

Algunas aclaraciones sobre la continuidad uniforme

Que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sea **uniformemente en un intervalo I** quiere decir que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

esto es muy distinto a que la función sea **continua en I** :

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, x} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

pues, como vemos, hay una dependencia de δ en términos de ε pero también del punto x . ¡Ojo! no es lo mismo que cuando hablamos de que la función sea **continua en un punto $x_0 \in I$ (fijo)**, que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x_0 - y| \leq \delta_{\varepsilon, x_0} \implies |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

Una forma de demostrar que una función **no** es uniformemente continua es considerar simplemente la negación de la primera fórmula:

$$\begin{aligned} & \neg[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon] \\ \equiv & \quad \exists \varepsilon > 0 \neg[\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon] \\ \equiv & \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \neg[\forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon] \\ \equiv & \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \neg[|x_\delta - y_\delta| \leq \delta \implies |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \leq \varepsilon] \\ \equiv & \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \quad |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon \end{aligned}$$

Esto se puede emplear en el Ejercicio 2.22.b, por ejemplo.