5.12. *Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee las dos siguientes propiedades: (i) en primer lugar $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$ y (ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que:*

(1) *f es continua en $\mathbb{R}$.*
(2) *$f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
(3) *$f(rx) = f(x)^r$ cualquiera que sea $r \in \mathbb{Q}$. En particular $f(r) = f(1)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.*
(4) *Si $f(1) = 1$, entonces f es constante.*
(5) *Si $f(1) > 1$, entonces f es estrictamente creciente y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.*
(6) *Si $f(1) < 1$, entonces f es estrictamente decreciente y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$.*

Solución. En primer lugar, observamos que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ implica que $f(0) \in \{0, 1\}$, de forma que por la propiedad (i) necesariamente se tiene que $f(0) = 1$. Para comprobar que f es continua, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijado y sea $h \in \mathbb{R}$. Como $f(x_0 + h) = f(x_0)f(h)$ por la propiedad (ii), deducimos que $f(x_0 + h) = f(x_0)f(h) \to f(x_0)\,1 = f(x_0)$ por la propiedad (i), cuando $h \to 0$, esto es, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$. Veamos ahora que f es positiva en $\mathbb{R}$. Dado que $1 = f(0) = f(x - x) = f(x)f(-x)$, se deduce que $f(-x) = f(x)^{-1}$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, y en particular $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado que $f(0) = 1 > 0$, necesariamente $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (si no, por reducción al absurdo, se puede emplear el Teorema de Bolzano). Comprobemos ahora que $f(rx) = f(x)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Esto se verifica en particular para $m \in \mathbb{Z}$ ya que por inducción se demuestra rigurosamente que

$$f(mx) = f(x + \overset{m}{\cdots} + x) = f(x) \overset{m}{\cdots} f(x) = f(x)^m$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, y como $f(-x) = f(x)^{-1}$, a su vez se generaliza para $m \in \mathbb{Z}$. Por último, si $r = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, deducimos que

$$f(rx)^q = f(qrx) = f(px) = f(x)^p \ \text{ y por ende } \ f(rx) = f(x)^{\frac{p}{q}} = f(x)^r,$$

lo cual concluye el apartado. Si $f(1) = 1$, la función es necesariamente constante, ya que $f(r) = f(1)^r = 1$, y toda función continua viene completamente determinada en $\mathbb{R}$ en función de su imagen en un conjunto denso, como es $\mathbb{Q}$, lo cual vimos en el ejercicio anterior. Si por contra $\alpha := f(1) > 1$, entonces f es estrictamente creciente, esto lo vimos enla primera clase, pero podemos repetirlo: En efecto, si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m < n$, entonces

$$1 < \alpha \implies \alpha < \alpha^2$$

ya que α es positivo, y se sigue rigurosamente por inducción que $\alpha^m < \alpha^n$. Por otra parte,

$$\frac{1}{\alpha} < 1 \implies \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-2} < \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

y se sigue por inducción que $\alpha^m < \alpha^n$ cualesquiera que sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m < n$. Supongamos ahora que $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, con $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$, y $x < y$, es decir, $ps < qr$, entonces $\alpha^x < \alpha^y$ pues, por reducción al absurdo, si $\alpha^x \geq \alpha^y$, tendremos que $\alpha^{ps} = (\alpha^x)^{rs} \geq (\alpha^y)^{rs} = \alpha^{qr}$, lo que contradice el enunciado anterior de que

$\alpha^m < \alpha^n$ para $m = ps$ y $n = qr$. Por último, si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existen $r, s \in \mathbb{Q}$ por la densidad de los números racionales tales que $x < r < s < y$ y deducimos que

$$\alpha^x = \lim_{n\to\infty} \alpha^{x_n} \leq \alpha^r < \alpha^s \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^{y_n} = \alpha^y$$

donde $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión de números racionales tal que $x_n \uparrow x$ cuando $n \to \infty$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $y_n \downarrow y$ cuando $n \to \infty$. Los límites se deducen de manera sencilla como consecuencia por ser estrictamente creciente y empleando la Desigualdad de Bernoulli (lo vimos). El último apartado se demuestra análogamente. $\square$

5.16. *Un coche recorre* 100 *kilómetros en* 50 *minutos sin detenerse. Demostrar que hubo un minuto en el cual recorrió exactamente* 2 *kilómetros (es decir, existe un intervalo* $[c, c+1] \subset [0, 50]$, $c \in [0, 49]$, *de forma que el recorrido hecho en dicho intervalo es de* 2 *kilómetros exactamente)*

Solución. Sea $\mathrm{x} : [0, 50] \to [0, 100]$ tal que $\mathrm{x}(t)$ representa el recorrido realizado hasta el instante t, cualquiera que sea $t \in [0, 50]$. Así, $\mathrm{x}(0) = 0$ y $\mathrm{x}(50) = 100$. Definamos la función auxiliar $h : [0, 49] \to \mathbb{R}$, $h(t) := \mathrm{x}(t+1) - \mathrm{x}(t)$, la cual es continua pues suponemos que x es continua, que mide la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[c, c+1]$. Tenemos que probar que existe $c \in [0, 49]$ en el cual $h(c) = 2$. Podemos distinguir los siguientes casos:

