Las propiedades algebraicas y de orden de los números reales.

49. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) si $a + b = 0$, $b = -a$;

(2) $-(-a) = a$;

(3) $(-1)a = -a$;

(4) $(-1)(-1) = 1$.

Solución. (1) Supuesto que $a + b = 0$, sumando $-a$ en ambos lados de la ecuación obtenemos que

$$b = 0 + b = ((-a) + a) + b = (-a) + (a + b) = (-a) + 0 = -a.$$

(2) Por definición $-(-a) + (-a) = 0$, sumando a en ambos lados, obtenemos que $(-(-a) + (-a)) + a = 0 + a = a$. Así,

$$a = (-(-a) + (-a)) + a = -(-a) + ((-a) + a) = -(-a) + 0 = -(-a).$$

(3) Sabemos que $a \cdot 0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$, que $1 + (-1) = 0$ y $1 \cdot a = 0$. Por ende,

$$0 = 0 \cdot a = (1 + (-1))a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = a + (-1)a$$

De aquí que

$$-a = -a + 0 = -a + \underbrace{(a + (-1)a)}_{=0 \text{ por lo anterior}} = (-a + a) + (-1)a = 0 + (-1)a = (-1)a$$

(4) Por el apartado anterior, $(-1)(-1) = -(-1)$ y por el segundo apartado tenemos que $-(-1) = 1$. Por tanto, $(-1)(-1) = 1$. $\square$

50. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra:

(1) $-(a + b) = (-a) + (-b)$;

(2) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

(3) $1/(-a) = -(1/a)$;

(4) $-(a/b) = (-a)/b$ si $b \neq 0$.

Solución. Solo resolvemos los primeros dos apartados. (1) Por el Ejercicio 49.(3)

$$-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b)$$

(2) Basta observar que:

$$\begin{aligned}
(-a)(-b) &= [(-1)a]\,[(-1)b] && \text{Ejercicio 49.(3)} \\
&= \big(\,[(-1)a](-1)\,\big)b && \text{asoc.} \\
&= \big(\,[a(-1)](-1)\,\big)b && \text{conm.} \\
&= \big(\,a[(-1)(-1)]\,\big)b && \text{asoc.} \\
&= \big(\,a\ 1\,\big)b && \text{Ejercicio 49.(4)} \\
&= ab && \text{neutro.}
\end{aligned}$$

$\square$

51. Resuelve las siguientes ecuaciones justificando paso por paso refiriéndote a la propiedad o teorema empleados:

(1) $2x + 5 = 8$;

(2) $x^2 = 2x$;

(3) $x^2 - 1 = 3$;

(4) $(x - 1)(x + 2) = 0$.

Solución. Resolveremos solo la primera:

$$\begin{aligned}
2\cdot x+5=8 &\iff (2\cdot x+5)+(-5)=8+(-5) && \text{sum. } -5\\
&\iff 2\cdot x+(5+(-5))=3 && \text{asoc.}\\
&\iff 2\cdot x=3 && \text{cancelamos}\\
&\iff (2\cdot x)\cdot\tfrac{1}{2}=3\cdot\tfrac{1}{2} && \text{mult. } \tfrac{1}{2}\\
&\iff (x\cdot 2)\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{2} && \text{conm. prod.}\\
&\iff x\cdot(2\cdot\tfrac{1}{2})=\tfrac{3}{2} && \text{asoc. prod.}\\
&\iff x\cdot 1=\tfrac{3}{2} && \text{cancelamos}\\
&\iff x=\tfrac{3}{2} && \text{elem. neutro}
\end{aligned}$$

□

52. Si $a\in\mathbb{R}$ satisface $a\cdot a=a$, prueba que entonces $a=0$ o $a=1$.

Solución. Sea $a\in\mathbb{R}$ tal que $a\cdot a=a$,

sumando a ambos lados $(-a)$, deducimos que $a\cdot a-a=a-a=0$,

en virtud de la propiedad distributiva, $a(a-1)=0$,

por ende $a=0$ o $a-1=0$, equivalentemente, $a=0$ o $a=1$ (porque $\mathbb{R}$ es lo que se dice un dominio de integridad, carece de divisores de cero). □

53. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ no nulos. Demuestra que $1/(a\cdot b)=(1/a)\cdot(1/b)$.

