Ejercicio 6.30.b. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}.$$

Solución. En primer lugar, resulta sencillo obtener la fórmula de Taylor para el logaritmo entorno a 1, que resulta:

$$\log(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

de manera que, sustituyéndolo en el límite, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x+[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)]}{1-\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{1-\sqrt{2x-x^2}}\end{aligned}$$

racionalizamos la expresión y observando que $1-2x+x^2=(x-1)^2$:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{[-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)][1+\sqrt{2x-x^2}]}{(x-1)^2}$$

y dividiendo en ambos numerador y denominador por $(x-1)^2$:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to 1} \frac{[-\frac{1}{2}+\frac{o((x-1)^2)}{(x-1)^2}][1+\sqrt{2x-x^2}]}{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} \\ &= \lim_{x\to 1} \left(-\frac{1}{2}+\frac{o((x-1)^2)}{(x-1)^2}\right)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right) = -1.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.30.d. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{(x^2-\operatorname{sen}^2(x))^{1/2}}.$$

Solución. En virtud del Teorema de Taylor, resulta sencillo obtener que

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad \operatorname{sen}^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

de modo que, sustituyendo en el límite del enunciado,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{(x^2-\operatorname{sen}^2(x))^{1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-[x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)]}{(x^2-[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)])^{1/2}}$$

de manera que, tras simplificar,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{(\frac{1}{3}x^4+o(x^4))^{1/2}}$$

y dividiendo en ambos miembros por x^2,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2}}{\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)^{1/2}} = 0,$$

como queríamos concluir, dado que $o(x^3)/x^2 \to 0$ y $o(x^4)/x^4 \to 0$ cuando $x \to 0$. □

Ejercicio 6.31.a. *Estudiar el crecimiento, los extremos y la convexidad de la siguiente función, y dibujar su gráfica:*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Solución. En primer lugar observamos que el denominador se anula en $x = -1$, y la función está bien definida en el resto de puntos, de forma que el dominio es exactamente $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. No presenta simetrías par ni impar, claramente, y tampoco periodicidad. Además, es de clase C^∞ en dicho conjunto y sus primeras derivadas resultan

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \qquad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Con ello, los puntos críticos de la función son $x = 0$ y $x = -3$. Se comprueba de manera sencilla que $x = -3$ es un máximo, bien evaluando el signo de la derivada en un entorno del punto o el signo de la segunda derivada en $x = -3$. Además, $x = 0$ es un punto de inflexión. Por otra parte, resulta sencillo comprobar que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$$

de manera que presenta una asíntota vertical en $x = -1$ y, además, presenta una asíntota oblicua $y = ax + b$ en $\pm\infty$, con coeficientes

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = -2.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento resultan, en virtud de lo anterior, $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ y $(-3, -1)$, respectivamente, y la función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$, como se puede apreciar inmediatamente a partir de la expresión de la segunda derivada. Finalmente, la gráfica de la función resulta la presentada en la Figura 9. □

Ejercicio 7.1.1. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{(1+\sqrt{x})^3}{x^{1/3}}.$$

Solución. Desarrollamos el cubo en el numerador del integrando e integramos la expresión simplificada:

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x^{1/3}}\,dx &= \int \frac{1 + 3x^{1/2} + 3x^{2/2} + x^{3/2}}{x^{1/3}}\,dx \\ &= \int (x^{-1/3} + 3x^{1/6} + 3x^{2/3} + x^{7/6})\,dx \\ &= \frac{3}{2}x^{2/3} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{6}{13}x^{13/6} + C,\end{aligned}$$

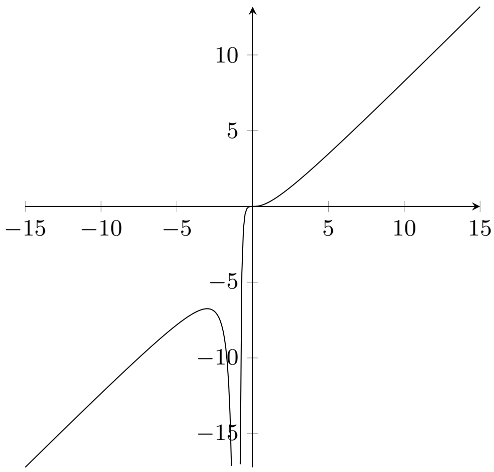

Figura 9. Representación gráfica de $y = f(x) = x^3/(x+1)^2$

siendo C cualquier constante real. Observamos que tanto la función original como las primitivas obtenidas están bien definidas en $(0, \infty)$ únicamente. $\square$