5. Dibuja los diagramas en el plano del producto cartesiano $A \times B$ para los conjuntos A y B dados: (1) $A=\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2 \text{ o } 3 \leq x \leq 4\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} : x=1 \text{ o } x=2\}$; (2) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$.

Solución. El conjunto $A \times B$ en el primer caso consta de cuatro barras horizontales, $[1,2] \times \{1\}$, $[1,2] \times \{2\}$, $[3,4] \times \{1\}$ y $[3,4] \times \{2\}$, y en el segundo caso de tres barras verticales, $\{1\} \times [1,3]$, $\{2\} \times [1,3]$ y $\{3\} \times [1,3]$. $\square$

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ un subconjunto de los números reales. ¿Es el conjunto $C = \{(x,y) \in A \times A : x^2 + y^2 = 1\}$ la gráfica de una función?

Solución. Para que C sea una función (en el sentido conjuntista) ha de verificarse que para todo $a \in A$ existe un único $b \in A$ tal que $(a,b) \in C$.

Sin embargo, para $a = 0$ tenemos que $(0,1) \in C$ y $(0,-1) \in C$, de forma que C no puede ser una función. $\square$

7. Sea f la función real dada por $f(x) = 1/x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Con ello, determina:

(1) la imagen, $f(E)$, de $E = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$;
(2) la imagen inversa, $f^{-1}(G)$, de $G = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$.

Observacion. *Suponemos sabido para* $0 \leq \alpha, \beta$ *que:* $\alpha \leq \beta \iff \alpha^2 \leq \beta^2$.

Esto se prueba fácilmente cuando dispongamos del orden de los números reales. $\square$

Solución. (1) Veamos que $f(E) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ para cierto } x \in [1,2]\} = [\frac{1}{4}, 1]$.

($\subseteq$) Sea $y_0 \in f(E)$, entonces existe $x_0 \in [1,2]$ con $f(x_0) = y_0$ por definición, luego

$$\frac{1}{4} \leq y_0 \leq 1 \overset{\text{def.}}{\iff} \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x_0^2} \leq 1 \overset{\text{cuentas}}{\iff} 1 \leq x_0^2 \leq 4 \overset{\text{obs.}}{\iff} 1 \leq x_0 \leq 2 \checkmark$$

($\supseteq$) Recíprocamente, sea $y_0 \in [\frac{1}{4}, 1]$, definamos $x_0 := 1/\sqrt{y_0}$. Entonces, es claro que $f(x_0) = y_0$ y:

$$1 \leq x_0 \leq 2 \overset{\text{def.}}{\iff} 1 \leq \frac{1}{\sqrt{y_0}} \leq 2 \overset{\text{cuentas}}{\iff} \frac{1}{2} \leq \sqrt{y_0} \leq 1 \overset{\text{obs.}}{\iff} \frac{1}{4} \leq y_0 \leq 1 \checkmark$$

(2) Veamos que $f^{-1}(G) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in G, f(x) = y\} = [\frac{1}{2}, 1]$.

($\subseteq$) Sea $x_0 \in f^{-1}(G)$ luego $\exists y_0 \in [1,4]$ tal que $\frac{1}{x_0^2} = y_0$. Veamos que $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$:

$$\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1 \overset{\text{cuentas}}{\iff} 1 \leq \frac{1}{x_0} \leq 2 \overset{\text{obs.}}{\iff} 1 \leq \frac{1}{x_0^2} \leq 4 \overset{\text{def.}}{\iff} 1 \leq y_0 \leq 4 \checkmark.$$

($\supseteq$) Sea $x_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, definamos $y_0 = \frac{1}{x_0^2}$, de forma que $f(x_0) = y_0$, y se comprueba fácilmente que $y_0 \in G = [1,4]$, con lo que $x_0 \in f^{-1}(G)$:

$$1 \leq y_0 \leq 4 \overset{\text{def.}}{\iff} 1 \leq \frac{1}{x_0^2} \leq 4 \overset{\text{cuentas}}{\iff} \frac{1}{4} \leq x_0^2 \leq 1 \overset{\text{obs.}}{\iff} \frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1 \checkmark.$$

$\square$

8. Sea g la función dada por $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea f la función dada por $f(x) = x + 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la composición de ambas, $h = g \circ f$. Determina:

(1) la imagen, $h(E)$, de $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$;
(2) la imagen inversa, $h^{-1}(G)$, de $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.

