CONTROL DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

27 DE NOVIEMBRE DE 2019. GRUPO M5

Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales cualesquiera y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión *estrictamente creciente* y *divergente* de números reales *positivos*, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L, \tag{1}$$

es decir, el límite existe y lo denotamos por $L \in \mathbb{R}$. Demuestra el conocido como Teorema de Stolz-Cesàro, que afirma que, en tales hipótesis,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = L. \tag{2}$$

No se trata de una demostración «excesivamente sencilla», así que seguiremos unos pasos. Si te atascas en alguno, puedes intentar los siguientes, suponiendo probados los que no te hayan salido.

Paso 1. (1.5 puntos) Demuestra que si $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones convergentes de números reales tales que $\lim c_n = \lim d_n = 0$, entonces para todo $\eta > 0$ existe $M(\eta) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq M(\eta)$, se verifica que

$$-\frac{\eta}{2} \leq c_n \leq \frac{\eta}{2} \qquad \text{y} \qquad -\frac{\eta}{2} \leq d_n \leq \frac{\eta}{2}.$$

Demostración.

$$c_n \to 0 \text{ significa } \forall \eta > 0 \quad \exists N_1(\eta) \quad \forall n \geq N_1(\eta) \quad |c_n| \leq \eta \iff -\eta \leq c_n \leq \eta$$

$$d_n \to 0 \text{ significa } \forall \eta > 0 \quad \exists N_2(\eta) \quad \forall n \geq N_2(\eta) \quad |d_n| \leq \eta \iff -\eta \leq d_n \leq \eta$$

Tomando $M(\eta) := \max\{N_1(\eta/2), N_2(\eta/2)\}$ se sigue el enunciado. □

Paso 2. (1 punto) Escribe la definición rigurosa de la ecuación (1) y deduce que:

> *para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N(\varepsilon)$,*
>
> $$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) \leq a_{n+1} - a_n \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n). \tag{3}$$

Demostración.

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L \text{ implica } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad -\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - L \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Sumando L y multiplicando por $b_{n+1} - b_n > 0$ (b_n es estrictamente creciente por hipótesis), obtenemos el resultado. □

Paso 3. (1.5 puntos) Dado $k > N(\varepsilon)$, suma las expresiones en la ecuación (3) para $n = N(\varepsilon), ..., k-1$ para deducir que:

> *para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > N(\varepsilon)$*
>
> $$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_k - b_{N(\varepsilon)}) \leq a_k - a_{N(\varepsilon)} \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_k - b_{N(\varepsilon)}). \tag{4}$$

Demostración. Reescribamos (3) para $n = N(\varepsilon)$:

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+1} - b_{N(\varepsilon)}) \leq a_{N(\varepsilon)+1} - a_{N(\varepsilon)} \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+1} - b_{N(\varepsilon)}).$$

ahora para $n = N(\varepsilon) + 1$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+2} - b_{N(\varepsilon)+1}) \leq a_{N(\varepsilon)+2} - a_{N(\varepsilon)+1} \leq \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+2} - b_{N(\varepsilon)+1}).$$

Si sumamos ambas los términos $b_{N(\varepsilon)+1}$ y $a_{N(\varepsilon)+1}$ se cancelan:

$$\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+2}-b_{N(\varepsilon)}) \leq a_{N(\varepsilon)+2}-a_{N(\varepsilon)} \leq \left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N(\varepsilon)+2}-b_{N(\varepsilon)}).$$

Esto vale para cualquier $k > N(\varepsilon)$, no solo $k = N(\varepsilon)+1$ o $k = N(\varepsilon)+2$, pues las sumas son telescópicas. $\square$

Paso 4. (1 punto) Reescribe la ecuación (4) para deducir que:

> *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $k > N(\varepsilon)$,
>
> $$L-\frac{\varepsilon}{2}+\left[\frac{a_{N(\varepsilon)}}{b_k}-\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N(\varepsilon)}}{b_k}\right] \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L+\frac{\varepsilon}{2}+\left[\frac{a_{N(\varepsilon)}}{b_k}-\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N(\varepsilon)}}{b_k}\right]. \quad (5)$$

Demostración. Si se parte de (4), la expresión (5) simplemente se obtiene de sumar $a_{N(\varepsilon)}$ y dividir por b_k (que por hipótesis es positivo), y reordenar la expresión. $\square$

Paso 5. (3 puntos) Emplea el Paso 1 con c_k y d_k ciertas sucesiones para de deducir a partir de la ecuación (5) que:

> *para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $K(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$ *tal que para todo* $k > K(\varepsilon)$,
>
> $$L-\varepsilon \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L+\varepsilon.$$

¡Ojo! las sucesiones c_k y d_k dependerán de ε, pero no afecta al razonamiento, ¿por qué?

Concluye que, en tal caso, se tiene el límite en la ecuación (2).

Demostración. Esta es la parte más difícil. Reescribimos (5) en la forma

$$L-\frac{\varepsilon}{2}+c_k^{[\varepsilon]} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L+\frac{\varepsilon}{2}+d_k^{[\varepsilon]} \quad \forall k > N(\varepsilon).$$

donde

$$c_k^{[\varepsilon]} = \left[\frac{a_{N(\varepsilon)}}{b_k}-\left(L-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N(\varepsilon)}}{b_k}\right], \quad d_k^{[\varepsilon]} = \left[\frac{a_{N(\varepsilon)}}{b_k}-\left(L+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{b_{N(\varepsilon)}}{b_k}\right]$$

Aplicamos el paso 1 a $c_k^{[\varepsilon]}$ y $d_k^{[\varepsilon]}$, que ambas convergen a cero porque $b_k \to +\infty$. De esta forma,

$$\forall \eta > 0 \quad \exists M^{[\varepsilon]}(\eta) \quad \forall n \geq M^{[\varepsilon]}(\eta), \quad -\frac{\eta}{2} \leq c_n^{[\varepsilon]} \quad \& \quad d_n^{[\varepsilon]} \leq \frac{\eta}{2}$$

Tomemos $\eta := \varepsilon$, entonces,

$$\exists K(\varepsilon) := \max\{N(\varepsilon), M^{[\varepsilon]}(\varepsilon)\} \quad \forall k > K(\varepsilon)$$

$$L-\varepsilon = L-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2} \leq L-\frac{\varepsilon}{2}+c_k^{[\varepsilon]} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L+\frac{\varepsilon}{2}+d_k^{[\varepsilon]} \leq L+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = L+\varepsilon,$$

lo cual significa que $a_k/b_k \to L$. $\square$

Aplicaciones. (2 puntos) Emplea el Criterio de Stolz-Cesàro para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Demostración. Denotemos $a_n = 1^2+\cdots+n^2$ y $b_n = b^3$. Se cumplen las hipótesis. Evaluamos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+1-n^3} = \frac{1}{3},$$

con lo que el límite original vale 1/3. $\square$