SOLUCIONES PROPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

A. RUIZ DE ALARCÓN

Última actualización: 13 de abril de 2019

31/1/2019

Ejercicio 5.6.a. *Estudiar la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \operatorname{sen}(x) \leq 0, \\ 1/e & \textit{si } \cos(2x) = 0, \operatorname{sen}(x) > 0, \\ (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Solución. La función es claramente 2π-periódica, de forma que nos podemos ceñir sencillamente a $[0, 2\pi]$ para discutir la continuidad de f. En dicho intervalo se distinguen los cambios en la definición de f en 0 y en π, así como en $\pi/4$ y $3\pi/4$. En el caso de $\pi/4$, tenemos lo siguiente*:

$$\lim_{x \to \pi/4^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/4^-} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} \overset{!}{=} (\sqrt{2})^{\infty} \overset{!}{=} \infty.$$

mientras que el otro límite lateral resulta

$$\lim_{x \to \pi/4^+} f(x) = \lim_{x \to \pi/4^+} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} = (\sqrt{2})^{-\infty} = 0.$$

*Veamos la justificación dicho límite rigurosamente, mediante el Criterio ε-δ de Weierstraß. En primer lugar, dado que $2\operatorname{sen}(x) \to \sqrt{2}$ cuando $x \to \pi/4^-$, pues $x \mapsto 2\operatorname{sen}(x)$ deducimos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que si $x \in (\pi/4 - \delta, \pi/4)$, entonces $\sqrt{2} - 2\operatorname{sen}(x) < \varepsilon$. Si tomamos, por ejemplo, $\varepsilon_0 := (\sqrt{2}-1)/2 > 0$, deducimos que para cierto $\delta_0 > 0$, cualquiera que sea $x \in (\pi/4 - \delta_0, \pi/4)$, tenemos que $2\operatorname{sen}(x) \geq (\sqrt{2}+1)/2 =: c$, que satisface $c > 1$ (gracias a que hemos elegido ε_0 de la forma anterior, aunque podríamos haber elegido sencillamente $\varepsilon_0 := \sqrt{2} - 1{,}0001$). Ahora bien, dado que

$$\lim_{x \to \pi/4^-} c^{1/\cos(2x)} = +\infty,$$

como hemos visto como consecuencia de la Desigualdad de Bernoulli y que las exponenciales con base mayor que 1 son funciones estrictamente crecientes, lo cual significa más concretamente que para todo $M > 0$, existe $\eta(M) > 0$ de forma que para todo $x \in (\pi/4 - \eta(M), \pi/4)$, se tiene $c^{1/\cos(2x)} > M$. Concluimos así que dado cualquier $M > 0$ existe $\delta(M) := \min\{\delta_0, \eta(M)\}$ de forma que

$$(2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} \geq c^{1/\cos(2x)} > M,$$

como queríamos demostrar.

Se obtiene un resultado análogo en $3\pi/4$. Por último, observamos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2\operatorname{sen}(x))^{1/\cos(2x)} = 0,$$

dado que $\operatorname{sen}(x) \to 0$ cuando $x \to 0$ mientras que $\cos(2x) \to 1$ cuando $x \to 0$, con lo que f es continua en 0. Se razona de la misma forma para concluir que f es continua en π. Así, la función no es continua en los puntos $\pi/4 + 2\kappa\pi$, $3\pi/4 + 2\kappa\pi$, cualquiera que sea $\kappa \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ejercicio 5.8. *Determínese $c > 0$ para que sea continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{c}\,x & \text{si } x \leq c, \\ \dfrac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}} & \text{si } x > c. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, calculemos el límite lateral por la izquierda

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} (3 - \sqrt{c}\,x) = 3 - \sqrt{c}\,c = 3 - (\sqrt{c})^3 = f(c),$$

mientras que el límite lateral por la derecha resulta

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c^+} f(x) &= \lim_{x\to c^+} \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}} = \lim_{x\to c^+} \frac{x-c}{\sqrt{x}-\sqrt{c}} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{c}}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \\ &= \lim_{x\to c^+} \frac{(x-c)(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{x-c} = \lim_{x\to c^+} (\sqrt{x}+\sqrt{c}) = 2\sqrt{c}. \end{aligned}$$

de forma que para que ambas expresiones coincidan, y equivalentemente f sea continua, basta hallar las soluciones de la ecuación

$$2\sqrt{c} = 3 - (\sqrt{c})^3$$

o equivalentemente, tras realizar el cambio de variable $z \equiv \sqrt{c}$, las soluciones reales no negativas de la ecuación $z^3 + 2z - 3 = 0$. En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, dicha ecuación tiene a lo sumo tres soluciones, y un método que suele funcionar consiste en probar soluciones enteras, más concretamente divisores del término independiente, como consecuencia del Teorema del Resto. Una solución es claramente $z = 1$, de forma que podemos escribir $z^3 + 2z - 3 = (z-1)(z^2 + z + 3)$ empleando la Regla de división de Ruffini. La ecuación $z^2 + z + 3 = 0$ no tiene, sin embargo, soluciones reales, de forma que $c = 1$ es la única elección posible para que f sea continua. $\square$

Ejercicio 5.9. *(a) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, pero continua en los demás puntos (b) Hállese una función definida en $\mathbb{R}$ que sea discontinua en $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, pero continua en los demás puntos.*

Solución. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observamos que f no es continua en cada punto de la forma $1/n$ dado que f es nula en $(1/(n+1), 1/n)$, y por ende

$$\lim_{x\to 1/n^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(1/n).$$

En 0 tampoco es continua, dado que

$$f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(1/n),$$

esto es, no es secuencialmente continua. Ahora, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = 1/n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

es continua en 0, como sencillamente se puede comprobar. Sin embargo, es claramente discontinua en $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ como se razona análogamente al caso anterior. $\square$

Recordemos ahora que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, esto es, si escogemos cualquier número real, podemos encontrar un número racional tan cercano a éste como queramos, esto es, dado $x \in \mathbb{R}$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $r \in \mathbb{Q}$ de forma que $|x - r| < \varepsilon$. Sabemos también que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. En la mayoría de ocasiones, y con el objetivo de evitar sobrecargar la notación, evitaremos hacer referencia a las dependencias de unas variables respecto de otras. Por ejemplo, en la anterior expresión, r dependerá tanto de x como de ε. Podríamos denotar entonces $r_{x,\varepsilon}$ o bien $r(x, \varepsilon)$ para hacer énfasis en dicha dependencia. Otra opción suele ser escribir $r \equiv r(x, \varepsilon)$ y no hacer más referencias a x y ε. Especificar las dependencias y tenerlas en mente es muy importante, y es particularmente clarificador, por ejemplo, a la hora de distinguir entre la continuidad de una función y la continuidad uniforme. Por otra parte, y en adelante, si X es un conjunto cualquiera, denotaremos, para cada subconjunto $A \subseteq X$, por $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, la función dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

comúnmente conocida como función característica de A en X. Por último, recordemos que, en lógica matemática, si P (la hipótesis) y Q (la tesis) denotan dos proposiciones lógicas, la implicación $P \implies Q$ se define como $\neg P \vee Q$, la cual es necesariamente cierta si no se cumple la hipótesis P, o se cumple la tesis Q si se cumple la hipótesis P. Por tanto, $\neg(P \implies Q)$ equivale a $P \wedge \neg Q$. Además, si R es una proposición sobre los elementos de un conjunto, $\neg(\exists x\, R(x))$ es equivalente a $\forall x\, \neg R(x)$ y de la misma forma, $\neg(\forall x\, R(x))$ es equivalente a $\exists x\, \neg R(x)$. Con ello, se deduce fácilmente que la negación de la continuidad de una función f en un punto $x \in \mathbb{R}$,

$$\neg(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

es equivalente a la siguiente proposición:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Esto resultará suficiente para demostrar, en muchos ejercicios, con elecciones sencillas de ε e y, la falta de continuidad en ciertos puntos x.

