69. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$; como sugerencia, emplea para ello la propiedad de buen orden de $\mathbb{N}$;

(2) no existe número natural simultáneamente par e impar.

Solución. (1) Definamos $S = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n < 1\}$.

Supongamos por reducción al absurdo que $S \neq \emptyset$. Por el Principio del Buen Orden de $\mathbb{N}$ sabemos que existe un primer elemento, $x \in S$, de forma que $x \leq y$ para todo $y \in S$.

Dado que $0 < x < 1$, se tiene por el ejercicio anterior que $0 < x^2 < x < 1$, y como $x^2 \in \mathbb{N}$, necesariamente $x^2 \in S$, lo cual contradice que x sea el mínimo elemento de S.

(2) Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ es simultáneamente par e impar, de forma que $n = 2p$ y $n = 2q - 1$ para ciertos $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$2p = 2q - 1 \iff 2(q-p) = 1 \iff \mathbb{Z} \ni q - p = \frac{1}{2} \in (0,1),$$

y como q y p son números naturales, $q - p \in \mathbb{Z}$ (y necesariamente $q - p > 0$), digamos que es positivo, lo cual contradice (1). $\square$

70. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $c > 1$, entonces $c^n > c$ para $n \geq 2$;

(2) si $0 < c < 1$, entonces $c^n < c$ para $n \geq 2$.

Solución. (1) Caso base: $0 < 1 < c \implies c - 1, c \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax.}}{\implies} c \cdot (c-1) = c^2 - c \in \mathbb{P} \iff c < c^2$

Caso inductivo: supongamos que $c^n > c$ y veamos que $c^{n+1} > c$.

$$c^n > c > 1 > 0 \overset{\text{trans.}}{\implies} c, c^n - 1 \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax.}}{\implies} c \cdot (c^n - 1) = c^{n+1} - c \in \mathbb{P} \iff c^{n+1} > c.$$

(2) Se razona análogamente. $\square$

71. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $a < b$ si y solo si $a^n < b^n$. Como sugerencia, emplea inducción matemática para ello.

Solución. ($\Rightarrow$) Supongamos que $a < b$ y veamos que $a^n < b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que si $x > 0$, entonces $x^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es inmediato por inducción por el 2do.ax.).

Para $n = 1$ es simplemente la hipótesis.

Supongamos que se verifica para $n \in \mathbb{N}$ y veamos que también lo hace con ello para $n + 1$:

$$\left.\begin{array}{lcl} a^n < b^n & \overset{\cdot a > 0}{\implies} & a^{n+1} = a \cdot a^n < a \cdot b^n \\ a < b & \overset{\cdot b^n > 0}{\implies} & a \cdot b^n < b \cdot b^n = b^{n+1} \end{array}\right\} \implies a^{n+1} < a \cdot b^n < b^{n+1},$$

en virtud de los axiomas de orden y la transitividad de éste.

($\Leftarrow$) Basta particularizar $n = 1$. $\square$

Hemos usado... *que $\alpha < \beta$ y $0 < \gamma$ implica que $\alpha\gamma < \beta\gamma$.*

Es consecuencia del 2do.ax.: $\gamma, \beta - \alpha \in \mathbb{P} \implies \gamma(\beta - \alpha) = \beta\gamma - \alpha\gamma \in \mathbb{P} \iff \alpha\gamma < \beta\gamma$. $\square$

72. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $c > 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $c^m > c^n$ si y solo si $m > n$;

(2) si $0 < c < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $c^m < c^n$ si y solo si $m > n$.

Solución. (1,$\Leftarrow$) dado que $k := m - n > 0$, por el Ej. 70 deducimos que $c^{m-n} > c > 1$,

$\overset{\text{trans.}}{\implies} c^{m-n} - 1 \in \mathbb{P} \overset{\text{2do.ax}}{\implies} c^n(c^{m-n} - 1) = c^m - c^n \in \mathbb{P} \iff c^m > c^n$.

ojo, hemos usado que $c^n \in \mathbb{P}$ supuesto que $c \in \mathbb{P}$, es inmediato por inducción y 2do.ax.

(1,$\Rightarrow$) Supongamos que $c^m > c^n$ y probemos que $m > n$.

Probemos el contrarrecíproco: $m \le n \implies c^m \le c^n$.

Esto es una consecuencia inmediata de lo anterior, (1,$\Leftarrow$).

