Orthogonalität und Produkte von Vektoren.

Ein Kurs zum selbständigen Lernen.

Alexander Ruhri

a.ruhri@widarschule.de

Aktuelle Version unter http://www.ruhri.net/

Version 0.3, September 2015

Vorbemerkungen

Bitte beachten Sie beim Bearbeiten dieser Blätter, dass an geeigneten Stellen Zusammenfassungen mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Bitte machen Sie Ihren Lehrer darauf aufmerksam, wenn Sie das Bedürfnis nach einer solchen Besprechung haben.

Voraussetzungen

Um mit den Inhalten des Kurses zurechtzukommen ist es notwendig, dass Sie wissen, was ein Vektor ist, wie man die Länge eines Vektors berechnet und die Parameterdarstellung von Geraden bereits gelernt haben. Außerdem sollten Sie die Winkelfunktionen (sin, cos) wiederholt haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Orthogonale Vektoren

Das Wort orthogonal leitet sich vom griechischen $o\rho\theta o\varsigma$ (orthos) „richtig, recht-“ und $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ (gonia) „Ecke, Winkel“ ab (vergl. `http://de.wikipedia.org/wiki/Orthogonalität`) und bedeutet „rechtwinklig“. Wenn zwei Vektoren zueinander orthogonal sind, kann man das in Zeichen so schreiben:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

1.1 Orthogonale Vektoren finden

1.) Zeichnen Sie Pfeile der Vektoren in ein Koordinatensystem ein und finden Sie (gleich lange) zu ihnen orthogonale Vektoren. Zeichnen Sie die orthogonalen Vektoren ein und geben Sie ihre Koordinaten an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

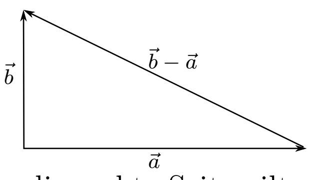
2.) Wenn Sie eine einfache Regel gefunden haben, mit der man gleich lange orthogonale Vektoren aus den Koordinaten des gegebenen Vektors bilden kann (im $\mathbb{R}^2$), dann formulieren und notieren Sie diese Regel. Ansonsten versuchen Sie anhand weiterer Beispiele die Regel zu finden.

3.) Beschreiben Sie das Gebilde, das alle zu einem Vektor (wieder im $\mathbb{R}^2$) orthogonalen Vektoren (aller Längen), bilden.

4.) Überlegen Sie, wie dieses Gebilde aller zu einem Vektor orthogonaler Vektoren im $\mathbb{R}^3$ aussieht. Wie viele gleich lange orthogonale Vektoren hat ein Vektor im $\mathbb{R}^3$?

1.2 Vektoren auf Orthogonalität prüfen

Als Test auf Orthogonalität zweier Vektoren kann man den Satz des Pythagoras verwenden, denn er gilt nur in orthogonalen Dreiecken.



Die beiden Vektoren in nebenstehender Skizze sind also genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2.$$

Für die rechte Seite gilt:

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Also:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2) + (b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2)$$

Durch Ausklammern erhalten wir:

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2)$$

Für die linke Seite erhalten wir auf gleiche Weise:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2)$$

Wenn wir linke und rechte Seite vergleichen, merken wir, dass der Satz des Pythagoras nur dann gilt wenn $2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) = 0$ also wenn gilt:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

Insgesamt gilt also:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

1.) Überprüfen Sie die von Ihnen gefundenen Vektoren mit dieser Regel auf Orthogonalität.

2.) Überprüfen Sie folgende Paare von Vektoren auf Orthogonalität:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -3,5 \end{pmatrix}$

3.) Formulieren Sie diese Regel für den $\mathbb{R}^3$ indem Sie $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ verwenden.

4.) Überprüfen Sie folgende Paare von dreidimensionalen Vektoren auf Orthogonalität:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.) Finden Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Vektoren orthogonal zueinander stehen.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 0,5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

2 Skalarprodukt

Die verwendete Rechenart heißt das *Skalarprodukt* zweier Vektoren und es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Der Name Skalarprodukt weist darauf hin, dass das Ergebnis des Produktes ein *Skalar*, eine Maßzahl ist. Das Skalarprodukt wird *immer* mit einem Punkt geschrieben. Mit dem Ergebnis von oben gilt also:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

1.) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.) Überprüfen Sie, ob die sich schneidenden Geraden g und h zueinander orthogonal sind ($s \in \mathbb{R}$).

