181. Demuestra que las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ son convergentes y determina el valor de sus límites, si

(1) $x_n = (1 + 1/n^2)^{n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/n^2)^{2n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = (1 + 1/(2n))^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = (1 + 2/n)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (1) Es subsucesión de $\{(1 + 1/n)^n\} \to e$, luego converge a e.

(2) $x_n = [(1 + 1/n^2)^{n^2}]^2 \to e^2$.

(3) $x_n = [(1 + 1/2n)^{2n}]^{1/2} \to e^{1/2}$

(4) para todo $n \geq 2$, denotemos $x_n := n/2$ y $k_n := \lfloor x_n \rfloor$

se puede demostrar que $(1 + 1/k_n)^{k_n} \to \infty$ (es una subsucesión de $(1 + 1/n)^n$ con términos repetidos)

Así: $e \leftarrow [1 + 1/(k_n + 1)]^{k_n} \leq [1 + 1/(k_n + 1)]^{x_n} \leq [1 + 1/x_n]^{x_n} \leq [1 + 1/k_n]^{x_n} \leq [1 + 1/k_n]^{k_n+1} \to e$. $\square$

¡Ojo! ¡En el (4) no se puede escribir $n/2$ e invocar que es subsucesión!. $\square$

182. Determina los límites de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, si:

(1) $x_n = (3n)^{1/2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (1 + 1/(2n))^{3n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (1) $(3n)^{1/2n} = [(3n)^{1/3n}]^{3/2} \to 1^{3/2} = 1$,

usando que $m^{1/m} \to 1$ y por tanto su subsucesión también va a 1.

(2)

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n} = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{3/2} \to e^{3/2}.$$

$\square$

193. Denotemos $x_n = \sqrt{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ pero que no es una sucesión de Cauchy.

Solución. Toda sucesión de Cauchy es convergente a un número real, y sin embargo $\sqrt{n} \to \infty$, por lo que no puede ser de Cauchy.

Que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ lo vimos en el Ejercicio 145, multiplicando y dividiendo por el conjugado con la suma lo cual se puede acotar por $1/\sqrt{n} \to 0$. $\square$

194. Sea $p \in \mathbb{N}$, proporciona un ejemplo de sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que no sea de Cauchy, pero que satisfaga $\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$.

Solución. Consideremos la sucesión $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ..., $x_p = p - 1$, $x_{p+1} = 0$, ..., $x_{2p} = p - 1$, ... concretamente, la dada por $x_n = n \mod p$, de forma que la sucesión no es de Cauchy porque en tal caso sería convergente, y podemos encontrar subsucesiones constantes distintas, mientras que $x_{n+p} = n + p \mod p = n \mod p = x_n$ de manera que $|x_{n+p} - x_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$