Funktionenscharen

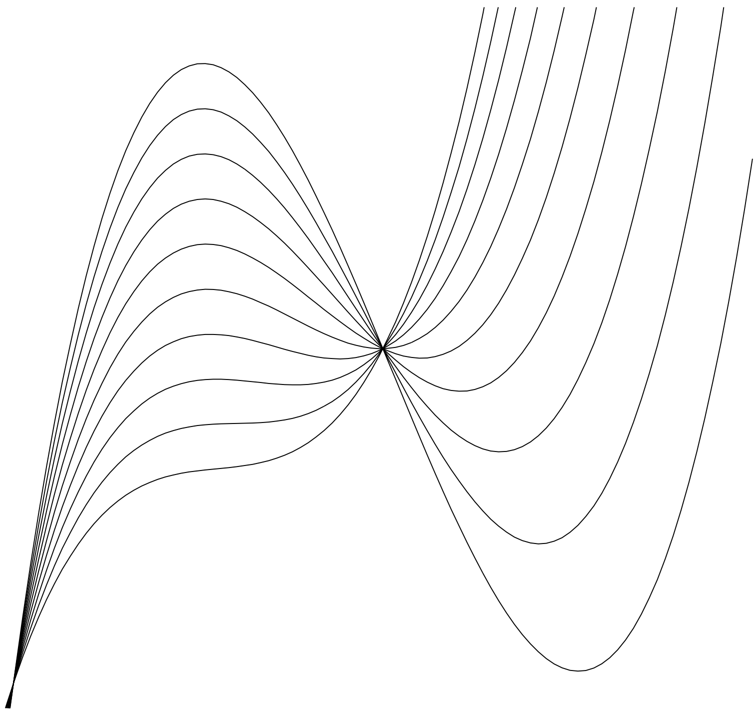
Ein Kurs zum selbständigen Lernen

Alexander Ruhri

a.ruhri@widarschule.de

Aktuelle Version unter http://www.ruhri.net/

Version 0.3.1, Juni 2024



Vorbemerkungen

Bitte beachten Sie beim Bearbeiten dieser Blätter, dass an geeigneten Stellen Zusammenfassungen mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Bitte machen Sie Ihren Lehrer darauf aufmerksam, wenn Sie das Bedürfnis nach einer solchen Besprechung haben.

Besonders wichtig ist das Notieren der wichtigsten Ergebnisse in ein Regelheft. Vergleichen Sie diese Regeln bzw. besprechen Sie sie mit der ganzen Klasse, damit Sie sicher sein können, dass sie korrekt sind.

Aufgaben, die mit ★ markiert sind, haben ein gehobenes Niveau und können übersprungen werden. Abschnitte, die mit ★ markiert sind, können im Grundkurs übersprungen werden.

Voraussetzungen

Um diesen Kurs erfolgreich absolvieren zu können, ist es notwendig, dass Sie mit ganzrationalen Funktionen vertraut sind. Sie sollten mit der Untersuchung von Funktionen (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) und der Integralrechnung vertraut sein.

Inhaltsverzeichnis

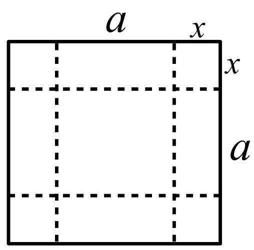
1 Scharen von Funktionen

In vielen Sachzusammenhängen, die durch eine ganzrationale Funktion beschrieben werden, kann es sinnvoll sein sich verändernde Parameter in den Funktionsterm aufzunehmen, damit man nicht für jede neue Situation eine neue Funktion braucht, sondern einfach nur den Parameter anpassen muss.

Das kann zum Beispiel sinnvoll sein, wenn man das Wachstum einer Pflanzenpopulation mathematisch modelliert und dieses Wachstum von der Durchschnittstemperatur oder der Menge an verfügbaren Nährstoffen abhängt.
Ein weiteres Beispiel wäre die Flugparabel eines in einem bestimmten Winkel abgeschossenen Projektils, die von der Anfangsgeschwindigkeit des Projektils abhängt, weil die Parabel höher und weiter wird, wenn das Projektil schneller abgeschossen wird.

Dadurch entstehen unter Umständen unendliche viele Funktionen (für jeden möglichen Parameter eine) die zusammen gehören. Mit dem Begriff „Schar“ wird diese Zusammengehörigkeit zum Ausdruck gebracht (Wie die Vögel einer Vogelschar, die gemeinsam fliegen aber nicht alle exakt die gleiche Bahn beschreiben.).

