Para estudiar la derivabilidad de una función hay que tener en cuenta, al menos, el siguiente ejemplo, ligeramente patológico, de una función con derivada no continua:

Ejemplo. *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$*, con* $f'(0) = 0$*, pero no existen los límites*

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Podéis probar lo anterior, es sencillo. Sí podemos usar lo siguiente:

Proposición. *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función continua en el intervalo abierto* I *y sea* $a \in I$ *un punto cualquiera, supongamos que* f *es diferenciable en* $I \setminus \{a\}$ *y que el siguiente límite existe:*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = L.$$

Entonces, f *es diferenciable en* a *y* $f'(a) = L$.

Solución. Sea $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset I$. Sea $x \in (a, a + \delta)$. Entonces f es diferenciable en x, y podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a f en $[a, x]$: existe $\xi_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x).$$

Ahora bien, cuando $x \to a$, todo punto en el intervalo $[a, x]$ se hace arbitrariamente pequeño a x, de forma que $\lim_{x \to a^+} \xi_x = x$ y por ende

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(\xi_x) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = L.$$

Mediante un argumento similar para $x \in (a - \delta, a)$, concluimos por su parte que $f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} f'(x) = L$, de forma que f es diferenciable en a y $f'(a) = L$, como queríamos demostrar. □

Sin la continuidad, obviamente ésto no se tiene:

Ejemplo. *La función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 0$ *si* $x \neq 0$ *y* $f(0) = 1$ *es continua y diferenciable en* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y con* $f'(x) = 0$ *para* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, pero no es diferenciable en* $x = 0$ *pues ni siquiera es continua en éste.*