Representaciones decimales. Si $J_n = [a_n, b_n]$ es una sucesión de intervalos cerrados acotados y encajados no triviales (en el sentido de que la longitud de cada intervalo es $b_n - a_n > 0$) y las longitudes de los mismos satisfacen $\inf_n \{b_n - a_n\} = 0$, entonces

$$\text{existe un único } \xi \in \bigcap_n I_n$$

Es la Propiedad de Intervalos Encajados (Teoremas 2.5.2 y 2.5.3, Bartle y Sherbert) para la cual es esencial la propiedad del supremo de $\mathbb{R}$.

De aquí se siguen los resultados fundamentales sobre las representaciones decimales de un número, se puede probar lo siguiente:

- si $x \in [0,1]$, $\exists (a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \{0, ..., 9\}$ tal que $(a_1, \ldots, a_n)_{10} \leq x \leq (a_1, ..., a_n + 1)_{10}$ $\forall n$.
- Cada sucesión de decimales es la representación binaria de un único número real.
- Ojo, dos sucesiones de decimales distintas pueden representar el mismo número real por ejemplo, $1,0000...$ y $0,9999...$ representan el mismo número real, $= 1$.
- Los puntos de subdivisión (como 1, 1/10, 5/10) poseen representaciones decimales distintas.
- Los puntos que no son de subdivision (como 0, 1/3) solo poseen una representación decimal, única.

$\square$

119. Proporciona las dos representaciones binarias de 3/8 y de 7/16.

Solución. (1) La representación binaria finita es fácil:

$$\frac{3}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = (0{,}011)_2$$

sin embargo, es un punto de subdivisión binaria, y posee la representación:

$$\frac{3}{8} = (0{,}01011111\ldots)_2$$

En efecto,

$$\frac{1}{4} + \left(\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^4} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

$\square$

120. Proporciona los primeros cuatro dígitos de la representación binaria de 1/3. Proporciona la representación binaria completa de 1/3.

Solución. Se divide en binario y se obtiene que es 0,0101 y parece que el patrón se repite.
Conjeturamos que $1/3 = (0{,}010101010\ldots)_2$. Se demuestra fácilmente:

$$\frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

121. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tales que

$$\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \neq 0.$$

Demuestra que, si $a_n, b_m \neq 0$, entonces $m = n$ y $a_k = b_k$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Solución. Veamos que $m = n$.

Supongamos para ello por reducción al absurdo que $n < m$ (se razona igual si $n > m$),

de forma que multiplicando por 10^{m-1},

$$\underbrace{a_1 10^{m-2} + \cdots + a_n 10^{m-(n+1)}}_{=:p \in \mathbb{N} \quad m-2 \geq \cdots \geq m-(n+1) \geq 0} = \underbrace{b_1 10^{m-2} + \cdots + b_{m-1}}_{=:\, q \in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{b_m}{10}}_{\in [0,1)} \implies \mathbb{Z} \ni p - q = \frac{b_m}{10} \in [0,1),$$

lo cual es absurdo salvo si $b_m = 0$ (véase el Ejercicio 69)

Repitiendo este razonamiento hasta que $m = n + 1$ se deduce que $b_{n+1} = \cdots = b_m = 0$.

Con ello, tenemos que $m = n$. Veamos ahora que $a_k = b_k$ para $k = 1, ..., n$. Reescribiendo la anterior expresión:

$$c_j := a_j - b_j, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} = \frac{(a_1 - b_1)}{10} + \cdots + \frac{(a_n - b_n)}{10^n} = 0,$$

de forma que tenemos que probar que $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Multiplicando por 10^{n-1} obtenemos que

$$\underbrace{c_1 10^{n-2} + \cdots + c_{n-1}}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{c_n}{10}}_{\in [0,1)} = 0 \overset{\text{Ej. 69}}{\Longrightarrow} c_n = 0$$

y así sucesivamente, $c_{n-1} = 0$, ..., $c_1 = 0$. $\square$