5.20. *Sea f una función real acotada definida en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset I$, se denomina al número*

$$\omega_f(S) := \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\}$$

oscilación de f en S. Para un punto en particular $x_0 \in I$, podemos definir la oscilación de f en x_0 como el número

$$\omega_f(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0.

Solución. En primer lugar, podemos observar que si $\omega_f(S) < +\infty$, entonces $\omega_f(S) \geq 0$. En efecto, si se tiene $f(x) - f(y) \leq 0$ entonces intercambiando los papeles de x e y, $f(y) - f(x) \geq 0$, de forma que $\omega_f(S) \geq 0$ si es finito. Podríamos así considerar definida la oscilación de f en S por la expresión $\omega_f(S) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}$. Consideremos ahora $x_0 \in I$ y veamos que el límite $\omega_f(x_0)$ siempre existe (si f es acotada e I es compacto). En primer lugar, es un número acotado superiormente por $\omega_f(I)$ (pues este último es el supremo en un conjunto mayor, I, que es mayor cualquier supremo sobre conjuntos más pequeños, $I \cap B_h(x_0)$). Dicha cota superior es además finita, dado que la función f es, por hipótesis, acotada en I. Esto es, existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, y por ende $\omega_f(S) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\} \leq M - (-M) = 2M$. Por último, comprobemos que $[0, \infty) \ni h \mapsto \omega_f(I \cap B_h(x_0))$ es una aplicación monótona decreciente, como ocurre con la carga genética en la familia real, pues sencillamente

$$\begin{aligned}
\omega_f(I \cap B_{h_1}(x_0)) &= \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_1}(x_0)\} \\
&\leq \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_2}(x_0)\} \\
&= \omega_f(I \cap B_{h_2}(x_0))
\end{aligned}$$

para cualesquiera $0 \leq h_1 < h_2$, al tomarse el primer supremo en un conjunto menor que el segundo supremo. Así, deducimos que

$$\lim_{h \to 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \geq 0,$$

sabemos que dicha expresión se corresponde con un número real no negativo. Veamos ahora que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0. Supongamos en primer lugar que $\omega_f(x_0) = 0$, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta_\varepsilon > 0$ de manera que si $0 < h \leq \eta_\varepsilon$ entonces $\omega_f(I \cap B_h(x_0)) \leq \varepsilon$. De esta desigualdad se sigue inmediatamente que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon := \eta_\varepsilon/2$ de forma que si $0 < |h| < \delta_\varepsilon$, se tiene

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \sup\{f(a) - f(b) : a, b \in I \cap B_{|h|}(x_0)\} = \omega_f(I \cap B_{|h|}(x_0)) \leq \varepsilon$$

con lo que f es continua en x_0. Recíprocamente, supongamos que f es continua en $x_0 \in I$ y veamos que $\omega_f(x_0) = 0$ necesariamente. En efecto, fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ entonces se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Como hemos comentado anteriormente, y empleando la desigualdad triangular e identidades sencillas relacionadas con el supremo:

$$\begin{aligned}
&\omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \\
&= \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0) + f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq \sup\{|f(a) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} + \\
&\quad \sup\{|f(x_0) - f(b)| : b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= 2 \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq 2\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \leq \omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0))\} \leq 2\,\varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, y puesto que $\omega_f(x_0)$ es independiente de ε, necesariamente $\omega_f(x_0) = 0$, como queríamos comprobar. □

5.21. *Supóngase que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua y*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Demostrar que f *está acotada y que alcanza un máximo o un mínimo. Dar un ejemplo para indicar que no necesariamente se tienen por qué alcanzar tanto un máximo como un mínimo.*

Solución. Dado que, por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ de forma que si $|x| > M_\varepsilon$, entonces $|f(x)| \leq \varepsilon$, deducimos tomando $\varepsilon = 1$, por ejemplo, que existe $M_1 > 0$ de forma que $|f(x)| \leq 1$ en $\mathbb{R} \setminus [-M_1, M_1]$. Dado que el intervalo $[-M_1, M_1]$ es compacto y f es continua en éste, ésta es acotada, digamos que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ en $[-M_1, M_1]$. Entonces, $|f(x)| \leq \max\{1, C\}$ en $\mathbb{R}$, como queríamos probar. Demostremos ahora que la función alcanza un máximo o un mínimo en $\mathbb{R}$. Supuesto que $f \neq 0$, caso trivial, sabremos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Supongamos que $f(x_0) > 0$ y consideremos el intervalo $[-M_c, M_c]$, siendo $c := \frac{1}{2} f(x_0)$. En virtud del Teorema de Weierstraß, en dicho intervalo se alcanza un máximo, como mínimo de valor $f(x_0)$, y recordemos que se tiene $|f(x)| \leq f(x_0)$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus [-M_c, M_c]$. No obstante, puede ser que no se alcance un máximo *y* un mínimo en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^{-x^2}$. Se comprueba que dicha función es continua y alcanza un máximo absoluto en $x = 0$, pero sin embargo no alcanza un mínimo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2^{-x^2}$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ pero no tiene máximo en $\mathbb{R}$, como se muestra en la Figura 2. Un ejemplo más sencillo consiste en considerar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \pm(1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, que son continuas y satisfacen naturalmente las hipótesis, pero no tienen mínimos/máximos respectivamente, como se muestra en la Figura 3. Esto concluye el ejercicio. □