(1) $h(t) > 2$ para todo $t \in [0, 49]$. Esto es absurdo pues

$$\begin{aligned} 100 = \mathrm{x}(50) - \mathrm{x}(0) &= \sum_{k=0}^{49} [\mathrm{x}(k+1) - \mathrm{x}(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{49} h(k) > \sum_{k=0}^{49} 2 = 50 \cdot 2 = 100, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da gracias a lo que se conoce como la telescopicidad de esta suma, esto es, que la suma satisface informalmente lo siguiente: $\sum_{k=0}^{49} [\mathrm{x}(k+1) - \mathrm{x}(k)] = \cancel{\mathrm{x}(1)} - \mathrm{x}(0) + \cancel{\mathrm{x}(2)} - \cancel{\mathrm{x}(1)} + \cdots + \mathrm{x}(50) - \cancel{\mathrm{x}(49)}$, de forma que se cancelan unos términos con otros salvo $\mathrm{x}(50)$ y $\mathrm{x}(0)$.

(2) $h(t) < 2$ para todo $t \in [0, 49]$. Es absurdo y se razona de manera similar.

(3) Existen $t_0, t_1 \in [0, 49]$ de forma que $h(t_0) \leq 2$ y $h(t_1) \geq 2$, y por el Teorema de los Valores Intermedios podemos encontrar $c \in [t_0, t_1]$ o $[t_1, t_0]$ de manera que $h(c) = 2$.

Nótese que contemplamos así todos los casos[*]. $\square$

6.1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$ *y sean* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *dos funciones diferenciables en* $c \in (a, b)$ *hasta orden* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces, el producto* $fg : (a, b) \to \mathbb{R}$ *es diferenciable en* c *hasta orden* n *y*

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c)\, g^{(n-k)}(c),$$

la cual es comúnmente conocida como fórmula generalizada de Leibniz.

[*]Dado que $\neg(\forall s\; h(s) > 2) \wedge \neg(\forall t\; h(t) < 2) \equiv (\exists t\; h(t) \leq 2) \wedge (\exists s\; h(s) \geq 2)$.

Solución. Antes de presentar una demostración rigurosa por inducción resulta conveniente tener en mente la conocida fórmula del binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

pues desde las análogas fórmulas que potencias de números reales y derivadas de funciones satisfacen:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \qquad (fg)^{(2)} = f^{(2)}g + 2f^{(1)}g^{(1)} + fg^{(2)},$$

se sigue la similaridad entre ambas fórmulas. No resulta sorprente que su prueba sea esencialmente la misma. Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, Si $n = 1$, esto es, el caso base, sabemos que fg es diferenciable en c y se satisface la bien conocida fórmula del producto $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$, dado que el cálculo del siguiente límite es directo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c+h) + f(c)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\, g(c+h) - \lim_{h\to 0} f(c)\, \frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\
&= f'(c)g(c) - f(c)g'(c).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para $n+1$. Supongamos así que f y g son ambas diferenciables en c hasta orden $n+1$, de forma que el límite definitorio de la derivada $(n+1)$-ésima existe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(c+h)g^{(n)}(c+h) - f^{(n)}(c)g^{(n)}(c)}{h},$$

y por ende f y g son diferenciables hasta orden n en un entorno de c (si no no tendría sentido la expresión $f^{(n)}(c+h)$ ni $g^{(n)}(c+h)$), y la fórmula de Leibniz se satisface en dicho entorno:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Ésta es claramente una función diferenciable en c dado que es la suma de productos de funciones diferenciables. Veamos ahora que se cumple la fórmula de Leibniz generalizada. En primer lugar, por definición:

$$(fg)^{(n+1)}(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)^{(n)}(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right](c),$$

y como consecuencia de la linealidad de la derivada y la regla del producto:

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{k+1}(c)g^{(n-k)}(c) + f^{(k)}g^{(n-k+1)}(c)\right]$$

la cual se puede reescribir en la forma:

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(c)g^{(n-k)}(c) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}(c)$$

haciendo el cambio de variable en la primera suma:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c)$$

de forma que, considerando el último término fuera de la primera suma y el primero de la seguna suma, y sacando factor común en los restantes términos:

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{0} f(c) g^{(n+1)}(c) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(c) g(c) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c) \end{aligned}$$

ahora, dado que trivialmente $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ y $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ y podemos comprobar fácilmente la identidad combinatoria $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ cualesquiera que sean $n, k \in \mathbb{N}$ (la fórmula que utilizamos en el triángulo de Tartaglia o Pascal), la anterior expresión, reagrupada, resulta:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(c) g^{(n+1-k)}(c),$$

como queríamos probar. $\square$