148. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ positivos. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(n+a)(n+b)} - n &= \left(\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right) \frac{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n}{\sqrt{(n+a)(n+b)} - n} \\
&= \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} = \frac{n^2 + n(a+b) + ab - n^2}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} \\
&= \frac{n(a+b) + ab}{\sqrt{(n+a)(n+b)} + n} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{a+b+\frac{ab}{n}}{\sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{1}{n})} + 1} \\
&\to \frac{a+b+0}{\sqrt{(1+0)(1+0)} + 1} = \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. □

149. Emplea la Regla del Sandwich para calcular los límites de las sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, supuesto que:

(1) $x_n = n^{1/n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = (n!)^{1/n^2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Suponemos sabido que $n^{1/n} \to 1$ (vale el planteamiento del Ej. 134).

(1) Vamos a probar $\underline{1 \le n^{1/n^2} \le n^{1/n}}$.

Dado que $1 \le n$, entonces $1 = 1^{1/n^2} \le n^{1/n^2}$. $\quad (\star) \equiv (\sqrt[k]{a} \le \sqrt[k]{b} \overset{\text{Ej.71}}{\iff} (\sqrt[k]{a})^k \le (\sqrt[k]{b})^k \iff a \le b)$

Dado que $n^2 \ge n$, entonces $n^{1/n^2} \le n^{1/n}$ por Ej. 74

(2) Vamos a probar que $\underline{1 \le (n!)^{1/n^2} \le n^{1/n}}$.

Simplemente $n! \le n^n$, con lo que $(n!)^{1/n^2} \overset{(\star)}{\le} (n^n)^{1/n^2} \overset{(\dagger)}{=} n^{1/n}$.

¿por qué $(\dagger)$? $b := (n^n)^{1/n^2} > 0 \implies b^{n^2} = n^n \implies (b^n)^n = n^n \implies b^n = n \implies b = n^{1/n}$. □

150. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y denotemos $z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $z_n \to b$ cuando $n \to \infty$.

Solución. Reescribamos

$$z_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \left[b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}} = b\left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} =: b[1 + c^n]^{\frac{1}{n}}$$

donde $c := a/b \in (0, \infty)$. Veamos ahora que $b \le z_n \le b \cdot 2^{1/n}$:

- $b = b[1+0]^{\frac{1}{n}} \le b\,[1 + c^n]^{\frac{1}{n}} = z_n$ puesto que $(1 + c^n)^{1/n} > 1,\ c^n > 0$
- $z_n = b \cdot [1 + c^n]^{\frac{1}{n}} \le b \cdot (1+1)^{\frac{1}{n}} = b \cdot 2^{\frac{1}{n}}$ puesto que $c^n < 1$

De esta forma, por la Regla del Sandwich, concluimos que $z_n \to b$. □

El siguiente resultado provee de un criterio fácil para la convergencia de una sucesión:

Teorema. *Sea* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de números reales positivos tal que* $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) < 1$. *Entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

151. Emplea el anterior resultado para con las siguientes sucesiones $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $0 < a < 1$ y $b > 1$, si:

(1) $x_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(2) $x_n = b^n/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(3) $x_n = n/b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
(4) $x_n = 2^{3n}/3^{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. (1) Empleamos el teorema anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a < 1 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”}$$

aunque esto ya lo sabíamos (id. de Bernoulli o Conv. Monótona).

(2) Empleamos el teorema anterior, aunque podríamos usar la convergencia de la geométrica:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{b^{n+1}/2^{n+1}}{b^n/2^n} = \frac{b}{2} < 1 \text{“}x_n \to 0 \text{ si } b < 2\text{”}$$

el teorema no nos proporciona nada si $b/2 \geq 1$, de forma que solo podemos asegurar la convergencia si $b < 2$.

(3) Empleamos el teorema anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)/b^{n+1}}{n/b^n} = \frac{1}{b}\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{b} < 1 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”}$$

(4) Empleamos el teorema anterior:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{3(n+1)}/3^{2(n+1)}}{2^{3n}/3^{2n}} = \frac{2^{3n+3-3n}}{3^{2n+2-2n}} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} < 1 \implies \text{“}x_n \to 0\text{”}$$

□

152. (1) Proporciona un ejemplo de sucesión convergente $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números reales positivos con $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) = 1$. (2) Proporciona un ejemplo de sucesión divergente con esta propiedad.

Solución. (1) Basta considerar una sucesión constante > 0.

(2) Basta considerar la sucesión dada por $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

¿Qué nos quiere decir esto? Que el teorema anterior no nos vale para asegurar la convergencia de la serie a ningún lado en el caso $\lim(x_{n+1}/x_n) = 1$. □

153. Sea $L \in \mathbb{R}$, $L > 1$, y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}/x_n) = L$. Demuestra que ésta es una sucesión no acotada y, por consiguiente, no convergente.

Solución. Sabemos que $\forall \varepsilon \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_{n+1}/x_n - L| \leq \varepsilon$.

Tomando $\varepsilon := \frac{L-1}{2} > 0$, deducimos que $\forall n \geq N^* := N_{(L-1)/2} \quad \frac{L+1}{2} = L - \frac{L-1}{2} \leq \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq L + \frac{L-1}{2}$

de forma que $\forall n \geq N^* \quad x_{n+1} \geq (\frac{L+1}{2})x_n$.

Con ello,

$$x_m \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)x_{m-1} \geq \cdots \geq \underbrace{\left(\frac{L+1}{2}\right)^{m-N^*}}_{\text{sucesión en } m \text{ que } \to\infty} \underbrace{x_{N^*}}_{\text{número fijo}} =: y_m \to +\infty$$

dado que $x_{N^*} > 0$ por hipótesis y $\frac{L+1}{2} > 1$, la sucesión de la derecha es creciente y divergente

y por tanto la nuestra también. □