Ejercicio 5.10. *Dar un ejemplo de función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que sea discontinua en cualquier punto de* $\mathbb{R}$ *pero tal que* $|f|$ *sea continua en* $\mathbb{R}$.

Solución. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f = \chi_{\mathbb{Q}} - \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}},$$

la cual toma el valor -1 en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, el valor $+1$ en $\mathbb{Q}$ y no es continua en ningún punto. En efecto, siguiendo la negación de la continuidad de f, dado $x_0 \in \mathbb{Q}$, se tiene que $f(x_0) = 1$, pero existe $\varepsilon := 1$, de forma que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $y \in B(x_0, \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, dada la densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, que satisface $|f(x_0) - f(y)| = |1 - (-1)| = 2 \geq \varepsilon = 1$, como queríamos. Se razona análogamente supuesto que $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sin embargo, $|f| = 1$ en $\mathbb{R}$, la cual es trivialmente continua. $\square$

31/1/2019

Veamos rigurosamente por qué da igual poner $<$ o $\leq$ en el Criterio ε-δ de Weierstraß, más en particular, por qué considerar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

definida por la proposición

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \qquad (P)$$

es equivalente a considerar la proposición

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0 \quad \exists \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}} > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon}), \qquad (Q)$$

es decir, por qué da igual escribir $0 < |x - x_0| < \delta$ que $0 < |x - x_0| \leq \delta$. El razonamiento que exponemos nos permite asegurar que ocurre de manera similar para $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Para ello, tenemos que ver que $(P) \Longrightarrow (Q)$ así como que $(Q) \Longrightarrow (P)$

La implicación $(Q) \Longrightarrow (P)$ es clara, simplemente consiste en darse cuenta de que escribir «$<$» es, a fortiori, «$\leq$»,

$\forall \varepsilon > 0$ tomamos $\hat{\varepsilon} := \varepsilon$

$\exists \delta_\varepsilon := \hat{\delta}_\varepsilon > 0$

$\forall x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\} \subset [x_0 - \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\}$ y así se tiene (Q)

$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

y para demostrar $(P) \Longrightarrow (Q)$ tenemos que ajustar δ:

$\forall \hat{\varepsilon} > 0$ tomamos $\varepsilon := \hat{\varepsilon}$

$\exists \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}} := \frac{1}{2}\delta_\varepsilon > 0$

$\forall x \in [x_0 - \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}, x_0 + \hat{\delta}_{\hat{\varepsilon}}] \setminus \{x_0\} \subset (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \setminus \{x_0\}$ y así se tiene (P)

$f(x) \in (L - \hat{\varepsilon}, L + \hat{\varepsilon})$

Ejercicio 5.11. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y supóngase que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. ¿Es cierto que $f = g$?*

Solución. En efecto, resultará cierto que $f = g$. Para comprobarlo, empleamos que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ de forma que $r_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$. Dado que f y g son continuas, $f(r_n) \to f(x_0)$ y $g(r_n) \to g(x_0)$ cuando $n \to \infty$, y dado que $f(r_n) = g(r_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, dada la unicidad del límite, se tiene que $f(x_0) = g(x_0)$. Concluimos así, dada la arbitrariedad de x_0, que $f = g$ en $\mathbb{R}$. $\square$

Este resultado se puede generalizar, obviamente, a cualquier conjunto denso en $\mathbb{R}$, no necesariamente solo $\mathbb{Q}$; incluso, en topología abstracta, a cualquier espacio topológico Hausdorff.

Ejercicio 5.14.a. *Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una solución positiva no mayor que 1.*

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x2^x - 1$. Que $x_0 \in \mathbb{R}$ sea solución de la ecuación $x2^x = 1$ es equivalente a que x_0 sea un cero de f, y como $f(0) = -1 < 0$ mientras que $f(1) = 1 \cdot 2^1 - 1 = 1 > 0$, en virtud del Teorema de Bolzano ha de existir $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

El resto de apartados del Ejercicio 5.14 son análogos.

Ejercicio 5.15. *Sea $\vec{d}$ una dirección en el plano y sea T un triángulo. Probar que existe una recta con dirección $\vec{d}$ que divide al triágulo en dos partes de igual área.*

Solución. Supongamos que $\vec{d} \not\propto (1, 0)$ es un vector fijo. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos por $\Phi(x)$ el área de la parte del triángulo que queda a la derecha de la recta con dirección $\vec{d}$ y que corta al eje de abscisas en x. Dado que T es acotado, podemos encontrar $x_0, x_1 \in [0, 1]$ de forma que $\Phi(x) = 0$ para todo $x > x_0$ y $\Phi(x) = \text{Área}(T)$ para todo $x < x_1$. Así, dado que Φ es continua, pues en particular es Lipschitz*, deducimos que, en virtud del Teorema de los Valores Intermedios, existe $c \in (x_1, x_0)$ de forma que $\Phi(c) = \frac{1}{2}\text{Área}(T)$, como se detalla en la Figura 1. Si $\vec{d} \propto (1, 0)$ hacemos el mismo razonamiento, pero considerando $\Phi(x)$ el área de la parte

*Para ver que es Lipschitz, aunque la rigurosidad en esta solución no sea exhaustiva, fijado el triángulo T y la dirección $\vec{d} = (d_1, d_2)$, construyamos un paralelogramo $C_{T,\vec{d}}$ cualquiera (obviamente acotado), que contenga a T, entonces, como se puede observar en la figura,

$$\Phi(x-h) - \Phi(x) = \text{Área sombreada} \leq \text{Área rayada} = \text{base} \cdot \text{altura} \leq \text{diam}(C_{T,\vec{d}}) \lfloor \cancel{\text{sen}(\theta_{\vec{d}})} \rceil h$$

donde $\theta_{\vec{d}} = \arctan(d_2/d_1)$ si $d_1, d_2 \neq 0$, cuyo seno no escribimos ya que es menor o igual que 1, y estamos mayorando la expresión, con lo que la función es Lipschitz, y por ende continua. Si $d_2 = 0$ se razona análogamente pero en el eje de ordenadas.

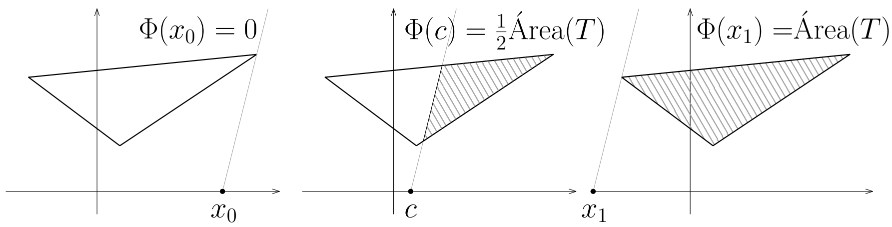


FIGURA 1. Representación de la función Φ en tres ocasiones distintas, antes de «barrer» el triángulo (izquierda), cuando ha «barrido» la mitad del triángulo (centro), y una vez ha «barrido» la totalidad del triángulo (derecha).

del triángulo que queda abajo de la recta con dirección $(1, 0)$ y que corta al eje de ordenadas en x. □

¡Ojo! El ejercicio 5.16 dice:

Ejercicio 5.16. *Un coche recorre* 100 *kilómetros en* 50 *minutos sin detenerse. Demostrar que hubo un minuto en el cual recorrió exactamente* 2 *kilómetros*

es decir, existe un intervalo $[c, c+1] \subset [0, 50]$, $c \in [0, 49]$, de forma que el recorrido hecho en dicho intervalo es de 2 kilómetros exactamente. Lo resolveremos en las siguientes clases.

