ANÁLISIS DE VARIABLE REAL · 2019-2020 · U.C.M.
RELACIÓN DE EJERCICIOS · GRUPO M5

Conjuntos y funciones.

1. Sean A y B dos conjuntos, prueba que $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$.

2. Demuestra la conocida como segunda ley de De Morgan: si A, B y C son conjuntos cualesquiera, se verifica que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. Sean A, B y C tres conjuntos. Demuestra las siguientes propiedades:

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. Denotemos $A_n = \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(1) ¿Qué conjunto es $A_1 \cap A_2$?
(2) Describe los conjuntos $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Dibuja los diagramas en el plano del producto cartesiano $A \times B$ para los conjuntos A y B dados: (1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2 \text{ o } 3 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 \text{ o } x = 2\}$; (2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\}$.

6. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ un subconjunto de los números reales. ¿Es el conjunto $C = \{(x, y) \in A \times A : x^2 + y^2 = 1\}$ la gráfica de una función?

7. Sea f la función real dada por $f(x) = 1/x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Con ello, determina:

(1) la imagen, $f(E)$, de $E = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$;
(2) la imagen inversa, $f^{-1}(G)$, de $G = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$.

8. Sea g la función dada por $g(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea f la función dada por $f(x) = x + 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la composición de ambas, $h = g \circ f$. Determina:

(1) la imagen, $h(E)$, de $E = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$;
(2) la imagen inversa, $h^{-1}(G)$, de $G = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.

Esta relación de ejercicios ha sido extraída del libro *Introduction to Real Analysis*, de R. G. Bartle y D. R. Sherbert, en su tercera edición. Se valorará positivamente la participación en clase así como la entrega de problemas resueltos y su presentación en pizarra. Para cualquier duda, sugerencia o comentario puedes escribir a la dirección de correo electrónico alberto.ruiz.alarcon@icmat.es, o concertar una tutoría en el Despacho 251 de la Facultad de Ciencias Matemáticas.

9. Sea f la función real dada por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y denotemos $E = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}$ y $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Demuestra que $E \cap F = \{0\}$ y que $f(E \cap F) = \{0\}$, mientras que, por otra parte, se tiene que $f(E) = f(F) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. Deduce así que $f(E \cap F)$ es un subconjunto propio de $f(E) \cap f(F)$. ¿Qué ocurre si se elimina 0 de los conjuntos E y F? Determina los conjuntos $E \setminus F$ y $f(E) \setminus f(F)$ y demuestra que no es cierto que $f(E \setminus F) \subseteq f(E) \setminus f(F)$.

10. Sea A y B dos conjuntos, sea $f : A \to B$ una aplicación y $E, F \subseteq A$. Demuestra que $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ y $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$. ¿Por qué no se tiene la igualdad en general?

11. Sean A y B dos conjuntos, sea $f : A \to B$ una aplicación y sean G y H dos subconjuntos de B. Demuestra que se verifican las igualdades $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Encuentra una aplicación biyectiva explícita de $A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ en $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$.

13. Proporciona un ejemplo de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f \neq g$ pero que verifiquen que $f \circ g = g \circ f$.

14. Sean A y B dos conjuntos.

(1) Demuestra que si $f : A \to B$ es inyectiva y $E \subseteq A$, entonces se verifica la igualdad $f^{-1}(f(E)) = E$.

(2) Proporciona un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si la aplicación f no es inyectiva.

(3) Demuestra que si $f : A \to B$ es suprayectiva y $H \subseteq B$, entonces se verifica la igualdad $f(f^{-1}(H)) = H$.

(4) Proporciona un ejemplo que muestre que la igualdad no se cumple necesariamente si la aplicación f no es suprayectiva.

15. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si f es una aplicación inyectiva entonces $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, y $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para todo $y \in \mathrm{Im}(f)$;

(2) si f es una aplicación biyectiva de A en B, demuestra que f^{-1} es una aplicación biyectiva de B en A.

16. Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones biyectivas. Demuestra que $g \circ f$ es una aplicación biyectiva de A en C.

17. Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva;

(2) si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

18. Sean A, B y C tres conjuntos y sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. Demuestra que si H es un subconjunto de C, se verifica la igualdad $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.