1.1 Das Schachtelproblem



Wir betrachten unser bekanntes „Schachtelproblem“, bei dem eine Schachtel aus einem quadratischen Stück Pappe gefaltet wird, indem man in den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausschneidet. Je nach Wahl von x hat die Schachtel ein anderes Volumen.

Aufgabe 1.

1.) Bestimmen Sie den Funktionsterm[1] des Volumens $V(x)$ einer Schachtel aus einer Pappe mit Seitenlänge a in Abhängigkeit von x.

a) $a = 30\,\text{cm}$ **b)** $a = 60\,\text{cm}$ **c)** $a = 90\,\text{cm}$

2.) Welche Werte darf denn das x annehmen, damit die mathematische Beschreibung im Sachzusammenhang Sinn ergibt?

3.) Bestimmen Sie für jede Schachtel aus der vorigen Aufgabe das x, bei dem das Volumen der Schachtel maximal ist.

[1]Der Funktionsterm ist der Term „$x^3 - 4x$“ in der Funktionsgleichung $f(x) = x^3 - 4x$, also in der Regel die rechte Seite der Funktionsgleichung.

4.) Notieren Sie die Regelmäßigkeit, die Sie dabei feststellen konnten.

Zur Vereinfachung, damit man nicht für jede neue Pappe eine neue Funktion braucht, kann die Seitenlänge der Pappe unbestimmt gelassen werden und als Parameter a in den Funktionsterm eingeführt werden.

5.) Bestimmen Sie den Funktionsterm des Volumens $V_a(x)$ einer Schachtel aus einer Pappe mit beliebiger Kantenlänge a.

Das a im Index des Funktionsnamens weist darauf hin, dass der Funktionsterm von einem Parameter abhängig ist. Für a gilt natürlich: $a > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ oder kurz: $a \in \mathbb{R}^+$, weil es eine Seitenlänge ist und somit nur positive Werte annehmen kann.

6.) Zeichnen Sie die Graphen von V für die Seitenlängen $a = 75\,\text{cm}$, $a = 60\,\text{cm}$ und $a = 45\,\text{cm}$ in *ein* passendes[2] Koordinatensystem.

7.) Bestimmen Sie nun das Maximum[3] der Volumensfunktion für jede Schachtel aus einer Pappe der Seitenlänge a. Beachten Sie beim Ableiten, dass a eine fest gewählte Zahl ist, nämlich die Seitenlänge der Pappe, denn die muss ja vorher festgelegt sein.

8.) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der gefundenen Regelmäßigkeit aus Aufgabe 4.).

Die V_a mit $a \in \mathbb{R}$ bilden zusammen eine Schar. Jedes einzelne V_a ist Mitglied der Schar. Das gleiche gilt für die Ableitungsfunktionen V_a'. Auch sie bilden zusammen eine Schar.

1.2 Weitere Aufgaben

Aufgabe 2. Wurfparabel

Ein Fußball wird so geschossen, dass seine Flugbahn im Moment des Abschusses einen Winkel von 45° nach oben einnimmt. Nun hängt es von der Geschwindigkeit des Balls ab, welche Bahn er beschreibt.

Ist v (in m/s) die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Abschusses, dann kann die Flugbahn unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$f_v(x) = -\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot x^2 + x$$

Wobei die Koordinaten in der Maßeinheit m gemessen werden. Der Faktor 9,81 ist durch die jeweils wirkende Fallbeschleunigung zu ersetzen (Mond: 1,62).

1.) Zeichnen Sie die Wurfparabeln für die Geschwindigkeiten

a) 6 m/s **b)** 9 m/s **c)** 12 m/s

in ein Koordinatensystem, dessen x-Achse von 0 bis 15 und dessen y-Achse von 0 bis 4 reicht. Abschusspunkt ist jeweils $(0|0)$.

2.) Bestimmen Sie jeweils rechnerisch die Schussweite.

3.) Ermitteln Sie jeweils den höchsten Punkt der Flugbahn.

4.) Bestimmen Sie die nötige Abschussgeschwindigkeit, um den Ball 30 m weit zu schießen.

5.) Berechnen Sie die Schussweite, die man erreichen könnte, wenn man den Ball mit der Abschussgeschwindigkeit aus 4.) auf dem Mond schießen würde.

6.) Bestimmen Sie die Schussweite und den Scheitelpunkt der Flugbahn für alle $v \in \mathbb{R}^+$.