Como ejercicio adicional puede comprobarse que la tesis sobre la acotación se sigue verificando si los límites cuando $x \to \pm\infty$ de $f(x)$ son números reales arbitrarios posiblemente distintos, esto es,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_{-\infty} \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L_{+\infty} \in \mathbb{R}.$$

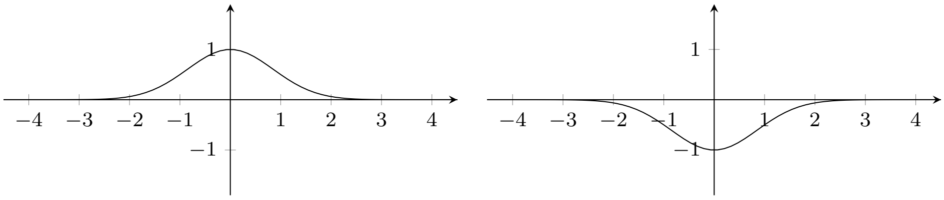

Figura 2. Representación gráfica de $x \mapsto 2^{-x^2}$ (izquierda) y de $x \mapsto -2^{-x^2}$ (derecha), las cuales satisfacen las hipótesis del enunciado pero no tienen mínimo/máximo, respectivamente.

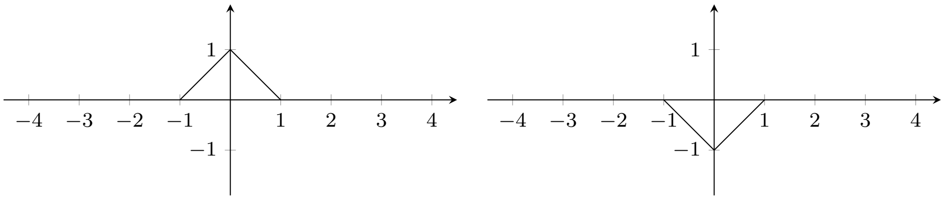

Figura 3. Representación gráfica de $x \mapsto (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ (izquierda) y de $x \mapsto (|x| - 1)\chi_{[-1,1]}(x)$ (derecha), respectivamente.

¿Qué se puede decir de la existencia de máximos o mínimos? Desde luego, si $L_{-\infty} \neq L_{+\infty}$, podemos usar funciones de la forma $x \mapsto A \arctan(x) + B$ con A y B expresados en términos de $L_{-\infty}$ y $L_{+\infty}$ (¿cómo?) de forma que no se alcanza ningún máximo ni ningún mínimo.

5.22.a. *Determinar si la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.*

Solución. Para que f sea uniformemente continua tenemos que encontrar, fijado $\varepsilon > 0$, un número real $\delta_\varepsilon > 0$ de forma que si $x, y \in [1, \infty)$ son cualesquiera satisfaciendo $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$, se tenga $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Analizando la última desigualdad,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|xy|} \leq \frac{\delta_\varepsilon}{1} \overset{!}{\leq} \varepsilon,$$

donde hemos empleado que $x, y \geq 1$ y por ende $1/xy \leq 1$, deducimos que resulta suficiente tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon$ para que el enunciado se verifique. Así, f es uniformemente continua en $[1, \infty)$. □

5.22.b. *Determinar si la función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.*

Solución. Intuitivamente, el crecimiento en $(0, 1)$ de la función en un entorno de 0 es muy fuerte como para que la continuidad sea uniforme. Así, veamos que existe ε de forma que para todo $\delta > 0$, existen $x_\delta, y_\delta \in (0, 1)$ de forma que $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Para explotar el crecimiento entorno a 0 consideremos $\varepsilon = 1$, sin pérdida de generalidad, y elijamos $n_\delta \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que $\delta \geq 2^{-(n_\delta+1)}$ y escojamos, por ejemplo $x_\delta := 2^{-n_\delta}$ e $y_\delta := 2^{-(n_\delta+1)}$, de forma que $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \leq \delta$ y

$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| = \frac{|x_\delta - y_\delta|}{|x_\delta y_\delta|} \geq 1$$

si y solo si $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \geq |x_\delta y_\delta| = 2^{-(2n_\delta+1)}$, lo cual es cierto, como queríamos obtener. Concluimos que f no es, en efecto, uniformemente continua en $(0,1)$. $\square$

Otra posibilidad consiste en usar los Criterios de No-Continuidad Uniforme estudiados en teoría.