Ejercicio 6.19. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f tiene en 0 un mínimo local. (b) Demostrar que $f'(0) = f''(0) = 0$ y que no existe $f'''(0)$.

Solución. (a) Que sea mínimo local significa que se puede encontrar un entorno $(-\delta, \delta)$ de 0 en el cual $f(x) \geq f(0)$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$ (¡ojo!, no necesariamente ha de ser estrictamente mayor, ésto es lo que se conoce como mínimo local estricto, de hecho, no lo es porque la sucesión $\{x_k = 1/k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 cuando $k \to \infty$ y sin embargo $f(x_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Esto es claro ya que $f(x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, con lo que siempre se va a tener que $f(x) \geq f(0)$. (b) Veamos ahora que la primera derivada de f en 0 existe empleando la definición de ésta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 \operatorname{sen}^2(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^3 \operatorname{sen}^2(1/x) = 0$$

puesto que $x \mapsto x^3$ es una función que converge a 0 cuando $x \to 0$ y $x \mapsto \operatorname{sen}^2(1/x)$ es una función acotada, y sabemos por la teoría que el límite de un producto de una función acotada y una convergente a cero es cero. Ahora bien, empleando las reglas del cálculo de derivadas, así como lo anterior, deducimos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Con ello, razonando de la misma forma, deducimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)] = 0$$

ya que $x \mapsto 2x$ es una función que converge a 0 cuando $x \to 0$ mientras que la función $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)]$ es acotada en un entorno de 0. Nuevamente, empleando las reglas del cálculo de derivadas,

$$f''(x) = \begin{cases} 2[(6x^2 - 1) \operatorname{sen}^2(1/x) + \cos^2(1/x) - 6x \operatorname{sen}(1/x) \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

Ahora, sin embargo, se comprueba sencillamente que no existe el límite definitorio de $f'''(0)$, usando, por ejemplo, la sucesión $\{x_k = 1/2\pi k : k \in \mathbb{N}\}$, convergente a 0, para la cual se anulan todos los términos con senos en la expresión de f'', y por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f''(x_k) - f''(0)}{x_k - 0} = \lim_{k \to \infty} 4\pi k \cos^2(2\pi k) = +\infty.$$

□

Ejercicio 6.20. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f(x) = ax - \frac{x^3}{1 + x^2}.$$

Probar que f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \geq 9/8$.

Solución. En primer lugar, observemos que la función f está bien definida en $\mathbb{R}$ cualquiera que sea a una constante real. Dada la regularidad de f, podemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de ésta a través de su derivada, que resulta:

$$f'(x) = a - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 2x}{(1+x^2)^2} = a - \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2},$$

y como f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$a \geq \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}$$

podemos calcular el máximo global de la función auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2},$$

hallando los puntos críticos de su derivada,

$$g'(x) = -\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

éstos son, $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, dado que la función no crece arbitrariamente, pues es continua y acotada:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1} = 1,$$

Se comprueba de manera sencilla que

$$g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$$

es máximo global de g y por ende $a \geq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solo si $a \geq 9/8$. $\square$

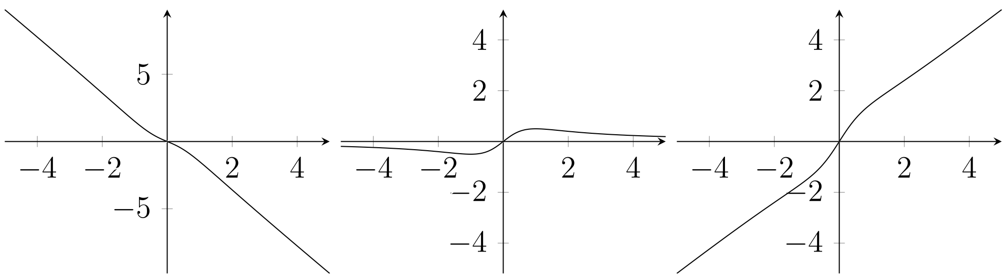

FIGURA 8. Representación gráfica de f cuando $a = -1$ (izquierda), $a = 1$ (centro) y $a = 2$ (derecha).

Ejercicio 6.21. *¿Qué número es mayor, e^π o π^e? Probar que si $x > e$, entonces $e^x > x^e$.*

Solución. Dado que el logaritmo preserva el orden (es una función estrictamente creciente), se tiene que $x^e < e^x$ si y solo si $\log(x^e) < \log(e^x)$, y por las propiedades de los logaritmos, esto equivale a

$$\frac{e}{\log(e)} < \frac{x}{\log(x)}. \tag{$\dagger$}$$

Definimos la función auxiliar $h : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := \frac{x}{\log(x)},$$

la cual está bien definida en $(1, \infty)$, y es continua y derivable en dicho intervalo. En virtud de la desigualdad (†), el enunciado del problema es entonces equivalente a demostrar que $h(e) < h(x)$ para todo $x > e$. Ahora bien,

$$h'(x) = \frac{\log(x) - 1}{\log^2(x)} > 0$$

para todo $x > e$, de forma que h es estrictamente creciente en (e, ∞) y, en particular, $h(e) < h(x)$ para todo $x \in (e, \infty)$. $\square$