19. Sean f y g dos aplicaciones tales que $(g \circ f)(x) = x$ cualquiera que sea $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in \mathrm{Dom}(g)$. Demuestra que son mutuamente inversas, es decir, $g = f^{-1}$.

Inducción matemática.

20. Demuestra que $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + \cdots + 1/(n(n+1)) = n/(n+1)$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

21. Demuestra que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

22. Demuestra que $3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

23. Demuestra que $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = (4n^3 - n)/3$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

24. Demuestra que $1^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}n(n+1)/2$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

25. Demuestra que $n^3 + 5n$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

26. Demuestra que $5^{2n} - 1$ es divisible por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

27. Demuestra que $5^n - 4n - 1$ es divisible por 16 para todo $n \in \mathbb{N}$.

28. Demuestra que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

29. Conjetura una fórmula para $1/(1 \cdot 3) + \cdots + 1/[(2n-1)(2n+1)]$ y demuéstrala empleando el principio de inducción matemática.

30. Conjetura una fórmula para la suma de los primeros n números naturales impares, $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ y demuéstrala empleando el principio de inducción matemática.

31. Prueba la siguiente versión del principio de inducción matemática, modificada para empezar a partir de un cierto número natural, no necesariamente uno: sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(n)$ una proposición sobre cada número natural $n \geq n_0$. Supongamos que la proposición $P(n_0)$ es cierta y que para todo $\ell \geq n_0$, la veracidad de $P(\ell)$ implica la veracidad de $P(\ell+1)$; entonces, $P(n)$ es cierto para todo $n \geq n_0$.

32. Demuestra que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

33. Demuestra que $2^n < n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

34. Demuestra que $2n - 3 < 2^{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

35. Determina todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n^2 < 2^n$ y demuéstralo.

36. Encuentra el mayor $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 - n$ es divisible por m para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuéstralo.

37. Demuestra que $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

38. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que (i) $2^n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y (ii) si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, entonces $n - 1 \in A$. Demuestra que $A = \mathbb{N}$.

39. Sean $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ y definamos $x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$ recursivamente para todo $n \in \mathbb{N}$. Emplea el principio de inducción matemática fuerte para demostrar que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conjuntos finitos e infinitos.

40. Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$ dos conjuntos, donde a, b y c son elementos que consideramos distintos.

(1) Determina el número de aplicaciones inyectivas de A en B.
(2) Determina el número de aplicaciones suprayectivas de B en A.

41. Encuentra una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y el conjunto de todos los enteros impares mayores que 13.

42. Escribe una definición explícita de aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

43. Encuentra una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y un subconjunto propio de sí mismo.

44. Proporciona un ejemplo de colección numerable de conjuntos finitos cuya unión sea no finita.

45. Sean A y B dos conjuntos numerables. Demuestra en detalle que $A \cup B$ es un conjunto numerable.

46. Determina el número de elementos en $\wp(A)$, la colección de todos los subconjuntos del conjunto A, para cada uno de los siguientes casos: (1) $A = \{1, 2\}$; (2) $A = \{1, 2, 3\}$; (3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

47. Empleando el principio de inducción matemática, demuestra que si un conjunto A tiene $n \in \mathbb{N}$ elementos, entonces su conjunto de partes, $\wp(A)$, tiene 2^n elementos.

48. Demuestra que la colección $\wp_{\mathrm{f}}(\mathbb{N})$, formada por todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, es numerable.

Las propiedades algebraicas y de orden de los números reales.

49. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a + b = 0$, $b = -a$;

(2) $-(-a) = a$;

(3) $(-1)a = -a$;

(4) $(-1)(-1) = 1$.

50. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) $-(a + b) = (-a) + (-b)$;

(2) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

(3) $1/(-a) = -(1/a)$;

(4) $-(a/b) = (-a)/b$ si $b \neq 0$.

51. Resuelve las siguientes ecuaciones justificando paso por paso refiriéndote a la propiedad o teorema empleados:

(1) $2x + 5 = 8$;

(2) $x^2 = 2x$;

(3) $x^2 - 1 = 3$;

(4) $(x - 1)(x + 2) = 0$.

52. Si $a \in \mathbb{R}$ satisface $a \cdot a = a$, prueba que entonces $a = 0$ o $a = 1$.

53. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos. Demuestra que $1/(a \cdot b) = (1/a) \cdot (1/b)$.