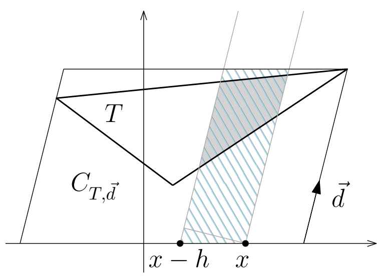
Ejercicio 5.17. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *una función continua satisfaciendo* $f(0) = f(1)$. *Demostrar la existencia de un punto* $c \in [0, 1/2]$ *en el que* $f(c) = f(c + 1/2)$. *Concluir que existen, en cualquier momento, puntos opuestos en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.*

Indicación: considérese la función $g(x) := f(x) - f(x + 1/2)$.

Solución. Consideremos, como se nos indica, la función $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x) - f(x + 1/2)$. Entonces, $g(0) = f(0) - f(1/2)$ y

$$g(1/2) = f(1/2) - f(1) = -g(0).$$

Así, si $g(0) = 0$, elegimos simplemente $c = 0$, mientras que si $g(0) \neq 0$, sabemos que $g(0) = -g(1/2)$, de forma que los signos de ambas imágenes



son opuestos y en virtud del Teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1/2)$ de forma que $g(c) = 0$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 5.18. *Demostrar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer: sea I un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \to I$ una función continua, existe un punto $c \in I$ tal que $f(c) = c$.*

Solución. Denotemos $I := [a, b]$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, ya estaría, sin más que tomar $c := a$ o $c := b$, respectivamente, de modo que supongamos que no es así. Dado que $f([a, b]) \subset [a, b]$, necesariamente se tiene que $f(a) > a$ y $f(b) < b$. Consideremos la función auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) := f(x) - x$, la cual es continua y satisface $h(a) = f(a) - a > 0$ y $h(b) = f(b) - b < 0$. Como consecuencia del Teorema de Bolzano, debe existir $c \in (a, b)$ tal que $0 = h(c) = f(c) - c$, esto es, debe existir un punto fijo por f. $\square$

Ejercicio 5.19. *Pruébese que si I es un intervalo real, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y $t_1, ..., t_n \in I$ son puntos arbitrarios, existe $c \in I$ tal que*

$$f(c) = \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n}.$$

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(t_1) \leq \cdots \leq f(t_n)$, tras un posible reordenamiento de $t_1, \ldots, t_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(t_1) &= \frac{f(t_1) + \overset{n)}{\cdots} + f(t_1)}{n} \\ &\leq \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n} \\ &\leq \frac{f(t_n) + \overset{n)}{\cdots} + f(t_n)}{n} = f(t_n), \end{aligned}$$

de forma que por el Teorema de los Valores Intermedios de Bolzano, ha de existir $c \in I$ verificando la condición enunciada. También se podría probar por inducción sobre n. $\square$

7/2/2019

Que una función $f : I \to \mathbb{R}$ sea **uniformemente continua en un intervalo I** quiere decir, vagamente, que es posible garantizar que $f(x)$ y $f(y)$ estén tan cerca uno de otro como queramos requiriendo únicamente que x e $y \in I$ estén lo suficientemente cerca; más rigurosamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

esto es muy distinto a que la función sea **continua en I**, pues dada la uniformidad, la distancia máxima entre $f(x)$ y $f(y)$ no puede depender de x e y. Continuidad «a secas», recordemos, significa:

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_{\varepsilon,x} \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

como vemos, hay una dependencia de δ en términos de ε pero también del punto x. ¡Ojo! ahora estamos hablando de dos conceptos sobre *continuidad en todo un conjunto* (o en un intervalo), que no es lo mismo que cuando hablamos de que la función sea **continua en un punto $x_0 \in I$ (fijo)**, que significa que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 \quad \forall y \in I, \quad |x_0 - y| \leq \delta_{\varepsilon,x_0} \implies |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

Una forma de demostrar que una función **no** es uniformemente continua en I es considerar simplemente la negación de la primera fórmula:

$$\begin{array}{rl}
& \neg[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \;] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \, \neg[\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \;] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \; \neg[\forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \;] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \neg[\,|x_\delta - y_\delta| \leq \delta \implies |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \leq \varepsilon] \\
\equiv & \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in I, \quad |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \wedge |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon
\end{array}$$

Esto se puede emplear en el Ejercicio 5.22.b, por ejemplo.

Ejercicio 5.20. *Sea f una función real acotada definida en un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$. Si $S \subset I$, se denomina al número*

$$\omega_f(S) := \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\}$$

oscilación de f en S. Para un punto en particular $x_0 \in I$, podemos definir la oscilación de f en x_0 como el número

$$\omega_f(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)).$$

Probar que este límite existe siempre y que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0.

Solución. En primer lugar, podemos observar que si $\omega_f(S) < +\infty$, entonces $\omega_f(S) \geq 0$. En efecto, si se tiene $f(x) - f(y) \leq 0$ entonces intercambiando los papeles de x e y, $f(y) - f(x) \geq 0$, de forma que $\omega_f(S) \geq 0$ si es finito. Podríamos así considerar definida la oscilación de f en S por la expresión $\omega_f(S) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}$. Consideremos ahora $x_0 \in I$ y veamos que el límite $\omega_f(x_0)$ siempre existe (si f es acotada e I es compacto). En primer lugar, es un número acotado superiormente por $\omega_f(I)$ (pues este último es el supremo en un conjunto mayor, I, que es mayor cualquier supremo sobre conjuntos más pequeños, $I \cap B_h(x_0)$). Dicha cota superior es además finita, dado que la función f es, por hipótesis, acotada en I. Esto es, existe un número real $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$, y por ende $\omega_f(S) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in S\} \leq M - (-M) = 2M$. Por último, comprobemos que $[0, \infty) \ni h \mapsto \omega_f(I \cap B_h(x_0))$ es una aplicación monótona decreciente, pues sencillamente

$$\begin{aligned}
\omega_f(I \cap B_{h_1}(x_0)) &= \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_1}(x_0)\} \\
&\leq \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I \cap B_{h_2}(x_0)\} \\
&= \omega_f(I \cap B_{h_2}(x_0))
\end{aligned}$$

para cualesquiera $0 \leq h_1 < h_2$, al tomarse el primer supremo en un conjunto menor que el segundo supremo. Así, deducimos que

$$\lim_{h \to 0^+} \omega_f(I \cap B_h(x_0)) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \geq 0,$$

sabemos que dicha expresión se corresponde con un número real no negativo. Veamos ahora que $\omega_f(x_0) = 0$ si y solo si f es continua en x_0. Supongamos en primer lugar que $\omega_f(x_0) = 0$, esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta_\varepsilon > 0$ de manera que si $0 < h \leq \eta_\varepsilon$ entonces $\omega_f(I \cap B_h(x_0)) \leq \varepsilon$. De esta desigualdad se sigue inmediatamente que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon := \eta_\varepsilon/2$ de forma que si $0 < |h| < \delta_\varepsilon$, se tiene

$$\begin{aligned}
|f(x_0 + h) - f(x_0)| &\leq \sup\{f(a) - f(b) : a, b \in I \cap B_{|h|}(x_0)\} \\
&= \omega_f(I \cap B_{|h|}(x_0)) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

con lo que f es continua en x_0. Recíprocamente, supongamos que f es continua en $x_0 \in I$ y veamos que $\omega_f(x_0) = 0$ necesariamente. En efecto, fijado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ entonces se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Como hemos comentado anteriormente, y empleando la desigualdad triangular e identidades sencillas relacionadas con el supremo:

$$\begin{aligned}
&\omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)) \\
&= \sup\{|f(a) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0) + f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq \sup\{|f(a) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(b)| : a, b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} + \\
&\quad \sup\{|f(x_0) - f(b)| : b \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&= 2 \sup\{|f(a) - f(x_0)| : a \in I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0)\} \\
&\leq 2\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\omega_f(x_0) = \inf\{\omega_f(I \cap B_h(x_0)) : h > 0\} \leq \omega_f(I \cap B_{\delta_\varepsilon}(x_0))\} \leq 2\,\varepsilon$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, y puesto que $\omega_f(x_0)$ es independiente de ε, necesariamente $\omega_f(x_0) = 0$, como queríamos comprobar. $\square$

Ejercicio 5.21. *Supóngase que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Demostrar que f está acotada y que alcanza un máximo o un mínimo. Dar un ejemplo para indicar que no necesariamente se tienen por qué alcanzar tanto un máximo como un mínimo.

