CLASE #26: 9 DE MAYO DE 2019

Ejercicio 8.2.16. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Demostración. Para todos los números naturales n, tras reescribirla expresión de los coeficientes de la serie,

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{2\,n\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Por tanto, como consecuencia del Test de Comparación, la serie es convergente, pues es bien conocido que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ lo es. □

Ejercicio 8.3.h. *Determina si la siguiente serie converge o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1+\sqrt{3})(n-2+\sqrt{3})(n+\sqrt{3})},$$

y, si lo hace, halla su suma.

Demostración. La serie converge, por el Criterio de Comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, la cual es convergente. Para presentar el estudio de la suma de la serie de una forma más estética y clara, definamos las siguientes constantes auxiliares:

$$A = -\sqrt{3}, \quad B = 1-\sqrt{3} \quad \text{and} \quad C = 2-\sqrt{3}.$$

Así, la serie resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-A)(n-B)(n-C)}$$

y es lo que conocemos como una serie hipergeométrica, pues los siguientes cocientes resultan:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1/(n+1-A)(n+1-B)(n+1-C)}{1/(n-A)(n-B)(n-C)} \\
&= \frac{(n-A)(n-B)(n-C)}{(n+1-A)(n+1-B)(n+1-C)} \\
&= \frac{n-C}{n+1-A} = \frac{n-2+\sqrt{3}}{n+1+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

donde algunos de los anteriores términos se simplifican por las identidades $1-B=-A$ y $1-C=-B$, las cuales se comprueban fácilmente. Por tanto, con las notaciones del Teorema sobre series hipergeométricas, $\alpha = 1$, $\beta = -2+\sqrt{3}$ y $\gamma = 1+\sqrt{3}$, con lo que la suma de la serie resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1+\sqrt{3})(n-2+\sqrt{3})(n+\sqrt{3})} = \frac{\gamma\, a_1}{\gamma-\alpha-\beta} = \frac{3+\sqrt{3}}{12}.$$

□

Ejercicio 8.4.b. *Halla la suma de la siguiente serie:*

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{16} - \frac{1}{21} + \frac{1}{20} - \cdots$$

Demostración. Supongamos que la serie dada en el enunciado es la que tiene por términos impares $1/4n$ y por términos pares $1/3(2n-1)$, para cada número natural n. Sabemos que la serie es convergente si y solo si la sucesión de sumas parciales es convergente, lo cual implica, en particular, que la subsucesión de sumas parciales consistente en sumar en cada paso dos términos es convergente, esto es, agrupando

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{21}\right) + \cdots$$

la serie converge. Sin embargo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{3(2n-1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{12n(2n-1)}$$

no es convergente, por el Criterio de Comparación con la serie armónica, la cual diverge. Así, la serie original no es convergente. $\square$