13/3/2019

Ejercicio 6.22. *Escribir $x^4+x^3-3x^2+4x-4$ como una suma de potencias de $x-1$. Escribir $x^4-11x^3+43x^2-60x+14$ como una suma de potencias de $x-3$.*

Solución. Escrito el polinomio del enunciado en la forma:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = \sum_{k=0}^{4} a_k (x-1)^k,$$

podemos determinar los coeficientes $a_0, ..., a_4 \in \mathbb{R}$ derivando sucesivas veces y evaluando en 1, de forma que

$$a_0 = P(1) = -1, \quad a_1 = \frac{P'(1)}{1!} = 5, \qquad a_2 = \frac{P''(1)}{2!} = 6,$$

$$a_3 = \frac{P'''(1)}{3!} = 5, \quad a_4 = \frac{P^{(\mathrm{iv})}(1)}{4!} = 1, \quad a_n = 0$$

para todo $n \geq 5$, tras operar y simplificar. El otro polinomio se escribe como suma de potencias de $x-3$ de manera análoga. También se pueden usar resultados como el Teorema de Taylor para obtener dicha expresión. □

Ejercicio 6.23.a. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función*

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Solución. Dado que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m),$$

deducimos que la fórmula de MacLaurin de orden $2m$ es

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2m}}{m!} + o(x^{2m}),$$

o bien, que la fórmula de orden n es

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^n)$$

□

¡Ojo! aunque en el anterior ejercicio solo nos piden la fórmula de Taylor y no el polinomio de la función enunciada, podemos deducir, por la unicidad del polinomio de Taylor, que, en efecto, $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k}}{k!}$ es el polinomio de Taylor de orden n.

Ejercicio 6.23.b. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función*

$$f(x) = (1 + e^x)^2.$$

Solución. Hallamos las derivadas sucesivas de f,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+e^x)^2 \\ f'(x) &= 2(1+e^x)e^x \\ f''(x) &= 2e^x(1+2e^x) \\ f'''(x) &= 2e^x(1+4e^x). \end{aligned}$$

Podemos demostrar por inducción en el número de derivadas que

$$f^{(n)}(x) = 2e^x(1 + 2^{n-1}e^x)$$

para todo $n \geq 1$, y por ende

$$f^{(n)}(0) = 2(1 + 2^{n-1}) = 2 + 2^n.$$

En efecto, el caso base ya lo hemos considerado, de forma que supongamos la fórmula anterior cierta, como hipótesis de inducción, de donde deducimos

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[2e^x(1 + 2^{n-1}e^x)] \\ &= 2e^x(1 + 2^{n-1}e^x) + 2e^x 2^{n-1}e^x = 2e^x(1 + 2^{n-1} + 2^{n-1}e^x) = 2e^x(1 + 2^n e^x), \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Ejercicio 6.24.a. *Escribir la fórmula de Taylor de orden n de $f(x) = (2-x)^{-1}$ en potencias de $x - 1$.*

Solución. Resulta sencillo comprobar y demostrar por inducción que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(2-x)^{k+1}}$$

para todo $x \neq 2$ y todo entero $k \geq 0$, de forma que $f^{(k)}(1) = k!$ y por tanto la fórmula de Taylor de orden n resulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n) = \sum_{k=0}^{n}(x-1)^k. + o((x-1)^n)$$

$\square$

Ejercicio 6.24.b. *Escribir la fórmula de Taylor de orden n de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)$ en potencias de $x - \pi$.*

Solución. Resulta sencillo comprobar y demostrar por inducción que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{3x}{2}\right)^k \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 0 \mod 4, \\ \left(\frac{3x}{2}\right)^k \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 1 \mod 4, \\ -\left(\frac{3x}{2}\right)^k \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 2 \mod 4, \\ -\left(\frac{3x}{2}\right)^k \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 3 \mod 4, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo entero $k \geq 0$, de forma que $f^{(k)}(\pi) = 0$ si k es impar y $f^{(k)}(\pi) = (-1)^{k/2+1}(3\pi/2)^k$ si k es par, y la fórmula de Taylor de orden n resulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k+1} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(2k)!}(x-\pi)^{2k} + o((x-1)^n)$$

$\square$