APÉNDICE: 4 DE ABRIL DE 2019

Ejercicio 7.6. *Demostrar que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua,*

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u.$$

Solución. Definimos las funciones auxiliares

$$F_1(x) = \int_0^x f(u)(x-u)\,du = x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x uf(u)\,du,$$

$$F_2(x) = \int_0^x G(u)\,du \quad \text{con} \quad G(u) = \int_0^u f(t)\,dt.$$

Con esta notación, probar el enunciado se reduce a comprobar que $F_1 = F_2$ en $\mathbb{R}$. A partir del teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la cadena,

$$F_1'(x) = \int_0^x f(u)\,du + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)du,$$

$$F_2'(x) = G(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

las cuales son iguales, para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, ambas funciones se han de diferenciar en una constante, esto es, $F_1 = F_2 + K$ para cierta $K \in \mathbb{R}$. Sin embargo, como $F_1(0) = F_2(0) = 0$, ésta debe ser $K = 0$ y, por consiguiente, $F_1 = F_2$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 7.7. *Hallar el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log(x)} \int_{x^2}^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}dt$$

Solución. Nótese en primer lugar que

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty,$$

y también que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{x^2}^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t \geq \lim_{x\to 0^+} \int_{x^2}^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \log(1/x) = +\infty,$$

empleando que $e^t - 1 \geq t$ así como que $\operatorname{sen}(t^2) \leq t^2$, de manera que, como consecuencia de la Regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t}{\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{1}{x}},$$

donde, en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena, definiendo

$$F(x) = \int_{x^2}^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{x^2} \frac{e^t-1}{\operatorname{sen}(t^2)}\,\mathrm{d}t,$$

se deduce que

$$F'(x) = \frac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x^2)} - 2\,x\,\frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sen}(x^4)}$$

y combinando los anteriores resultados concluimos finalmente que el límite del enunciado es, por la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x(e^x-1)}{\operatorname{sen}(x^2)}-\frac{2x^2(e^{x^2}-1)}{\operatorname{sen}(x^4)}\right)=-1.$$

como queríamos calcular, tras una serie de cuentas que se pueden simplificar empleando la Fórmula de Taylor-Young. □

Ejercicio 7.8. *Demostrar que*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$

para cada $n\geq 2$. Probar que para cada $n\geq 1$ se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Solución. Empleamos la identidad pitagórica para obtener que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$$

como consecuencia de la linealidad de la integral:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

empleando estratégicamente la regla de integración por partes, considerando $u\equiv\cos(x)$, $\mathrm{d}v\equiv\sin^{n-2}(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$, para obtener que:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$$

donde el segundo término es nulo. Tras simplificar, observando que la última integral es la original, deducimos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x,$$

como queríamos probar. Esta fórmula es válida siempre que $n\geq 2$. Se demuestra por inducción que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-3}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\cdots=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\end{aligned}$$

Análogamente, se demuestra por inducción:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{0}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\end{aligned}$$

como queríamos concluir. $\square$