7.) Wie können Sie das letzte Ergebniss mit den vorigen in Einklang bringen?

---

[2] Tipp: $0 \leq x \leq 40$ und $0 \leq y \leq 32000$

[3] Zur Erinnerung: Das Maximum ist ein Punkt. Zur Erinnerung: Ein Punkt hat immer zwei Koordinaten.

8.) Bestimmen Sie die nötige Abschussgeschwindigkeit, damit der Ball 7 m hoch fliegt.

Aufgabe 3.

Folgende Aufgabe dient dazu, ein Gefühl für die Wirkung von Parametern auf die Gestalt von Parabeln zu bekommen. Frischen Sie Ihr Wissen über Parabeln und ihre Gleichungen aus der 11. Klasse auf. Erläutern Sie die Bedeutung der Koeffizienten in den verschiedenen Arten der Parabelgleichungen:

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S; \quad f(x) = a(x - d) \cdot (x - e)$$

Überlegen Sie in den folgenden Aufgaben, welche Merkmale der Parabel sich ändern, wenn man den Parameter $t \in \mathbb{R}^+$ verändert und welche sich nicht verändern. Formen Sie gegebenfalls den Funktionsterm in eine andere Form um.

1.) $f_t(x) = -\frac{1}{2}tx^2 + 9$
2.) $f_t(x) = (x - t)^2 - t^2$
3.) $f_t(x) = \frac{1}{3}(x - 2)(x + t)$
4.) $f_t(x) = \frac{1}{8}tx^2 + tx + 3$

Aufgabe 4.

Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit $a \in \mathbb{R}^+$. Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f_a an der Stelle $x = 0$. Bestimmen Sie a so, dass diese Steigung den Wert 1 annimmt.

1.) $f_a(x) = ax^2 + ax$
2.) $f_a(x) = ax^3 + x^2 - 2ax$
3.) $f_a(x) = a^3x^3 - ax$
4.) $f_a(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + a^2x - 4$
5.) $f_a(x) = ax^3 + 3x^2 - 2x$
6.) $f_a(x) = 2ax^3 + 2a^2x^2 + a^2x$

★ Aufgabe 5.

Bearbeiten Sie die Aufgaben aus Aufgabe 4 und betrachten Sie nicht die Stelle $x = 0$, sondern nun die Stelle $x = 1$ (oder etwas schwieriger $x = 2$).

Überlegen und diskutieren Sie, warum die Aufgabenstellung nun schwieriger geworden ist.

Welche Aufgabe ist für Sie nur mit Taschenrechner lösbar?

Aufgabe 6.

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_t mit $t \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen in Abhängigkeit von t. Berechnen Sie die Fläche A_t, die der Graph von f_t mit der x-Achse einschließt. Bestimmen Sie t so, dass die Fläche 8 Flächeneinheiten groß ist.

1.) $f_t(x) = x^2 - t^2$
2.) $f_t(x) = x^2 - 2tx$
3.) $f_t(x) = -x^2 + \frac{1}{2}t^2x$
4.) $f_t(x) = x^4 - tx^2$
5.) $f_t(x) = tx^2 - t^2x$
6.) $f_t(x) = -x^3 + 4t^2x^2$

2 ★ Ortskurven

Verändert man den Parameter einer Funktionenschar, so verändern sich die Funktionen und mit ihnen die Graphen in der Regel[4] *stetig*, das heißt ohne Sprünge. Betrachten Sie dazu z. B. einen Hochpunkt eines Graphen (z. B. den Scheitelpunkt aus der Aufgabe mit den Wurfparabeln). Wenn Sie den Parameter ändern, wandert auch der Hochpunkt und beschreibt dabei eine bestimmte Kurve – seine Ortskurve.

[4]Stimmt natürlich so nicht, aber bei den Scharen und Funktionen, die wir betrachten ist das in der Regel so.

2.1 Bestimmung von Ortskurven

Betrachten Sie den Hochpunkt des Volumens aus dem Schachtelproblem: $H\left(\frac{a}{6} \mid \frac{2}{27}a^3\right)$. Sie sehen, die Koordinaten sind vom Parameter a – der Seitenlänge des Quadrats – abhängig.

Stellen Sie die Veränderung der Lage des Hochpunktes in Abhängigkeit von a in einem Koordinatensystem dar. Überlegen Sie sich vorher, welche Maße das Koordinatensystem haben muss und welche Quadranten überhaupt benötigt werden. Es gelte dabei $1 \leq a \leq 30$.