Solución. Dado que, por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ de forma que si $|x| > M_\varepsilon$, entonces $|f(x)| \leq \varepsilon$, deducimos tomando $\varepsilon = 1$, por ejemplo, que existe $M_1 > 0$ de forma que $|f(x)| \leq 1$ en $\mathbb{R} \setminus [-M_1, M_1]$. Dado que el intervalo $[-M_1, M_1]$ es compacto y f es continua en éste, ésta es acotada, digamos que existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ en $[-M_1, M_1]$. Entonces, $|f(x)| \leq \max\{1, C\}$ en $\mathbb{R}$, como queríamos probar. Demostremos ahora que la función alcanza un máximo o un mínimo en $\mathbb{R}$. Supuesto que $f \neq 0$, caso trivial, sabremos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Supongamos que $f(x_0) > 0$ y consideremos el intervalo $[-M_c, M_c]$, siendo $c := \frac{1}{2} f(x_0)$. En virtud del Teorema de Weierstraß, en dicho intervalo se alcanza un máximo, como mínimo de valor $f(x_0)$, y recordemos que se tiene $|f(x)| \leq f(x_0)$ para cada $x \in \mathbb{R} \setminus [-M_c, M_c]$. No obstante, puede ser que no se alcance un máximo *y* un mínimo en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^{-x^2}$. Se comprueba que dicha función es continua y alcanza un máximo absoluto en $x = 0$, pero sin embargo no alcanza un mínimo. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2^{-x^2}$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ pero no tiene máximo en $\mathbb{R}$, como se muestra en la Figura 2. Un ejemplo más sencillo consiste en considerar las

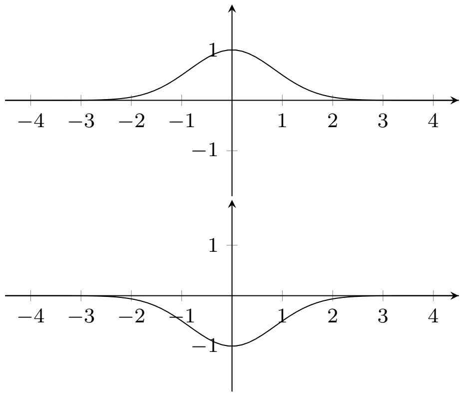


Figura 2. Representación gráfica de $x \mapsto 2^{-x^2}$ (izquierda) y de $x \mapsto -2^{-x^2}$ (derecha), las cuales satisfacen las hipótesis del enunciado pero no tienen mínimo/máximo, respectivamente.

funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \pm(1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$, que son continuas y satisfacen naturalmente las hipótesis, pero no tienen mínimos/máximos respectivamente, como se muestra en la Figura 3. Esto concluye el ejercicio.

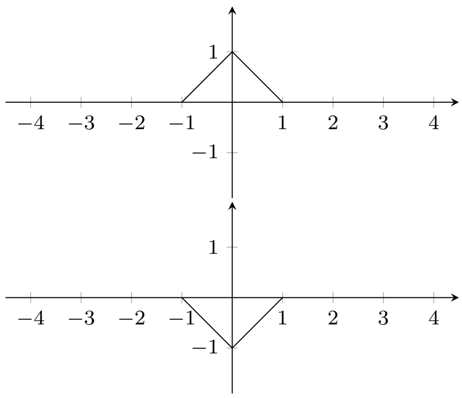


Figura 3. Representación gráfica de $x \mapsto (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$ (izquierda) y de $x \mapsto (|x|-1)\chi_{[-1,1]}(x)$ (derecha), respectivamente.

$\square$

Como ejercicio adicional puede comprobarse que la tesis sobre la acotación se sigue verificando si los límites cuando $x \to \pm\infty$ de $f(x)$ son números reales arbitrarios posiblemente distintos, esto es,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_{-\infty} \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L_{+\infty} \in \mathbb{R}.$$

¿Qué se puede decir de la existencia de máximos o mínimos? Desde luego, si $L_{-\infty} \neq L_{+\infty}$, podemos usar funciones de la forma $x \mapsto A \arctan(x) + B$ con A y B expresados en términos de $L_{-\infty}$ y $L_{+\infty}$ (¿cómo?) de forma que no se alcanza ningún máximo ni ningún mínimo.

Ejercicio 5.22.a. *Determinar si la función $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.*

Solución. Para que f sea uniformemente continua tenemos que encontrar, fijado $\varepsilon > 0$, un número real $\delta_\varepsilon > 0$ de forma que si $x, y \in [1, \infty)$ son cualesquiera satisfaciendo $|x-y| \leq \delta_\varepsilon$, se tenga $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Analizando la última desigualdad,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{|xy|} \leq \frac{\delta_\varepsilon}{1} \overset{!}{\leq} \varepsilon,$$

donde hemos empleado que $x, y \geq 1$ y por ende $1/xy \leq 1$, deducimos que resulta suficiente tomar $\delta_\varepsilon := \varepsilon$ para que el enunciado se verifique. Así, f es uniformemente continua en $[1, \infty)$. $\square$

Ejercicio 5.22.b. *Determinar si la función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ es uniformemente continua.*

Solución. Intuitivamente, el crecimiento en $(0, 1)$ de la función en un entorno de 0 es muy fuerte como para que la continuidad sea uniforme. Así, veamos que existe ε de forma que para todo $\delta > 0$, existen $x_\delta, y_\delta \in (0, 1)$ de forma que $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$ pero $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. Para explotar el crecimiento entorno a 0 consideremos $\varepsilon = 1$, sin pérdida de generalidad, y elijamos $n_\delta \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande como para que $\delta \geq 2^{-(n_\delta+1)}$ y escojamos, por ejemplo $x_\delta := 2^{-n_\delta}$ e $y_\delta := 2^{-(n_\delta+1)}$, de forma que $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \leq \delta$ y

$$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| = \left| \frac{1}{x_\delta} - \frac{1}{y_\delta} \right| = \frac{|x_\delta - y_\delta|}{|x_\delta y_\delta|} \geq 1$$

si y solo si $|x_\delta - y_\delta| = 2^{-(n_\delta+1)} \geq |x_\delta y_\delta| = 2^{-(2n_\delta+1)}$, lo cual es cierto, como queríamos obtener. Concluimos que f no es, en efecto, uniformemente continua en $(0, 1)$. $\square$

Otra posibilidad consiste en usar los Criterios de No-Continuidad Uniforme estudiados en teoría.

