Ejercicio 7.1.2. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solución. Esta integral resulta inmediata empleando el Teorema del Cambio de Variable, pues considerando

$$u \equiv \operatorname{arc\,sen}(x), \quad \mathrm{d}u \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

deducimos que:

$$\int \frac{(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x)^3 + C.$$

siendo C cualquier constante real. Nótese que la función sólo está definida en $(-1,1)$, mientras que las funciones $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x)^3 + C$ están definidas en $\mathbb{R}$. Así, dichas funciones son primitivas de la función del enunciado únicamente restringidas al intervalo $(-1,1)$. $\square$

Ejercicio 7.1.3. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Solución. Completamos cuadrados para $x - x^2$ escribiendo

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

de forma que la integral resulta, tras operar estratégicamente el denominador y realizar el cambio de variable $y \equiv 2x-1$, $\mathrm{d}y \equiv 2\,\mathrm{d}x$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

$$= \operatorname{arc\,sen}(y) + C = \operatorname{arc\,sen}(2x-1) + C,$$

donde C es una constante real cualquiera. Observamos que, aunque esta función está bien definida en $\mathbb{R}$, es sólo primitiva de la función del enunciado cuando esta última está bien definida, esto es, en $(0,1)$ únicamente. $\square$

Ejercicio 7.1.4. *Calcular las primitivas de:*

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}(x).$$

Solución. Dada la linealidad de la integral indefinida,

$$\int [4\cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x - 3\int \cos(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde el primer término se puede simplicar empleando la conocida identidad pitagórica $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, y observando que $\int \phi^n\phi' = \phi^{n+1}/(n+1)$, $n \neq -1$, deducimos que:

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int \cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C\end{aligned}$$

y el segundo término se calcula de manera análoga:

$$\int \cos(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) + C$$

Con todo ello, la primitiva de la función del enunciado resulta

$$4\operatorname{sen}(x) - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2(x) + C$$

donde C es una constante real arbitraria, lo que concluye el ejercicio. □

Ejercicio 7.1.9. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}.$$

Solución. En primer lugar, observemos que

$$\operatorname{sen}(x)+\cos(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\pi/4),$$

con lo que, tras el cambio de variable $y \equiv x+\pi/4$, $\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}x$, la integral resulta, tras multiplicar y dividir por $\operatorname{sen}(x)$ y emplear la identidad pitagórica:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\operatorname{sen}(y)}{1-\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

y en virtud del cambio de variable $u \equiv \cos(y)$, $\mathrm{d}u \equiv -\operatorname{sen}(y)\,\mathrm{d}y$,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

para lo cual empleamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u},$$

de donde se obtiene, imponiendo la anterior igualdad que $A = B = 1/2$, con lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} + C\end{aligned}$$

También se puede resolver fácilmente empleando el cambio $t \equiv \tan(y/2)$. □