Algunas aclaraciones sobre la continuidad uniforme

Que $f : I \to \mathbb{R}$ sea **uniformemente continua en un intervalo I** quiere decir, vagamente, que es posible garantizar que $f(x)$ y $f(y)$ estén tan cerca uno de otro como queramos requiriendo únicamente que x e $y \in I$ estén lo suficientemente cerca; más rigurosamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

esto es muy distinto a que la función sea **continua en I**, pues dada la uniformidad, la distancia máxima entre $f(x)$ y $f(y)$ no puede depender de x e y. Continuidad «a secas», recordemos, significa:

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_{\varepsilon,x} \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

como vemos, hay una dependencia de δ en términos de ε pero también del punto x. ¡Ojo! ahora estamos hablando de dos conceptos sobre *continuidad en todo un conjunto* (o en un intervalo), que no es lo mismo que cuando hablamos de que la función sea **continua en un punto $x_0 \in I$ (fijo)**, que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x_0 - y| \leq \delta_{\varepsilon,x_0} \implies |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

Una forma de demostrar que una función **no** es uniformemente continua en I es considerar simplemente la negación de la primera fórmula:

$$\begin{array}{rl}
& \neg[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \, \neg[\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \; \neg[\forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \neg[\,|x_\delta - y_\delta| \leq \delta \implies |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \leq \varepsilon\,] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \quad |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon
\end{array}$$

Esto se puede emplear en el Ejercicio 5.22.b, por ejemplo.