

**6.2.a.** Estudiar la derivabilidad de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{|x|}$ , y hallar  $f'(x)$  y  $f''(x)$  donde sea posible.

*Solución.* La función es continua dado que es composición de funciones continuas, más concretamente, el valor absoluto y la raíz cuadrada. En  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$  se tratan además, como sabemos, de funciones de clase  $C^\infty$ , puesto que  $x \mapsto |x|$  restringida es esencialmente la función  $x \mapsto -x$  o  $x \mapsto x$ , respectivamente, mientras que  $x \mapsto \sqrt{x}$  es una función de clase  $C^\infty$  en  $(0, \infty)$ , como hemos estudiado en teoría. Por tanto, la diferenciabilidad se reduce a estudiar la diferenciabilidad de la función en 0; por definición, basta estudiar:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

o bien

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{-h}}{-h} = -\infty.$$

Con todo esto,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

si  $x \neq 0$ . Se tiene también que  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, análogamente, ahora en todo el dominio donde está definida,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Y, tras un sencillo cálculo:

$$f'(x) = -\frac{1}{4(\sqrt{|x|})^2} \quad \text{si } x \neq 0,$$

como queríamos obtener. □

El resto de apartados del Ejercicio 6.2 se resuelven análogamente.

**6.3.a.** Hallar  $f'(x)$ , simplificando si es posible, si

$$f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}.$$

*Solución.* Como consecuencia de la regla del cociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\cos(x) - \sin(x)][\sin(x) - \cos(x)] - [\sin(x) + \cos(x)][\cos(x) + \sin(x)]}{[\cos(x) - \sin(x)]^2} \\ &= -\frac{[\cos(x) - \sin(x)]^2 + [\cos(x) + \sin(x)]^2}{[\sin(x) - \cos(x)]^2} = -\frac{2[\cos^2(x) + \sin^2(x)]}{[\cos(x) - \sin(x)]^2} = -\frac{2}{1 - \sin(2x)} \end{aligned}$$

como queríamos obtener. Hay que tener en cuenta que la anterior expresión, así como la de la función  $f$ , solo tiene sentido si  $\sin(x) - \cos(x) \neq 0$ , esto es, si  $x \notin \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . □

El resto de apartados del Ejercicio 6.3 se resuelven de manera similar.

**6.4.1.** Hallar el número de soluciones reales que tiene la ecuación  $3x^5 + 15x - 8 = 0$  y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución.

*Solución.* En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, el número de soluciones reales es cinco a lo sumo, el grado del polinomio. Estudiando el comportamiento del polinomio podemos determinar aproximadamente dónde se encuentran sus raíces. Hallemos la derivada para determinar los máximos y mínimos de  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) := 3x^5 + 15x - 8$  así como los intervalos de crecimiento.  $p'(x) = 15x^4 + 15$ , de forma que los puntos críticos son las soluciones de  $15x^4 + 15 = 0$ , o bien,  $x^4 = -1$ . Ésta no tiene soluciones reales pues es absurdo que  $0 < x^4 = -1 < 0$ . Claramente, la función es creciente en  $\mathbb{R}$  puesto que  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos acotar la raíz evaluando la función en números enteros que resulten fácilmente calculables, por ejemplo, a simple vista se puede comprobar que  $p(0) = -8 < 0$  mientras que  $p(1) = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$ , con lo que, en virtud del Teorema de Bolzano, hay una raíz del polinomio en  $(0, 1)$ . Dado que la función es estrictamente creciente, como hemos comprobado, es la única solución real a la ecuación del enunciado, y se encuentra en  $(0, 1)$ .  $\square$

El resto de apartados del ejercicio 6.4 se resuelven de manera análoga.

**6.5.a. Demostrar la desigualdad**

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < x - \frac{x^3}{6}$$

para  $x \in (0, 1]$ .

*Solución.* Para demostrar la primera desigualdad definamos la función auxiliar  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) := \arctan(x) - x + \frac{x^3}{3},$$

y veamos que  $f > 0$  en  $(0, 1]$ , lo cual es equivalente a probar la desigualdad del enunciado. En primer lugar,  $f(0) = 0$ , y dado que la función es diferenciable en  $(0, 1)$ , y su derivada satisface

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{x^2+1} > 0,$$

deducimos que  $f$  es estrictamente creciente en  $[0, 1)$  por el resultado visto en teoría, así,  $f(x) > f(0) = 0$  para todo  $x \in (0, 1]$ . Por otra parte, para demostrar la segunda desigualdad, definamos la función auxiliar  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$g(x) := x - \frac{x^3}{6} - \arctan(x),$$

y veamos que  $g > 0$  en  $(0, 1]$ . De igual manera,  $g(0) = 0$ , y la función es continua en  $[0, 1]$  y diferenciable en  $(0, 1)$ , con derivada

$$g'(x) = \frac{x^2 - x^4}{2x^2 + 2} > 0,$$

ya que  $x^4 < x^2$  en  $(0, 1)$ . Con todo esto, deducimos que  $g$  es estrictamente creciente en  $(0, 1]$  y por ende  $g(x) > g(0) = 0$  para todo  $x \in (0, 1]$ . Esto concluye el ejercicio.  $\square$

**6.6. Demostrar que  $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$  si  $x > y$ . Deducir que la función  $\arctan(\cdot)$  es Lipschitz en  $\mathbb{R}$ .**

*Solución.* Probar que  $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$  para cualesquiera dos reales  $x > y$  es equivalente a probar que

$$y - \arctan(y) < x - \arctan(x)$$

para cada dos reales  $y < x$  es decir, que la función auxiliar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(t) := t - \arctan(t)$$

sea estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ . Ahora bien, esto resulta inmediato analizando mediante diferenciación los extremos relativos de  $f$ , que es de clase  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ :

$$0 = f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

la cual es, en efecto, continua. Así, el único punto crítico de  $f$  es  $t = 0$ , el cual es un punto de silla. Evaluando:

$$f'(-1) = f'(1) = \frac{1}{2} > 0,$$

por ejemplo, se comprueba, por lo visto en teoría, que  $f$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ , como queríamos probar. Para concluir, cualesquiera que sean  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |\arctan(x) - \arctan(y)| &= \begin{cases} \arctan(y) - \arctan(x) & \text{si } x \leq y \\ \arctan(x) - \arctan(y) & \text{si } y < x \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} y - x & \text{si } x \leq y \\ x - y & \text{si } y < x \end{cases} = |x - y|, \end{aligned}$$

con lo que  $f$  es globalmente 1-Lipschitz en  $\mathbb{R}$ . □