58. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$;

(2) si $0 < a < b$ y $0 \leq c \leq d$, entonces $0 \leq ac \leq bd$.

Solución. (1) Basta observar

$$\left.\begin{array}{l} a < b \overset{\text{def.}}{\iff} b - a \in \mathbb{P} \\ c < d \overset{\text{def.}}{\iff} d - c \in \mathbb{P} \end{array}\right\} \implies (b-a) + (d-c) = (b+d) - (a+c) \in \mathbb{P} \overset{\text{def.}}{\iff} a + c < b + d,$$

donde hemos usado que $\alpha, \beta \in \mathbb{P} \implies \alpha + \beta \in \mathbb{P}$ (1er.ax.).

(2) Se prueba de manera análoga pero usando el 2do.ax. $\square$

59. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ y $1/(1/a) = a$;

(2) si $a < b$, entonces $a < (a+b)/2 < b$.

Solución. (1.i) Si $a > 0$, entonces $a \neq 0$ por la Tricotomía, luego $1/a$ existe.

Si $1/a = 0$, entonces $1 = a \cdot (1/a) = a \cdot 0 = 0$, contradicción.

Si $1/a < 0$, entonces $1 = a \cdot (1/a) < 0$, contradicción.

Por ello, necesariamente $1/a > 0$.

(1.ii) Denotemos $\xi := 1/(1/a)$, de forma que $\xi \cdot (1/a) = 1$ por definición de inverso de $1/a$. Entonces:

$$\xi = \xi \cdot 1 = \xi \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) = \left(\xi \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot a = 1 \cdot a = a.$$

(2) Supongamos que $b - a \in \mathbb{P}$. Entonces:

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} = (b-a) \cdot \frac{1}{2} \in \mathbb{P}$$

donde hemos usado (1.i), que $\frac{1}{2} > 0$ pues $2 > 0$. $\square$

60. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y $c < d < 0$. Proporciona un ejemplo en el que $ac < bd$ y uno en el que $bd < ac$.

Solución. (1) $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, $d = -1$, entonces $ac = -3 < -2 = bd$.

(2) $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$ y $d = -1/2$, entonces $bd = -3/2 < -1 = ac$. $\square$

61. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que $a^2 + b^2 = 0$ si y solo si $a = b = 0$.

Solución. ($\Rightarrow$) Cualesquiera que sean $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que $a^2, b^2 \geq 0$ (2do.ax.).

Si $a^2 = b^2 = 0$ necesariamente $a = b = 0$, y ya estaría.

Supongamos por reducción al absurdo que $a^2 > 0$, de forma que $1/a^2 > 0$ por el Ej. 59.

Dado que $a^2 + b^2 = 0$ por hipótesis, multiplicando por $1/a^2$ obtendríamos que $1 + b^2/a^2 = 0$,

es decir, $(b/a)^2 = -1 < 0$, lo cual es absurdo.

Por ende $a^2 = 0$.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, es claro que si $a = b = 0$, $a^2 = b^2 = 0$ y necesariamente $a^2 + b^2 = 0$, y esto concluye la demostración. $\square$

62. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$. Demuestra que $a^2 \leq ab < b^2$. Proporciona un ejemplo que muestre que no se sigue que $a^2 < ab < b^2$.

Solución. De la desigualdad $a < b$ deducimos que $a^2 \leq ab$, tras multiplicar por $a \geq 0$.

De la misma desigualdad, $a < b$, deducimos que $ab < b^2$, tras multiplicar por $b > 0$.

Combinando ambas desigualdades, $a^2 \leq ab < b^2$.

Basta considerar $a = 0$, $b = 1$, de forma que $a^2 = 0 \not< ab = 0$. $\square$

63. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$. Prueba que $a < \sqrt{ab} < b$ y $1/b < 1/a$.

Solución. Supongamos que $a, b, b - a \in \mathbb{P}$.

(1) Dado que $a, b > 0$, la existencia de raíces nos decía que $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 0$.

Por el Ej. 62 aplicado a $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$, deducimos $(\ a = \ )\ \sqrt{a^2} < \sqrt{a}\sqrt{b}\ (\ = \sqrt{ab}\ )\ < b^2\ (\ = b\ )$.

(2) $a, b \in \mathbb{P} \implies ab \in \mathbb{P} \overset{\text{Ej.59}}{\implies} 1/ab \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax.}}{\implies} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = (b - a)\frac{1}{ab} \in \mathbb{P}$. $\square$

64. Determina todos los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades:

(1) $x^2 > 3x + 4$;

(2) $1 < x^2 < 4$;

(3) $1/x < x$;

(4) $1/x < x^2$.

Solución. (1) Es equivalente a $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) > 0$. Esto solo es posible si $(x + 1), (x - 4) > 0$, es decir, $x > -1 \wedge x > 4$, esto es, $x > 4$; o bien si $(x + 1), (x - 4) < 0$, es decir, $x < -1 \wedge x < 4$, esto es, $x < -1$.

(2) $1 < x^2$ si y solo si $x < -1 \vee x > 1$; mientras que $x^2 < 4$ si y solo si $-2 < x \vee x < 2$. La solución es entonces $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

(3) $1/x < x$ (implícitamente $x \neq 0$).

Supongamos que $\underline{x > 0}$, entonces equivale a $1 < x^2$ y por ende $x \in (1, \infty)$

Supongamos ahora que $\underline{x < 0}$, entonces equivale a $1 > x^2$ (por el signo de x), y por ende $x \in (-1, 0)$. $\square$

65. Sea $a \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para todo número real $\varepsilon > 0$. Demuestra que $a = 0$ necesariamente.

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que $a > 0$ (el caso en el que $a < 0$ contradice directamente que $0 \leq a \leq 1$, por ejemplo).

Entonces, para la elección $\varepsilon_0 = a/2 > 0$ se verifica que $0 \leq \varepsilon_0 \leq a$, lo cual es absurdo, contradice que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. $\square$

66. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a \leq b + \varepsilon$. Demuestra que $a \leq b$ necesariamente.

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que $a > b$, de forma que $a - b > 0$

y para la elección $\varepsilon_0 = (a - b)/2 > 0$ se verifica que

$$a \leq b + \varepsilon_0 = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a,$$

lo cual es contradictorio. $\square$

67. Demuestra que $[(a + b)/2]^2 \leq (a^2 + b^2)/2$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

Solución.

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$
$$\iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \iff 0 \leq (a - b)^2,$$

lo cual es trivialmente cierto. $\square$

68. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $0 < c < 1$, entonces $0 < c^2 < c < 1$;

(2) si $1 < c$, entonces $1 < c < c^2$.

Solución. (1)

$$0 < c \iff c \in \mathbb{P} \overset{\text{2do. ax.}}{\Longrightarrow} c \cdot c = c^2 \in \mathbb{P} \iff \boxed{0 < c^2}$$

$$0 < c < 1 \iff c, 1 - c \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax.}}{\Longrightarrow} c \cdot (1 - c) = c - c^2 \in \mathbb{P} \iff \boxed{c^2 < c}$$

$$\text{ya teníamos } \boxed{c < 1}$$

(2)

$$0 < 1 < c \implies c, c - 1 \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax.}}{\Longrightarrow} c \cdot (c - 1) = c^2 - c \in \mathbb{P} \iff \boxed{c < c^2}$$

$$\text{ya teníamos } \boxed{1 < c}$$

□