154. Discute la convergencia de las siguientes sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $0 < a < 1$ y $b > 1$, si

(1) $x_n = n^2 a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = b^n/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = b^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = n!/n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (1) Empleamos el teorema de unos ejercicios atrás:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^2 a^{n+1}}{n^2 a^n} = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to a < 1 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”}.$$

(2) Empleamos el ejercicio 153:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{n+1}/(n+1)^2}{b^n/n^2} = b\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to b > 1 \implies x_n \text{ no converge.}$$

(3) Empleamos el teorema de unos ejercicios atrás:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{n+1}/(n+1)!}{b^n/n!} = \frac{b}{n+1} \to 0 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”}$$

(4) Empleamos el teorema de unos ejercicios atrás:

$$\frac{(n+1)!/(n+1)^{(n+1)}}{n!/n^n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!(n+1)\,(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+1/n)^n} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2} < 1 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”},$$

donde el paso $(*)$ se deduce de la identidad de Bernoulli:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\boldsymbol{n}} \geq 1 + \boldsymbol{n} \cdot \frac{1}{n} = 1 + 1 = 2.$$

□

155. Sea $L \in \mathbb{R}$, $L < 1$, y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{1/n} = L$. Demuestra que existe $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ tal que $0 < x_n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Emplea este resultado para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Solución. Sea $r \in (L, 1)$ cualquiera.

Tenemos que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n^{1/n} - L| \leq \varepsilon$

Deducimos para $\varepsilon = r - L$ que $\forall n \geq N^* := N_{r-L} \quad L - \varepsilon \leq x_n^{1/n} \leq L + \varepsilon = L + (r - L) = r$.

Reescrito, $\forall n \geq N^* \quad 0 \leq x_n^{1/n} \leq r \quad \iff 0 \leq x_n \leq r^n$ por el Ej. 71.

Sabemos que $r^n \to 0$, luego por la Regla del Sandwich, $x_n \to 0$. □

156. (1) Proporciona un ejemplo de sucesión convergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números positivos con $x_n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. (2) Proporciona un ejemplo de sucesión divergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $x_n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Solución. (1) $x_n := 1$ constante; (2) $x_n = n$, suponemos sabido que $n^{1/n} \to 1$. □

Qué deducimos? Que no hay información sobre la convergencia de x_n sin más que mirar $x_n^{1/n}$. □

157. Supongamos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de números reales convergente y que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_\varepsilon$. ¿Se infiere de ello que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente?

Solución. Tenemos:

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - L| \leq \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon \quad \forall n \geq M_\varepsilon, \quad |x_n - y_n| \leq \varepsilon$

Con la mente en la acotación $|y_n - L| = |y_n - x_n + x_n - L| \leq |y_n - x_n| + |x_n - L|$, concluimos:

$$\forall \varepsilon, \quad \exists K_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon/2}, M_{\varepsilon/2}\}, \quad \forall n \geq K_\varepsilon, \quad |y_n - L| \overset{\text{triang.}}{\leq} |y_n - x_n| + |x_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

158. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones convergentes, entonces $\{\max\{x_n, y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\min\{x_n, y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ también son convergentes.

Solución. Es consecuencia inmediata del Ejercicio 89, por el que

$$\max\{x_n, y_n\} = \frac{x_n + y_n + |x_n - y_n|}{2},$$

y se tiene una igualdad análoga para el mínimo. $\square$

159. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones convergentes, entonces la sucesión $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ siendo w_n el número «de en medio» entre x_n, y_n y z_n también es convergente.

Solución. Es consecuencia inmediata del Ejercicio 158 y el Ejercicio 159. $\square$