(2) Se hace análogamente o se aplica a $\tilde{c} := 1/c$ el primer apartado. $\square$

73. Emplea el principio de inducción matemática para demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^m a^n$ y $(a^m)^n = a^{mn}$.

Solución. En primer lugar, por definición:

$$a^0 := 1, \quad a^m := a^{m-1} \cdot a \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Probemos que $a^{m+n} = a^m a^n$ por inducción sobre n (m queda fijo, arbitrario):

El caso base: $a^{m+1} \overset{\text{def.}}{=} a^{(m+1)-1} \cdot a = a^m \cdot a^1$.

El caso inductivo: supongamos que $a^{m+n} = a^m a^n$; entonces

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \cdot a \overset{\text{HI}}{=} (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^m (a^n \cdot a) = a^m a^{n+1}.$$

Probemos ahora que $(a^m)^n = a^{mn}$ por inducción sobre n (m queda fijo, arbitrario).

El caso base: $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$.

El caso inductivo: supongamos que $(a^m)^n = a^{mn}$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces:

$$(a^m)^{n+1} \overset{\text{def.}}{=} (a^m)^n \cdot (a^m) \overset{\text{HI}}{=} a^{mn} \cdot a^m \overset{(1)}{=} a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

como queríamos demostrar. $\square$

74. Suouesta probada la existencia de raíces, demuestra que si $c > 1$, entonces $c^{1/m} < c^{1/n}$ si y solo si $m > n$.

Solución. Definamos $\xi := c^{1/(mn)}$.

Sabemos que $\xi^{mn} = c$ por la definición de raíz mn-ésima de c.

Sabemos que $c^{1/n} = \xi^m$ y que $c^{1/m} = \xi^n$ por el Ej. 73 y la definición de raíz m-ésima (resp. n-ésima).

Probemos que $\xi > 1$.

Supongamos por red. al absurdo que $\xi \le 1$. pero el Ej. 70.(2) implica $1 < c = \xi^{mn} \le \xi \le 1$, absurdo.

Entonces, el Ej. 72.(1) implica que $c^{1/n} = \xi^m > \xi^n = c^{1/m}$ si y solo si $m > n$. $\square$

El valor absoluto y la recta real.

75. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $b \neq 0$. Demuestra que

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$; (2) $|a/b| = |a|/|b|$.

Solución. (1) Supongamos en primer lugar que $a \ge 0$. Sabemos que $a^2 \ge 0$ y por ello que posee una única raíz cuadrada no negativa, la cual es necesariamente a pues $a \cdot a = a^2$ por definición. Esto coincide claramente con $|a| = a$.

Supongamos ahora que $a < 0$, con lo que $-a > 0$; dado que $a^2 \ge 0$, éste posee una única raíz cuadrada no negativa, la cual es claramente $-a$, dado que $(-a)(-a) = a^2$. Esto coincide con $|a| = -a$, como queríamos probar.

(2) Si $b > 0$ entonces $1/b > 0$ y $|b| = b$, con lo que $|1/b| = 1/b = 1/|b|$.

Por contra, si $b < 0$, entonces $1/b < 0$ y $|b| = -b$, con lo que $|1/b| = -1/b$.

Por tanto, sabido que $|ab| = |a||b|$, deducible sencillamente de la definición,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|},$$

como queríamos demostrar. $\square$

76. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que $|a+b| = |a| + |b|$ si y solo si $ab \geq 0$.

Solución. ($\Rightarrow$) Supongamos que $|a+b| = |a| + |b|$. En tal caso,

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = |a+b|^2 = (|a| + |b|)^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b|,$$

de modo que $|ab| = ab$.

Supongamos por reducción al absurdo que $ab < 0$, de forma que $|ab| = -ab$ y por ende $|ab| = ab$ es equivalente a $2ab = 0$. Deducimos así que $a = 0$ o $b = 0$, lo cual contradice la suposición previa de que $ab < 0$. Con ello $ab \geq 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $ab \geq 0$ y veamos que $|a+b| = |a| + |b|$. Distinguimos los siguientes casos:

- Supongamos que $ab = 0$ y, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$ en particular. Entonces, $|a+b| = |b| = |0| + |b| = |a| + |b|$, como queríamos.
- Supongamos que $ab > 0$, de forma que $a, b > 0$ y por consiguiente $|a+b| = a+b = |a| + |b|$ o bien $a, b < 0$ y en tal caso $|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$, como queríamos.

