APÉNDICE: 31 DE ENERO DE 2019

Veamos rigurosamente por qué da igual poner $<$ o $\leq$ en el Criterio ε-δ de Weierstraß, más en particular, por qué considerar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

definida por la proposición (P):

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\setminus\{x_0\} \quad f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

es equivalente a considerar la proposición (Q):

$$\forall\hat{\varepsilon} > 0 \quad \exists\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}} > 0 \quad \forall x \in [x_0-\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0+\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}]\setminus\{x_0\} \quad f(x)\in(L-\hat{\varepsilon}, L+\hat{\varepsilon}),$$

es decir, por qué da igual escribir $0<|x-x_0|<\delta$ que $0<|x-x_0|\leq\delta$. El razonamiento que exponemos nos permite asegurar que ocurre de manera similar para $|f(x)-L|<\varepsilon$ y $|f(x)-L|\leq\varepsilon$.

Para ello, tenemos que ver que $(P)\Longrightarrow(Q)$ así como que $(Q)\Longrightarrow(P)$

La implicación $(Q)\Longrightarrow(P)$ es clara, simplemente consiste en darse cuenta de que escribir "$<$" es, a fortiori, "$\leq$",

$\forall\varepsilon>0$ tomamos $\hat{\varepsilon}=\varepsilon$

$\exists\delta_\varepsilon=\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}>0$

$\forall x\in(x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\setminus\{x_0\}\subset[x_0-\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0+\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}]\setminus\{x_0\}$ y se verifica (Q)

$f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

y para demostrar $(P)\Longrightarrow(Q)$ tenemos que ajustar δ:

$\forall\hat{\varepsilon}>0$ tomamos $\varepsilon=\hat{\varepsilon}$

$\exists\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}=\frac{1}{2}\delta_\varepsilon>0$

$\forall x\in[x_0-\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0+\hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}]\setminus\{x_0\}\subset(x_0-\delta_\varepsilon, x_0+\delta_\varepsilon)\setminus\{x_0\}$ y se verifica (P)

$f(x)\in(L-\hat{\varepsilon}, L+\hat{\varepsilon})$