12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Encuentra una aplicación biyectiva explícita de $A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ en $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$.

Solución. Si se representa en un plano cartesiano, es sencillo comprobar que la recta que une los puntos $(a, 0)$ y $(b, 1)$ es un ejemplo de grafo de tal aplicación biyectiva, la cual viene dada por la expresión

$$f(t) = \frac{t-a}{b-a},$$

cualquiera que sea $t \in \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. $\square$

13. Proporciona un ejemplo de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f \neq g$ pero que verifiquen que $f \circ g = g \circ f$.

Solución. Basta considerar f y g dadas por $f(x) = x$ y $g(x) = -x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Claramente $f(1) = 1 \neq -1 = g(1)$, de forma que $f \neq g$ y, sin embargo, $(f \circ g)(x) = -x = (g \circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

14. Sean A y B dos conjuntos.

(1) Demuestra que si $f : A \to B$ es inyectiva y $E \subseteq A$, entonces se verifica la igualdad $f^{-1}(f(E)) = E$.
(2) Proporciona un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si la aplicación f no es inyectiva.
(3) Demuestra que si $f : A \to B$ es suprayectiva y $H \subseteq B$, entonces se verifica la igualdad $f(f^{-1}(H)) = H$.
(4) Proporciona un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si la aplicación f no es suprayectiva.

Solución. (1) ($\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(f(E))$, es decir, $x \in A$ es tal que $f(x) \in f(E)$, de forma que existe $y \in E$ tal que $f(x) = f(y)$. Por la inyectividad de f deducimos que $y = x$ y por tanto, $x = y \in E$, como queríamos probar.

($\supseteq$) Sea $x \in E$, de esta forma, $f(x) \in f(E)$ y por ende $x \in f^{-1}(f(E))$. Así, esta inclusión se cumple siempre, aunque f no sea inyectiva.

(2) Supongamos que $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ y $E = \{1\} \subseteq E$, y sea f la función constante dada por $f(a) = 1 \in B$ para todo $a \in A$. Entonces, $f(E) = \{1\} = B$ pero $f^{-1}(f(E)) = f^{-1}(B) = A \nsubseteq E$

(3) ($\subseteq$) Sea $y \in f(f^{-1}(H))$, lo que quiere decir que $y = f(x)$ para cierto $x \in f^{-1}(H)$, es decir, tal que $f(x) \in H$, pero éste es $y = f(x) \in H$, como queríamos probar. Esta inclusión se cumple siempre, aunque f no sea inyectiva.

($\supseteq$) Sea $y \in H$. Dado que f es suprayectiva existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, de modo que $x \in f^{-1}(H)$ y por ende $y = f(x) \in f(f^{-1}(H))$.

(4) Denotemos $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$, así como $H = \{2\}$, y definamos la función $f : A \to B$ como la dada por $f(1) = 1$. Con ello, $f^{-1}(H) = \emptyset$ y por ende $f(f^{-1}(H)) = \emptyset$, aunque $H = \{2\} \neq \emptyset$. $\square$

16. Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones biyectivas. Demuestra que $g \circ f$ es una aplicación biyectiva de A en C.

Solución. Para probar que $g \circ f : A \to C$ es biyectiva hay que probar que es inyectiva y suprayectiva.

Para la primera propiedad, supongamos que $x, y \in A$ son dos elementos distintos, y veamos que $(g \circ f)(x)$ y $(g \circ f)(y)$ son, en efecto, distintos. Dado que f es inyectiva, $x' = f(x)$ e $y' = f(y)$ son distintos, pero entonces, dado que g es también inyectiva, $(g \circ f)(x) = g(x')$ y $(g \circ f)(y) = g(y')$ son distintos, como queríamos probar.

Para comprobar que $g \circ f$ es suprayectiva, sea $z \in C$ un elemento cualquiera, y veamos que existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Dado que g es suprayectiva, existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$, y dado que f es suprayectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, pero entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, como queríamos demostrar. $\square$

17. Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Demuestra que si H es un subconjunto de C, se verifica la igualdad $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.

Solución. Sea $x \in (g \circ f)^{-1}(H)$, por definición $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in H$, de modo que $f(x) \in g^{-1}(H)$ o, equivalentemente, $x \in f^{-1}(g^{-1}(H))$, como queríamos demostrar. $\square$

20. Demuestra que $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + \cdots + 1/(n(n+1)) = n/(n+1)$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Lo demostraremos por inducción sobre n, de forma que el caso base consiste simplemente en comprobar que, para $n = 1$, se verifica la fórmula. Esto es claro ya que $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Supongamos ahora que se verifica la fórmula para cierto $n \in \mathbb{N}$, ésta es la conocida como hipótesis de inducción. Entonces, se verificará para $n + 1$, como comprobaremos ahora, y el principio de inducción matemática nos proporcionará la veracidad de la fórmula para todos los números naturales. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} &= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)((n+1)+1)} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+2},\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\square$