

Das Gauß-Verfahren zum Lösen von Linearen Gleichungssystemen

Ein Kurs zum selbständigen Lernen.

Alexander Ruhri

`a.ruhri@widarschule.de`

Aktuelle Version unter <http://www.ruhri.net/>

Version 0.1, Februar 2017

Vorbemerkungen

Bitte beachten Sie beim Bearbeiten dieser Blätter, dass an geeigneten Stellen Zusammenfassungen mit der ganzen Klasse durchgeführt werden. Bitte machen Sie Ihren Lehrer darauf aufmerksam, wenn Sie das Bedürfnis nach einer solchen Besprechung haben.

Voraussetzungen

Um mit den Inhalten des Kurses zurechtzukommen ist es notwendig, dass Sie wissen, wie man lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten mittels Additionsverfahren löst. Außerdem sollten Sie Äquivalenzumformungen von Gleichungen beherrschen.

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Gleichungssysteme (LGS)	Seite 2
1.1	Eine kurze Wiederholung	Seite 2
1.2	Wir machen es ein wenig komplexer	Seite 2
1.3	Aufgaben	Seite 3
2	Lösungen der Aufgaben	Seite 4

1 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Bisher haben Sie gelernt, LGS mit zwei Unbekannten zu lösen. Sie haben dazu möglicherweise verschiedene Verfahren kennen gelernt:

- Einsetzverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Determinantenverfahren

Das Gauß-Verfahren ist eine Anwendung des *Additionsverfahrens*, mit der man auf sichere Weise LGS mit drei und mehr Variablen lösen kann.

1.1 Eine kurze Wiederholung

Aufgabe 1. Lösen Sie die folgenden LGS mit dem Additionsverfahren.

$$\begin{array}{lll}
 1.) \left| \begin{array}{rcl} 4x_1 + 3x_2 & = & -5 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{array} \right| & 3.) \left| \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 2 \\ 3x_1 - x_2 & = & 23 \end{array} \right| & 5.) \left| \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_2 & = & -2 \end{array} \right| \\
 2.) \left| \begin{array}{rcl} x_1 + 5x_2 & = & 7 \\ -x_1 + x_2 & = & -1 \end{array} \right| & 4.) \left| \begin{array}{rcl} -4x_1 + 2x_2 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 & = & -1 \end{array} \right| & 6.) \left| \begin{array}{rcl} 2x_1 + 7x_2 & = & 9 \\ x_1 & = & 4 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Welche dieser Aufgaben konnten Sie besonders leicht lösen? Woran lag das? Notieren Sie Ihre Überlegungen!

1.2 Wir machen es ein wenig komplexer

Aufgabe 2. Lösen Sie die folgenden LGS mit dem Additionsverfahren. Beschreiben Sie, welche Eigenschaft der LGS Ihnen das Lösen erleichtert.

$$\begin{array}{ll}
 1.) \left| \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ 3x_2 + x_3 & = & 9 \\ 5x_3 & = & 15 \end{array} \right| & 3.) \left| \begin{array}{rcl} -2x_1 + 2x_2 & = & -18 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ 2x_1 - x_2 & = & 13 \end{array} \right| \\
 2.) \left| \begin{array}{rcl} 7x_1 + 20x_2 - 2x_3 & = & -16 \\ -2x_1 & + & 2x_3 = 6 \\ 3x_1 & & = -6 \end{array} \right| & 4.) \left| \begin{array}{rcl} & 3x_2 & = 6 \\ x_1 + 4x_2 & + & 3x_4 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ & -x_2 & + x_4 = -4 \end{array} \right|
 \end{array}$$

Aufgabe 3. Wir lassen erst die erleichternde Eigenschaft weg und dann bricht in der zweiten Aufgabe auch noch Chaos aus. Versuchen Sie nun, die LGS zu lösen. Beschreiben Sie die nötigen Schritte. Sollten Sie hier scheitern, gehen Sie zum nächsten Abschnitt und versuchen Sie es mit dem neu erworbenen Wissen später nochmal.

$$\begin{array}{ll}
 1.) \left| \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -11 \end{array} \right| & 2.) \left| \begin{array}{rcl} -2x_3 + 2x_2 & = & 1 \quad -x_1 \\ 2x_1 - 3x_2 & = & 2 \quad -3x_3 \\ 3x_2 + 3x_3 & = & x_1 + 5 \end{array} \right|
 \end{array}$$

1.3 Aufgaben

Aufgabe 4. Bringen Sie die LGS in Stufenform und bestimmen Sie dann die Lösung.

$$1.) \left| \begin{array}{ccc} x_1 & +x_2 & = 5 \\ -4x_1 & +3x_2 & = -6 \end{array} \right|$$

$$4.) \left| \begin{array}{ccc} x_1 & -3x_2 & -2x_3 = 25 \\ -3x_1 & +7x_2 & = 0 \\ 5x_1 & +11x_2 & -2x_3 = 1 \end{array} \right|$$

$$2.) \left| \begin{array}{ccc} x_1 & +x_2 & -2x_3 = -5 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 = 1 \\ -3x_1 & -4x_2 & -x_3 = -2 \end{array} \right|$$

$$5.) \left| \begin{array}{ccc} 4x_1 & -3x_2 & -2x_3 = 1 \\ -8x_1 & +3x_2 & +4x_3 = -1 \\ x_1 & +6x_2 & +4x_3 = \frac{1}{4} \end{array} \right|$$

$$3.) \left| \begin{array}{ccc} x_1 & +4x_2 & -12x_3 = -15 \\ -7x_1 & +2x_2 & +9x_3 = 0 \\ -3x_1 & -14x_2 & -2x_3 = 9 \end{array} \right|$$

$$6.) \left| \begin{array}{cccc} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 = -1 \\ 3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & +2x_4 = -3 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 = 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 = -2 \end{array} \right|$$

Aufgabe 5. Die Quersumme einer 4-stelligen Zahl ist 17. Die Summe aus Zehner- und Einerziffer ist gleich der Tausenderziffer. Die Summe aus Hunderter- und Zehnerziffer ist gleich der Einerziffer. Die Summe der ersten beiden Ziffern ist um 3 größer als die Summe der beiden hinteren Ziffern. Bestimmen Sie die gesuchte Zahl.

