14/2/2019

Ejercicio 6.2.a. *Estudiar la derivabilidad de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, *y hallar* $f'(x)$ *y* $f''(x)$ *donde sea posible.*

Solución. La función es continua dado que es composición de funciones continuas, más concretamente, el valor absoluto y la raíz cuadrada. En $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ se tratan además, como sabemos, de funciones de clase C^∞, puesto que $x \mapsto |x|$ restringida es esencialmente la función $x \mapsto -x$ o $x \mapsto x$, respectivamente, mientras que $x \mapsto \sqrt{x}$ es una función de clase C^∞ en $(0, \infty)$, como hemos estudiado en teoría. Por tanto, la diferenciabilidad se reduce a estudiar la diferenciabilidad de la función en 0; por definición, basta estudiar:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

o bien

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{-h}}{-h} = -\infty.$$

Con todo esto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

si $x \neq 0$. Se tiene también que $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es diferenciable, análogamente, ahora en todo el dominio donde está definida, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Y, tras un sencillo cálculo:

$$f'(x) = -\frac{1}{4(\sqrt{|x|})^2} \qquad \text{si } x \neq 0,$$

como queríamos obtener. □

El resto de apartados del Ejercicio 6.2 se resuelven análogamente.

Ejercicio 6.3.a. *Hallar* $f'(x)$*, simplificando si es posible, si*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}.$$

Solución. Como consecuencia de la regla del cociente, tras unas sencillas cuentas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)][\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] - [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)][\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]}{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= -\frac{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2 + [\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]^2} = -\frac{2\,[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)]}{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= \frac{-2}{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x) - 1} \end{aligned}$$

como queríamos obtener. En el último paso hemos empleado la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$. Hay que tener en cuenta que la anterior expresión, así como la de la función f, solo tiene sentido si $\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \neq 0$, esto es, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. □

El resto de apartados del Ejercicio 6.3 se resuelven de manera similar.

Ejercicio 6.4.1. *Hallar el número de soluciones reales que tiene la ecuación* $3x^5 + 15x - 8 = 0$ *y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución.*

Solución. En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, el número de soluciones reales es cinco a lo sumo, el grado del polinomio. Estudiando el comportamiento del polinomio podemos determinar aproximadamente dónde se encuentran sus raíces. Hallemos la derivada para determinar los máximos y mínimos de $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := 3x^5 + 15x - 8$ así como los intervalos de crecimiento. $p'(x) = 15x^4 + 15$, de forma que los puntos críticos son las soluciones de $15x^4 + 15 = 0$, o bien, $x^4 = -1$. Ésta no tiene soluciones reales pues es absurdo que $0 < x^4 = -1 < 0$. Claramente, la función es creciente en $\mathbb{R}$ puesto que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos acotar la raíz evaluando la función en números enteros que resulten fácilmente calculables, por ejemplo, a simple vista se puede comprobar que $p(0) = -8 < 0$ mientras que $p(1) = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$, con lo que, en virtud del Teorema de Bolzano, hay una raíz del polinomio en $(0, 1)$. Dado que la función es estrictamente creciente, como hemos comprobado, es la única solución real a la ecuación del enunciado, y se encuentra en $(0, 1)$. $\square$

El resto de apartados del ejercicio 6.4 se resuelven de manera análoga.

Ejercicio 6.5.a. *Demostrar la desigualdad*

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < x - \frac{x^3}{6}$$

para $x \in (0, 1]$.

Solución. Para demostrar la primera desigualdad definamos la función auxiliar $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) := \arctan(x) - x + \frac{x^3}{3},$$

y veamos que $f > 0$ en $(0, 1]$, lo cual es equivalente a probar la desigualdad del enunciado. En primer lugar, $f(0) = 0$, y dado que la función es diferenciable en $(0, 1)$, y su derivada satisface

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{x^2 + 1} > 0,$$

deducimos que f es estrictamente creciente en $[0, 1)$ por el resultado visto en teoría, así, $f(x) > f(0) = 0$ para todo $x \in (0, 1]$. Por otra parte, para demostrar la segunda desigualdad, definamos la función auxiliar $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) := x - \frac{x^3}{6} - \arctan(x),$$

y veamos que $g > 0$ en $(0, 1]$. De igual manera, $g(0) = 0$, y la función es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$, con derivada

$$g'(x) = \frac{x^2 - x^4}{2x^2 + 2} > 0,$$

ya que $x^4 < x^2$ en $(0, 1)$. Con todo esto, deducimos que g es estrictamente creciente en $(0, 1]$ y por ende $g(x) > g(0) = 0$ para todo $x \in (0, 1]$. Esto concluye el ejercicio. $\square$

Ejercicio 6.6. *Demostrar que* $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$ *si* $x > y$. *Deducir que la función* $\arctan(\cdot)$ *es Lipschitz en* $\mathbb{R}$.

Solución. Probar que $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$ para cualesquiera dos reales $x > y$ es equivalente a probar que

$$y - \arctan(y) < x - \arctan(x)$$

para cada dos reales $y < x$ es decir, que la función auxiliar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) := t - \arctan(t)$$

sea estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Ahora bien, esto resulta inmediato analizando mediante diferenciación los extremos relativos de f, que es de clase $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$0 = f'(t) = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$$

la cual es, en efecto, continua. Así, el único punto crítico de f es $t = 0$, el cual es un punto de silla. Evaluando:

$$f'(-1) = f'(1) = \frac{1}{2} > 0,$$

por ejemplo, se comprueba, por lo visto en teoría, que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, como queríamos probar. Para concluir, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\arctan(x) - \arctan(y)| &= \left\{ \begin{array}{ll} \arctan(y) - \arctan(x) & \text{si } x \leq y \\ \arctan(x) - \arctan(y) & \text{si } y < x \end{array} \right\} \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ll} y - x & \text{si } x \leq y \\ x - y & \text{si } y < x \end{array} \right\} = |x - y|, \end{aligned}$$

con lo que f es globalmente 1-Lipschitz en $\mathbb{R}$. □