28/3/2019

Sea $\mathcal{R}$ una función racional con dos variables, las integrales de la forma

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))\, \mathrm{d}\theta$$

se racionalizan con el cambio de variable $t = \tan(\theta/2)$. Conocidas las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}, \quad \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}, \quad \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)},$$

(¡las cuales tienen interés propio a la hora de integrar!), se deduce sencillamente que

$$1+t^2 = \frac{2}{1+\cos\theta}, \quad t = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

y de éstas que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

es decir, *¡ambas funciones seno y coseno, así como el término asociado a la diferencial, son ahora funciones racionales!* de forma que, presumiblemente, la nueva integral será fácilmente resoluble pues adopta la forma:

$$\int \mathcal{R}(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))\, \mathrm{d}\theta = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

que será la de una integral de función racional, y que podemos resolver mediante su descomposición en fracciones parciales o mediante el método de Hermite.