54. Demuestra que no existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s^2 = 6$.

55. Demuestra que no existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $t^2 = 3$.

56. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces $x + y, xy \in \mathbb{Q}$;

(2) si $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(3) si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demuestra que $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

57. Sea $K = \{s + t\sqrt{2} : s, t \in \mathbb{Q}\}$. Demuestra que posee las propiedades:

(1) si $x, y \in K$, entonces $x + y \in K$ y $xy \in K$;

(2) si $x \in K$ es no nulo, entonces $1/x \in K$.

Se dice así que el conjunto K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ con la suma y producto usuales, el cual se denota usualmente $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

58. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$;

(2) si $0 < a < b$ y $0 \leq c \leq d$, entonces $0 \leq ac \leq bd$.

59. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ y $1/(1/a) = a$;

(2) si $a < b$, entonces $a < (a + b)/2 < b$.

60. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y $c < d < 0$. Proporciona un ejemplo en el que $ac < bd$ y uno en el que $bd < ac$.

61. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que $a^2 + b^2 = 0$ si y solo si $a = b = 0$.

62. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq a < b$. Demuestra que $a^2 \leq ab < b^2$. Proporciona un ejemplo que muestre que no se sigue que $a^2 < ab < b^2$.

63. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$. Prueba que $a < \sqrt{ab} < b$ y $1/b < 1/a$.

64. Determina todos los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes desigualdades:

(1) $x^2 > 3x + 4$;
(2) $1 < x^2 < 4$;
(3) $1/x < x$;
(4) $1/x < x^2$.

65. Sea $a \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para todo número real $\varepsilon > 0$. Demuestra que $a = 0$ necesariamente.

66. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $a \leq b + \varepsilon$. Demuestra que $a \leq b$ necesariamente.

67. Demuestra que $[(a + b)/2]^2 \leq (a^2 + b^2)/2$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que la igualdad se verifica si y solo si $a = b$.

68. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $0 < c < 1$, entonces $0 < c^2 < c < 1$;
(2) si $1 < c$, entonces $1 < c < c^2$.

69. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$; como sugerencia, emplea para ello la propiedad de buen orden de $\mathbb{N}$;
(2) no existe número natural simultáneamente par e impar.

70. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $c > 1$, entonces $c^n > c$ para $n \geq 2$;
(2) si $0 < c < 1$, entonces $c^n < c$ para $n \geq 2$.

71. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $a < b$ si y solo si $a^n < b^n$. Como sugerencia, emplea inducción matemática para ello.

72. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $c > 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $c^m > c^n$ si y solo si $m > n$;
(2) si $0 < c < 1$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $c^m < c^n$ si y solo si $m > n$.

73. Emplea el principio de inducción matemática para demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{m+n} = a^m a^n$ y $(a^m)^n = a^{mn}$.

74. Suouesta probada la existencia de raíces, demuestra que si $c > 1$, entonces $c^{1/m} < c^{1/n}$ si y solo si $m > n$.

El valor absoluto y la recta real.

75. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $b \neq 0$. Demuestra que

(1) $|a| = \sqrt{a^2}$; (2) $|a/b| = |a|/|b|$.

76. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que $|a + b| = |a| + |b|$ si y solo si $ab \geq 0$.

77. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \leq z$. Demuestra que $x \leq y \leq z$ si y solo si $|x - y| + |y - z| = |x - z|$. Explica una interpretación geométrica de este resultado.

78. Sean $x, a \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Demuestra que $|x - a| < \varepsilon$ si y solo si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

79. Sean $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$ y $a < y < b$.

(1) Demuestra que se verifica la desigualdad $|x - y| < b - a$.
(2) Establece la interpretación geométrica de este resultado.

80. Encuentra todos los números reales $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

(1) $|4x - 5| \leq 13$; (2) $|x^2 - 1| \leq 3$.

81. Encuentra todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $|x + 1| + |x - 2| = 7$.

82. Encuentra todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

(1) $|x - 1| > |x + 1|$; (2) $|x| + |x + 1| < 2$.

83. Esboza la gráfica de la ecuación $y = |x| - |x - 1|$.

84. Determina todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $4 < |x + 2| + |x - 1| < 5$.

85. Determina todos los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen $|2x - 3| < 5$ y $|x + 1| > 2$ simultáneamente.