Welcher Art ist die Kurve, die alle Hochpunkte zusammen bilden? Vergleichen Sie mit Ihren Kollegen.

Um eine mathematische Beschreibung für die Ortskurve zu bekommen, wenden wir folgendes Verfahren an: Für die Koordinaten des Hochpunktes H gilt: $x = \frac{a}{6}$ und $y = \frac{2}{27}a^3$. Wir stellen x nach a um: $a = 6x$ und setzen das a nun in die Gleichung von y ein: $y = \frac{2}{27} \cdot (6x)^3$ und vereinfachen zu $y = 16x^3$ (Bitte rechnen Sie nach!).

Also liegen alle Hochpunkte auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 16x^3$.

Aufgabe 7.

Berechnen Sie die Ortskurve des Scheitelpunktes der Flugparabeln aus Aufgabe 2 6.).

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Extrempunkte und die Ortskurven der Extrema der Funktionenscharen f_t.

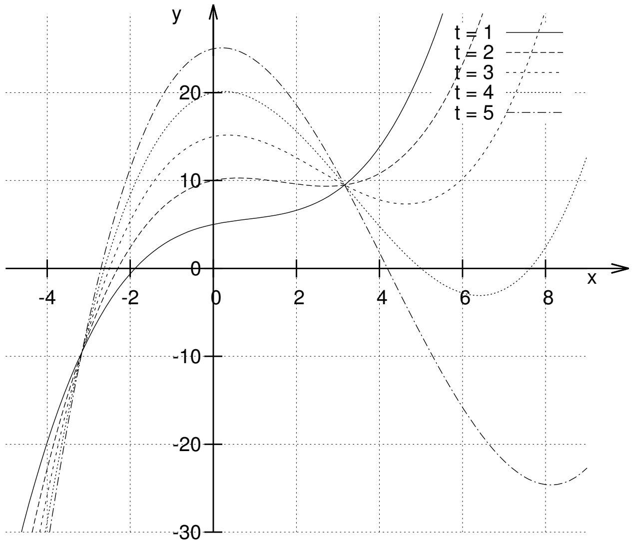
1.) $f_t(x) = x^2 - 2tx; \quad t \in \mathbb{R}$

2.) $f_t(x) = x^2 + tx - 2x - 2t; \quad t \in \mathbb{R}$

3.) $f_t(x) = \frac{1}{8}tx^2 + x + 2; \quad t \in \mathbb{R}^+$

4.) $f_t(x) = x^3 - t^2x; \quad t \in \mathbb{R}$

3 ★ Fixpunkte



In der Abbildung sind die Graphen einiger Funktionen der Schar

$$f_t(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 + x + 5t; \quad t \in \mathbb{R}^+$$

dargestellt.

Es ist leicht zu sehen, dass alle Mitglieder dieser Schar zwei gemeinsame Punkte – sogenannte Fixpunkte – haben.

Nicht alle Scharen haben gemeinsame Punkte. Betrachten Sie zum Beispiel die Schar

$$f_a(x) = x^2 + a$$

3.1 Bestimmung von Fixpunkten

Um die Fixpunkte einer Schar zu bestimmen, muss man folgende Gleichung lösen:

$$f_a(x) = f_b(x) \quad \text{mit } a \neq b$$

Diese Gleichug ist äquivalent zu

$$f_a(x) - f_b(x) = 0$$

und wir erhalten durch Einsetzen der Funktionsterme

$$\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + x + 5a - \left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}bx^2 + x + 5b\right) = 0$$

Wir ordnen die Terme nach den Potenzen von x und den Koeffizienten:

$$\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}bx^2 + x - x + 5a - 5b = 0$$

Man sieht sofort: Die Terme ohne Parameter heben sich gegenseitig weg, die anderen unterscheiden sich nur im Parameter (a oder b) und im Vorzeichen:

$$-\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}bx^2 + 5a - 5b = 0$$

Dann klammern wir $a - b$ aus (das ist quasi der Hauptschritt):

$$-(a-b) \cdot \frac{1}{2}x^2 + (a-b) \cdot 5 = 0$$

Da $a \neq b$, ist $a - b \neq 0$ und wir dürfen durch $a - b$ teilen: $-\frac{1}{2}x^2 + 5 = 0$. Wir lösen die quadratische Gleichung und erhalten als Lösungen: $x_1 = \sqrt{10}$; $x_2 = -\sqrt{10}$. Es bleibt nur noch, die Werte in f_a einzusetzen um die y-Werte der Fixpunkte zu bekommen und erhalten: $F_1(-\sqrt{10}| - 3\sqrt{10})$ und $F_2(\sqrt{10}|3\sqrt{10})$. Da die Punkte ja unabhängig vom Parameter a sind, fällt das a im Laufe der Rechnung raus.