13/2/2019

Ejercicio 5.12. *Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posee las dos siguientes propiedades: (i) en primer lugar $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$ y (ii) $f(x+y) = f(x)f(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que:*

1. *f es continua en $\mathbb{R}$.*
2. *$f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
3. *$f(rx) = f(x)^r$ cualquiera que sea $r \in \mathbb{Q}$. En particular $f(r) = f(1)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.*
4. *Si $f(1) = 1$, entonces f es constante.*
5. *Si $f(1) > 1$, entonces f es estrictamente creciente y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$.*
6. *Si $f(1) < 1$, entonces f es estrictamente decreciente y $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$.*

Solución. En primer lugar, observamos que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ implica que $f(0) \in \{0, 1\}$, de forma que por la propiedad (i) necesariamente se tiene que $f(0) = 1$. Para comprobar que f es continua, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ fijado y sea $h \in \mathbb{R}$. Como $f(x_0 + h) = f(x_0)f(h)$ por la propiedad (ii), deducimos que $f(x_0 + h) = f(x_0)f(h) \to f(x_0)\,1 = f(x_0)$ por la propiedad (i), cuando $h \to 0$, esto es, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$. Veamos ahora que f es positiva en $\mathbb{R}$. Dado que $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$, se deduce que $f(-x) = f(x)^{-1}$ cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, y en particular $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado que $f(0) = 1 > 0$, necesariamente $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (si no, por reducción al absurdo, se puede emplear el Teorema de Bolzano). Comprobemos ahora que $f(rx) = f(x)^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Esto se verifica en particular para $m \in \mathbb{Z}$ ya que por inducción se demuestra rigurosamente que

$$f(mx) = f(x + \overset{m}{\cdots} + x) = f(x) \overset{m}{\cdots} f(x) = f(x)^m$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, y como $f(-x) = f(x)^{-1}$, a su vez se generaliza para $m \in \mathbb{Z}$. Por último, si $r = \frac{p}{q}$ para $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, deducimos que

$$f(rx)^q = f(qrx) = f(px) = f(x)^p \text{ y por ende } f(rx) = f(x)^{\frac{p}{q}} = f(x)^r,$$

lo cual concluye el apartado. Si $f(1) = 1$, la función es necesariamente constante, ya que $f(r) = f(1)^r = 1$, y toda función continua viene completamente determinada en $\mathbb{R}$ en función de su imagen en un conjunto denso, como es $\mathbb{Q}$, lo cual vimos en el ejercicio anterior. Si por contra $\alpha := f(1) > 1$, entonces f es estrictamente creciente, esto lo vimos enla primera clase, pero podemos repetirlo: En efecto, si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m < n$, entonces

$$1 < \alpha \implies \alpha < \alpha^2$$

ya que α es positivo, y se sigue rigurosamente por inducción que $\alpha^m < \alpha^n$. Por otra parte,

$$\frac{1}{\alpha} < 1 \implies \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-2} < \alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

y se sigue por inducción que $\alpha^m < \alpha^n$ cualesquiera que sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m < n$. Supongamos ahora que $x = \frac{p}{q}$ e $y = \frac{r}{s}$, con $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$, y $x < y$, es decir, $ps < qr$, entonces $\alpha^x < \alpha^y$ pues, por reducción al absurdo, si $\alpha^x \geq \alpha^y$, tendremos que $\alpha^{ps} = (\alpha^x)^{rs} \geq (\alpha^y)^{rs} = \alpha^{qr}$, lo que contradice el enunciado anterior de que $\alpha^m < \alpha^n$ para $m = ps$ y $n = qr$. Por último, si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existen $r, s \in \mathbb{Q}$ por la densidad de los números racionales tales que $x < r < s < y$ y deducimos que

$$\alpha^x = \lim_{n\to\infty} \alpha^{x_n} \leq \alpha^r < \alpha^s \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^{y_n} = \alpha^y$$

donde $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ es una sucesión de números racionales tal que $x_n \uparrow x$ cuando $n \to \infty$ e $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ tal que $y_n \downarrow y$ cuando $n \to \infty$. Los límites se deducen de manera sencilla como consecuencia por ser estrictamente creciente y empleando la Desigualdad de Bernoulli (lo vimos). El último apartado se demuestra análogamente. $\square$

Ejercicio 5.16. *Un coche recorre* 100 *kilómetros en* 50 *minutos sin detenerse. Demostrar que hubo un minuto en el cual recorrió exactamente* 2 *kilómetros (es decir, existe un intervalo* $[c, c+1] \subset [0, 50]$, $c \in [0, 49]$, *de forma que el recorrido hecho en dicho intervalo es de* 2 *kilómetros exactamente)*

Solución. Sea $\mathrm{x} : [0, 50] \to [0, 100]$ tal que $\mathrm{x}(t)$ representa el recorrido realizado hasta el instante t, cualquiera que sea $t \in [0, 50]$. Así, $\mathrm{x}(0) = 0$ y $\mathrm{x}(50) = 100$. Definamos la función auxiliar $h : [0, 49] \to \mathbb{R}$, $h(t) := \mathrm{x}(t+1) - \mathrm{x}(t)$, la cual es continua pues suponemos que x es continua, que mide la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[c, c+1]$. Tenemos que probar que existe $c \in [0, 49]$ en el cual $h(c) = 2$. Podemos distinguir los siguientes casos:

1. $h(t) > 2$ para todo $t \in [0, 49]$. Esto es absurdo pues

$$\begin{aligned} 100 = \mathrm{x}(50) - \mathrm{x}(0) &= \sum_{k=0}^{49} [\mathrm{x}(k+1) - \mathrm{x}(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{49} h(k) > \sum_{k=0}^{49} 2 = 50 \cdot 2 = 100, \end{aligned}$$

   donde la segunda igualdad se da gracias a lo que se conoce como la telescopicidad de esta suma, esto es, que la suma satisface informalmente lo siguiente: $\sum_{k=0}^{49} [\mathrm{x}(k+1) - \mathrm{x}(k)] = \cancel{\mathrm{x}(1)} - \mathrm{x}(0) + \cancel{\mathrm{x}(2)} - \cancel{\mathrm{x}(1)} + \cdots + \mathrm{x}(50) - \cancel{\mathrm{x}(49)}$, de forma que se cancelan unos términos con otros salvo $\mathrm{x}(50)$ y $\mathrm{x}(0)$.
2. $h(t) < 2$ para todo $t \in [0, 49]$. Es absurdo y se razona de manera similar.
3. Existen $t_0, t_1 \in [0, 49]$ de forma que $h(t_0) \leq 2$ y $h(t_1) \geq 2$, y por el Teorema de los Valores Intermedios podemos encontrar $c \in [t_0, t_1]$ o $[t_1, t_0]$ de manera que $h(c) = 2$.

Nótese que contemplamos así todos los casos*. $\square$

Ejercicio 6.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en $c \in (a, b)$ hasta orden $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el producto $fg : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en c hasta orden n y*

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c)\, g^{(n-k)}(c),$$

la cual es comúnmente conocida como fórmula generalizada de Leibniz.

Solución. Antes de presentar una demostración rigurosa por inducción resulta conveniente tener en mente la conocida fórmula del binomio de Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

pues desde las análogas fórmulas que potencias de números reales y derivadas de funciones satisfacen:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \qquad (fg)^{(2)} = f^{(2)}g + 2f^{(1)}g^{(1)} + fg^{(2)},$$

se sigue la similaridad entre ambas fórmulas. No resulta sorprente que su prueba sea esencialmente la misma. Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, Si $n = 1$, esto es, el caso base, sabemos que fg es diferenciable en c y se satisface la bien conocida fórmula del producto $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$, dado que el cálculo del siguiente límite es directo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c+h) + f(c)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}\, g(c+h) - \lim_{h\to 0} f(c)\, \frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\
&= f'(c)g(c) - f(c)g'(c).
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para $n + 1$. Supongamos así que f y g son ambas diferenciables en c hasta orden $n + 1$, de forma que el límite definitorio de la derivada $(n + 1)$-ésima existe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(c+h)g^{(n)}(c+h) - f^{(n)}(c)g^{(n)}(c)}{h},$$

y por ende f y g son diferenciables hasta orden n en un entorno de c (si no no tendría sentido la expresión $f^{(n)}(c + h)$ ni $g^{(n)}(c + h)$), y la fórmula de

*Dado que $\neg(\forall s\ h(s) > 2) \wedge \neg(\forall t\ h(t) < 2) \equiv (\exists t\ h(t) \leq 2) \wedge (\exists s\ h(s) \geq 2)$.

