

¿Por qué da igual poner $<$ o \leq en el Criterio ε - δ de Weierstrass?

Veamos rigurosamente por qué, al considerar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

la proposición

$$(P) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

es equivalente a la proposición

$$(Q) \quad \forall \hat{\varepsilon} > 0 \quad \exists \hat{\delta}_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_\varepsilon, x_0 + \hat{\delta}_\varepsilon] \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon}),$$

es decir, por qué da igual escribir $0 < |x - x_0| < \delta$ que $0 < |x - x_0| \leq \delta$. El razonamiento que exponemos nos permite asegurar que ocurre de manera similar para $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Para ello, tenemos que ver que $(P) \implies (Q)$ así como que $(Q) \implies (P)$

La implicación $(Q) \implies (P)$ es clara, simplemente consiste en darse cuenta de que escribir « $<$ » es, a fortiori, « \leq »,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{tomamos } \hat{\varepsilon} := \varepsilon$$

$$\exists \delta_\varepsilon := \hat{\delta}_\varepsilon > 0$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \subset [x_0 - \hat{\delta}_\varepsilon, x_0 + \hat{\delta}_\varepsilon] \setminus \{x_0\} \quad \text{y así se verifica } (Q) \\ f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

y para demostrar $(P) \implies (Q)$ tenemos que ajustar δ :

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0 \quad \text{tomamos } \varepsilon := \hat{\varepsilon}$$

$$\exists \hat{\delta}_\varepsilon := \frac{1}{2}\delta_\varepsilon > 0$$

$$\forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_\varepsilon, x_0 + \hat{\delta}_\varepsilon] \setminus \{x_0\} \subset (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad \text{y así se verifica } (P) \\ f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon})$$