Aufgabe 9.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der folgenden Scharen.

1.) $f_a(x) = ax^2 + 2ax - 3a;\ a \in \mathbb{R}$

2.) $f_a(x) = ax^2 - 4ax + 4a + 4;\ a \in \mathbb{R}$

3.) $f_a(x) = x^3 - ax^2 - 4x + 4a;\ a \in \mathbb{R}$

4.) $f_a(x) = x^3 + ax^2 - ax + 4;\ a \in \mathbb{R}$

5.) $f_a(x) = x^3 - 4x^2 - ax^2 + 4ax - 21x + 21a + 8;\ a \in \mathbb{R}$

4 Übungsaufgaben

Aufgabe 10. Springbrunnen
An der Längsseite eines 20 m langen und 3 m breiten Wasserbeckens sind die Düsen so angebracht, dass die Wasserfontänen im rechten Winkel zum Rand aufsteigen, eine Parabel beschreiben und dann im Becken auf das Wasser auftreffen. Dabei kann die Parabel in Abhängigkeit vom Wasserdruck durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$f_t(x) = -4x^2 + \frac{1}{2}tx; \quad t \in \mathbb{R}^+$$

Dabei sind alle Angaben in Metern und die Düse befindet sich im Ursprung.

1.) Skizzieren Sie den Sachverhalt in einem Koordinatensystem.

2.) Zeichnen Sie die Fontänen für die Parameter $t = 8$ und $t = 12$ in die Skizze ein.

3.) Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Fontäne 0,5 m von der Düse entfernt auftrifft.

4.) Bestimmen Sie den maximalen Wert für t, so dass die Fontäne noch im Becken auftrifft. Ermitteln Sie die Höhe, die die Fontäne dann erreicht.

5.) Für welchen Wert von t erreicht die Fontäne eine Höhe von 4 m? Wie weit von der Düse entfernt trifft die Fontäne dann auf?

6.) Bestimmen Sie die Ortskurve des Scheitelpunktes.

7.) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der Fontänen.

5 Lösungen der Aufgaben

Lösung 1.

1.) **a)** $V(x) = x \cdot (30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

b) $V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$

c) $V(x) = 4x^3 - 360x^2 + 8100x$

2.) Das x muss größer als 0 sein, darf aber nicht größer als die halbe Seitenlänge der Pappe sein. (Begründen Sie!)

3.) **a)** $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$ und $V''(x) = 24x - 240$
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15 \vee x = 5$ Für $x = 15$ ist das Volumen null (warum?), $V''(5) = -120 < 0$, also erhält man das maximale Volumen der Schachtel, wenn man ein Quadrat der Seitenlänge $x_{max} = 5$ ausschneidet.

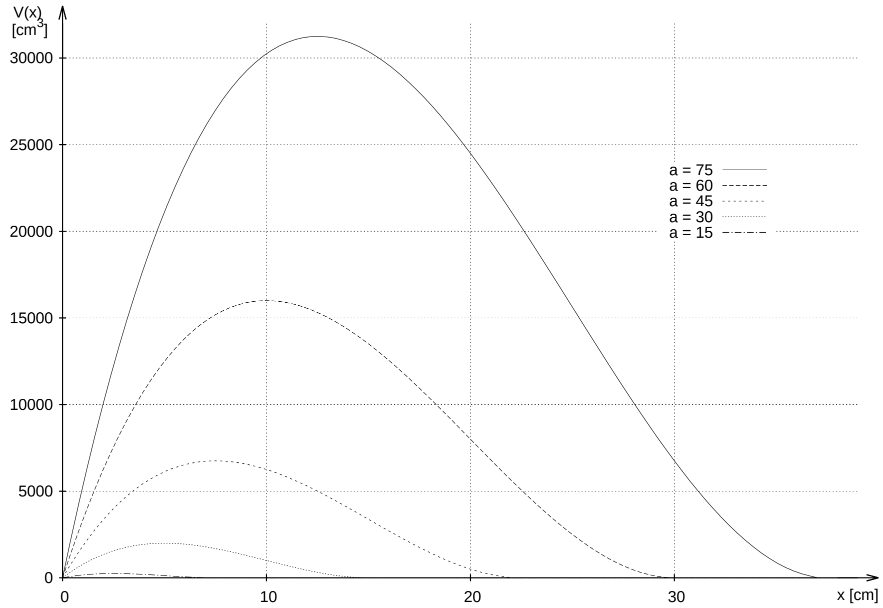
b) $x_{max} = 10$

c) $x_{max} = 15$

4.) Vergleichen Sie mit Ihren Klassenkollegen!