Esto concluye la solución del ejercicio. $\square$

77. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq z$. Demuestra que $x \leq y \leq z$ si y solo si $|x-y| + |y-z| = |x-z|$. Explica una interpretación geométrica de este resultado.

Solución. ($\Rightarrow$) Supongamos que $x \leq y \leq z$. En tal caso, $|x-y| = y-x$, $|y-z| = z-y$ y $|x-z| = z-x$, de forma que $|x-y| + |y-z| = y-x+z-y = z-x = |x-z|$, como queríamos probar.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $|x-y| + |y-z| = |x-z|$ y que $x \leq z$.

- Supongamos que $y < x$, entonces $|x-y| + |y-z| = x-y+z-y = z+x-2y \neq z-x = |x-z|$.
- Supongamos que $y > z$, entonces $|x-y| + |y-z| = y-x+y-z = 2y-x-z \neq z-x = |x-z|$.

Con ello, necesariamente $x \leq y \leq z$, como queríamos probar.

Geométricamente, esto significa que la distancia entre x e y más la distancia entre y y z ha de ser precisamente la distancia entre x y z si y solamente si y se encuentra entre x y z. $\square$

78. Sean $x, a \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Demuestra que $|x-a| < \varepsilon$ si y solo si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Solución. Supongamos que $x - a \geq 0$, entonces es claro que $x < a + \varepsilon$, mientras que, trivialmente, $a - \varepsilon < x$ pues $a - x \leq 0 < \varepsilon$.

Supongamos ahora que $x - a < 0$, entonces de $|x-a| < \varepsilon$ deducimos que $a - x < \varepsilon$ y por ende que $a - \varepsilon < x$, mientras que, trivialmente, $x < a + \varepsilon$, pues $x - a < 0 < \varepsilon$.

Esto concluye la solución del ejercicio, pues la condición es equivalente a que $x < a + \varepsilon$ y que $a - \varepsilon < x$, que reescrito resulta $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. $\square$

79. Sean $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$ y $a < y < b$.

(1) Demuestra que se verifica la desigualdad $|x-y| < b-a$.
(2) Establece la interpretación geométrica de este resultado.

Solución. (1) Supongamos sin pérdida de generalidad que $x < y$, de forma que $|x-y| = y-x$, dado que en caso contrario el razonamiento es exactamente el mismo intercambiando los papeles de x e y.

Con ello, $|x-y| < b-a$ si y solo si $y - x < b - a$ o, equivalentemente, $y + a < x + b$. Probémoslo.

Dado que $y < b$, sumando en ambos lados de la desigualdad a obtenemos que $y + a < b + a$, y dado que $a < x$, deducimos que $b + a < b + x$, tras sumar en ambos lados de la desigualdad b. Por la transitividad del orden, concluimos que $y + a < b + x$, como queríamos concluir.

(2) La interpretación geométrica del resultado es clara: la distancia entre dos puntos situados en un mismo intervalo es menor o igual que la longitud de dicho intervalo. $\square$

80. Encuentra todos los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

(1) $|4x-5| \leq 13$; (2) $|x^2-1| \leq 3$.

Solución. (1) Usando el Ejercicio 78, basta observar que

$$\begin{aligned} |4x-5| \leq 13 &\iff -13 \leq 4x-5 \leq 13 \\ &\iff -8 \leq 4x \leq 18 \\ &\iff -2 \leq x \leq 9/2. \end{aligned}$$

(2) De manera similar,

$$\begin{aligned} |x^2-1| \leq 3 &\iff -3 \leq x^2-1 \leq 3 \\ &\iff -2 \leq x^2 \leq 4 \\ &\iff 0 \leq x^2 \leq 4 \\ &\iff \sqrt{0} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{4} = 2 \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 2 \\ &\iff -2 \leq x \leq 2, \end{aligned}$$

lo cual concluye la solución del ejercicio. □

81. Encuentra todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $|x+1|+|x-2|=7$.

Solución. Distinguimos los $x \in \mathbb{R}$ según cambien de definición los valores absolutos en la ecuación del enunciado. Dicha definición cambia en $x=-1$ y en $x=2$, de modo que resolver la ecuación equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} (x+1)+(x-2)=7 & \text{si } x \geq 2, \\ (x+1)-(x-2)=7 & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ -(x+1)-(x-2)=7 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

o bien, tras simplificar las expresiones anteriores,

$$\begin{cases} 2x-1=7 & \text{si } x \geq 2, \\ 3=7 & \text{si } -1 \leq x < 2, \\ -2x+1=7 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

con lo que el segundo caso es absurdo y no hay soluciones si $-1 \leq x < 2$, mientras que la única solución en el primer caso sería $x=4$, que es mayor que 2 y por ende válida, y la solución en el tercer caso sería $x=-3$, que menor que -1, con lo que también es válida. Así, las soluciones a la ecuación son $x=-3$ y $x=4$. □

82. Encuentra todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

(1) $|x-1| > |x+1|$; (2) $|x|+|x+1| < 2$.

