5.11. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y supóngase que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es cierto que $f = g$?*

Solución. En efecto, resultará cierto que $f = g$. Para comprobarlo, empleamos que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ de forma que $r_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$. Dado que f y g son continuas, $f(r_n) \to f(x_0)$ y $g(r_n) \to g(x_0)$ cuando $n \to \infty$, y dado que $f(r_n) = g(r_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, dada la unicidad del límite, se tiene que $f(x_0) = g(x_0)$. Concluimos así, dada la arbitrariedad de x_0, que $f = g$ en $\mathbb{R}$. $\square$

Este resultado se puede generalizar, obviamente, a cualquier conjunto denso en $\mathbb{R}$, no necesariamente solo $\mathbb{Q}$; incluso, en topología abstracta, a cualquier espacio topológico Hausdorff.

5.14.a. *Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una solución positiva no mayor que 1.*

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x2^x - 1$. Que $x_0 \in \mathbb{R}$ sea solución de la ecuación $x2^x = 1$ es equivalente a que x_0 sea un cero de f, y como $f(0) = -1 < 0$ mientras que $f(1) = 1 \cdot 2^1 - 1 = 1 > 0$, en virtud del Teorema de Bolzano ha de existir $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

El resto de apartados del Ejercicio 5.14 son análogos.

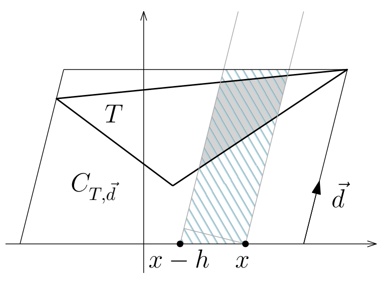
5.15. *Sea $\vec{d}$ una dirección en el plano y sea T un triángulo. Probar que existe una recta con dirección $\vec{d}$ que divide al triágulo en dos partes de igual área.*

Solución. Supongamos que $\vec{d} \not\propto (1, 0)$ es un vector fijo. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos por $\Phi(x)$ el área de la parte del triángulo que queda a la derecha de la recta con dirección $\vec{d}$ y que corta al eje de abscisas en x. Dado que T es acotado, podemos encontrar $x_0, x_1 \in [0, 1]$ de forma que $\Phi(x) = 0$ para todo $x > x_0$ y $\Phi(x) = \text{Área}(T)$ para todo $x < x_1$. Así, dado que Φ es continua, pues en particular es Lipschitz*, deducimos que, en virtud del Teorema de los Valores Intermedios, existe $c \in (x_1, x_0)$ de forma que $\Phi(c) = \frac{1}{2}\text{Área}(T)$, como se detalla en la Figura

*Para ver que es Lipschitz, aunque la rigurosidad en esta solución no sea exhaustiva, fijado el triángulo T y la dirección $\vec{d} = (d_1, d_2)$, construyamos un paralelogramo $C_{T,\vec{d}}$ cualquiera (obviamente acotado), que contenga a T, entonces, como se puede observar en la figura,

$$\Phi(x - h) - \Phi(x) = \text{Área sombreada} \le \text{Área rayada} = \text{base} \cdot \text{altura} \le \operatorname{diam}(C_{T,\vec{d}})\cancel{\lfloor \operatorname{sen}(\theta_{\vec{d}}) \rceil} h$$

donde $\theta_{\vec{d}} = \arctan(d_2/d_1)$ si $d_1, d_2 \neq 0$, cuyo seno no escribimos ya que es menor o igual que 1, y estamos mayorando la expresión, con lo que la función es Lipschitz, y por ende continua. Si $d_2 = 0$ se razona análogamente pero en el eje de ordenadas.



