5.6.a. *Estudiar la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \operatorname{sen}(x) \leq 0, \\ \frac{1}{e} & si\ \cos(2x) = 0,\ \operatorname{sen}(x) > 0, \\ (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} & en\ caso\ contrario. \end{cases}$$

Solución. La función es claramente 2π-periódica, de forma que nos podemos ceñir sencillamente a $[0, 2\pi]$ para discutir la continuidad de f. En dicho intervalo se distinguen los cambios en la definición de f en 0 y en π, así como en $\pi/4$ y $3\pi/4$. En el caso de $\pi/4$, tenemos lo siguiente*:

$$\lim_{x\to\pi/4^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/4^-} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} \overset{!?}{=} (\sqrt{2})^{\infty} = \infty.$$

mientras que el otro límite lateral resulta

$$\lim_{x\to\pi/4^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/4^+} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} = (\sqrt{2})^{-\infty} = 0.$$

Se obtiene un resultado análogo en $3\pi/4$. Por último, observamos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} = 0,$$

dado que $\operatorname{sen}(x) \to 0$ cuando $x \to 0$ mientras que $\cos(2x) \to 1$ cuando $x \to 0$, con lo que f es continua en 0. Se razona de la misma forma para concluir que f es continua en π. Así, la función no es continua en los puntos $\pi/4 + 2\kappa\pi$, $3\pi/4 + 2\kappa\pi$, cualquiera que sea $\kappa \in \mathbb{N}$. □

5.8. *Determínese $c > 0$ para que sea continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{c}\,x & si\ x \leq c, \\ \dfrac{x - c}{\sqrt{x} - \sqrt{c}} & si\ x > c. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, calculemos el límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} (3 - \sqrt{c}\,x) = 3 - \sqrt{c}\,c = 3 - (\sqrt{c})^3 = f(c),$$

*Veamos la justificación dicho límite rigurosamente, con el criterio ε-δ. En primer lugar, dado que $2\operatorname{sen}(x) \to \sqrt{2}$ cuando $x \to \pi/4^-$, deducimos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que si $x \in (\pi/4 - \delta, \pi/4)$, entonces $\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(x) < \varepsilon$. Si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon_0 := (\sqrt{2} - 1)/2 > 0$, deducimos que para cierto $\delta_0 > 0$, cualquiera que sea $x \in (\pi/4 - \delta_0, \pi/4)$, tenemos que $2\operatorname{sen}(x) \geq (\sqrt{2} + 1)/2 =: c$, que satisface $c > 1$. Ahora bien, dado que

$$\lim_{x\to\pi/4} c^{1/\cos(2x)} = +\infty,$$

como hemos visto como consecuencia de la Desigualdad de Bernoulli, lo cual es equivalente a que para todo $M > 0$, existe $\eta(M) > 0$ de forma que para todo $x \in (\pi/4 - \eta(M), \pi/4)$, se tiene $c^{1/\cos(2x)} > M$. Concluimos así que dado cualquier $M > 0$ existe $\delta(M) := \min\{\delta_0, \eta(M)\}$ de forma que

$$(2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} \geq c^{1/\cos(2x)} > M,$$

como queríamos demostrar.

mientras que el límite lateral por la derecha resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^+} \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}} = \lim_{x\to c^+} \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{c}}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \\ &= \lim_{x\to c^+} \frac{(x-c)(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{x-c} = \lim_{x\to c^+} (\sqrt{x}+\sqrt{c}) = 2\sqrt{c}.\end{aligned}$$

de forma que para que ambas expresiones coincidan, y equivalentemente f sea continua, basta hallar las soluciones de la ecuación

$$2\sqrt{c} = 3 - (\sqrt{c})^3$$

o equivalentemente, tras realizar el cambio de variable $z \equiv \sqrt{c}$, las soluciones reales no negativas de la ecuación $z^3 + 2z - 3 = 0$. En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, dicha ecuación tiene a lo sumo tres soluciones, y un método que suele funcionar consiste en probar soluciones enteras, más concretamente divisores del término independiente, como consecuencia del Teorema del Resto. Una solución es claramente $z = 1$, de forma que podemos escribir $z^3+2z-3 = (z-1)(z^2+z+3)$ empleando la Regla de división de Ruffini. La ecuación $z^2+z+3 = 0$ no tiene, sin embargo, soluciones reales, de forma que $c = 1$ es la única elección posible para que f sea continua. $\square$