5.) Das Volumen jeder Schachtel kann dann einfach durch $V_a(x) = x \cdot (a-2x)^2$ ausgedrückt werden. Durch Anwenden der binomischen Formel erhalten wir $V_a(x) = x \cdot (a^2 - 4ax + 4x^2)$ und weiter: $V_a(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$, wobei natürlich wegen des Sachzusammenhangs gilt: $0 < x < \frac{a}{2}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

6.) Für ein fest gewähltes a wird jeweils ein Graph gezeichnet.



7.) Wir leiten $V_a(x)$ nach x ab $V_a'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$ und bestimmen die Nullstellen (in Abhängigkeit von a):

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{12}a^2 = 0$$

Für die Anwendung der p-q-Formel gilt nun: $p = -\frac{2}{3}a$ und $q = \frac{1}{12}a^2$. Einsetzen in die p-q-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{12}a^2} = \frac{1}{3}a \pm \sqrt{\frac{1}{36}a^2} = \frac{1}{3}a \pm \frac{1}{6}a \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}a; \quad x_2 = \frac{1}{6}a$$

x_1 scheidet aus da $x < \frac{a}{2}$ gelten muss.

Wir überprüfen x_2 mit der zweiten Ableitung: $V_a''(x) = 24x - 8a$ $V_a''(\frac{1}{6}a) = 24\frac{1}{6}a - 8a = 4a - 8a = -4a < 0$, da $a > 0$. Also liegt an der Stelle $x_2 = \frac{1}{6}a$ ein Maximum vor. Die zweite Koordinate ermitteln wir durch Einsetzen der Stelle in die Funktion:

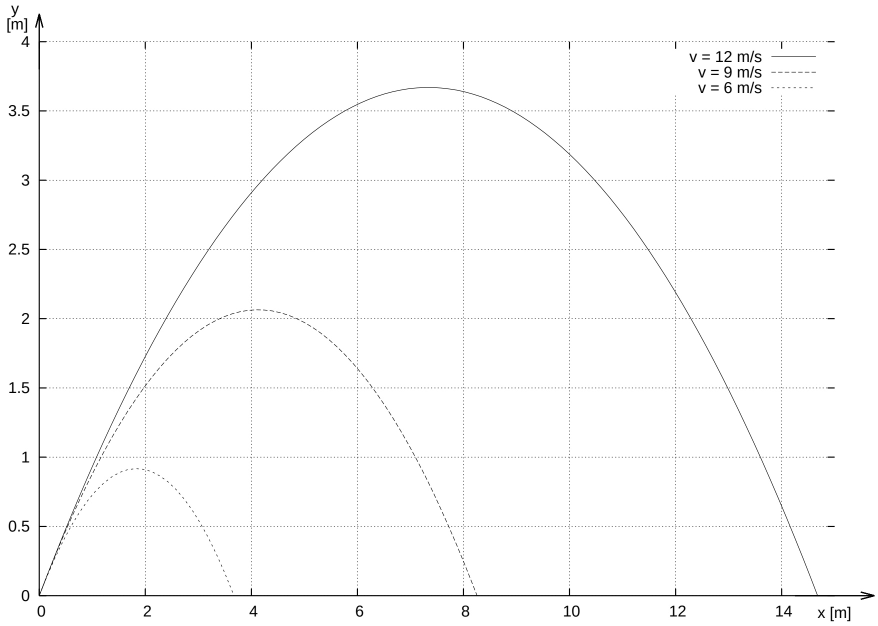
$$V_a(\frac{a}{6}) = 4(\frac{a}{6})^3 - 4a(\frac{a}{6})^2 + a^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}a^3$$

Also hat der Hochpunkt die Koordinaten: $H(\frac{a}{6}|\frac{2}{27}a^3)$.

8.) Vergleichen Sie mit Ihren Klassenkolleginnen!

Lösung 2.

1.) Flugbahnen für unterschiedliche Geschwindigkeiten.



