Ejercicio 7.1.11. *Calcular las primitivas de:*

$$\cos(x)\ \log(1+\cos(x)).$$

Solución. Nótese que la función no está bien definida en $\mathbb{R}$, de forma que tendremos que considerar las restricciones de la función a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $1+\cos(x)>0$, esto es, tales que $x\notin\pi+2\pi\mathbb{Z}=\{\pi+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$. Considerado esto, empleamos integración por partes,

$$u\equiv\log(1+\cos(x)),\quad \mathrm{d}u\equiv-\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}v\equiv\cos(x)\,\mathrm{d}x,\quad v\equiv\operatorname{sen}(x),$$

para concluir

$$\int\cos(x)\log(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x=\operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x))+\int\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

con lo que, empleando la identidad pitagórica:

$$=\operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x))+\int\frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

así como la resta de cuadrados $1-\cos^2(x)=(1-\cos(x))(1+\cos(x))$:

$$\begin{aligned}&=\operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x))+\int(1-\cos(x))\,\mathrm{d}x\\&=\operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x))+x-\operatorname{sen}(x)+C\end{aligned}$$

siendo C una constante real arbitraria, y simplificando:

$$=x+\operatorname{sen}(x)[\log(1+\cos(x))-1]+C,$$

lo que concluye el ejercicio. Obsérvese que la constante se podría elegir, para más generalidad, distinta en cada una de las componentes conexas del dominio, esto es, en cada intervalo de la forma $(\pi+2\pi k,\pi+2\pi(k+1))$, $k\in\mathbb{Z}$. $\square$

Ejercicio 7.1.13. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{\cos(2x)}{e^x}.$$

Solución. Empleamos integración por partes, con

$$u\equiv e^{-x},\quad \mathrm{d}u=-e^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}v\equiv\cos(2x)\,\mathrm{d}x,\quad v=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x),$$

de forma que

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos(2x)}{e^x}\,\mathrm{d}x&=\int\cos(2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

y nuevamente usando integración por partes,

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)e^{-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Observando que el último término es la integral de partida, deducimos que

$$\int \frac{\cos(2x)}{e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)}{5e^x}.$$

□

Ejercicio 7.2.a. *Calcular el siguiente límite mediante integrales definidas:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right) + \cos\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{nx}{n}\right)\right)$$

Solución. Dicho límite se corresponde con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}t,$$

en virtud de la definición de suma de Riemann, donde observamos que $t_k \equiv k/n$ representa un punto de cada intervalo correspondiente a la partición de $[0,1]$, consistente en intervalos de la misma longitud, $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, Así, si $x = 0$, el límite resulta trivialmente 1, mientras que si $x \neq 0$, el límite resulta

$$\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\operatorname{sen}(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{\operatorname{sen}(1\cdot x) - \operatorname{sen}(0\cdot x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo (¡ojo!, la variable muda de integración es t, de forma que x se interpreta como una constante a estos efectos). □

Ejercicio 7.2.b. *Calcular el siguiente límite mediante integrales definidas:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

Solución. Multiplicando y dividiendo por n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4},$$

como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo. Nótese que los puntos de la forma $t_k = k/n$ se corresponden con puntos de los intervalos de las particiones formadas por intervalos de la misma longitud $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, ..., n$. □

Ejercicio 7.3. *Sea* $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[0,a]$. *Comprobar que*

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x,$$

y calcular, para $n = 1$ *y* $n = 3$,

$$\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Solución. Consideremos equiparticiones de $[0, a]$, de forma que se tiene la simetría en la Figura 10, y ambas sumas inferiores y superiores coinciden. Así, ambas integrales, las cuales existen dado que $x \mapsto f(x)$ y $x \mapsto f(x-a)$ son continuas, han de ser iguales. Otra forma consiste en observar que, como consecuencia del Teorema del

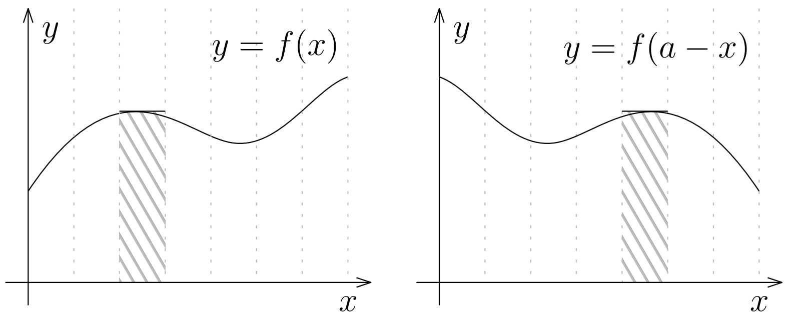

FIGURA 10. Representación gráfica de $y = f(x)$ e $y = f(a-x)$. Nótese que las áreas rayadas coinciden, de forma que necesariamente coincidirán las sumas inferiores y superiores.

Cambio de Variable, si $y \equiv a - x$, y tal y como justificamos la inversión de los límites de integración:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(a-y)(-\mathrm{d}y) = \int_0^a f(a-y)\,\mathrm{d}y.$$

como queríamos comprobar. Para calcular las integrales enunciadas, observamos que

$$I_n := \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,\mathrm{d}x$$

tras unas sencillas comprobaciones de que $\operatorname{sen}^n(\pi - x) = \operatorname{sen}^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ así como que $\cos^2(\pi - x) = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x)$,

$$= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

donde el último término es precisamente I_n, de manera que, despejando en la ecuación resultante, se obtiene la expresión más sencilla:

$$I_n = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Supuesto que $n = 1$, obtenemos

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos(x))\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Supuesto que $n = 3$, obtenemos

$$I_3 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)}\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$$

y usando el Teorema del cambio de variable con $y \equiv \cos(x)$, $\mathrm{d}y \equiv -\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{1+y^2} - 1\right)\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \left(2\arctan(y) - y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi(\pi-2)}{2},
\end{aligned}$$

lo cual concluye la solución del ejercicio. □