CLASE #16: 21 DE MARZO DE 2019

Ejercicio 5.6.b. *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2(1+e^{-1/x})^{-1} & \textit{si } x \neq 0, \\ 2 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, dado que f es una composición de funciones de clase C^∞ en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, deducimos que f es de clase C^∞ en dicho dominio, y por ende continuas, y para estudiar la continuidad de la función bastará comprobar que los límites laterales entorno a $x = 0$ coincidan. Recordemos que la función exponencial $x \mapsto e^x$ es una función estrictamente creciente con $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $e^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$. De aquí que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2 \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{1+e^y} = \frac{2}{1+0} = 2,$$

empleando el cambio $y \equiv -1/x$ para simplificar el cálculo anterior, mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2 \lim_{y\to \infty} \frac{1}{1+e^y} = 0,$$

empleando el mismo cambio, de forma que la función no es continua en 0. □

Ejercicio 6.27. *Probar que el error cometido al sustituir* $\cos^2(3x)$ *por* $1 - 9x^2 + 27x^4$ *es menor que* $4 \cdot 10^{-5}$ *si* $|x| \leq 1/10$.

Solución. De la misma forma que en los Ejercicios 6.25 y 6.26, se comprueba sencillamente que $1 - 9x^2 + 27x^4$ es el polinomio de Taylor de orden 5 (¡ojo!, es el mismo que el polinomio de Taylor de orden 4, pero no vale para la estimación del error pedida que solo lo consideremos hasta dicho orden). Además, tras unas cuentas, obtenemos que, si denotamos $f(x) = \cos^2(3x)$, calculando las derivadas sucesivas y empleando la fórmula del seno del ángulo doble,

$$f^{(6)}(x) = -23328\cos(6x),$$

con lo que el error cometido en la aproximación, que resulta el valor absoluto del residuo de Lagrange, puede ser mayorado de la siguiente forma:

$$|f(x) - P_5(x)| = |R_5(x)| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!}x^6\right| \leq \frac{23328}{720}10^{-6} = 32{,}4 \cdot 10^{-6} \leq 4 \cdot 10^{-5},$$

como queríamos obtener. □

Ejercicio 6.28. *Probar que el error cometido al sustituir* $e^{\operatorname{sen}(x)}$ *por* $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ *es menor que* $3|x|^3$.

Solución. Observamos que la expresión en el enunciado se corresponde efectivamente con el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) =$

$e^{\operatorname{sen}(x)}$, para lo cual obtenemos las siguientes derivadas, así como la tercera derivada, que emplearemos en la fórmula del residuo de Lagrange:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)}, \\
f(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)} = e^0 = 1, \\
f'(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x), \\
f'(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)} \cos(0) = 1, \\
f''(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)} (\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)), \\
f''(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)} (\cos^2(0) - \operatorname{sen}(0)) = 1, \\
f'''(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)[-3\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x) - 1] \\
&= -e^{\operatorname{sen}(x)} \operatorname{sen}(x) \cos(x)[\operatorname{sen}(x) + 3]
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Taylor, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe cierto θ entre 0 y x que nos permite mayorar la siguiente expresión uniformemente:

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| &= \left| \frac{f'''(\theta)}{3!} x^3 \right| \\
&\leq \frac{e^{\operatorname{sen}(\theta)} |\operatorname{sen}(\theta)| |\cos(\theta)| |\operatorname{sen}(\theta) + 3|}{3!} |x|^3 \\
&\leq \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4}{6} |x|^3 = 2|x|^3,
\end{aligned}$$

donde hemos empleado que $|\operatorname{sen}(\theta)|, |\cos(\theta)| \leq 1$ para todo número real θ, que $e^{\operatorname{sen}(\theta)} \leq e^1 \leq 3$, así como la desigualdad triangular para concluir que $|\operatorname{sen}(\theta) + 3| \leq |\operatorname{sen}(\theta)| + 3 \leq 4$. $\square$