Ejercicio 6.25. *Probar que el error cometido al sustituir* $\operatorname{sen}(x)$ *por*

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$$

es menor que 10^{-4} *supuesto que* $|x| \leq \pi/4$.

Solución. Observemos en primer lugar que $x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$ es el polinomio de Taylor de orden 5 (o de orden 6) del seno entorno a 0. En virtud del Teorema de Taylor para el residuo (de Lagrange), sabemos que el error cometido al aproximar una función como es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, por su polinomio de Taylor de orden 6, que denotaremos $P_6(x)$, viene dado por el valor absoluto del residuo de Lagrange:

$$|f(x) - P_6(x)| = |R_6(x)| = \left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right|$$

para cierto θ interior al intervalo de extremos 0 y x. Como queremos demostrar que el error cometido en $[-\pi/4, \pi/4]$ resultará menor que 10^{-4}, hemos de encontrar una cota superior para la anterior expresión para todo x y para todo θ. Sin embargo, la dependencia de θ y x no es explícita, de modo que buscaremos sencillamente una cota uniforme cualquiera que sea θ y x en el intervalo citado, una cota posiblemente muy mejorable, aunque suficiente en el caso de nuestros ejemplos. Por ejemplo, dado que

$$f^{(6+1)}(t) = -\cos(t), \quad (6+1)! = 5040,$$

podemos mayorar el valor absoluto del residuo de Lagrange por

$$\left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right| \leq \frac{1}{5040} |f^{(7)}(\theta)||x^7| = \frac{1}{5040} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \leq 3{,}6576 \cdot 10^{-5} \leq 10^{-4},$$

como queríamos. □

Ejercicio 6.26. *Probar que el error cometido al sustituir* $\operatorname{sen}(e^x - 1)$ *por*

$$x + \frac{1}{2}x^2$$

es menor que $3 \cdot 10^{-3}$ *supuesto que* $|x| \leq 10^{-1}$.

Solución. Observamos nuevamente que $x + \frac{1}{2}x^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1)$, de forma que procedemos análogamente al ejercicio anterior. El error al aproximar f por su polinomio de Taylor es el residuo de Lagrange

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{6} |f'''(\theta)| \cdot 10^{-3}$$

para cierto θ entre 0 y x, donde,

$$f'''(\theta) = -e^\theta [3e^\theta \operatorname{sen}(e^\theta - 1) + (e^{2\theta} - 1)\cos(e^\theta - 1)]$$

y, empleando la desigualdad triangular,

$$|f'''(\theta)| \leq e^\theta [3e^\theta |\operatorname{sen}(e^\theta - 1)| + (e^{2\theta} + 1)|\cos(e^\theta - 1)]$$

Ahora bien, dado que $|\operatorname{sen}| \leq 1$, $|\cos| \leq 1$ en $\mathbb{R}$, y puesto que la exponencial es estrictamente creciente, $e^{1/10} \leq e^{3/10} \approx 1{,}35$ y

$$|f'''(\theta)| \leq e^{3/10}[3e^{3/10} + (e^{3/10} + 1)] \approx 8{,}64$$

de modo que podemos concluir que el error cometido está acotado superiormente por:

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|f'''(\theta)||x|^3 \leq \frac{e^{3/10)}(4e^{3/10} + 1)}{6} 10^{-3} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Esto concluye el ejercicio. $\square$

Ejercicio 6.29.a. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ es finito cuando*

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = 0.$$

Solución. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

mientras que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{2x} = \infty.$$

Así, la función seno es un infinitésimo de orden 1 cuando $x \to 0$. Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\operatorname{sen}(x) = x^{\mathbf{1}} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

$\square$

Ejercicio 6.29.b. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ es finito cuando*

$$f(x) = \log(1+x), \quad a = 0.$$

Solución. Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\log(1+x) = x^{\mathbf{1}} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$\square$

Ejercicio 6.29.c. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ es finito cuando*

$$f(x) = 1 - x + \log(x), \quad a = 1.$$

Solución. Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

también se tiene que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{2(x-1)} = -\lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

mientras que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\log(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1+\frac{1}{x}}{3(x-1)^2} = -\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3(x-1)x} = -\infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$1-x+\log(1+x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{\mathbf{2}} + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

$\square$

Ejercicio 6.30.a. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen}(ax) - 3ax - a^3x^3}{6bx - 6\operatorname{sen}(bx) + b^3x^3}$$

Solución. En virtud del Teorema de Taylor, se obtiene que

$$3\operatorname{sen}(ax) = 3ax - \frac{a^3x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{y} \quad 6\operatorname{sen}(bx) = 6bx - b^3x^3 + o(x^3),$$

de forma que, sustituyendo ambas expresiones en el límite del enunciado, deducimos que éste resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{[3ax - \frac{1}{2}a^3x^3 + o(x^3)] - 3ax - a^3x^3}{6bx - [6bx - b^3x^3 + o(x^3)] + b^3x^3}$$

y simplificando, éste es equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3x^3 + o(x^3)}{2b^3x^3 + o(x^3)}.$$

Dividiendo en ambos numerador y denominador por x^3 y observando que, por la definición de o de Landau, $o(x^3)/x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, concluimos que el anterior límite es, finalmente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2b^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

$\square$