Ejercicio 6.18.a. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$$

en $[-2, 2]$.

Solución. Dado que la función $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty[-2, 2]$, los máximos y mínimos *absolutos* han de encontrarse bien en la frontera de dicho intervalo o ser máximos y mínimos relativos en el interior, $(-2, 2)$, los cuales se encuentran necesariamente entre los puntos críticos de f. Evaluamos en primer lugar

$$f(-2) = 5 \qquad \text{y} \qquad f(2) = -11$$

Por otra parte, los puntos críticos de f, es decir, los ceros de f', son las soluciones de

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 2x - 8,$$

es decir,

$$x = 2 \notin (-2, 2) \qquad x = -4/3 \in (-2, 2)$$

Evaluando la segunda derivada, obtenemos que

$$f''(-4/3) = -10 < 0$$

de forma que $-4/3$ es un máximo relativo. Sin embargo, comparándolo con los valores en la frontera, deducimos que el mínimo absoluto de f en $[-2, 2]$ se alcanza en $x = 2$ mientras que el máximo absoluto de f en $[-2, 2]$ se alcanza en $x = -4/3$, pues $7{,}5185 \approx 203/27 = f(-4/3) > f(-2) = 5$. □

Ejercicio 6.18.c. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(1 + x)$$

en su dominio.

Solución sin derivadas. Dado que el dominio de $\operatorname{arc\,sen}(\,\cdot\,)$ es sencillamente $[-1, 1]$, el dominio de f será $[-2, 0]$. Dado que $\operatorname{sen}(\,\cdot\,) : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, su inversa $\operatorname{arc\,sen}(\,\cdot\,)$ también lo es*, con lo que f claramente también, pues es una traslación horizontal de ésta simplemente. Así, su mínimo absoluto se encuentra en $x = -2$, para el cual $f(-2) = -\pi/2$, mientras que su máximo absoluto se encuentra en $x = 0$, para el cual $f(0) = \pi/2$. □

*Veamos rigurosamente que la inversa de una función estrictamente monótona es también estrictamente monótona. Si $\phi : I \to J$ es una biyección estrictamente monótona entre dos intervalos reales, digamos estrictamente creciente sin pérdida de generalidad,

$$x_1 < x_2 \iff \phi(x_1) < \phi(x_2) \quad \text{para todos} \quad x_1, x_2 \in I$$

Denotando por y_k el único punto en J por el cual $\phi^{-1}(y_k) = x_k$, ésto es, $y_k = \phi(x_k)$, la anterior expresión se reescribe en la forma:

$$\phi^{-1}(y_1) < \phi^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2 \quad \text{para todos} \quad y_1, y_2 \in J,$$

es decir, ϕ^{-1} es también estrictamente creciente.

Solución usando derivadas. La función f es derivable en el interor de su dominio, $(-2,0)$, y su derivada resulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x(2+x)}} > 0$$

para todo $x \in (-2,0)$, puesto que tanto $-x$ como $(2+x)$ son números positivos. Por la caracterización de la monotonía en términos de la derivada vista en clase, ya que f es continua en $[-2,0]$, deducimos que f es estrictamente creciente en $[-2,0]$, como queríamos obtener, de forma que -2 es un mínimo absoluto y 0 es un máximo absoluto. $\square$

Ejercicio 6.18.f. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = x^2 \log(x)$$

en $[e^{-1}, e]$ *y en* $(0,\infty)$.

Solución. Observemos en primer lugar que la función está bien definida en $(0,\infty)$, y por ende en $[e^{-1}, e]$. Además,

$$f(e^{-1}) = -e^{-2}, \quad f(e) = e^2, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{1/x^2} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

donde el primer límite se ha calculado empleando la Regla de Bernoulli-l'Hôpital. Hallemos ahora los extremos relativos, para lo cual nos valdremos del estudio de los puntos críticos de la función,

$$0 = f'(x) = 2x\log(x) + x = x[1 + 2\log(x)]$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (el cual no está en el interior de ningún intervalo que queramos estudiar, y por ende descartamos) y $x = e^{-1/2}$. Se comprueba usando la segunda derivada que $x = e^{-1/2}$ es un mínimo local. Así, con todo lo anterior, deducimos que en $(0,\infty)$ el mínimo global se encuentra en $x = e^{-1/2}$, mientras que no existe un máximo global, mientras que en $[e^{-1}, e]$, dado que $e^{-1/2}$ pertenece a dicho intervalo (la exponencial $x \mapsto e^x$ es estrictamente creciente, por lo que $e^{-1} < e^{-1/2} < e^1$), el mínimo global se alcanza en este punto, y el máximo global se alcanza obviamente en e. $\square$