CLASE #20: 4 DE ABRIL DE 2019

Ejercicio 7.4.a. *Calcular la siguiente integral definida:*

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución. Como consecuencia del Teorema del Cambio de Variable, empleando el cambio $x \equiv 2\sin(u)$, $\mathrm{d}x \equiv 2\cos(u)\,\mathrm{d}u$, se obtiene que

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{4-4\sin^2(u)}\,2\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

en virtud de la identidad pitagórica:

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{4\cos^2(u)}\,2\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

y dado que la función coseno es positiva en $[-\pi/3, \pi/3]$:

$$= 4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

empleando la identidad $\cos^2(\alpha) = (1+\cos(2\alpha))/2$:

$$= 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1+\cos(2u))\,\mathrm{d}u$$

donde una primitiva suya es $u + \sin(2u)/2$, con lo que como consecuencia del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$= 2u + \sin(2u)\,\Big|_{u=-\pi/3}^{u=+\pi/3} = \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3},$$

lo que concluye el apartado. □

Ejercicio 7.4.b. *Calcular la siguiente integral definida:*

$$\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

Solución. En virtud del Teorema del Cambio de Variable, empleando concretamente $x \equiv 2\sec(u)$, $\mathrm{d}x \equiv 2\tan(u)\sec(u)\,\mathrm{d}u$, de forma que

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{8}\sin^2(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

como consecuencia de la linealidad de la integral,

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

la cual resulta inmediata por el Teorema de Cambio de Variable:

$$= \frac{\sin^3(u)}{12} + C$$

donde C es una constante real cualquiera; deshaciendo el cambio anterior,

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3 + C$$

y empleando la identidad $\sin(\operatorname{arcsec}(\xi)) = \sqrt{1-\xi^{-2}}$,

$$= \frac{(x^2-4)^{3/2}}{12x^3} + C,$$

lo cual concluye el cálculo de la primitiva. Con ello,

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{(4^2-4)^{3/2}}{12\cdot 4^3} - \frac{(2^2-4)^{3/2}}{12\cdot 2^3} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

□

Ejercicio 7.4.d. *Calcular la siguiente integral definida:*

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución. Completamos cuadrados en el radicando, observando sencillamente que $2x - x^2 = -(x^2-2x) = -(x-1)^2+1$, de forma que podemos reescribir

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

y realizando el cambio de variable $x-1 \equiv \sin(u)$:

$$= \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u$$

de manera que, como consecuencia de la identidad pitagórica:

$$= \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{\cos^2(u)}\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

y simplificando, dado que $\cos(\,\cdot\,)$ es positiva en $[-\frac{\pi}{2}, 0]$:

$$= \int_{-\pi/2}^0 \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

que, empleando la identidad $\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1+\cos(2u))$, resulta:

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^0 (1+\cos(2u))\,\mathrm{d}u$$

y podemos concluir, en vitud del Teorema Fundamental del Cálculo, tras observar que $u + \frac{1}{2}\sin(2u)$ es una primitiva para el integrando, que:

$$= \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\bigg|_{u=-\pi/2}^{u=0} = \frac{\pi}{4}$$

□

Ejercicio 7.4.e. *Calcular la siguiente integral definida:*

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Solución. Empleamos la regla integración por partes con

$$u \equiv \log(1+x), \quad \mathrm{d}u \equiv \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v \equiv \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad v \equiv -\frac{1}{1+x},$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\log(1+x)}{1+x}\bigg|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\log(1+x)}{1+x}\bigg|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{(1+x)}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-\log(2)}{2}.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 7.5.a. *Probar que la siguiente función es derivable y hallar su derivada:*

$$F(x) = \int_a^{x^3} \sin^3(t)\,\mathrm{d}t$$

Solución. La función es una composición de funciones diferenciables,

$$G(y) = \int_a^y \sin^3(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \varphi(x) = x^3,$$

Empleando la Regla de la Cadena, deducimos que

$$F'(x) = (G\circ\varphi)'(x) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = 3x^2 G'(x^3)$$

donde, como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, se verifica que $G'(y) = \sin^3(y)$, y por consiguiente $F'(x) = 3x^2\sin^3(x^3)$. □

Ejercicio 7.5.b. *Probar que la siguiente función es derivable y hallar su derivada:*

$$F(x) = \int_a^b f(x+t)\,\mathrm{d}t,$$

siendo f una función continua.

Solución. Como consecuencia del Teorema de Cambio de Variable, en cuyas hipótesis estamos dado que $z \mapsto f(x+z)$ es una función continua, empleando $s = x+t$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo,

$$F(x)\int_{x+a}^{x+b} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_c^{x+b} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_c^{x+a} f(s)\,\mathrm{d}s$$

de forma que si denotamos

$$G(x) = \int_c^x f(y)\,\mathrm{d}y,$$

en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo G es derivable (y por ende F) y su derivada verifica $G'(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Como hemos observado, $F(x) = G(x+b) - G(x+a)$, con lo que

$$F'(x) = G'(x+b) - G'(x+a) = f(x+b) - f(x+a),$$

como queríamos concluir. □

Ejercicio 7.5.c. *Probar que la siguiente función es derivable y hallar su derivada:*

$$F(x) = \int_0^x x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

supuesto que f es una función continua.

Solución. Nótese que, cualquiera que sea $x > 0$, fijo, la integral está bien definida puesto que f es una función continua por hipótesis, y por ende la función $t \mapsto x\, f(t)$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$. Empleando la linealidad de la integral,

$$\int_0^x x f(t)\,\mathrm{d}t = x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(nótese que x no es la variable muda en la integral, sino t) de forma que, como consecuencia la Regla del Producto y el Primer Teorema Fundamental del Cálculo,

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x f(x),$$

como queríamos calcular. □

Ejercicio 7.5.d. *Probar que la siguiente función es derivable y hallar su derivada:*

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,\mathrm{d}t,$$

siendo h una función continua y f y g funciones derivables.

Solución. Nótese que

$$F(x) = \int_c^{g(x)} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{f(x)} h(t)\,\mathrm{d}t$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, siendo $c \in \mathbb{R}$ fijo, de modo que $F = G \circ g - G \circ f$, donde hemos denotado, de manera análoga a los apartados anteriores

$$G(x) = \int_c^x h(t)\,\mathrm{d}t.$$

En virtud del Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena:

$$F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x),$$

cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$. □

Ejercicio 7.6. *Demostrar que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua,*

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Solución. Definimos las funciones auxiliares

$$F_1(x) = \int_0^x f(u)(x-u)\,du = x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du,$$
$$F_2(x) = \int_0^x G(u)\,du \quad \text{con} \quad G(u) = \int_0^u f(t)\,dt.$$

Con esta notación, probar el enunciado se reduce a comprobar que $F_1 = F_2$ en $\mathbb{R}$. A partir del teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la cadena,

$$F_1'(x) = \int_0^x f(u)\,du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du,$$
$$F_2'(x) = G(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

las cuales son iguales, para todo número real x. Así, ambas funciones se han de diferenciar en una constante, esto es, $F_1 = F_2 + K$ para cierta constante real K. Sin embargo, como $F_1(0) = F_2(0) = 0$, ésta debe ser $K = 0$ y, por consiguiente, $F_1 = F_2$, como queríamos demostrar. $\square$