Aufgabe 6. Ein Becken mit einem Fassungsvermögen von 1000l wird durch drei Pumpen befüllt. Pumpe 1 und Pumpe 2 benötigen für die Füllung zusammen 45 Minuten. Die dritte Pumpe füllt das Becken zusammen mit der ersten Pumpe in einer Stunde und 30 Minuten. Die dritte Pumpe arbeitet nur halb so schnell wie die zweite. Wie lange benötigt jede Pumpe alleine für die Füllung des Beckens? Wie viel Zeit vergeht, wenn man das Becken gleichzeitig mit allen drei Pumpen befüllt?¹

Aufgabe 7. In einem Stall sind Hühner, Schafe, Ziegen und Spinnen. Die Anzahl der Tiere beträgt 336. Die Anzahl der Beine ist 2502. Es gibt doppelt so viele Schafe wie Ziegen. Es gibt 60 Hufe, die den Boden berühren. Bestimmen Sie die jeweilige Anzahl der Tiere.

Aufgabe 8. Für die Zubereitung eines Multivitaminsaftgetränks werden Ananassaft, Pampelmusensaft und Mangosaft benötigt. Der Fruchtanteil des Ananassafts A betrage 40 %. Der Pampelmusensaft P enthält 30 % Fruchtanteil, der Mangosaft M 60 % Fruchtanteil. Durch die Mischung soll 1 Liter Fruchtsaft entstehen, dessen Fruchtanteil 50 % beträgt, wobei der Anteil an Pampelmusen- und Ananassaft gleich hoch sein sollen. Bestimmen Sie die Anteile von A, P und M bei einer möglichen Mischung.²

Aufgabe 9. Ein Weinhändler bietet vier Sortimente mit je zehn Flaschen und drei Sorten an: Sortiment Luxus besteht aus zwei Flaschen der Sorte A, drei Flaschen der Sorte B und fünf Flaschen der Sorte C. Es kostet 74,50 €. Sortiment Genießer besteht aus drei Flaschen der Sorte A, vier Flaschen von B und drei Flaschen von C. Es kostet 66,00 €. Sortiment Standard besteht aus drei Flaschen der Sorte A, fünf der Sorte B und zwei der Sorte C und kostet 62,50 €. Sortiment Einsteiger besteht aus fünf Flaschen der Sorte A, drei Flaschen von B und zwei Flaschen von C. Es kostet 59,50 €. Ermitteln Sie die Preise der einzelnen Flasche jeder Sorte.³

¹<http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/algebra/glsys/>

²http://lernportal.ziemke-koeln.de/mathematik/gk11/uebungen/algebra/aufg_lgs5.htm

³http://lernportal.ziemke-koeln.de/mathematik/gk11/uebungen/algebra/aufg_lgs5.htm

2 Lösungen der Aufgaben

Lösung 1.

- 1.) $(4; -7)$ 2.) $(2; 1)$ 3.) $(5; -8)$ 4.) $(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$ 5.) $(-4; -2)$ 6.) $(4; \frac{1}{7})$

Lösung 2.

- 1.) $(1; 2; 3)$ 2.) $(-2; 0; 1)$ 3.) $(4; -5; 3)$ 4.) $(1; 2; -1; -2)$

Lösung 3.

- 1.) $(5; 3; 3)$ 2.) $(1; 1; 1)$

Lösung 4.

- 1.) $(3; 2)$ 3.) $(1; -1; 1)$ 5.) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$
 2.) $(5; -4; 3)$ 4.) $(7; -3; \frac{1}{2})$ 6.) $(1; 2; 3; -4)$

Lösung 5.

Wir suchen die 4 Ziffern einer Zahl: x_1, x_2, x_3, x_4 . Aus den Bedingungen ergibt sich folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 17 \\ x_3 & +x_4 & & & = & x_1 \\ x_2 & +x_3 & & & = & x_4 \\ x_1 & +x_2 & & & = & x_3 + x_4 + 3 \end{array} \right|$$

Die gesuchte Zahl ist 7325.

Lösung 6.

Pumpe 1 ist kaputt, Pumpe 2 braucht 45 Minuten um das Becken zu füllen, Pumpe 3 braucht 90 Minuten. Alle drei Pumpen zusammen brauchen eine halbe Stunde.

Lösung 7.

Im Stall sind 21 Hühner, 10 Schafe, 5 Ziegen und 300 Spinnen (mit je 8 Beinen).

Lösung 8.

Die Mischung besteht aus 0,6l Mango, 0,2l Pampelmuse und 0,2l Ananas.

Lösung 9.

Die Weinflaschen der Sorte A kosten 4,50 €, Flaschen der Sorte B kosten 6,00 €, und für Sorte C sind stolze 9,50 € zu zahlen.