

Ejercicio 5.20. Sea f una función real acotada definida en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset I$, se denomina al número

$$\omega_f(S) := \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\}$$

oscilación de f en S . Para un punto en particular $x_0 \in I$, podemos definir la oscilación de f en x_0 como el número

$$\omega_f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0 .

Solución. En primer lugar, podemos observar que si $\omega_f(S) < +\infty$, entonces $\omega_f(S) \geq 0$. En efecto, si se tiene $f(x) - f(y) \leq 0$ entonces intercambiando los papeles de x e y , $f(y) - f(x) \geq 0$, de forma que $\omega_f(S) \geq 0$ si es finito. Podríamos así considerar definida la oscilación de f en S por la expresión $\omega_f(S) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}$. Consideremos ahora $x_0 \in I$ y veamos que el límite $\omega_f(x_0)$ siempre existe (si f es acotada e I es compacto). En primer lugar, es un número acotado superiormente por $\omega_f(I)$ (pues este último es el supremo en un conjunto mayor, I , que es mayor cualquier supremo sobre conjuntos más pequeños, $I \cap B_h(x_0)$). Dicha cota superior es además finita, dado que la función f es, por hipótesis, acotada en I . Esto es, existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, y por ende $\omega_f(S) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\} \leq M - (-M) = 2M$. Por último, comprobemos que $[0, \infty) \ni h \mapsto \omega_f(I \cap B_h(x_0))$ es una aplicación monótona decreciente, pues sencillamente

$$\begin{aligned} \omega_f(I \cap B_{h_1}(x_0)) &= \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_1}(x_0)\} \\ &\leq \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_2}(x_0)\} \\ &= \omega_f(I \cap B_{h_2}(x_0)) \end{aligned}$$

para cualesquiera $0 \leq h_1 < h_2$, al tomarse el primer supremo en un conjunto menor que el segundo supremo. Así, deducimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \geq 0,$$

sabemos que dicha expresión se corresponde con un número real no negativo. Veamos ahora que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0 . Supongamos en primer lugar que $\omega_f(x_0) = 0$, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta_\varepsilon > 0$ de manera que si $0 < h \leq \eta_\varepsilon$ entonces $\omega_f(I \cap B_h(x_0)) \leq \varepsilon$. De esta desigualdad se sigue inmediatamente que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon := \eta_\varepsilon/2$ de forma que si $0 < |h| < \delta_\varepsilon$, se tiene

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \sup\{f(a) - f(b) : a, b \in I \cap B_{|h|}(x_0)\} = \omega_f(I \cap B_{|h|}(x_0)) \leq \varepsilon$$

con lo que f es continua en x_0 . Recíprocamente, supongamos que f es continua en $x_0 \in I$ y veamos que $\omega_f(x_0) = 0$ necesariamente. En efecto, fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ entonces se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Como

hemos comentado anteriormente, y empleando la desigualdad triangular e identidades sencillas relacionadas con el supremo:

$$\begin{aligned}
& \omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \\
&= \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0) + f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq \sup\{|f(a) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} + \\
&\quad \sup\{|f(x_0) - f(b)| : b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= 2 \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \leq \omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \leq 2\varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, y puesto que $\omega_f(x_0)$ es independiente de ε , necesariamente $\omega_f(x_0) = 0$, como queríamos comprobar. \square

Ejercicio 5.21. *Supóngase que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Demostrar que f está acotada y que alcanza un máximo o un mínimo. Dar un ejemplo para indicar que no necesariamente se tienen por qué alcanzar tanto un máximo como un mínimo.

Solución. Dado que, por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ de forma que si $|x| > M_\varepsilon$, entonces $|f(x)| \leq \varepsilon$, deducimos tomando $\varepsilon = 1$, por ejemplo, que existe $M_1 > 0$ de forma que $|f(x)| \leq 1$ en $\mathbb{R} \setminus [-M_1, M_1]$. Dado que el intervalo $[-M_1, M_1]$ es compacto y f es continua en éste, ésta es acotada, digamos que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ en $[-M_1, M_1]$. Entonces, $|f(x)| \leq \max\{1, C\}$ en \mathbb{R} , como queríamos probar. Demostremos ahora que la función alcanza un máximo o un mínimo en \mathbb{R} . Supuesto que $f \neq 0$, caso trivial, sabremos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Supongamos que $f(x_0) > 0$ y consideremos el intervalo $[-M_c, M_c]$, siendo $c := \frac{1}{2}f(x_0)$. En virtud del Teorema de Weierstraß, en dicho intervalo se alcanza un máximo, como mínimo de valor $f(x_0)$, y recordemos que se tiene $|f(x)| \leq f(x_0)$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus [-M_c, M_c]$. No obstante, puede ser que no se alcance un máximo y un mínimo en \mathbb{R} . Para ello, consideremos, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^{-x^2}$. Se comprueba que dicha función es continua y alcanza un máximo absoluto en $x = 0$, pero sin embargo no alcanza un mínimo. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2^{-x^2}$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ pero no tiene máximo en \mathbb{R} , como se muestra en la Figura 2. Un ejemplo más sencillo consiste en considerar las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \pm(1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, que son continuas y satisfacen naturalmente las hipótesis, pero no tienen mínimos/máximos respectivamente, como se muestra en la Figura 3. Esto concluye el ejercicio. \square