5.9. *(a) Hállese una función definida en* $\mathbb{R}$ *que sea discontinua en* $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$*, pero continua en los demás puntos (b) Hállese una función definida en* $\mathbb{R}$ *que sea discontinua en* $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$*, pero continua en los demás puntos.*

Solución. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observamos que f no es continua en cada punto de la forma $1/n$ dado que f es nula en $(1/(n+1), 1/n)$, y por ende

$$\lim_{x\to 1/n^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(1/n).$$

En 0 tampoco es continua, dado que

$$f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(1/n),$$

esto es, no es secuencialmente continua. Ahora, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

es continua en 0, como sencillamente se puede comprobar. $\square$

Recordemos ahora que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, esto es, si escogemos cualquier número real, podemos encontrar un número racional tan cercano a éste como queramos, esto es, dado $x \in \mathbb{R}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{Q}$ de forma que $|x - r| < \varepsilon$. Sabemos también que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

En la mayoría de ocasiones, y con el objetivo de evitar sobrecargar la notación, evitaremos hacer referencia a las dependencias de unas variables respecto de otras. Por ejemplo, en la anterior expresión, r dependerá tanto de x como de ε. Podríamos denotar entonces $r_{x,\varepsilon}$ o bien $r(x, \varepsilon)$ para hacer énfasis en dicha dependencia. Otra opción suele ser escribir $r \equiv r(x, \varepsilon)$ y no hacer más referencias a x y ε. Especificar las dependencias y tenerlas en mente es muy importante, y es particularmente clarificador, por ejemplo, a la hora de distinguir entre la continuidad de una función y la continuidad uniforme.

Por otra parte, y en adelante, si X es un conjunto cualquiera, denotaremos, para cada subconjunto $A \subseteq X$, por $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, la función dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

comúnmente conocida como función característica de A en X.

Por último, recordemos que, en lógica matemática, si P (la hipótesis) y Q (la tesis) denotan dos proposiciones lógicas, la implicación $P \implies Q$ se define como $\neg P \vee Q$, la cual es necesariamente cierta si no se cumple la hipótesis P, o se cumple la tesis Q si se cumple la hipótesis P. Por tanto, $\neg(P \implies Q)$ equivale a $Q \wedge \neg P$. Además, si R es una relación en un conjunto, $\neg(\exists x\, R(x))$ es equivalente a $\forall x\, \neg R(x)$ y de la misma forma, $\neg(\forall x\, R(x))$ es equivalente a $\exists x\, \neg R(x)$. Con ello, se deduce fácilmente que la negación de la continuidad de una función f en un punto $x \in \mathbb{R}$,

$$\neg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

es equivalente a la siguiente proposición:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Esto resultará suficiente para demostrar, en muchos ejercicios, con elecciones sencillas de ε e y, la falta de continuidad en ciertos puntos x.

5.10. *Dar un ejemplo de función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua en cualquier punto de $\mathbb{R}$ pero tal que $|f|$ sea continua en $\mathbb{R}$.*

Solución. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}},$$

la cual toma el valor -1 en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el valor $+1$ en $\mathbb{Q}$ y no es continua en ningún punto. En efecto, siguiendo la negación de la continuidad de f, dado $x_0 \in \mathbb{Q}$, se tiene que $f(x_0) = 1$, pero existe $\varepsilon := 1$, de forma que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $y \in B(x_0, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, dada la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, que satisface $|f(x_0) - f(y)| = |1 - (-1)| = 2 \geq \varepsilon = 1$, como queríamos. Se razona análogamente supuesto que $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sin embargo, $|f| = 1$ en $\mathbb{R}$, la cual es trivialmente continua. $\square$