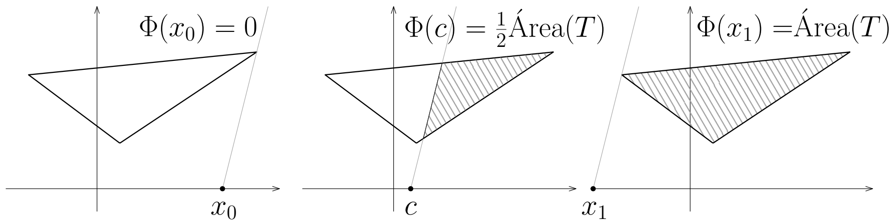


Figura 1. Representación de la función Φ en tres ocasiones distintas, antes de «barrer» el triángulo (izquierda), cuando ha «barrido» la mitad del triángulo (centro), y una vez ha «barrido» la totalidad del triángulo (derecha).

1. Si $\vec{d} \propto (1,0)$, podemos hacer el mismo razonamiento, pero considerando $\Phi(x)$ el área de la parte del triángulo que queda abajo de la recta con dirección $(1,0)$ y que corta al eje de ordenadas en x. $\square$

¡Ojo! El ejercicio 5.16 dice:

5.16. *Un coche recorre* 100 *kilómetros en* 50 *minutos sin detenerse. Demostrar que hubo un minuto en el cual recorrió exactamente* 2 *kilómetros*

es decir, existe un intervalo $[c, c+1] \subset [0,50]$, $c \in [0,49]$, de forma que el recorrido hecho en dicho intervalo es de 2 kilómetros exactamente. Lo resolveremos en las siguientes clases.

5.17. *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua satisfaciendo $f(0) = f(1)$. Demostrar la existencia de un punto $c \in [0,1/2]$ en el que $f(c) = f(c+1/2)$. Concluir que existen, en cualquier momento, puntos opuestos en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.*

Indicación: considérese la función $g(x) := f(x) - f(x+1/2)$.

Solución. Consideremos, como se nos indica, la función $g : [0,1/2] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x) - f(x+1/2)$. Entonces, $g(0) = f(0) - f(1/2)$ y

$$g(1/2) = f(1/2) - f(1) = -g(0).$$

Así, si $g(0) = 0$, elegimos simplemente $c = 0$, mientras que si $g(0) \neq 0$, sabemos que $g(0) = -g(1/2)$, de forma que los signos de ambas imágenes son opuestos y en virtud del Teorema de Bolzano, existe $c \in (0,1/2)$ de forma que $g(c) = 0$, como queríamos demostrar. $\square$

5.18. *Demostrar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer: sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \to I$ una función continua, existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = c$.*

Solución. Denotemos $I := [a,b]$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, ya estaría, sin más que tomar $c := a$ o $c := b$, respectivamente, de modo que supongamos que no es así. Dado que $f([a,b]) \subset [a,b]$, necesariamente se tiene que $f(a) > a$ y $f(b) < b$. Consideremos la función auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) := f(x) - x$, la cual es continua y satisface $h(a) = f(a) - a > 0$ y $h(b) = f(b) - b < 0$. Como consecuencia del Teorema de Bolzano, debe existir $c \in (a,b)$ tal que $0 = h(c) = f(c) - c$, esto es, debe existir un punto fijo por f. $\square$

5.19. *Pruébese que si I es un intervalo real, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y $t_1, ..., t_n \in I$ son puntos arbitrarios, existe $c \in I$ tal que*

$$f(c) = \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n}.$$

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(t_1) \leq \cdots \leq f(t_n)$, tras un posible reordenamiento de $t_1, \ldots, t_n$. Entonces,

$$f(t_1) = \frac{f(t_1) + \overset{n)}{\cdots} + f(t_1)}{n} \leq \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n} \leq \frac{f(t_n) + \overset{n)}{\cdots} + f(t_n)}{n} = f(t_n),$$

de forma que por el Teorema de los Valores Intermedios de Bolzano, ha de existir $c \in I$ verificando la condición enunciada. $\square$

También se podría probar por inducción sobre n.