86. Determina analíticamente y esboza el conjunto de pares de números reales $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

(1) $|x| = |y|$; (3) $|xy| = 2$;
(2) $|x| + |y| = 1$; (4) $|x| - |y| = 2$.

87. Determina analíticamente y esboza el conjunto de pares de números reales $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que satisfacen:

(1) $|x| \leq |y|$; (3) $|xy| \leq 2$;
(2) $|x| + |y| \leq 1$; (4) $|x| - |y| \geq 2$.

88. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ distintos. Demuestra que existen entornos U de x y V de y, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Se dice así que $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff con la topología usual.

89. Demuestra que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

(1) $\text{máx}\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$;
(2) $\text{mín}\{a, b\} = (a + b - |a - b|)/2$;

(3) $\text{mín}\{a, b, c\} = \text{mín}\{\text{mín}\{a, b\}, c\}$.

90. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestra que el número «de en medio», en el sentido de orden, es $\text{mín}\{\text{máx}\{a, b\}, \text{máx}\{b, c\}, \text{máx}\{c, a\}\}$.

La propiedad de completitud de los números reales.

91. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Demuestra en detalle que el conjunto A tiene cotas inferiores, pero no cotas superiores, y que $\text{ínf}(A) = 0$.

92. Sea $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$. ¿Tiene el conjunto A cotas inferiores? ¿Tiene A cotas superiores? ¿Existe $\text{ínf}(A)$? ¿Existe $\sup(A)$?

93. Sea $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ Demuestra que $\sup(A) = 1$ e $\text{ínf}(A) = 0$.

94. Sea $A = \{1 - (-1)^n/n : n \in \mathbb{N}\}$. Determina $\text{ínf}(A)$ y $\sup(A)$.

95. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado inferiormente. Demuestra que $\text{ínf}(A) = -\sup\{-a : a \in A\}$.

96. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ que contiene una de sus cotas superiores. Demuestra que dicha cota superior es necesariamente $\sup(A)$.

97. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Demuestra que $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si y solo si para todo $t \in \mathbb{R}$, $t > u$ implica $t \notin A$.

98. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $\sup(A) - 1/n$ no es una cota superior de A, pero que $\sup(A) + 1/n$ es una cota superior de A.

99. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos acotados de $\mathbb{R}$. Demuestra que $A \cup B$ es también acotado y que $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

100. Sea A un subconjunto acotado no vacío de $\mathbb{R}$ y sea B un subconjunto no vacío de A. Prueba que $\text{ínf}(A) \leq \text{ínf}(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$.

101. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ tal que $\sup(A) \in A$ y sea $u \notin A$ un número real. Demuestra que $\sup(A \cup \{u\}) = \sup\{\sup(A), u\}$.

102. Demuestra que un subconjunto no vacío finito A de $\mathbb{R}$ contiene a su supremo. Como sugerencia, aplica el principio de inducción matemática y el ejercicio anterior.

Aplicaciones de la propiedad del supremo.

103. Demuestra que $\sup\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\} = 1$.

104. Sea $A = \{1/n - 1/m : n, m \in \mathbb{N}\}$. Determina $\text{ínf}(A)$ y $\sup(A)$.

105. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demuestra que si $\xi \in \mathbb{R}$ tiene las propiedades

(i) para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi - 1/n$ no es una cota superior de A,

(ii) para todo $n \in \mathbb{N}$, $\xi + 1/n$ es una cota superior de A,

entonces $\xi = \sup(A)$.

106. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado.

(1) Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y denotemos $aS = \{as : s \in S\}$. Demuestra que $\text{ínf}(aS) = a\,\text{ínf}(S)$ y que $\sup(aS) = a\sup(S)$.
(2) Sea $b \in \mathbb{R}$, $b < 0$ y denotemos $bS = \{bs : s \in S\}$. Demuestra que $\text{ínf}(bS) = b\sup(S)$ y que $\sup(bS) = b\,\text{ínf}(S)$.

107. Sea X un conjunto no vacío, sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación acotada. Prueba que $\sup\{a + f(x) : x \in X\} = a + \sup\{f(x) : x \in X\}$ así como que $\text{ínf}\{a + f(x) : x \in X\} = a + \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$, cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$.

108. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y denotemos, como resulta habitual, $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Demuestra que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ y que $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$.