Leibniz se satisface en dicho entorno:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Ésta es claramente una función diferenciable en c dado que es la suma de productos de funciones diferenciables. Veamos ahora que se cumple la fórmula de Leibniz generalizada. En primer lugar, por definición:

$$(fg)^{(n+1)}(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)^{(n)}(c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right](c),$$

y como consecuencia de la linealidad de la derivada y la regla del producto:

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{k+1}(c) g^{(n-k)}(c) + f^{(k)} g^{(n-k+1)}(c)\right]$$

la cual se puede reescribir en la forma:

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(c) g^{(n-k)}(c) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}(c)$$

haciendo el cambio de variable en la primera suma:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c)$$

de forma que, considerando el último término fuera de la primera suma y el primero de la seguna suma, y sacando factor común en los restantes términos:

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{0} f(c) g^{(n+1)}(c) + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(c) g(c) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)}(c) g^{(n-k+1)}(c) \end{aligned}$$

ahora, dado que trivialmente $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ y $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ y podemos comprobar fácilmente la identidad combinatoria $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ cualesquiera que sean $n, k \in \mathbb{N}$ (la fórmula que utilizamos en el triángulo de Tartaglia o Pascal), la anterior expresión, reagrupada, resulta:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(c) g^{(n+1-k)}(c),$$

como queríamos probar. $\square$

14/2/2019

Ejercicio 6.2.a. *Estudiar la derivabilidad de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = \sqrt{|x|}$*, y hallar* $f'(x)$ *y* $f''(x)$ *donde sea posible.*

Solución. La función es continua dado que es composición de funciones continuas, más concretamente, el valor absoluto y la raíz cuadrada. En $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ se tratan además, como sabemos, de funciones de clase C^∞, puesto que $x \mapsto |x|$ restringida es esencialmente la función $x \mapsto -x$ o $x \mapsto x$, respectivamente, mientras que $x \mapsto \sqrt{x}$ es una función de clase C^∞ en $(0, \infty)$, como hemos estudiado en teoría. Por tanto, la diferenciabilidad se reduce a estudiar la diferenciabilidad de la función en 0; por definición, basta estudiar:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = +\infty$$

o bien

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{-h}}{-h} = -\infty.$$

Con todo esto, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

si $x \neq 0$. Se tiene también que $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ es diferenciable, análogamente, ahora en todo el dominio donde está definida, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Y, tras un sencillo cálculo:

$$f'(x) = -\frac{1}{4(\sqrt{|x|})^2} \qquad \text{si } x \neq 0,$$

como queríamos obtener. □

El resto de apartados del Ejercicio 6.2 se resuelven análogamente.

Ejercicio 6.3.a. *Hallar* $f'(x)$*, simplificando si es posible, si*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}.$$

Solución. Como consecuencia de la regla del cociente, tras unas sencillas cuentas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)][\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] - [\operatorname{sen}(x) + \cos(x)][\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]}{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= -\frac{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2 + [\cos(x) + \operatorname{sen}(x)]^2}{[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]^2} = -\frac{2\,[\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)]}{[\cos(x) - \operatorname{sen}(x)]^2} \\ &= \frac{-2}{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \frac{2}{\operatorname{sen}(2x) - 1} \end{aligned}$$

como queríamos obtener. En el último paso hemos empleado la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$. Hay que tener en cuenta que la anterior expresión, así como la de la función f, solo tiene sentido si $\operatorname{sen}(x) - \cos(x) \neq 0$, esto es, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

El resto de apartados del Ejercicio 6.3 se resuelven de manera similar.

Ejercicio 6.4.1. *Hallar el número de soluciones reales que tiene la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución.*

Solución. En virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, el número de soluciones reales es cinco a lo sumo, el grado del polinomio. Estudiando el comportamiento del polinomio podemos determinar aproximadamente dónde se encuentran sus raíces. Hallemos la derivada para determinar los máximos y mínimos de $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) := 3x^5 + 15x - 8$ así como los intervalos de crecimiento. $p'(x) = 15x^4 + 15$, de forma que los puntos críticos son las soluciones de $15x^4 + 15 = 0$, o bien, $x^4 = -1$. Ésta no tiene soluciones reales pues es absurdo que $0 < x^4 = -1 < 0$. Claramente, la función es creciente en $\mathbb{R}$ puesto que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos acotar la raíz evaluando la función en números enteros que resulten fácilmente calculables, por ejemplo, a simple vista se puede comprobar que $p(0) = -8 < 0$ mientras que $p(1) = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$, con lo que, en virtud del Teorema de Bolzano, hay una raíz del polinomio en $(0, 1)$. Dado que la función es estrictamente creciente, como hemos comprobado, es la única solución real a la ecuación del enunciado, y se encuentra en $(0, 1)$. $\square$

El resto de apartados del ejercicio 6.4 se resuelven de manera análoga.

Ejercicio 6.5.a. *Demostrar la desigualdad*

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan(x) < x - \frac{x^3}{6}$$

para $x \in (0, 1]$.

Solución. Para demostrar la primera desigualdad definamos la función auxiliar $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) := \arctan(x) - x + \frac{x^3}{3},$$

y veamos que $f > 0$ en $(0, 1]$, lo cual es equivalente a probar la desigualdad del enunciado. En primer lugar, $f(0) = 0$, y dado que la función es diferenciable en $(0, 1)$, y su derivada satisface

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{x^2 + 1} > 0,$$

deducimos que f es estrictamente creciente en $[0, 1)$ por el resultado visto en teoría, así, $f(x) > f(0) = 0$ para todo $x \in (0, 1]$. Por otra parte, para demostrar la segunda desigualdad, definamos la función auxiliar $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) := x - \frac{x^3}{6} - \arctan(x),$$

y veamos que $g > 0$ en $(0,1]$. De igual manera, $g(0) = 0$, y la función es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$, con derivada

$$g'(x) = \frac{x^2 - x^4}{2x^2 + 2} > 0,$$

ya que $x^4 < x^2$ en $(0,1)$. Con todo esto, deducimos que g es estrictamente creciente en $(0,1]$ y por ende $g(x) > g(0) = 0$ para todo $x \in (0,1]$. Esto concluye el ejercicio. $\square$

Ejercicio 6.6. *Demostrar que* $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$ *si* $x > y$. *Deducir que la función* $\arctan(\cdot)$ *es Lipschitz en* $\mathbb{R}$.

Solución. Probar que $\arctan(x) - \arctan(y) < x - y$ para cualesquiera dos reales $x > y$ es equivalente a probar que

$$y - \arctan(y) < x - \arctan(x)$$

para cada dos reales $y < x$ es decir, que la función auxiliar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(t) := t - \arctan(t)$$

sea estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Ahora bien, esto resulta inmediato analizando mediante diferenciación los extremos relativos de f, que es de clase $\mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$0 = f'(t) = 1 - \frac{1}{1 + t^2}$$

la cual es, en efecto, continua. Así, el único punto crítico de f es $t = 0$, el cual es un punto de silla. Evaluando:

$$f'(-1) = f'(1) = \frac{1}{2} > 0,$$

por ejemplo, se comprueba, por lo visto en teoría, que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, como queríamos probar. Para concluir, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\arctan(x) - \arctan(y)| &= \left\{ \begin{array}{ll} \arctan(y) - \arctan(x) & \text{si } x \leq y \\ \arctan(x) - \arctan(y) & \text{si } y < x \end{array} \right\} \\ &\leq \left\{ \begin{array}{ll} y - x & \text{si } x \leq y \\ x - y & \text{si } y < x \end{array} \right\} = |x - y|, \end{aligned}$$

con lo que f es globalmente 1-Lipschitz en $\mathbb{R}$. $\square$

20/2/2019

Ejercicio 6.5.d. *Demostrar la desigualdad*

$$2x < \operatorname{sen}(2x) + \tan(x)$$

para todo $x \in (0, \pi/2)$.

