21. Demuestra que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = [n(n+1)/2]^2$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Lo demostraremos por inducción sobre n. El caso base, en el que $n = 1$, es trivialmente cierto, pues $1^3 = 1 = (1 \cdot 2/2)^2$. Supongamos ahora que se verifica para cierto $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para $n+1$. En efecto, basta comprobar que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)(n+1)^2 \\ &= \Big(\frac{n^2}{4} + n + 1\Big)(n+1)^2 = \frac{n^2+4n+4}{4}(n+1)^2 \\ &= \frac{(n+2)^2}{4}(n+1)^2 = \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2, \end{aligned}$$

como queríamos. □

25. Demuestra que $n^3 + 5n$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Observamos que $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$, que es divisible por 6 trivialmente, de forma que la proposición es cierta en el caso base, en el que $n = 1$. Supongamos que se verifica para cierto $n \in \mathbb{N}$, digamos que $n^3 + 5n = 6k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, y veamos que se verifica para $n+1$. Para ello, basta observar que

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 \\ &= (n^3 + 5n) + 3n^2 + 3n + 6 \\ &= (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6 \\ &= 6k + 3n(n+1) + 6 = 6(k+1) + 3n(n+1), \end{aligned}$$

dado que $n(n+1)$ es siempre un número par, pues o bien n es par o bien $n+1$ es par, deducimos que $3n(n+1) = 2\ell$ para cierto $\ell \in \mathbb{N}$ y, por ende,

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = 6(k+1) + 6\ell = 6(k+1+\ell),$$

y $(n+1)^3 + 5(n+1)$ es divisible por 6, como queríamos demostrar. □

26. Demuestra que $5^{2n} - 1$ es divisible por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Observamos en primer lugar que $5^{2\cdot 1} - 1 = 24 = 8 \cdot 3$, de forma que la proposición es cierta en el caso base, para el que $n = 1$. Supongamos entonces que es verdadera para cierto $n \in \mathbb{N}$, digamos así que $5^{2n} - 1 = 8k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y demostrémosla para $n+1$. Basta notar que

$$\begin{aligned} 5^{2(n+1)} - 1 &= 5^{2n+2} - 1 = 5^{2n}5^2 - 1 = 25 \cdot 5^{2n} - 1 \\ &= 25 \cdot 5^{2n} - 25 + 24 = 25(5^{2n} - 1) + 24 \\ &= 25 \cdot 8 \cdot k + 8 \cdot 3 = 8(25k - 3) \end{aligned}$$

por lo que $5^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8, como queríamos demostrar. □

29. Conjetura una fórmula para $1/(1 \cdot 3) + \cdots + 1/[(2n-1)(2n+1)]$ y demuéstrala empleando el principio de inducción matemática.

Solución. Observamos que

- $\dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2\cdot 1 + 1}$,
- $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{2\cdot 2 + 1}$,
- $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{35} = \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{2\cdot 3 + 1}$,

de forma que conjeturemos que se verifica la fórmula:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Probémosla por inducción sobre n.

Como es sencillo comprobar, el caso base, en el que $n = 1$, es trivialmente cierto. Supongamos que la fórmula es verdadera para cierto $n \in \mathbb{N}$ y probemos con ello que también se verifica para $n + 1$.

Basta observar que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]} \\
&= \frac{1}{1\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1}\left(n + \frac{1}{2n+3}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{n(2n+3)+1}{2n+3} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1},
\end{aligned}$$

como queríamos. □

32. Demuestra que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. La desigualdad se verifica trivialmente en el caso base, en el que $n = 1$, pues $1 < 2$ por definición. Supongamos ahora que se verifica para cierto $n \in \mathbb{N}$, y veamos que se satisface para $n + 1$. Para ello, basta observar que

$$n + 1 \overset{n\geq 1}{\leq} n + n = 2 \cdot n \overset{\text{H.I}}{<} 2 \cdot 2^n \overset{\text{def. rec.}}{=} 2^{n+1}$$

□

33. Demuestra que $2^n < n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Solución. La desigualdad se verifica en el caso base, en el que $n = 4$, puesto que un cálculo directo nos proporciona que

$$2^4 = 16 < 24 = 4!.$$

Supongamos así que la proposición se verifica para cierto $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se verifica para $n + 1$. Para ello, observamos que

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1)n! = (n+1)!,$$

donde hemos empleado que $2 < n + 1$ claramente para $n \geq 4$. □

36. Encuentra el mayor $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 - n$ es divisible por m para todo $n \in \mathbb{N}$, y demuéstralo.

Solución. Supongamos que m divide a $n^3 - n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Factorizando la expresión, obtenemos que m divide a $(n-1)n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado que esto se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$, veamos qué propiedad tiene m para $n = 2$ (el caso $n = 1$ es trivial, todo número natural divide a $1^3 - 1 = 0$): sencillamente deducimos que m divide a $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Por ello, m debe ser menor o igual que 6, y las posibles elecciones para m son 1, 2, 3, 6.

Por ej., $m = 1$ satisface la propiedad trivialmente, pero estamos buscando el valor más alto de m.

Es sencillo observar que 6 divide a $(n-1)n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Por qué? En primer lugar, $(n-1)n(n+1)$ va a ser siempre un número par, pues bien n y $n-1$ son pares o bien $n+1$ es par, y por ende el producto. Además, bien $n-1$, n, $n+1$ va a ser múltiplo de 3. Distinguimos así los siguientes casos posibles:

- n y $n+2$ son múltiplos de 2 y n (o $n+2$, spdg) lo es de 3, por ende n es múltiplo de 6;
- n y $n+2$ son múltiplos de 2 y $n+1$ es múltiplo de 3, por ende $n(n+1)$ es múltiplo de 6;
- $n+1$ es múltiplo de 2 y múltiplo de 3, por ende múltiplo de 6;
- $n+1$ es múltiplo de 2 y n (o $n+2$, spdg) lo es de 3; por ende $n(n+1)$ es múltiplo de 6.

En cualquiera de los casos, se trata de un múltiplo de 6, como queríamos concluir. $\square$

39. Sean $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ y definamos $x_{n+2} = (x_{n+1} + x_n)/2$ recursivamente para todo $n \in \mathbb{N}$. Emplea el principio de inducción matemática fuerte para demostrar que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Para $n = 1$ y $n = 2$ la propiedad de $1 \leq x_n \leq 2$ se satisface por simple definición de x_1 y x_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y supongamos la propiedad cierta para *todos* (emplearemos el principio de inducción *fuerte*) los $m \in \{1, \ldots, n\}$, y veamos con ello que ésta se cumple para $n + 1$. En efecto,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1,$$

pues $x_m \geq 1$ por hipótesis para cada $m \leq n$, mientras que

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \leq \frac{2+2}{2} = 2,$$

pues $x_m \leq 2$ por hipótesis para cada $m \leq n$. Esto concluye la demostración de que $1 \leq x_{n+1} \leq 2$. $\square$