APÉNDICE: 4 DE ABRIL DE 2019

Ejercicio 7.7. *Demostrar que*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$

para cada $n \geq 2$. *Probar que para cada* $n \geq 1$ *se tiene*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Solución. Empleamos la identidad pitagórica para obtener que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$$

como consecuencia de la linealidad de la integral:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

empleando estratégicamente la regla de integración por partes, considerando $u \equiv \cos(x)$, $\mathrm{d}v \equiv \sin^{n-2}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, para obtener que:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

donde el segundo término es nulo. Tras simplificar, observando que la última integral es la original, deducimos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$

como queríamos probar. Esta fórmula es válida siempre que $n \geq 2$. Se demuestra por inducción que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \cdots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

Análogamente, se demuestra por inducción:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\end{aligned}$$

como queríamos concluir. □