Solución. Definamos la función auxiliar $f : [0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \operatorname{sen}(2x) + \tan(x) - 2x$$

y veamos que f es estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$. Dada la regularidad de la función, esto equivale a estudiar su derivada, y empleando la identidad trigonométrica $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ deducimos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos(2x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 2 \\ &= \frac{2\cos^2(x)\cos(2x) + 1 - 2\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{2\cos^2(x)\cos(2x) - \cos(2x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{[2\cos^2(x) - 1]\cos(2x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(2x)}{\cos^2(x)} > 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (0, \pi/2)$, pues así f es creciente en $[0, \pi/2)$ y por ende se verifica que $f(x) > f(0) = 0$ para todo $x \in (0, \pi/2)$, como queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio 6.7. *Prueba que* $\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \pi/2$ *para todo* $x \in [-1, 1]$.

Solución. Observamos que las derivadas de las funciones

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\pi}{2}$$

coinciden, trivialmente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

para cada $x \in [-1, 1]$. Así, ambas funciones difieren en una constante:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2} + C,$$

para cierta $C \in \mathbb{R}$, que resulta necesariamente nula, dado que, en particular, evaluando la anterior expresión en $x = 0$:

$$\operatorname{arc\,sen}(0) + \operatorname{arc\,cos}(0) = \frac{\pi}{2} + C,$$

de donde se sigue la igualdad del enunciado, como queríamos comprobar. $\square$

Ejercicio 6.8. *Probar que*
$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctan(x)$$
para todo $x \geq 0$. ¿Y si $x < 0$?

Solución. Veamos que las derivadas de ambas funciones
$$[0,\infty) \ni x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right), \qquad [0,\infty) \ni x \mapsto \arctan(x)$$
coinciden en $(0,\infty)$ de forma que serán iguales salvo una constante, que será necesariamente nula. Esto es inmediato:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) &= -\frac{1}{2}(2x)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\\ &= x\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x).\end{aligned}$$
Así, $\arccos(1/\sqrt{1+x^2}) = \arctan(x) + C$ para cualquier $x \in (0,\infty)$, para cierta $C \in \mathbb{R}$. Sin más que evaluar en $x = 1$, como
$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
deducimos que $C = 0$. Si $x < 0$ no pueden ser iguales, pues la primera es una función par no trivial y la segunda es una función impar. Evalúese la igualdad en $x = -1$: $\arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/2 \neq -\pi/2 = \arctan(-1)$. De hecho, son funciones opuestas en $(-\infty, 0)$. □

Solución (sin derivación). Tomando cosenos a ambos lados de la identidad del enunciado obtenemos que
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos(\arctan(x)).$$
Definamos $\varphi_x := \arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{2})$, de forma que, como $x \geq 0$, tras elevar al cuadrado, podemos reenunciar la identidad en la forma
$$\frac{1}{1+\tan^2(\varphi_x)} = \cos^2(\varphi_x),$$
la cual es cierta sin más que usar que $\tan(\varphi_x) = \operatorname{sen}^2(\varphi_x)/\cos^2(\varphi_x)$ y simplificar usando la identidad pitagórica. □

Ejercicio 6.9. *Sean $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[0,1]$, derivables en $(0,1)$ con $f(0) = 0$, $g(0) = 2$ y $|f'(x)| \leq 1$, $|g'(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0,1)$. Probar que $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [0,1]$.*

Solución. Probemos una condición más fuerte, la cual es muy intuitiva: probemos que $f(x) \leq x \leq 2 - x \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$, como se puede apreciar en la Figura 4. Esencialmente, dado que el módulo de la derivada de ambas funciones no supera 1, f no puede crecer más que $x \mapsto x$ desde $(0,0)$, pues su derivada satura la desigualdad $|f'| \leq 1$, y g no puede decrecer más que $x \mapsto 2 - x$ desde $(2, 0)$. Rigurosamente, como consecuencia del Teorema

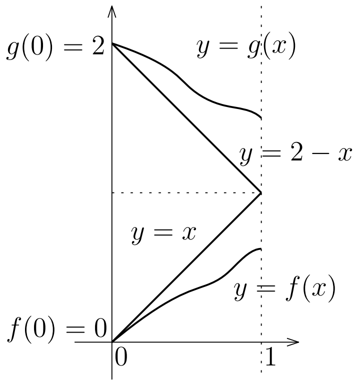


FIGURA 4. Representación intuitiva del contexto del problema

del Valor Medio, para cada $x \in [0, 1]$ fijo existe cierto $c_x \in [0, x]$ de forma que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

de donde se deduce, dado que $f(0) = 0$ y $|f'(c_x)| \leq 1$, que

$$\frac{|f(x)|}{x} = |f'(c_x)| \leq 1$$

y en particular, que $f(x) \leq x$. Análogamente, en virtud del Teorema del Valor Medio nuevamente, para cada $x \in (0, 1)$ existe $d_x \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(d_x)$$

de forma que, como $g(0) = 2$ y $|g'(d_x)| \leq 1$,

$$|g(x) - 2| \leq |x|,$$

y, en particular, $2 - g(x) \leq x$, esto es, $g(x) \geq 2 - x$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 6.10. *Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.*

Solución. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ fijo. La igualdad $f'(c) = \lambda f(c)$ recuerda ligeramente a la exponencial $x \mapsto e^{\lambda x}$, de forma que, tras buscar algunas analogías con ésta y el Teorema de Rolle, llegamos a que podemos considerar estratégicamente la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := e^{-\lambda x} f(x),$$

de manera que $h(a) = h(b)$ y h es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). En virtud del Teorema de Rolle, dado que $h(a) = h(b) = 0$, existe cierto $c \in (a, b)$ de forma que

$$0 = h'(c) = e^{-\lambda c}[-\lambda f(c) + f'(c)].$$

y dado que $e^{-\lambda c} > 0$, necesariamente $f'(c) = \lambda f(c)$, como queríamos demostrar. $\square$

14/2/2019

Para estudiar la derivabilidad de una función hay que tener en cuenta, al menos, el siguiente ejemplo, ligeramente patológico, de una función con derivada no continua, para no inferir que si los límites de la derivada no existen entorno a un punto, la derivada no exista:

Ejemplo. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$, con $f'(0) = 0$, pero no existen los límites

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

Podéis probar lo anterior, es sencillo. Sí podemos usar lo siguiente:

Proposición. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo abierto I y sea $a \in I$ un punto cualquiera, supongamos que f es diferenciable en $I \setminus \{a\}$ y que el siguiente límite existe:*

$$\lim_{x \to a} f'(x) = L.$$

Entonces, f es diferenciable en a y $f'(a) = L$.

