170. Determina la convergencia de la sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Veamos que la sucesión es estrictamente creciente, lo cual es bastante intuitivo con la definición de y_n:

$$\begin{aligned} y_n \le y_{n+1} &\iff \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} \\ &\iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\iff (2n+1)(2n+2) \le (2n+2)(n+1) + (2n+1)(n+1) \\ &\iff 4n^2 + 6n + 2 \le 2n^2 + 4n + 2 + 2n^2 + 3n + 1 \\ &\iff -1 \le n, \end{aligned}$$

condición que se verifica trivialmente.

Veamos ahora que la sucesión está acotada superiormente:

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \overset{n)}{\cdots} + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Es claro también que la sucesión está acotada inferiormente por 0, dado que cada término es positivo. En virtud del Teorema de la Convergencia Monótona, la sucesión es convergente. □

171. Denotemos $x_n = 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente y está acotada, de forma que converge. Como sugerencia, nota que si $k \ge 2$, entonces $1/k^2 \le 1/[k(k-1)] = 1/(k-1) - 1/k$.

Solución. La sucesión es claramente creciente:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = x_n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{>0} > x_n.$$

Además, está acotada superiormente:

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le \boxed{1} + \left(\boxed{\frac{1}{1}} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \boxed{\frac{1}{n}}\right) \overset{\text{telescop.}}{=} 1 + 1 - \frac{1}{n} \le 2,$$

donde hemos empleado la sugerencia del enunciado. □

Observación. Hemos deducido la convergencia de lo que se conoce como serie de los cuadrados de los inversos de los naturales.

Fue un problema muy conocido determinar el límite de la sucesión, el problema de Basilea, resuelto por Euler: $x_n \to \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. □

172. Establece la convergencia de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si

(1) $x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/n)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = [1 + 1/(n+1)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = (1 - 1/n)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Determina el valor de sus respectivos límites.

Solución.

(1) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to e\cdot 1 = e.$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \to e\cdot e = e^2.$

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = \dfrac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})} \to \dfrac{e}{1} = e.$

(4) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n} = \dfrac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \dfrac{1}{(\frac{n-1+1}{n-1})^n} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1})} \to \dfrac{1}{e\cdot 1}$

□

En el Ejemplo 3.3.5 de Introduction to Real Analysis, de R. G. Bartle y D. R. Sherbert se explica como aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona para calcular raíces cuadradas de números positivos. Básicamente, dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, el método consiste en emplear la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, definida recursivamente por $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$, cuyo límite x existe por el citado teorema, y ha de satisfacer necesariamente $x = (x + a/x)/2$, es decir, $x = \sqrt{a}$.

173. Emplea el ejemplo citado para calcular $\sqrt{2}$ con cuatro cifras decimales de precisión.

Solución.

- Definamos $s_1 := 1$; $s_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(s_n + \dfrac{a}{s_n}\Big).$
- Tenemos $0 \le s_n - \sqrt{a} =: \mathrm{error}_n \le s_n - \dfrac{a}{s_n}$ $\forall n \ge 2$
- $s_2 = \dfrac{1}{2}\Big([1] + \dfrac{2}{[1]}\Big) = \dfrac{3}{2};$
- $\mathrm{error}_2 \le \dfrac{s_2^2 - 2}{s_2} = \dfrac{[3/2]^2 - 2}{[3/2]} = \dfrac{1}{6}$
- $s_3 = \dfrac{1}{2}\Big([3/2] + \dfrac{2}{[3/2]}\Big) = \dfrac{17}{12};$
- $\mathrm{error}_3 \le \dfrac{s_3^2 - 2}{s_3} = \dfrac{[17/12]^2 - 2}{[17/12]} = \dfrac{1}{204} = 0,00490196078...$
- $s_4 = \dfrac{1}{2}\Big([17/12] + \dfrac{2}{[17/12]}\Big) = \dfrac{577}{408};$
- $\mathrm{error}_4 \le \dfrac{[577/408]^2 - 2}{[577/408]} = \dfrac{1}{235416} = 0,000004247799639... \le 0,00001$

de esta forma

$$\boxed{\sqrt{2} = \frac{577}{408} \pm 10^{-5} = 1,41421 \pm 0,00001.}$$

□

175. Proporciona un ejemplo de sucesión no acotada que tenga una subsucesión convergente.

Solución. Definamos la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dada por $x_{2n} = 0$ y por $x_{2n-1} = 2n - 1$, de forma que la sucesión no es acotada pero posee una subsucesión convergente, más concretamente constante, la de los elementos pares. □

176. Sea $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$, demuestra que $c^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Solución. Es fácil seguir del Ej. 74 que $\{c^{1/n}\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por 1, luego por el Tma. de la Conv. Monótona es convergente, digamos a L.

Dado que $x_{2n} = \sqrt{x_n}$, deducimos que el límite satisface $L = \sqrt{L}$, con lo que $L = 0$ o $L = 1$.

$L = 0$ es imposible dado que $c^{1/n}$ es creciente y se demuestra que $c^{1/n} > c^{1/1} > \frac{1}{2}c > 0$.

Por tanto, $c^{1/n} \to L = 1$. $\square$

177. Sea $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ la conocida sucesión de Fibonacci y denotemos $x_n = \phi_{n+1}/\phi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Determina el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$, supuesto sabido que la sucesión converge.

Solución. Es un poco dificil probar la convergencia, no lo haremos.

Reescribimos

$$x_n = \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = \frac{\phi_n + \phi_{n-1}}{\phi_n} = 1 + \frac{\phi_{n-1}}{\phi_n} = 1 + \frac{1}{\phi_n/\phi_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \implies L = 1 + \frac{1}{L} \implies L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

pero como $f_n > 0$, entonces $x_n > 0$, entonces $L \geq 0$, luego vale solo $(1+\sqrt{5})/2$; el número aúreo. $\square$

178. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son divergentes, si:

(1) $x_n = 1 - (-1)^n + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(2) $x_n = \operatorname{sen}(n\pi/4)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (1) No es convergente, $x_{2n} = 0 + \frac{1}{2n} \to 0$ y $x_{2n+1} = 2 + \frac{1}{2n+1} \to 2$.

(2) No es convergente, $x_{8n} = 0$ y $x_{8n+1} = \operatorname{sen}(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. $\square$