Ejercicio 6.5.d. *Demostrar la desigualdad*

$$2x < \operatorname{sen}(2x) + \tan(x)$$

para todo $x \in (0, \pi/2)$.

Solución. Definamos la función auxiliar $f : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \operatorname{sen}(2x) + \tan(x) - 2x$$

y veamos que f es estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$. Dada la regularidad de la función, esto equivale a estudiar su derivada, y empleando la identidad trigonométrica $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ deducimos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(2x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 2 \\ &= \frac{2\cos^2(x)\cos(2x) + 1 - 2\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{2\cos^2(x)\cos(2x) - \cos(2x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{[2\cos^2(x) - 1]\cos(2x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(x)} > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (0, \pi/2)$, pues así f es creciente en $[0, \pi/2)$ y por ende se verifica que $f(x) > f(0) = 0$ para todo $x \in (0, \pi/2)$, como queríamos demostrar. □

Ejercicio 6.7. *Prueba que* $\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \pi/2$ *para todo* $x \in [-1, 1]$.

Solución. Observamos que las derivadas de las funciones

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\pi}{2}$$

coinciden, trivialmente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

para cada $x \in [-1, 1]$. Así, ambas funciones difieren en una constante:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + C,$$

para cierta $C \in \mathbb{R}$, que resulta necesariamente nula, dado que, en particular, evaluando la anterior expresión en $x = 0$:

$$\operatorname{arc\,sen}(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2} + C,$$

de donde se sigue la igualdad del enunciado, como queríamos comprobar. □

Ejercicio 6.8. *Probar que*

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)$$

para todo $x \geq 0$. *¿Y si* $x < 0$*?*

Solución. Veamos que las derivadas de ambas funciones

$$[0,\infty) \ni x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right), \qquad [0,\infty) \ni x \mapsto \arctan(x)$$

coinciden en $(0,\infty)$ de forma que serán iguales salvo una constante, que será necesariamente nula. Esto es inmediato:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) &= -\frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\\ &= x\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x).\end{aligned}$$

Así, $\arccos(1/\sqrt{1+x^2}) = \arctan(x)+C$ para cualquier $x \in (0,\infty)$, para cierta $C \in \mathbb{R}$. Sin más que evaluar en $x = 1$, como

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

deducimos que $C = 0$. Si $x < 0$ no pueden ser iguales, pues la primera es una función par no trivial y la segunda es una función impar. Evaluése la igualdad en $x = -1$: $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/2 \neq -\pi/2 = \arctan(-1)$. De hecho, son funciones opuestas en $(-\infty, 0)$. □

Solución (sin derivación). Tomando cosenos a ambos lados de la identidad del enunciado obtenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\arctan(x)).$$

Definamos $\varphi_x := \arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{2})$, de forma que, como $x \geq 0$, tras elevar al cuadrado, podemos reenunciar la identidad en la forma

$$\frac{1}{1+\tan^2(\varphi_x)} = \cos^2(\varphi_x),$$

la cual es cierta sin más que usar que $\tan(\varphi_x) = \operatorname{sen}^2(\varphi_x)/\cos^2(\varphi_x)$ y simplificar usando la identidad pitagórica. □

Ejercicio 6.9. *Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[0,1]$, derivables en $(0,1)$ con $f(0) = 0$, $g(0) = 2$ y $|f'(x)| \leq 1$, $|g'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$. Probar que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [0,1]$.*

Solución. Probemos una condición más fuerte, la cual es muy intuitiva: probemos que $f(x) \leq x \leq 2-x \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, como se puede apreciar en la Figura 4. Esencialmente, dado que el módulo de la derivada de ambas funciones no supera 1, f no puede crecer más que $x \mapsto x$ desde $(0,0)$, pues su derivada satura la desigualdad $|f'| \leq 1$, y g no puede decrecer más que $x \mapsto 2-x$ desde $(2,0)$. Rigurosamente, como consecuencia del Teorema del Valor Medio, para cada $x \in [0,1]$ fijo existe cierto $c_x \in [0,x]$ de forma que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c_x)$$

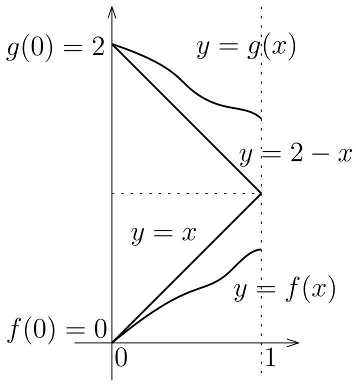

FIGURA 4. Representación intuitiva del contexto del problema

de donde se deduce, dado que $f(0) = 0$ y $|f'(c_x)| \leq 1$, que

$$\frac{|f(x)|}{x} = |f'(c_x)| \leq 1$$

y en particular, que $f(x) \leq x$. Análogamente, en virtud del Teorema del Valor Medio nuevamente, para cada $x \in (0,1)$ existe $d_x \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(d_x)$$

de forma que, como $g(0) = 2$ y $|g'(d_x)| \leq 1$,

$$|g(x) - 2| \leq |x|,$$

y, en particular, $2 - g(x) \leq x$, esto es, $g(x) \geq 2 - x$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 6.10. *Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.*

Solución. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. La igualdad $f'(c) = \lambda f(c)$ recuerda ligeramente a la exponencial $x \mapsto e^{\lambda x}$, de forma que, tras buscar algunas analogías con ésta y el Teorema de Rolle, llegamos a que podemos considerar estratégicamente la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := e^{-\lambda x} f(x),$$

de manera que $h(a) = h(b)$ y h es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). En virtud del Teorema de Rolle, dado que $h(a) = h(b) = 0$, existe cierto $c \in (a,b)$ de forma que

$$0 = h'(c) = e^{-\lambda c}[-\lambda f(c) + f'(c)].$$

y dado que $e^{-\lambda c} > 0$, necesariamente $f'(c) = \lambda f(c)$, como queríamos demostrar. $\square$