

**CLASE #12: 7 DE MARZO DE 2019**

**Ejercicio 6.19.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real dada por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin^2(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

para cualquier número real  $x$ . (a) Demostrar que  $f$  tiene en 0 un mínimo local. (b) Demostrar además que  $f'(0) = f''(0) = 0$  y que no existe  $f'''(0)$ .

**Solución.** (a) Que sea mínimo local significa que se puede encontrar un entorno  $(-\delta, \delta)$  de 0 en el cual  $f(x) \geq f(0)$  para todo  $x \in (-\delta, \delta)$  (no necesariamente ha de ser estrictamente mayor, ésto es lo que se conoce como mínimo local estricto, de hecho, no lo es porque la sucesión de números  $\{x_k = 1/k\pi : k \in \mathbb{N}\}$  converge a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$  y sin embargo  $f(x_k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ). Esto es claro ya que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , con lo que siempre se va a tener que  $f(x) \geq f(0)$ . (b) Veamos ahora que la primera derivada de  $f$  en 0 existe empleando la definición de ésta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \sin^2(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin^2(1/x) = 0$$

puesto que  $x \mapsto x^3$  es una función que converge a 0 cuando  $x \rightarrow 0$  y  $x \mapsto \sin^2(1/x)$  es una función acotada, y sabemos por la teoría que el límite de un producto de una función acotada y una convergente a cero es cero. Ahora bien, empleando las reglas del cálculo de derivadas, así como lo anterior, deducimos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin(1/x)[2x \sin(1/x) - \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Con ello, razonando de la misma forma, deducimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x)[2x \sin(1/x) - \cos(1/x)] = 0$$

ya que  $x \mapsto 2x$  es una función que converge a 0 cuando  $x \rightarrow 0$  mientras que la función  $x \mapsto \sin(1/x)[2x \sin(1/x) - \cos(1/x)]$  es acotada en un entorno de 0. Nuevamente, empleando las reglas del cálculo de derivadas,

$$f''(x) = \begin{cases} 2[(6x^2 - 1) \sin^2(1/x) + \cos^2(1/x) - 6x \sin(1/x) \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ahora, sin embargo, se comprueba sencillamente que no existe el límite definitorio de  $f'''(0)$ , usando, por ejemplo, la sucesión  $\{x_k = 1/2\pi k : k \in \mathbb{N}\}$ , convergente a 0, para la cual se anulan todos los términos con senos en la expresión de  $f''$ , y por consiguiente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f''(x_k) - f''(0)}{x_k - 0} = \lim_{k \rightarrow \infty} 4\pi k \cos^2(2\pi k) = +\infty.$$

□

**Ejercicio 6.20.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Probar que  $f$  es creciente en  $\mathbb{R}$  si y solo si  $a \geq 9/8$ .

**Solución.** En primer lugar, observemos que la función  $f$  está bien definida en  $\mathbb{R}$  cualquiera que sea  $a$  una constante real. Dada la regularidad de  $f$ , podemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de ésta a través de su derivada, que resulta:

$$f'(x) = a - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = a - \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

y como  $f$  es creciente en  $\mathbb{R}$  si y solo si  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , esto es,

$$a \geq \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2}$$

podemos calcular el máximo global de la función auxiliar  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

hallando los puntos críticos de su derivada,

$$g'(x) = -\frac{2x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

éstos son,  $x = 0$ ,  $x = -\sqrt{3}$  y  $x = \sqrt{3}$ , dado que la función no crece arbitrariamente, pues es continua y acotada:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 3x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1,$$

Se comprueba de manera sencilla que

$$g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$$

es máximo global de  $g$  y por ende  $a \geq g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  si y solo si  $a \geq 9/8$ .  $\square$

**Ejercicio 6.21.** ¿Qué número es mayor,  $e^\pi$  o  $\pi^e$ ? Probar que si  $x > e$ , entonces  $e^x > x^e$ .

**Solución.** Dado que el logaritmo preserva el orden (es una función estrictamente creciente), se tiene que  $x^e < e^x$  si y solo si  $\log(x^e) < \log(e^x)$ , y por las propiedades de los logaritmos, esto equivale a

$$\frac{e}{\log(e)} < \frac{x}{\log(x)}. \quad (\dagger)$$

Definimos la función auxiliar  $h : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$h(x) := \frac{x}{\log(x)},$$

la cual está bien definida en  $(1, \infty)$ , y es continua y derivable en dicho intervalo. En virtud de la desigualdad  $(\dagger)$ , el enunciado del problema es

entonces equivalente a demostrar que  $h(e) < h(x)$  para todo  $x > e$ . Ahora bien,

$$h'(x) = \frac{\log(x) - 1}{\log^2(x)} > 0$$

para todo  $x > e$ , de forma que  $h$  es estrictamente creciente en  $(e, \infty)$  y, en particular,  $h(e) < h(x)$  para todo  $x \in (e, \infty)$ .  $\square$