Solución. Se deja como ejercicio propuesto. $\square$

9. Sea f la función real dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y denotemos $E = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}$ y $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Demuestra que $E \cap F = \{0\}$ y que $f(E \cap F) = \{0\}$, mientras que, por otra parte, se tiene que $f(E) = f(F) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. Deduce así que $f(E \cap F)$ es un subconjunto propio de $f(E) \cap f(F)$. ¿Qué ocurre si se elimina 0 de los conjuntos E y F? Determina los conjuntos $E \setminus F$ y $f(E) \setminus f(F)$ y demuestra que no es cierto que $f(E \setminus F) \subseteq f(E) \setminus f(F)$.

Solución. Veamos que $E \cap F = \{0\}$.

($\subseteq$) Sea $x \in E \cap F$, entonces $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$, de forma que la única posibilidad es $x = 0$,

($\supseteq$) $x = 0$ verifica claramente que $-1 \leq x \leq 0 \iff x \in E$ y que $0 \leq x \leq 1 \iff x \in F$.

Estudiemos ahora $f(E \cap F)$ y $f(E) \cap f(F)$

$f(E \cap F) = f(\{0\}) = \{0^2\} = \{0\}$ trivialmente; y $f(E) = \{y : 0 \leq y \leq 1\} = f(F)$. ¿Por qué?

Por una parte, $-1 \leq x \leq 0 \implies 0 \leq x^2 \leq 1$:

(i) que $0 \leq x^2$ es segundo axioma; $x \in \mathbb{P} \implies x \cdot x = x^2 \in \mathbb{P}$;

(ii) como $x - (-1) = 1 + x \in \mathbb{P} \implies (-x)(1 + x) = -x^2 - (x) \in \mathbb{P}$, es decir $x \leq -x^2 \implies x^2 \leq -x \leq 1$

Por otra parte, $0 \leq x \leq 1 \implies 0 \leq x^2 \leq 1$ (ya lo vimos).

Determinemos ahora $E \setminus F$ y veamos que $f(E \setminus F) \not\subseteq f(E) \setminus f(F)$.

Es sencillo comprobar que $E \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\}$, y que $f(E) \setminus f(F) = \emptyset$, pues $f(E) = f(F)$, luego $f(E \setminus F) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y < 1\} \not\subseteq \emptyset = f(E) \setminus f(F)$. $\square$

10. Sea A y B dos conjuntos, sea $f : A \to B$ una aplicación y $E, F \subseteq A$. Demuestra que $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ y $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$. ¿Por qué no se tiene la igualdad en general?

Solución. Empecemos demostrando que $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$.

Que $y \in f(E \cup F)$ es equivalente a que exista $x \in E \cup F$ tal que $y = f(x)$, o reescribiendo esto, que exista $x \in E$ tal que $y = f(x)$ o que exista $x \in F$ tal que $y = f(x)$, es decir, $y \in f(E)$ o $y \in f(F)$, en otras palabras, que $y \in f(E) \cup f(F)$.

Demostremos ahora que $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$.

Sea $y \in f(E \cap F)$ cualquiera, es decir, por definición, tal que existe $x \in E \cap F$ satisfaciendo $y = f(x)$, de forma que existe $x \in E$ tal que $y = f(x)$ y existe ese mismo $x \in F$ tal que $y = f(x)$, y con todo ello concluimos que $y \in f(E)$ e $y \in f(F)$, en otras palabras $y \in f(E) \cap f(F)$.

¿Por qué no se tiene la igualdad en general? Construyamos un ejemplo. Denotemos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, y sean $E = \{1, 2\}$ y $F = \{2, 3\}$, de forma que $E \cap F = \{2\}$. Definamos la función $f : A \to B$ dada por $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ y $f(3) = 1$, de modo que $f(E) \cap f(F) = \{1, 2\}$ pero $f(E \cap F) = \{2\}$, con lo que no se verifica el contenido recíproco. $\square$