109. Sea X un conjunto no vacío y sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones acotadas. Demuestra que

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in X\} \leq \sup\{f(x) : x \in X\} + \sup\{g(x) : x \in X\}$$

así como que

$$\text{ínf}\{f(x) + g(x) : x \in X\} \geq \text{ínf}\{f(x) : x \in X\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in X\}.$$

Proporciona ejemplos que muestren que cada una de estas desigualdades puede ser una igualdad o una desigualdad estricta.

110. Denotemos $J = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ y definamos la aplicación $h : J \times J \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = 2x + y$ para cada par $(x, y) \in J \times J$.

(1) Para cualquier $x \in J$, determina $f(x) = \sup\{h(x, y) : y \in J\}$ y, con ello, calcula $\text{ínf}\{f(x) : x \in J\}$.
(2) Para cualquier $y \in J$, determina $g(y) = \text{ínf}\{h(x, y) : x \in J\}$ y, con ello, calcula $\sup\{g(y) : y \in J\}$.
(3) Compara los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

111. Realiza los cálculos del ejercicio anterior para $h : J \times J \to \mathbb{R}$, con

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y, \\ 1 & \text{si } x \geq y, \end{cases}$$

para cada par $(x, y) \in J \times J$.

Intervalos.

112. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y denotemos por $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ dos intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Demuestra que $I \subseteq J$ si y solo si $c \leq a$ y $b \leq d$.

113. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Demuestra que A es acotado si y solo si existe un intervalo cerrado y acotado I tal que $A \subseteq I$.

114. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado no vacío y denotemos $I_A = [\text{ínf}(A), \sup(A)]$. Demuestra que $A \subseteq I_A$. Más aún, si J es cualquier intervalo cerrado y acotado conteniendo a A, demuestra que $I_A \subseteq J$.

115. Sea $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ una sucesión de reales encajados. Si denotamos $I_n = [a_n, b_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, demuestra que necesariamente se tiene que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$ así como que $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots$.

116. Sea $I_n = [0, 1/n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.

117. Sea $J_n = (0, 1/n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

118. Sea $K_n = (n, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

119. Proporciona las dos representaciones binarias de $3/8$ y de $7/16$.

120. Proporciona los primeros cuatro dígitos de la representación binaria de $1/3$. Proporciona la representación binaria completa de $1/3$.

121. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ tales que

$$\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \neq 0.$$

Demuestra que $m = n$ y $a_k = b_k$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

122. Proporciona una representación decimal de $-2/7$.

123. Expresa $1/7$ y $2/19$ como decimales periódicos.

124. ¿Qué números racionales vienen representados por los decimales periódicos $1,25137\ldots137\ldots$ y $35,14653\ldots653\ldots$?

Sucesiones y sus límites.

125. Escribe los cinco primeros términos de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde el n-ésimo término, x_n, viene dado por

(1) $x_n = 1 + (-1)^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (-1)^n/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = 1/[n(n+1)]$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x = 1/(n^2 + 2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

126. Escribe los cinco primeros términos de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, definidas inductivamente:

(1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(2) $y_1 = 2$, $y_{n+1} = (y_n + 2/y_n)/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(3) $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_{n+2} = (z_{n+1} + z_n)/(z_{n+1} - z_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
(4) $w_1 = 3$, $w_2 = 5$, $w_{n+2} = w_n + w_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

127. Sea $b \in \mathbb{R}$ arbitrario. Demuestra que $b/n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

128. Emplea la definición de límite de una sucesión para demostrar que:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^2+3} = \dfrac{1}{2}$.

129. Demuestra que:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+7}} = 0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+2} = 2$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$.

130. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales. Demuestra que $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ si y solo si $|x_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Proporciona un ejemplo que muestre que la convergencia de la sucesión $\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ no implica la convergencia de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en general.

131. Demuestra que $1/n - 1/(n+1) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

132. Demuestra que $1/3^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

133. Sea $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b < 1$, demuestra que $nb^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como sugerencia, puedes emplear el Teorema del Binomio.

134. Demuestra que $(2n)^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

135. Demuestra que $n^2/n! \to 0$ cuando $n \to \infty$.

136. Demuestra que $2^n/n! \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como sugerencia, prueba que para todo $n \geq 3$ se verifica que $0 < 2^n/n! \leq 2(2/3)^{n-2}$.

137. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales convergente y denotemos por $x > 0$ su límite, que suponemos positivo. Demuestra que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $x/2 < x_n < 2x$.

Teoremas de límites.

138. Determina si las siguientes sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son convergentes o divergentes, si:

(1) $x_n = n/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(2) $x_n = (-1)^n n/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = n^2/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = (2n^2+3)/(n^2+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

139. Proporciona ejemplos de sucesiones divergentes $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tales que (1) su suma $\{x_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ converja; (2) su producto $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ converja.

140. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones tales que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ convergen, entonces $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente.

141. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son dos sucesiones tales que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a cierto $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge, entonces $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente.

142. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no son convergentes, si: (1) $x_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; (2) $x_n = (-1)^n n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

143. Determina los valores de los siguientes límites:

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$; (3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$;

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$; (4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$.

144. Sea $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión acotada y sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión tal que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Demuestra que $a_n b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

145. Denotemos $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que ambas sucesiones $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\sqrt{n} y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son convergentes y determina el valor de sus respectivos límites.

146. Calcula los siguientes límites:

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} [(3\sqrt{n})^{1/2n}]$; (2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} [(n+1)^{1/\ln(n+1)}]$.

147. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$. Determina

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}.$$

148. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ positivos. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \frac{a+b}{2}.$$

149. Emplea la Regla del Sandwich para calcular los límites de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, supuesto que:

(1) $x_n = n^{1/n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(2) $x_n = (n!)^{1/n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

150. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y denotemos $z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $z_n \to b$ cuando $n \to \infty$.

El siguiente resultado provee de un criterio fácil para la convergencia de una sucesión:

Teorema. *Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos tal que* $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

151. Emplea el anterior resultado para con las siguientes sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $0 < a < 1$ y $b > 1$, si:

(1) $x_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = b^n/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = n/b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = 2^{3n}/3^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

152. (1) Proporciona un ejemplo de sucesión convergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números reales positivos con $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) = 1$. (2) Proporciona un ejemplo de sucesión divergente con esta propiedad.

153. Sea $L \in \mathbb{R}$, $L > 1$, y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) = L$. Demuestra que ésta es una sucesión no acotada y, por consiguiente, no convergente.

154. Discute la convergencia de las siguientes sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $0 < a < 1$ y $b > 1$, si

(1) $x_n = n^2 a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = b^n/n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = b^n/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = n!/n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

155. Sea $L \in \mathbb{R}$, $L < 1$, y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{1/n} = L$. Demuestra que existe $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ tal que $0 < x_n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Emplea este resultado para demostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

156. (1) Proporciona un ejemplo de sucesión convergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números positivos con $x_n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$. (2) Proporciona un ejemplo de sucesión divergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $x_n^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

157. Supongamos que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de números reales convergente y que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_\varepsilon$. ¿Se infiere de ello que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente?

158. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones convergentes, entonces $\{\max\{x_n, y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\min\{x_n, y_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ también son convergentes.

159. Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ son sucesiones convergentes, entonces la sucesión $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ siendo w_n el número «de en medio» entre x_n, y_n y z_n también es convergente.

Sucesiones monótonas.

160. Sea $x_1 = 8$ y denotemos $x_{n+1} = 2 + x_n/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada monótona, y determina el valor de su límite.

161. Sea $x_1 > 1$ y denotemos $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada monótona, y determina el valor de su límite.

162. Sea $x_1 \geq 2$ y denotemos $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n - 1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente, está acotada inferiormente por 2 y determina el valor de su límite.

163. Sea $x_1 = 1$ y denotemos $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión convergente y determina el valor de su límite.

164. Sea $p \in \mathbb{R}$ positivo, sea $y_1 = \sqrt{p}$ y denotemos $y_{n+1} = \sqrt{p + y_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión convergente y determina el valor de su límite. Como sugerencia, prueba que una cota superior es $1 + 2\sqrt{p}$.

165. Sean $a, z_1 \in \mathbb{R}$ positivos, y denotemos $z_{n+1} = \sqrt{a + z_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión convergente y determina su límite.

166. Sea $x_1 \in \mathbb{R}$ positivo y denotemos $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Determina si la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge o diverge.

167. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente, $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente, y supóngase que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, de donde se deduce la propiedad de los intervalos encajados del teorema de convergencia monótona.

168. Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Demuestra que existe una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ creciente con $\sup(A) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

169. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales acotada. Denotemos $s_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ y $t_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ son ambas sucesiones monótonas y convergentes. Demuestra asimismo que si $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$, entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión convergente.

170. Determina la convergencia de la sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

171. Denotemos $x_n = 1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente y está acotada, de forma que converge. Como sugerencia, nota que si $k \geq 2$, entonces $1/k^2 \leq 1/[k(k-1)] = 1/(k-1) - 1/k$.

172. Establece la convergencia de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si

(1) $x_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/n)^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = [1 + 1/(n+1)]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = (1 - 1/n)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Determina el valor de sus respectivos límites.

En el Ejemplo 3.3.5 de Introduction to Real Analysis, de R. G. Bartle y D. R. Sherbert se explica como aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona para calcular raíces cuadradas de números positivos. Básicamente, dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, el método consiste en emplear la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, definida recursivamente por $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$, cuyo límite x existe por el citado teorema, y ha de satisfacer necesariamente $x = (x + a/x)/2$, es decir, $x = \sqrt{a}$.

173. Emplea el ejemplo citado para calcular $\sqrt{2}$ con cuatro cifras decimales de precisión.

174. Emplea el ejemplo citado para calcular $\sqrt{3}$ con cuatro cifras decimales de precisión.

Subsucesiones y el Teorema de Bolzano-Weierstrass.

175. Proporciona un ejemplo de sucesión no acotada que tenga una subsucesión convergente.

176. Sea $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$, demuestra que $c^{1/n} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

177. Sea $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ la conocida sucesión de Fibonacci y denotemos $x_n = \phi_{n+1}/\phi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Determina el valor de $\lim_{n\to\infty} x_n$, supuesto sabido que la sucesión converge.

178. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son divergentes, si:

(1) $x_n = 1 - (-1)^n + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = \operatorname{sen}(n\pi/4)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

179. Sean $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos sucesiones y denotemos por $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión «barajada», es decir, la dada por $z_{2n-1} = x_n$ y $z_{2n} = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente si y solo si tanto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ como $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son convergentes y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

180. Denotemos $x_n = n^{1/n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(1) Demuestra que $x_{n+1} < x_n$ si y solo si $(1+1/n)^n < n$ e infiere que la desigualdad es válida para todo $n \geq 3$. Concluye que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente eventualmente y que existe su límite.
(2) Emplea el hecho de que la subsucesión $\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ también converge a $\lim_{n\to\infty} x_n$ para concluir que éste es 1.

181. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son convergentes y determina el valor de sus límites, si

(1) $x_n = (1 + 1/n^2)^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/n^2)^{2n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = (1 + 1/(2n))^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = (1 + 2/n)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

182. Determina los límites de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si:

(1) $x_n = (3n)^{1/2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/(2n))^{3n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

183. Supuesto que toda subsucesión de la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene una subsucesión que converge a 0, demuestra que la sucesión original necesariamente converge a 0 también.

184. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una subsucesión de números reales acotada, denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$, así como $s = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que existe una subsucesión de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge a s.

185. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales no negativos tales que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n x_n$ existe. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente.

186. Demuestra que si una sucesión de números reales $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotada, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim_{k\to\infty} 1/x_{n_k} = 0$.

187. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión acotada de números reales y denotemos $s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay una subsucesión de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge a s.

188. Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos acotados, cerrados y encajados. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in J_n$. Emplea el teorema de Bolzano-Weierstrass para dar una demostración de la propiedad de los intervalos encajados.

El criterio de Cauchy.

189. Proporciona un ejemplo de sucesión acotada que no sea de Cauchy.

190. Demuestra directamente a partir de la definición que las siguientes sucesiones $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ son de Cauchy, si:

(1) si $a_n = (n+1)/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(2) si $a_n = 1 + 1/2! + \cdots + 1/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

191. Demuestra a partir de la definición que las siguientes sucesiones, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, no son de Cauchy, si:

(1) $a_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $a_n = n + (-1)^n/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

192. Demuestra directamente a partir de la definición que si las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son de Cauchy, entonces $\{x_n + y_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n y_n : n \in \mathbb{N}\}$ son también de Cauchy.

