b.)

$$7 \cdot 1 + 1 \cdot a + 5 \cdot 2 = 0$$

$$7 + a + 10 = 0 \qquad | -17$$

$$\underline{\underline{a = -17}}$$

c.)

$$10 \cdot a + 27 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot (-14) = 0$$

$$10a + 27 - 7 = 0 \qquad | -20 \quad | : 10$$

$$\underline{\underline{a = -2}}$$

d.)

$$8 \cdot 2 + 3 \cdot a + 1 \cdot a = 0$$

$$16 + 4a = 0 \qquad | -16 \quad | : 4$$

$$\underline{\underline{a = -4}}$$

2 Skalarprodukt

2.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

1.)

a.)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 5$$

b.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 18$$

c.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 19$$

d.)

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-11) \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 0$$

2.) Um zu überprüfen, ob die beiden Geraden orthogonal sind, genügt es uns, die Richtungsvektoren zu überprüfen. Wenn diese orthogonal zueinander liegen, tut das die ganze Gerade.

$$\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}=(-5)\cdot(-2)+1\cdot 2+0\cdot 0=10+2=12\neq 0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}\not\perp\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

3.) Hier denken wir uns einen unvollständigen Vektor aus, den wir als Richtungsvektor für die Gerade h nehmen. Der Einfachhalt halber hier: $\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}$. Dann suchen wir a unter der Voraussetzung, dass der Vektor orthogonal zum Richtungsvektor von g ist.

a.)

$$\begin{pmatrix}7\\17\\-2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}\Leftrightarrow 7\cdot 1+17\cdot 1+(-2)\cdot a=0$$

$$7+17-2a=0 \qquad |-24 \quad |:(-2)$$

$$\underline{\underline{a=12}}$$

$$\begin{pmatrix}7\\17\\-2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}$$

b.)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}\Leftrightarrow 1\cdot 1+2\cdot 1+(-3)\cdot a=0$$

$$1+2-3a=0 \qquad |-3 \quad |:(-3)$$

$$\underline{\underline{a=1}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

4.) Wir müssen jeweils Überprüfen, ob $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ und $\vec{CA}$ orthogonal sind.

a.) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$

$\vec{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{CA}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}=-3-3-20\neq 0$$

$$\vec{BC}\cdot\vec{CA}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=2-6-5\neq 0$$

$$\vec{CA}\cdot\vec{AB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=-6+2+4=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{CA}\perp\vec{AB}$$

b.) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{BC}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}$

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}=$$
$$1\cdot(-5)+(-3)\cdot(-3)+(-1)\cdot 4=$$
$$-5+9-4=0$$

$$\Leftrightarrow \vec{CA}\perp\vec{AB}$$

5.)

6.) Wir müssen alles Winkel auf Orthogonalität überprüfen oder bis wir ein Gegenbeweis gefunden haben.

a.) $\vec{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{BC}=\begin{pmatrix}-11\\1\\9\end{pmatrix}$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -11 + 2 + 9 = 0$$

$$\vec{DA} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{CD} \cdot \vec{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} = 11 - 1 - 9 = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 11 - 2 - 9 = 0 \qquad \vec{DA} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -11 + 2 + 9 = 0$$

b.) $$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 - 8 - 7 \neq 0$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \vec{AB} \not\perp \vec{BC}$$

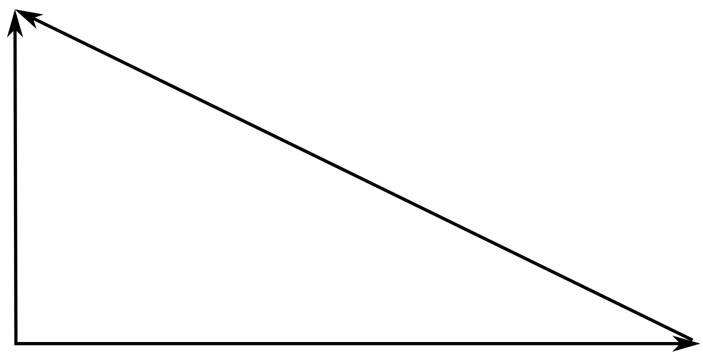
7.) $$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} \cdot \vec{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 - 15 = 0$$

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

2.2 Winkelberechnung mithilfe des Skalarprodukts

1.) Da $\cos(90°) = 0$ kommt bei einem rechten Winkel mit der Gleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0$ stets Null raus. Demnach ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ stets ein Zeichen für Orthogonalität.