2.) **a)** $3,669\,\text{m}$ **b)** $8,257\,\text{m}$ **c)** $14,679\,\text{m}$

3.) **a)** $H(1,835|0,917)$ **b)** $H(4,128|2,064)$ **c)** $H(7,339|3,67)$

4.) Auf f bezogen heißt die Forderung: f hat bei $x = 30$ eine Nullstelle. Man sucht das passende v. Also muss $-\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot 30^2 + 30 = 0$ nach v umgestellt werden. Man erhält: $v_{1,2} = \pm\sqrt{9,81 \cdot 30} \approx \pm 17,1552\,[\text{m/s}]$. Da wir nur nach vorne schießen, entfällt die negative Lösung.

5.) Auf dem Mond gilt für die Flugbahn die Funktionsgleichung $g_v(x) = -\frac{1}{v^2} \cdot 1,62 \cdot x^2 + x$. Wir setzen die Geschwindigkeit $v = 17,1552$ ein und ermitteln die Nullstellen der Funktion. Ihr Abstand voneinander beträgt $181,6672\,\text{m}$.

6.) Für die Schussweite bestimmen wir die zweite Nullstelle von f in Abhängigkeit von v.

$$f_v(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot x + 1) \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot x + 1 = 0 \text{ oder } x = 0$$

Für den ersten Term gilt dann:

$$\frac{9,81}{v^2} \cdot x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v^2}{9,81}$$

was der gesuchten Schussweite entspricht. Für den Scheitelpunkt betrachten wir:

$$f_v'(x) = -\frac{2}{v^2} \cdot 9,81 \cdot x + 1 \text{ und } f_v''(x) = -\frac{2}{v^2} \cdot 9,81 < 0$$

Daraus ergibt sich für die Nullstelle der ersten Ableitung: $x_H = \frac{v^2}{2 \cdot 9,81}$. Da die zweite Ableitung immer negativ ist, liegt ein Maximum vor. Für die y-Koordinate des Hochpunktes setzen wir x_H in $f_v(x)$ ein:

$$f_v(x_H) = y_H = -\frac{1}{v^2} \cdot 9,81 \cdot (\frac{v^2}{2 \cdot 9,81})^2 + \frac{v^2}{2 \cdot 9,81} = -\frac{v^2}{4 \cdot 9,81} + \frac{v^2}{2 \cdot 9,81} = \frac{v^2}{4 \cdot 9,81}$$

Für die Koordinaten des Hochpunktes $H(x_H|y_H)$ gilt also:

$$H\left(\frac{v^2}{2 \cdot 9,81}\Big|\frac{v^2}{4 \cdot 9,81}\right)$$

7.) Ersetzen Sie in den Ergebnissen das v durch die jeweilige Geschwindigkeit und überprüfen Sie die Werte.

8.) Die zweite Koordinate des Hochpunktes muss 7 betragen:

$$\frac{v^2}{4 \cdot 9,81} \overset{!}{=} 7 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 7 \cdot 4 \cdot 9,81 = 274,68 \quad \Rightarrow \quad v_{1,2} = \pm\sqrt{274,68} \approx \pm 16,5735$$

Da wir nur positive Geschwindigkeiten zulassen, ist $v = 16,5735\,\text{m/s}$ die gesuchte Lösung.

Lösung 3.

1.) Die Streckung der Parabel verändert sich entgegen t, der Scheitelpunkt und der y-Achsenschnitt bleiben konstant.

2.) Streckung bleibt konstant, der Scheitelpunkt ändert sich (aber wie?).

3.) Streckung ist konstant, eine Nullstelle verschiebt sich, damit auch der Scheitelpunkt.

4.) Der Scheitelpunkt wandert senkrecht und die Streckung ändert sich, der y-Achsenabschnitt ist konstant.

Lösung 4.

1.) $m = f_a'(0) = a; \quad a = 1$

2.) $m = -2a; \quad a = -\frac{1}{2}$

3.) Achtung beim Ableiten: a^3 ist ein konstanter Faktor, der nicht verändert wird! $f_a'(x) = 3a^3x^2 - a$; $m = -a; \quad a = -1$

4.) $m = a^2; \quad a = \pm 1$

5.) $m = -2$; nicht möglich

6.) $m = a^2; \quad a = \pm 1$

Lösung 6.