Solución. (1)

$$|x+1| < |x-1| \iff \left\{ \begin{array}{lcccr} [& -(x+1) < -(x-1) & \wedge & x \leq -1 &] \ \vee \\ [& x+1 < -(x-1) & \wedge & -1 < x \leq 1 &] \ \vee \\ [& x+1 < x-1 & \wedge & 1 < x &] \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcccr} [& -1 < +1 & \wedge & x \leq -1 &] \ \vee \\ [& x < -x & \wedge & -1 < x \leq 1 &] \ \vee \\ [& 1 < -1 & \wedge & 1 < x &] \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{lcr} [& x \leq -1 &] \ \vee \\ [& -1 < x < 0 &] \end{array} \right\} \iff x < 0$$

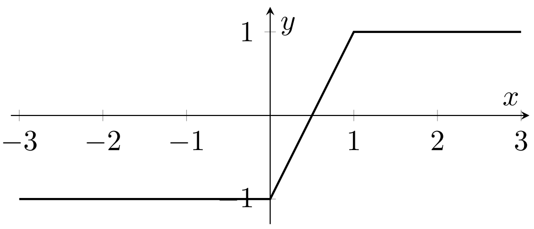
□

83. Esboza la gráfica de la ecuación $y=|x|-|x-1|$.

Solución. Esencialmente, es la gráfica dada por la expresión por partes

$$y = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \le x. \end{cases}$$

la cual es sencilla de esbozar: $\square$



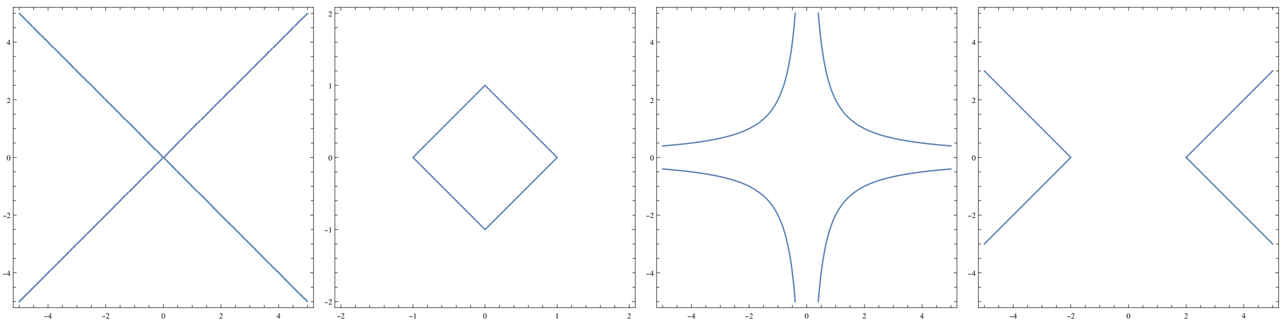
85. Determina todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $|2x - 3| < 5$ y $|x + 1| > 2$ simultáneamente.

Solución. Es sencillo comprobar que las soluciones de la primera inecuación son los números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $-1 < x < 4$ y que las soluciones de la segunda inecuación son los números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $x < -3$ o $x > 1$. Así, si $x \in \mathbb{R}$ es solución de ambas inecuaciones ha de satisfacer necesariamente $1 < x < 4$. $\square$

86. Determina analíticamente y esboza el conjunto de pares de números reales $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

(1) $|x| = |y|$;
(2) $|x| + |y| = 1$;
(3) $|xy| = 2$;
(4) $|x| - |y| = 2$.

Solución. Las representaciones resultan las siguientes: $\square$



87. Determina analíticamente y esboza el conjunto de pares de números reales $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

(1) $|x| \le |y|$;
(2) $|x| + |y| \le 1$;
(3) $|xy| \le 2$;
(4) $|x| - |y| \ge 2$.

Solución. Lo mismo que en el apartado anterior, pero con el «relleno»: $\square$