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.) Geben Sie eine Parameterdarstellung einer Geraden h an, die die Gerade g orthogonal schneidet($s \in \mathbb{R}$).

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

4.) Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

a) $A(3|4|-8);\ B(6|5|-4);\ C(5|2|-9)$

b) $A(-1|6|-10);\ B(0|3|-11);\ C(-5|0|-7)$

5.) Bestimmen Sie *alle* Vektoren die sowohl zu $\vec{a}$ also auch zu $\vec{b}$ orthogonal sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

6.) Überprüfen Sie, ob das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

a) $A(0|4|3);\ B(-1|2|2);\ C(-12|3|11);\ D(-11|5|12)$

b) $A(13|-4|-5);\ B(12|-5|2);\ C(7|3|1);\ D(8|4|4)$

7.) Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ mit $A(-2|-2)$, $B(0|3)$, $C(3|3)$ und $D(3|0)$ durch Vektoren aus. Überprüfen sie diese Vektoren auf Orthogonalität.

2.2 Winkelberechnung mithilfe des Skalarprodukts

Der kleinere Winkel zwischen zwei nicht kollinearen Vektoren ist der Winkel zwischen diesen Vektoren. Für das Skalarprodukt gilt folgende Beziehung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

bzw.

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{mit } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

1.) Überlegen Sie, wie der Satz von der Orthogonalität ($\alpha = 90^\circ$) mit diesem Satz in Übereinstimmung gebracht werden kann.

2.) * Beweisen Sie den Satz mithilfe des Kosinussatzes.

3.) Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel im Dreieck ABC. Zeichnen Sie für die Teilaufgabe a) und b) das Dreieck und messen Sie nach.

a) $A(2|1); B(5|-1); C(4|3)$ **c)** $A(5|0|4); B(3|0|0); C(5|4|0)$
b) $A(1|1); B(9|-2); C(3|8)$ **d)** $A(5|1|5); B(5|5|3); C(3|3|5)$

5.) Der Winkel zwischen den Vektoren is α. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}; \ \alpha = 30^\circ$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}; \ \alpha = 60^\circ$

6.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $-\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ sowie $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$.

7.) Finden Sie heraus, für welche Winkel das Skalarprodukt negativ ist.

8.) Für welche Vektoren gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

9.) Ein Quader ist 8 cm lang, 5 cm breit und 3 cm hoch. A, B, C und D seien die Ecken seiner Grundfläche. M ist der Schnittpunkt der Raumdiagonalen. Berechnen Sie $\angle AMB$ und $\angle BMC$. ($\angle ABC$ ist der Winkel mit Scheitelpunkt B zu den Punkten A und C. Der Scheitelpunkt steht immer in der Mitte.)

3 Vektorprodukt

Es gibt ein weiteres Produkt von Vektoren: das Vektorprodukt. Wie der Name schon sagt, ist das Ergebnis dieses Produkts wieder ein Vektor. Das Vektorprodukt existiert nur für 3-dimensionale Vektoren, es wird immer mit einem Kreuz geschrieben: $\vec{a} \times \vec{b}$ (lies: „a Kreuz b“).

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

1.) Berechnen Sie jeweils $\vec{a} \times \vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

2.) Berechnen Sie jeweils mit den Vektoren aus 1b und 1c.

a) $\vec{b} \times \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

c) $\vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$

Notieren Sie Ihre Schlussfolgerungen!

3.) Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm mit den folgenden gegebenen Punkten: $A(0|1|-3)$, $B(-1|1|-2)$ und $D(1|3|1)$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.

b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelograms.

c) Berechnen Sie $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$.

d) Notieren Sie Ihre Schlussfolgerung und versuchen Sie anhand Ihrer Ergebnisse und Überlegungen eine Formel für die Länge des Vektorprodukts zu finden ($|\vec{a} \times \vec{b}| = \ldots$).

4.) Berechnen Sie weitere Vektorprodukte zur Übung mit folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ 5 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$$