2.) * Wir beginnen mit dem Kosinussatz, geben ihm Vektoren-Einheiten und formen um:



$$a = \vec{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \vec{BC} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$c = \vec{CA} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen den Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot cos(\alpha)$$

Dort setzten wir die Bezeichnungen in Vektoren-Schreibweise hinein:

$$|\vec{BC}|^2 = |\vec{CA}^2| + |\vec{AB}|^2 - 2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot cos(\alpha)$$

Wir tauschen $\vec{BC}$ mit $CA \vec{-} AB$ um nur noch zwei statt drei unterschiedlicher Vektoren zu haben:

$$|\vec{CA} - \vec{AB}|^2 = |\vec{CA}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot cos(\alpha) \qquad | - |\vec{CA}|^2 - |\vec{AB}|^2$$

Dann fangen wir die Formel nach α umzustellen:

$$|\vec{CA} - \vec{AB}|^2 - |\vec{CA}|^2 - |\vec{AB}|^2 = -2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

Wir schreiben die Vektoren ganz auf,

$$\left|\begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}\right|^2 - \left|\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right|^2 - \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right|^2 = -2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

Um sie dann besser auseinanderziehen zu können:

$$\sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 + (c_3 - a_3)^2}^2 - \sqrt{c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2}^2 - \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}^2 =$$

$$-2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

Die Wurzeln und die Quadrate eliminieren sich:

$$(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2 + (c_3 - a_3)^2 - c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 - a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 =$$

$$-2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

Und nach dem Anwenden der 2. Binomischen Formel eliminiert sich einiges in der Formel selbst:

$$\cancel{c_1{}^2} - 2c_1a_1 + \cancel{a_1{}^2} \quad + \quad \cancel{c_2{}^2} + -c_2 + a_2 + \cancel{a_2{}^2} \quad + \quad \cancel{c_3{}^2} - 2c_3 + a_3 + \cancel{a_3{}^2} \quad -\cancel{c_1{}^2} + \cancel{c_2{}^2} + \cancel{c_3{}^2} - \cancel{a_1{}^2} + \cancel{a_2{}^2} + \cancel{a_3{}^2} =$$

$$-2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha)$$

Jetzt ziehen wir noch den Rest der rechten Seite auf die Linke, um $\cos(\alpha)$ alleine zu haben:

$$-2c_1a_1 - 2c_2a_2 - 2c_3a_3 = -2|\vec{CA}||\vec{AB}| \cdot \cos(\alpha) \qquad | : -2|\vec{CA}||\vec{AB}|$$

Als letztes Kürzen wir mit -2 und können aus dem Rest oberhalb des Bruches wieder zwei Vektoren bilden ($\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$):

$$\frac{\cancel{-2}c_1a_1 + \cancel{-2}c_2a_2 + \cancel{-2}c_3a_3}{\cancel{-2}|\vec{CA}||\vec{AB}|} = \frac{c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3}{|\vec{CA}||\vec{AB}|} = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{AB}}{|\vec{CA}||\vec{AB}|} = \cos(\alpha)$$

3.) **a.)**

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \sqrt{10}} \qquad |\cos^{-1}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\underline{\underline{\alpha = 71{,}57^\circ}}$$

b.)

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2+15+1}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{4+25+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{30}}\right) = 7{,}75°$$

c.)

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5+9+5}{\sqrt{1+9+25}\cdot\sqrt{25+9+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{19}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{35}}\right) = 57{,}12°$$

d.)

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-11+8+3}{\sqrt{144+16+1}\cdot\sqrt{1+4+9}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{161}\cdot\sqrt{14}}\right) = 90°$$

4.) **b)** $\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CA} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$$a = |\vec{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$
$$b = |\vec{CA}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$
$$c = |\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\tfrac{\vec{AB}\cdot\vec{CA}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{CA}|}\right) = cos^{-1}\left(\tfrac{-6+4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{8}}\right) = 78{,}69°$$
$$\beta = cos^{-1}\left(\tfrac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{BC}|}\right) = cos^{-1}\left(\tfrac{-3-8}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}\right) = 42{,}27°$$
$$\gamma = cos^{-1}\left(\tfrac{\vec{BC}\cdot\vec{CA}}{|\vec{BC}|\cdot|\vec{CA}|}\right) = cos^{-1}\left(\tfrac{2-8}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{8}}\right) = 102{,}96°$$

5.) **a)**

$$\cos(30) = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\b\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\b\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{b}{\sqrt{3+b^2}} \qquad \Big| \cdot\sqrt{3+b^2}$$

$$\cos(30)\cdot\sqrt{3+b^2} = b \qquad \Big|^2$$

$$\cos(30)^2\cdot(3+b^2) = b^2$$

$$\cos(30)^2\cdot 3 + \cos(30)^2\cdot b^2 = b^2 \qquad \Big| -b^2\cdot cos(30)^2$$

$$\cos(30)^2\cdot 3 = 1\cdot b^2 - (\cos(30)^2\cdot b^2)$$

$$\cos(30)^2\cdot 3 = b^2\cdot(1-cos(30)^2) \qquad \Big|: (1-cos(30))$$

$$\frac{\cos(30)^2\cdot 3}{1-cos(30)^2} = b^2 \qquad \Big|\sqrt{\ }$$

$$\frac{\sqrt{\cos(30)^2\cdot 3}}{\sqrt{1-cos(30)^2}} = b$$

$$\underline{\underline{\pm 3 = b}}$$

b)