193. Denotemos $x_n = \sqrt{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ pero que no es una sucesión de Cauchy.

194. Sea $p \in \mathbb{N}$, proporciona un ejemplo de sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que no sea de Cauchy, pero que satisfaga $\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$.

195. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de Cauchy tal que x_n es un número entero para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es eventualmente constante.

196. Demuestra directamente que una sucesión monótona creciente y acotada es una sucesión de Cauchy.

197. Sea $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$ y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tal que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy.

198. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ y denotemos $x_n = (x_{n-2} + x_{n-1})/2$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demuestra que la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente y calcula su límite.

199. Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ con $y_1 < y_2$ y denotemos $y_n = y_{n-1}/3 + 2y_{n-2}/3$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demuestra que la sucesión $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente y calcula su límite.

200. Sea $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 > 0$, y denotemos $x_{n+1} = (2 + x_n)^{-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión contractiva y calcula su límite.

201. Sea $x_1 = 2$ y denotemos $x_{n+1} = 2 + 1/x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión contractiva y calcula su límite.

202. La ecuación polinómica $x^3 - 5x + 1 = 0$ tiene una solución $r \in \mathbb{R}$ con $0 < r < 1$. Emplea una sucesión contractiva adecuada para calcular r con una precisión de 10^{-4}.

Sucesiones propiamente divergentes.

203. Demuestra que toda sucesión no acotada de números reales posee una subsucesión divergente.

204. Proporciona ejemplos de sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, divergentes, tales que $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y satisfaciendo que:

(1) $\{x_n/y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente;
(2) $\{x_n/y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es divergente.

205. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = \infty$.

206. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son divergentes, si:

(1) $x_n = \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = \sqrt{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = \sqrt{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = n/\sqrt{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

207. ¿Es la sucesión $\{n \operatorname{sen}(n) : n \in \mathbb{N}\}$ propiamente divergente?

208. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales propiamente divergente y sea $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n$ existe. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

209. Sean $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos sucesiones de números reales positivos tales que $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = 0$.

(1) Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$.
(2) Demuestra que si $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

210. Determina si la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es divergente o no, si:

(1) $x_n = \sqrt{n^2+2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = \sqrt{n}/(n^2+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = \sqrt{n^2+1}/\sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = \operatorname{sen}(\sqrt{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

211. Sean $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dos sucesiones de números positivos tales que $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \infty$.

(1) Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
(2) Demuestra que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

212. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$. Demuestra que si $\lim_{n\to\infty} a_n/n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Introducción a series infinitas.

213. Sea $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ una serie dada y sea $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ la serie en la que los términos son los mismos y en el mismo orden que en $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, excepto porque los términos para los que $a_m = 0$ se han omitido. Demuestra que $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, y ambas lo hacen al mismo número real.

214. Demuestra que la convergencia de una serie no resulta afectada si se cambia un número finito de sus términos.

215. Empleando fracciones parciales, demuestra que:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$;
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}$ cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

216. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series convergentes. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ es también convergente.

217. ¿Podrías proporcionar ejemplos de series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, convergente y divergente, respectivamente, tales que $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ sea convergente?

218. (1) Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$ es divergente.

(2) Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)/n^2$ es convergente.

219. Demuestra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/\sqrt{n}$ es convergente.

220. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. ¿Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergente siempre? Demuéstralo o proporciona un contraejemplo.

221. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. ¿Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ convergente siempre? Demuéstralo o proporciona un contraejemplo.

222. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. ¿Es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ convergente siempre? Demuéstralo o proporciona un contraejemplo.

223. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos, y denotemos $b_n = (a_1 + \cdots + a_n)/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente siempre.

224. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de números reales positivos. Si s_n denota la n-ésima suma pacial, demuestra que

$$\frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n}) \leq s_{2^n} \leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n}.$$

Emplea estas desigualdades para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge. Con frecuencia se hace referencia a este resultado como el «criterio de condensación de Cauchy».

225. Sea $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Emplea el criterio de condensación de Cauchy para discutir la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

226. Emplea el criterio de condensación de Cauchy para establecer la divergencia de las siguientes series:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$;
(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log(n))}$;
(3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log(n)) \log(\log(\log(n)))}$.

227. Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$. Demuestra que las siguientes series son convergentes:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^c}$;
(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n) \log(\log(n))^c}$.