APÉNDICE: 20 DE FEBRERO DE 2019

Para estudiar la derivabilidad de una función hay que tener en cuenta, al menos, el siguiente ejemplo, ligeramente patológico, de una función con derivada no continua, para no inferir que si los límites de la derivada no existen entorno a un punto, la derivada no exista:

Ejemplo. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$, con $f'(0) = 0$, pero no existen los límites

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) \quad y \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Podéis probar lo anterior, es sencillo. Sí podemos usar lo siguiente:

Proposición. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo abierto I y sea $a \in I$ un punto cualquiera, supongamos que f es diferenciable en $I \setminus \{a\}$ y que el siguiente límite existe:*

$$\lim_{x\to a} f'(x) = L.$$

Entonces, f es diferenciable en a y $f'(a) = L$.

Demostración. Sea $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset I$ y sea $x \in (a, a + \delta)$, de forma que f es diferenciable en x por hipótesis, y por ende podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[a, x]$. Con ello, existe $\xi_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x).$$

Ahora bien, cuando $x \to a$, todo punto en el intervalo $[a, x]$ se hace arbitrariamente próximo a x, de forma que $\lim_{x\to a^+} \xi_x = x$ y por ende

$$f'(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} f'(\xi_x) = \lim_{x\to a^+} f'(x) = L,$$

pues por hipótesis dicho límite existe. Mediante un argumento similar para $x \in (a - \delta, a)$, concluimos por su parte que $f'(a^-) = \lim_{x\to a^-} f'(x) = L$, de forma que f es diferenciable en a y $f'(a) = L$, como queríamos demostrar.

Sin la continuidad, obviamente ésto no se tiene:

Ejemplo. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ es continua y diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y con $f'(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero no es diferenciable en $x = 0$ pues ni siquiera es continua en éste.*