APÉNDICE: 13 DE MARZO DE 2019

Ejercicio 6.23.c. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión $f(x) = xe^x$ para todos los números reales x.*

Solución. Dado que, cualquiera que sea $n > 1$ un número natural,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{n-1}),$$

concluimos que

$$xe^x = x + x^2 + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!} + o(x^n).$$

sin más que observar que $xo(x^m) = o(x^{m+1})$. □

Ejercicio 6.23.d. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por la expresión $f(x) = \log(1/\sqrt{1-x})$ para todos los números reales $x \in (-1, 1)$*

Solución. Basta observar que

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{2}\log(1-x)$$

por las propiedades de los logaritmos, y como sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + o(x^m),$$

para todo número natural m,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^m}{m} + o(x^m).$$

y por ende

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

cualquiera que sea n un número natural. □

Ejercicio 6.23.e. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por la expresión $f(x) = \log[(1+x)/(1-x)]$ para todos los números reales $x \in (-1, 1)$*

Solución. Por las propiedades de los logaritmos podemos deducir sencillamente que $f(x) = \log(1 + x) - \log(1 - x)$ para todos los números reales $x \in (-1, 1)$. Podemos empezar usando la fórmula de MacLaurin para ambos sumandos,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + o(x^m),$$

de forma que, como en el apartado anterior,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^m}{m} + o(x^m).$$

Restando ambas expresiones deducimos que los términos con grados pares su cancelan mientras que los impares se suman, de forma que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\,x + 2\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^5}{5} + \cdots + 2\,\frac{x^{2\lfloor (n+1)/2\rfloor - 1}}{2\lfloor (n+1)/2\rfloor - 1} + o(x^n) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^n) \end{aligned}$$

es la fórmula de MacLaurin para f de orden n. □

Ejercicio 6.23.f. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por la expresión $f(x) = (1 + x)\log(1 + x)$ para todos los números reales $x > -1$.*

Solución. De la misma forma que en el apartado anterior, considerando la fórmula de MacLaurin

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1} x^m}{m} + o(x^m),$$

al multiplicar por $1 + x$, deducimos que

$$\begin{aligned} (1 + x)\log(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n) \\ &\quad + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1}), \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \right) x^k + o(x^n) \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

donde hemos agrupado $o(x^n) + (-1)^{n+1} x^{n+1}/n + o(x^{n+1})$ bajo el término $o(x^n)$ nuevamente. □