1.) $x_1 = t;\ x_2 = -t;$
$A_t = |\int_{-t}^{t} f_t(x)dx| = |[\frac{1}{3}x^3 - t^2x]_{-t}^{t}| = |[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \cdot t] - [\frac{1}{3}(-t)^3 - t^2 \cdot (-t)]| = |-\frac{4}{3}t^3| = \frac{4}{3}t^3;$
$\frac{4}{3}t^3 \stackrel{!}{=} 8 \quad \Rightarrow \quad t^3 = 6 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{6} \approx 1,8171$

2.) $x_1 = 0;\ x_2 = 2t; \quad A_t = \frac{4}{3}t^3; \quad t = \sqrt[3]{6} \approx 1,8171$

3.) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{2}t^2; \quad A_t = \frac{1}{48}t^6; \quad t = \sqrt[6]{384} \approx 2,696$

4.) $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{t};\ x_3 = -\sqrt{t};$
$A_t = -\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f_t(x)dx = \frac{4}{15}t^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15}\sqrt{t^5};$
$t = \sqrt[5]{900} \approx 3,898$

5.) $x_1 = 0;\ x_2 = t; \quad A_t = \frac{1}{6}t^4; \quad t = \sqrt[4]{48} \approx 2,6321$

6.) $x_1 = 0;\ x_2 = 4t^2; \quad A_t = \frac{64}{3}t^8; \quad t = \sqrt[8]{\frac{3}{8}} \approx 0,88461$

Lösung 7.

Da in beiden Koordinaten der Parameter im Quadrat steht, braucht man die quadratische Gleichung nicht zu lösen und kann direkt v^2 einsetzen. Wir erhalten dann für die Ortskurve: $y = \frac{x}{2}$.

Lösung 8.

1.) $H(t|-t^2);\ y = -x^2$

2.) $T(1 - \frac{t}{2}|-\frac{t^2}{4} - t - 1);\ y = -x^2 + 4x - 4$

3.) $T(-\frac{4}{t}|-\frac{2}{t} + 2);\ y = \frac{x}{2} + 2$ (Tipp: nach $\frac{2}{t}$ umstellen, da man nicht durch x teilen darf!)

4.) $E_1(\frac{t}{\sqrt{3}}|-\frac{2t^3}{3\sqrt{3}}); E_2(-\frac{t}{\sqrt{3}}|\frac{2t^3}{3\sqrt{3}})$; Beide Extrema liegen auf der gleichen Ortskurve: $y = -2x^3$.

Lösung 9.

1.) $F_1(1|0);\ F_2(-3|0)$

2.) $F(2|4)$

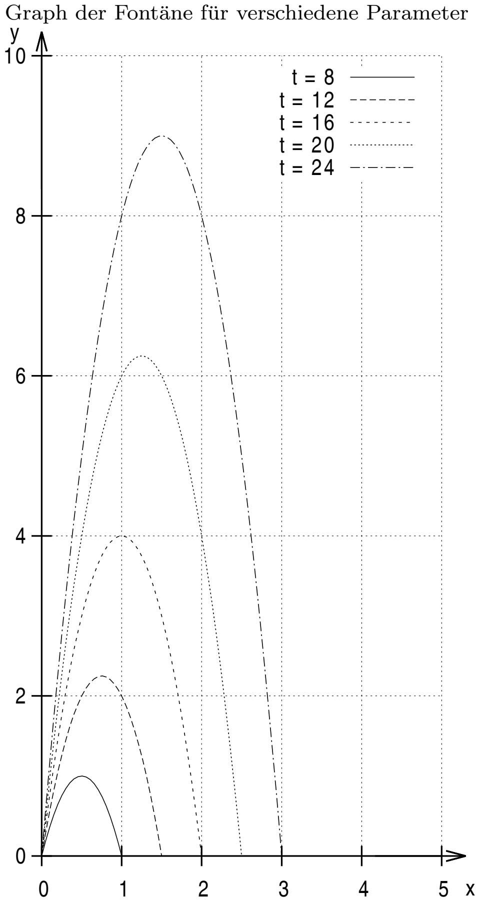
3.) $F_1(2|0);\ F_2(-2|0)$

4.) $F_1(0|4);\ F_2(1|5)$

5.) $F_1(-3|8);\ F_2(7|8)$

Lösung 10.

1.) Graph der Fontäne für verschiedene Parameter



3.) $t = 4$

4.) $t = 24$; $S(1,5|9)$

5.) $t = 16$; $2\,\mathrm{m}$

6.) $S(\frac{t}{16}|\frac{t^2}{64})$; $y_S = 4x^2$

7.) $F(0|0)$