

**CLASE #14: 14 DE MARZO DE 2019**

**Ejercicio 6.25.** Probar que el error cometido al sustituir  $\sin(x)$  por

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$$

es menor que  $10^{-4}$  supuesto que  $|x| \leq \pi/4$ .

**Solución.** Observemos en primer lugar que  $x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$  es el polinomio de Taylor de orden 5 (o de orden 6) del seno entorno a 0. En virtud del Teorema de Taylor para el residuo (de Lagrange), sabemos que el error cometido al aproximar una función como es  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(x)$ , por su polinomio de Taylor de orden 6, que denotaremos  $P_6(x)$ , viene dado por el valor absoluto del residuo de Lagrange:

$$|f(x) - P_6(x)| = |R_6(x)| = \left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right|$$

para cierto  $\theta$  interior al intervalo de extremos 0 y  $x$ . Como queremos demostrar que el error cometido en  $[-\pi/4, \pi/4]$  resultará menor que  $10^{-4}$ , hemos de encontrar una cota superior para la anterior expresión para todo  $x$  y para todo  $\theta$ . Sin embargo, la dependencia de  $\theta$  y  $x$  no es explícita, de modo que buscaremos sencillamente una cota uniforme cualquiera que sea  $\theta$  y  $x$  en el intervalo citado, una cota posiblemente muy mejorable, aunque suficiente en el caso de nuestros ejemplos. Por ejemplo, dado que

$$f^{(6+1)}(t) = -\cos(t), \quad (6+1)! = 5040,$$

podemos mayorar el valor absoluto del residuo de Lagrange por

$$\left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right| \leq \frac{1}{5040} |f^{(7)}(\theta)| |x|^7 = \frac{1}{5040} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \leq 3,658 \cdot 10^{-5} \leq 10^{-4},$$

como queríamos.  $\square$

**Ejercicio 6.26.** Probar que el error cometido al sustituir  $\sin(e^x - 1)$  por

$$x + \frac{1}{2}x^2$$

es menor que  $3 \cdot 10^{-3}$  supuesto que  $|x| \leq 10^{-1}$ .

**Solución.** Observamos nuevamente que  $x + x^2/2$  es el polinomio de Taylor de orden 2 de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(e^x - 1)$ , de forma que procedemos análogamente al ejercicio anterior. El error al aproximar  $f$  por su polinomio de Taylor es el residuo de Lagrange

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{6} |f'''(\theta)| \cdot 10^{-3}$$

para cierto  $\theta$  entre 0 y  $x$ , donde,

$$f'''(\theta) = -e^\theta [3e^\theta \sin(e^\theta - 1) + (e^{2\theta} - 1) \cos(e^\theta - 1)]$$

y, empleando la desigualdad triangular,

$$|f'''(\theta)| \leq e^\theta [3e^\theta |\sin(e^\theta - 1)| + (e^{2\theta} + 1) |\cos(e^\theta - 1)|]$$

Ahora bien, dado que  $|\operatorname{sen}| \leq 1$ ,  $|\cos| \leq 1$  en  $\mathbb{R}$ , y puesto que la exponencial es estrictamente creciente,  $e^{1/10} \leq e^{3/10} \approx 1,35$  y

$$|f'''(\theta)| \leq e^{3/10}[3e^{3/10} + (e^{3/10} + 1)] \approx 8,64$$

de modo que podemos concluir que el error cometido está acotado superiormente por:

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|f'''(\theta)||x|^3 \leq \frac{e^{3/10}(4e^{3/10} + 1)}{6}10^{-3} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Esto concluye el ejercicio.  $\square$

**Ejercicio 6.29.a.** Hallar el mayor número natural  $p$  tal que el límite de  $f(x)/x^p$  es finito cuando  $x \rightarrow 0$  siendo  $f$  la función real dada por la expresión  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  para todo número real  $x$ .

**Solución.** Es bien conocida la propiedad trigonométrica:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

mientras que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{2x} = \infty.$$

Así, la función seno es un infinitésimo de orden 1 cuando  $x \rightarrow 0$ . Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\operatorname{sen}(x) = x^1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

como queríamos concluir.  $\square$

**Ejercicio 6.29.b.** Hallar el mayor número natural  $p$  tal que el límite de  $f(x)/x^p$  es finito cuando  $x \rightarrow 0$  siendo  $f$  la función real dada por  $f(x) = \log(1+x)$  para todo número real  $x > -1$ .

**Solución.** Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\log(1+x) = x^1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

como queríamos concluir.  $\square$

**Ejercicio 6.29.c.** Hallar el mayor número natural  $p$  tal que el límite de  $f(x)/(x-1)^p$  es finito cuando  $x \rightarrow 1$  siendo  $f$  la función real dada por  $f(x) = 1 - x \log(x)$  para todo número real  $x > 0$ .

**Solución.** Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \log(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1} = 0,$$

también se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \log(x)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{2(x - 1)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \log(x)}{(x - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{3(x - 1)^2} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{3(x - 1)x} = -\infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$1 - x + \log(1 + x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + \dots$$

como queríamos observar.  $\square$

**Ejercicio 6.30.a.** Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen}(ax) - 3ax - a^3x^3}{6bx - 6 \operatorname{sen}(bx) + b^3x^3}$$

**Solución.** En virtud del Teorema de Taylor, se obtiene que

$$3 \operatorname{sen}(ax) = 3ax - \frac{a^3x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{y} \quad 6 \operatorname{sen}(bx) = 6bx - b^3x^3 + o(x^3),$$

de forma que, sustituyendo ambas expresiones en el límite del enunciado, deducimos que éste resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[3ax - \frac{1}{2}a^3x^3 + o(x^3)] - 3ax - a^3x^3}{6bx - [6bx - b^3x^3 + o(x^3)] + b^3x^3}$$

y simplificando, éste es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3x^3 + o(x^3)}{2b^3x^3 + o(x^3)}.$$

Dividiendo en ambos numerador y denominador por  $x^3$  y observando que, por la definición de  $o$  de Landau,  $o(x^3)/x^3 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , concluimos que el anterior límite es, finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2b^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{3}{4} \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

$\square$