Algunas aclaraciones sobre la continuidad uniforme

Que una función $f : I \to \mathbb{R}$ sea **uniformemente continua en un intervalo $\boldsymbol{I}$** quiere decir que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

esto es muy distinto a que la función sea **continua en $\boldsymbol{I}$**:

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

pues, como vemos, hay una dependencia de δ en términos de ε pero también del punto x. ¡Ojo! no es lo mismo que cuando hablamos de que la función sea **continua en un punto $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{I}$ (fijo)**, que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x_0 - y| \leq \delta_{\varepsilon,x_0} \implies |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

Una forma de demostrar que una función **no** es uniformemente continua en I es considerar simplemente la negación de la primera fórmula:

$$\begin{array}{rlllll}
 & \neg[\forall \varepsilon > 0 & \exists \delta_\varepsilon > 0 & \forall x, y \in I, & |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon &] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \, \neg[\exists \delta > 0 & & \forall x, y \in I, & |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon &] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 & \forall \delta > 0 & \neg[\forall x, y \in I, & |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon &] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 & \forall \delta > 0 & \exists x_\delta, y_\delta \in I, \neg[& |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \implies |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \leq \varepsilon &] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 & \forall \delta > 0 & \exists x_\delta, y_\delta \in I, & |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon &
\end{array}$$

Esto se puede emplear en el Ejercicio 5.22.b, por ejemplo.