Como ejercicio adicional puede comprobarse que la tesis sobre la acotación se sigue verificando si los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ de $f(x)$ son números reales arbitrarios

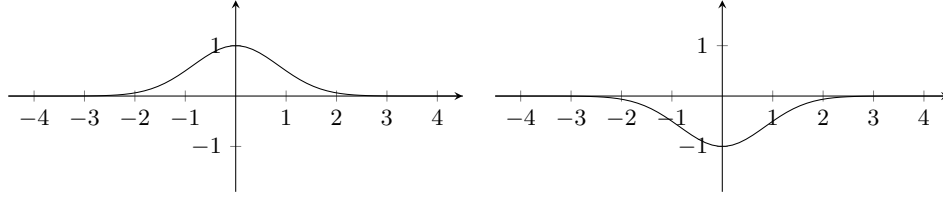


FIGURA 2. Representación gráfica de $x \mapsto 2^{-x^2}$ (izquierda) y de $x \mapsto -2^{-x^2}$ (derecha), las cuales satisfacen las hipótesis del enunciado pero no tienen mínimo/máximo, respectivamente.

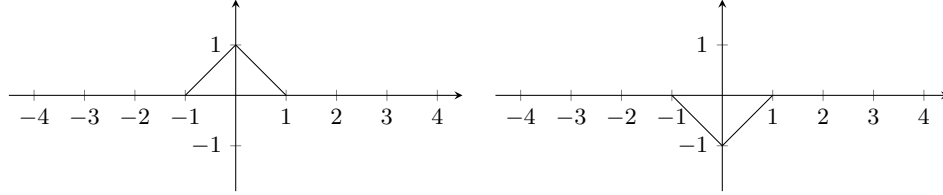


FIGURA 3. Representación gráfica de $x \mapsto (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ (izquierda) y de $x \mapsto (|x| - 1)\chi_{[-1,1]}(x)$ (derecha), respectivamente.

posiblemente distintos, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L_{-\infty} \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_{+\infty} \in \mathbb{R}.$$

¿Qué se puede decir de la existencia de máximos o mínimos? Desde luego, si $L_{-\infty} \neq L_{+\infty}$, podemos usar funciones de la forma $x \mapsto A \arctan(x) + B$ con A y B expresados en términos de $L_{-\infty}$ y $L_{+\infty}$ (¿cómo?) de forma que no se alcanza ningún máximo ni ningún mínimo.

Ejercicio 5.22.a. Determinar si la función $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.

Solución. Para que f sea uniformemente continua tenemos que encontrar, fijado $\varepsilon > 0$, un número real $\delta_\varepsilon > 0$ de forma que si $x, y \in [1, \infty)$ son cualesquiera satisfaciendo $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$, se tenga $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Analizando la última desigualdad,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|xy|} \leq \frac{\delta_\varepsilon}{1} \stackrel{!}{\leq} \varepsilon,$$

donde hemos empleado que $x, y \geq 1$ y por ende $1/xy \leq 1$, deducimos que resulta suficiente tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon$ para que el enunciado se verifique. Así, f es uniformemente continua en $[1, \infty)$. \square

Ejercicio 5.22.b. Determinar si la función $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.

Solución. Intuitivamente, el crecimiento en $(0, 1)$ de la función en un entorno de 0 es muy fuerte como para que la continuidad sea uniforme. Así, veamos que existe ε de forma que para todo $\delta > 0$, existen $x_\delta, y_\delta \in (0, 1)$ de forma que $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Para explotar el crecimiento entorno a 0 consideremos $\varepsilon = 1$, sin pérdida de generalidad, y elijamos $n_\delta \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para

que $\delta \geq 2^{-(n_\delta+1)}$ y escojamos, por ejemplo $x_\delta := 2^{-n_\delta}$ e $y_\delta := 2^{-(n_\delta+1)}$, de forma que $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \leq \delta$ y

$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| = \frac{|x_\delta - y_\delta|}{|x_\delta y_\delta|} \geq 1$$

si y solo si $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \geq |x_\delta y_\delta| = 2^{-(2n_\delta+1)}$, lo cual es cierto, como queríamos obtener. Concluimos que f no es, en efecto, uniformemente continua en $(0, 1)$. \square

Otra posibilidad consiste en usar los Criterios de No-Continuidad Uniforme estudiados en teoría.