22 de febrero de 2019

Problema 1. *Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ si todo intervalo real contiene un punto de A. Demuestra que:*

(i) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(t) = 0$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) = g(t)$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (pista: usa el apartado anterior).
(iii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la propiedad de aditividad:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Demuestra que $f(0) = 0$.
(ii) Demuestra que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Demuestra que f es continua en $x = 0$ si y solo si lo es en $\mathbb{R}$.
(iv) Denotemos en adelante $\gamma := f(1)$. Demuestra que $f(n) = \gamma\, n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(v) Con ello demuestra que $f(k) = \gamma\, k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
(vi) Ahora demuestra que $f(r) = \gamma\, r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
(vii) Supuesto ahora que f es continua en 0, razona por qué a partir de (iii) y (vi) se concluye que $f(x) = \gamma\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Así, habremos demostrado que una función aditiva que sea continua debe ser necesariamente una función lineal por el origen. La condición de continuidad es necesaria pues (si se considera el Axioma de Elección) se pueden construir funciones aditivas no continuas.

Problema 3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean α y C números positivos reales. Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función que satisface la siguiente propiedad conocida como continuidad-Hölder, llamada así en honor al matemático Otto Hölder:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \quad \text{para todos } x, y \in I.$$

(i) Demuestra que f es uniformemente continua en I. (ii) Demuestra que si $\alpha > 1$, entonces la función es diferenciable en $\mathbb{R}$ y su derivada, f', es idénticamente nula en $\mathbb{R}$ (pista: escribe $\alpha = 1 + s$, $s > 0$); razona que, por tanto, la función es constante.

Problema 1. Para el primer apartado, supongamos por reducción al absurdo que no, de forma que existe $t_0 \in \mathbb{R}\backslash A$ tal que $f(t_0) \neq 0$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(t_0) > 0$ (esto quiere decir que el argumento se puede hacer análogamente si $f(t_0) < 0$). Así, vamos a encontrar un entorno de t_0 en el que f sea positiva, lo cual será absurdo dado que podremos encontrar un punto de dicho entorno en el que por hipótesis su imagen es necesariamente nula. Entonces, para $\varepsilon := f(t_0)/2$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$, de donde se deduce que $0 < f(t_0)/2 \leq f(t)$. Sin embargo, como A es denso, existe $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap A$ (por definición de densidad), y por ende $f(t_1) = 0$, lo cual contradice lo anterior. Para el segundo apartado basta considerar que $f = g$ si y solo si $h := f - g = 0$, lo cual nos ha proporcionado el apartado anterior. El último apartado se razona de manera exactamente análoga al primer apartado. Lo hago a continuación para que la solución sea autocontenida. Denotemos $\phi := f - g$. Supongamos por reducción al absurdo que no se tiene que $\phi \geq 0$ en $\mathbb{R}$, de forma que existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ tal que $\phi(t_0) < 0$; entonces, para $\varepsilon := -\phi(t_0)/2 > 0$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq -\phi(t_0)/2 < 0$; en particular, $\phi(t) \leq \phi(t_0) - \phi(t_0)/2 = \phi(t_0)/2 < 0$ $(*)$. Sin embargo, como A es denso, existe $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap A$, de forma que $\phi(t_1) = 0 \not< 0$, lo cual contradice $(*)$.

Problema 2. (i) Dada la condición de aditividad, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, y restando en ambos lados $f(0)$, $0 = f(0)$, como queríamos demostrar. (ii) Dado que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, restando $f(x)$ en ambos lados, obtenemos que $f(-x) = -f(x)$. (iii) Supongamos que f es continua en 0, esto es, $f(h) \to 0$ cuando $h \to 0$; entonces, fijado $x \in \mathbb{R}$, se tendrá que $f(x + h) = f(x) + f(h) \to f(x) + 0 = f(x)$, cuando $h \to 0$, esto es, f es continua en x y dada su arbitrariedad, en $\mathbb{R}$. (iv) Denotemos $\gamma = f(1)$. El caso base es trivial, $f(1) = \gamma \cdot 1$, por definición; supongamos que $f(n) = \gamma n$ para cierto natural n, entonces $f(n + 1) = f(n) + f(1) = \gamma n + \gamma = (n + 1)\gamma$, luego por el Principio de Inducción se cumple para todo n natural. (v) Para todo entero n negativo, $f(-n) = -n\gamma$ por el anterior paso, de forma que por (ii), $f(n) = -f(-n) = n\gamma$, como queríamos. (vi) Sea $r = p/q$ un número racional, $\gamma p = f(p) = f(qr) = qf(r)$, de forma que $f(r) = \gamma p/q = \gamma r$ (para demostrar que $f(nx) = nf(x)$ se utiliza el Principio de Inducción, es inmediato dada la condición de aditividad). (vii) Por el Problema 1, como f y $x \mapsto \gamma x$ son dos funciones continuas que coinciden en los racionales, necesariamente $f(x) = \gamma x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. (i) Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\delta_\varepsilon > 0$, el cual determinaremos más adelante, de forma que para todos $x, y \in I$ tales que $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \leq C\delta_\varepsilon^\alpha := \varepsilon$$

si escojemos $\delta_\varepsilon := (\varepsilon/C)^{1/\alpha}$, donde hemos usado que $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$ implica que $|x - y|^\alpha \leq \delta_\varepsilon^\alpha$, pues $(\,\cdot\,)^\alpha$ es una función monótona creciente, cualquiera que sea $\alpha > 0$. (ii) Para la segunda parte del problema, si $\alpha > 1$, escribamos $\alpha := 1 + s$ para $s := \alpha - 1 > 0$. Entonces,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^{1+s} = C|x - x_0||x - x_0|^s \implies 0 \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C|x - x_0|^s,$$

y tomando límites cuando $x \to x_0$, se deduce que el límite anterior, definitorio de la derivada de f, existe y es nulo, por el Teorema del Sandwich. Así, f es necesariamente constante, pues aplicado el TVM a cualesquiera dos puntos $x, y \in I$ distintos, se deduce que, para cierto $c_{x,y}$ entre x e y,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c_{x,y}) = 0,$$

de forma que $f(x) = f(y)$, esto es, f es constante.