Solución. Dado que

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot(a\cdot b)=\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot(a\cdot b)=\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot b=\frac{1}{b}\cdot 1\cdot b=\frac{1}{b}\cdot b=1,$$

y lo mismo se puede repetir para obtener que $(ab)((1/a)(1/b))=1$, deducimos que $(1/a)(1/b)=1/(ab)$, por la unicidad del elemento recíproco. □

54. Demuestra que no existe $s\in\mathbb{Q}$ tal que $s^2=6$.

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\exists m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, tales que $(m/n)^2=6$.

Asumamos sin pérdida de generalidad que m y n son positivos y coprimos.

Dado que $m^2=6n^2=2(3n^2)$,

deducimos que m^2 es par y por ende también lo es m (*si m fuese impar, sería $m=2k+1$ para cierto $k\in\mathbb{N}$, y por tanto $m^2=4m^2+4m+1$, el cual es también claramente impar*).

Dado que m es par, podemos escribirlo en la forma $m=2p$ para cierto $p\in\mathbb{N}$. Con ello, $m^2=6n^2 \iff 4p^2=2(3n^2)$, o bien $2p^2=3n^2$.

Por consiguiente, $3n^2$ es par, pero entonces n es par por el mismo razonamiento hecho antes.

Así, m es par y n es par, lo cual contradice que sean coprimos, absurdo. □

55. Demuestra que no existe $t\in\mathbb{Q}$ tal que $t^2=3$.

Solución. Se prueba de manera análoga al ejercicio anterior. □

56. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(1) si $x,y\in\mathbb{Q}$, entonces $x+y,xy\in\mathbb{Q}$;
(2) si $x\in\mathbb{Q}$ e $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces $x+y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
(3) si $x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ e $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, demuestra que $xy\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Solución. (1) Sean $x, y \in \mathbb{Q}$, de manera que existen $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $r, s \neq 0$, tales que $x = p/q$ e $y = r/s$. Con ello,

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{rq}{qs} = \frac{ps + rq}{qs},$$

el cual es un número racional ya que $ps + rq, qs \in \mathbb{Z}$, $qs \neq 0$.

Por otra parte,

$$xy = \frac{p}{q}\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs},$$

el cual es también claramente un número racional.

(2) Sean ahora $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, de forma que existen $p, q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, tales que $x = p/q$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x + y \in \mathbb{Q}$, de forma que existirán $r, s \in \mathbb{Q}$, $s \neq 0$, tales que $x + y = r/s$. Entonces,

$$y = (x + y) - x = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - sq}{sq},$$

que es racional, lo cual es absurdo. □

57. Sea $K = \{s + t\sqrt{2} : s, t \in \mathbb{Q}\}$. Demuestra que posee las propiedades:

(1) si $x, y \in K$, entonces $x + y \in K$ y $xy \in K$;
(2) si $x \in K$ es no nulo, entonces $1/x \in K$.

Se dice así que el conjunto K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ con la suma y producto usuales, el cual se denota usualmente $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Solución. Basta considerar que, dados dos elementos $x, y \in K$, existirán, por definición, $s, t, u, v \in \mathbb{Q}$ tales que $x = s + t\sqrt{2}$ y $y = u + v\sqrt{2}$, de forma que

$$x + y = (s + t\sqrt{2}) + (u + v\sqrt{2}) = (s + u) + (t + v)\sqrt{2} \in K$$

en virtud de la propiedad asociativa de la suma y la distributiva. De la misma forma,

$$xy = (s + t\sqrt{2})(u + v\sqrt{2}) = su + sv\sqrt{2} + tu\sqrt{2} + 2tv = (su + 2tv) + (sv + tu)\sqrt{2} \in K$$

en virtud de las propiedades conmutativa del producto y distributiva.

Para la segunda propiedad, dado $x \in K \setminus \{0\}$, digamos representado por $x = s + t\sqrt{2}$ para ciertos $s, t \in \mathbb{Q}$ ambos no nulos, entonces empleando las mismas técnicas que se suelen emplear para hallar la expresión del inverso de un número complejo en coordenadas cartesianas, observamos que

$$\frac{1}{s + t\sqrt{2}} = \frac{(s - t\sqrt{2})}{(s + t\sqrt{2})(s - t\sqrt{2})} = \frac{s - t\sqrt{2}}{s^2 - 2t^2}$$

siempre que $s^2 - 2t^2 \neq 0$, esto es, $s^2 \neq 2t^2$; sin embargo, dado que $s, t \in \mathbb{Q}$, esto no puede ocurrir salvo que $s = t = 0$, caso que hemos descartado, pues si no se verificaría que $|s|/|t| = \sqrt{2}$, y esto es absurdo, sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional. □