31/1/2019

Veamos rigurosamente por qué da igual poner $<$ o $\leq$ en el Criterio ε-δ de Weierstraß, más en particular, por qué considerar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

definida por la proposición

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \qquad (P)$$

es equivalente a considerar la proposición

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0 \quad \exists \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}} > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon}), \qquad (Q)$$

es decir, por qué da igual escribir $0 < |x - x_0| < \delta$ que $0 < |x - x_0| \leq \delta$. El razonamiento que exponemos nos permite asegurar que ocurre de manera similar para $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Para ello, tenemos que ver que $(P) \implies (Q)$ así como que $(Q) \implies (P)$

La implicación $(Q) \implies (P)$ es clara, simplemente consiste en darse cuenta de que escribir «$<$» es, a fortiori, «$\leq$»,

$\forall \varepsilon > 0$ tomamos $\hat{\varepsilon} := \varepsilon$

$\exists \delta_\varepsilon := \hat{\delta}_\varepsilon > 0$

$\forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \subset [x_0 - \hat{\delta}_\varepsilon, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\}$ y así se verifica (Q)

$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

y para demostrar $(P) \implies (Q)$ tenemos que ajustar δ:

$\forall \hat{\varepsilon} > 0$ tomamos $\varepsilon := \hat{\varepsilon}$

$\exists \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}} := \frac{1}{2}\delta_\varepsilon > 0$

$\forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\} \subset (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$ y así se verifica (P)

$f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon})$