Solución. Sea $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset I$ y sea $x \in (a, a+\delta)$, de forma que f es diferenciable en x por hipótesis, y por ende podemos aplicar el Teorema del Valor Medio a f en el intervalo $[a, x]$. Con ello, existe $\xi_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x).$$

Ahora bien, cuando $x \to a$, todo punto en el intervalo $[a, x]$ se hace arbitrariamente próximo a x, de forma que $\lim_{x \to a^+} \xi_x = x$ y por ende

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'(\xi_x) = \lim_{x \to a^+} f'(x) = L,$$

pues por hipótesis dicho límite existe. Mediante un argumento similar para $x \in (a - \delta, a)$, concluimos por su parte que $f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} f'(x) = L$, de forma que f es diferenciable en a y $f'(a) = L$, como queríamos demostrar. $\square$

Sin la continuidad, obviamente ésto no se tiene:

Ejemplo. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ es continua y diferenciable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y con $f'(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pero no es diferenciable en $x = 0$ pues ni siquiera es continua en éste.*

Ejercicio 6.11. *Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y dos veces derivable en (a, b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A := (a, f(a))$ y $B := (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un $c \in (a, b)$.*

Solución. Denotemos $P = (p, f(p))$ para cierto $p \in (a, b)$. La recta que une los puntos A y B viene dada por la expresión punto-pendiente:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

y una representación gráfica que nos permita ponernos en contexto podría ser, por ejemplo, la dada en la Figura 5.

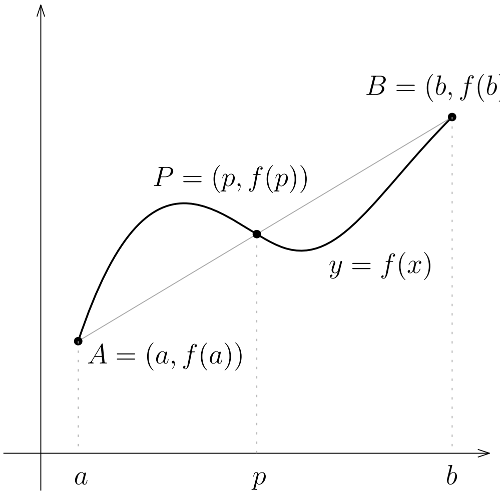


FIGURA 5. Ejemplo sencillo de la gráfica de una función que satisface las hipótesis.

En virtud del Teorema del Valor Medio, existen $c_1 \in (a, p)$ y $c_2 \in (p, b)$ de forma que

$$f'(c_1) = \frac{f(p) - f(a)}{p - a} = \frac{f(b) - f(p)}{b - p} = f'(c_2),$$

donde la segunda igualdad se debe a que dichas cantidades son, sencillamente, la pendiente de la recta que pasa por A y B. Así, como consecuencia del Teorema de Rolle, ha de existir $c \in (c_1, c_2)$ de forma que $f''(c) = 0$, como queríamos. $\square$

Ejercicio 6.12. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tres veces derivable en $[a, b]$ y si*

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$$

probar que $f'''(c) = 0$ para cierto $c \in (a, b)$.

Solución. En virtud del Teorema de Rolle, dado que $f(a) = f(b) = 0$ y la regularidad de f, existe $c_1 \in (a, b)$ tal que $f'(c_1) = 0$. Aplicando de nuevo el Teorema de Rolle sabido que $f'(a) = f'(c_1) = 0$ y que $f'(c_1) = f'(b) = 0$, deducimos que existen $c_2 \in (a, c_1)$ y $c_3 \in (c_1, b)$ de forma que $f''(c_2) = f''(c_3) = 0$. Aplicando una última vez el Teorema de Rolle deducimos que existe $c \in (c_2, c_3)$ de forma que $f'''(c) = 0$, como queríamos demostrar. □

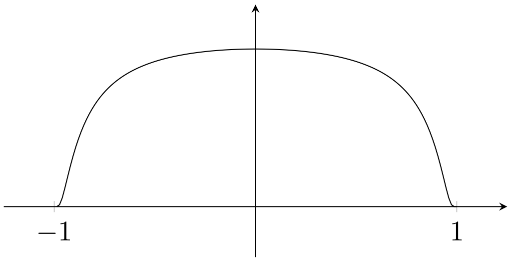


FIGURA 6. Un ejemplo de función que cumple las hipótesis, $x \mapsto e^{1/(x^2-1)}$ en $(-1, 1)$ y nula en $\mathbb{R}\backslash(-1, 1)$. De hecho, todas sus derivadas se anulan en -1 y 1 y es una función $C^\infty(\mathbb{R})$, aunque no es analítica (no se puede escribir un desarrollo de Taylor de la función en un entorno de cada punto, más concretamente de -1 o 1). Se usa en numerosas áreas de las Matemáticas y es fundamental en teoría de distribuciones, ecuaciones en derivadas parciales, en el estudio de variedades diferenciables, etc.

Ejercicio 6.13. *Sea* $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *una función no negativa y tres veces derivable en* $(0, 1)$*. Si* f *se anula en dos puntos, por lo menos, de* $(0, 1)$*, entonces* $f'''(c) = 0$ *para algún* $c \in (0, 1)$*.*

Solución. Aunque la demostración es sencilla, hay muchos pasos intermedios que justificar y puede ser un poco tediosa, siempre guiados por un ejemplo de función que satisfaga, como el de la Figura 7, las hipótesis del problema.

- Sabemos, por hipótesis, que existen al menos dos ceros de la función, digamos $z_0, z_1 \in (0, 1)$ tales que $f(z_0) = f(z_1) = 0$. Digamos también que que $z_0 < z_1$.
- Si f es idénticamente nula en $(0, z_0)$, (z_0, z_1) o $(z_1, 1)$, entonces f''' también lo sería, y el ejercicio terminaría, de forma que supongamos en adelante que esto no ocurre.
- Por tanto, existen puntos $p_1 \in (0, z_0)$, $p_2 \in (z_0, z_1)$ y $p_3 \in (z_1, 1)$ tales que $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) > 0$, pues f es no negativa.
- Aplicando el Teorema del Valor Medio a f en $[p_1, z_0]$, $[z_0, p_2]$, $[p_2, z_1]$ y $[z_1, p_3]$, deducimos que existen puntos α_0, α_1, α_2 y α_3 en los respectivos interiores de los intervalos tales que $f'(\alpha_0) < 0$, $f'(\alpha_1) > 0$, $f'(\alpha_2) < 0$ y $f'(\alpha_3) > 0$.

- Así, como consecuencia del Teorema de Bolzano aplicado a f' entre los anteriores puntos, existen tres puntos críticos $c_0 \in (\alpha_0, \alpha_1)$, $c_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $c_2 \in (\alpha_2, \alpha_3)$ tales que $f'(c_0) = f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.
- Aplicando el Teorema de Rolle a f' en los intervalos (c_0, c_1), (c_1, c_2) y (c_2, c_3), deducimos que existen dos puntos de inflexión $i_0 \in (c_0, c_1)$ y $i_1 \in (c_1, c_2)$, de forma que $f''(i_0) = f''(i_1) = 0$.
- Finalmente, una nueva aplicación del Teorema de Rolle para f'' en (i_0, i_1) nos proporciona la existencia de un $c \in (i_0, i_1)$ tal que $f'''(c) = 0$.

Con esto concluye la demostración. □

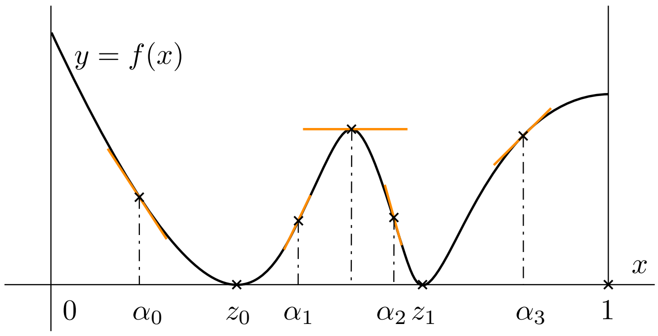


FIGURA 7. Ejemplo de función sencilla que cumple las hipótesis.

Ejercicio 6.14. *Probar el Teorema del Valor Medio Generalizado de Peano: sean $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tres funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

Probar también que el Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy es un caso particular de este.

Solución. La expresión con el determinante recuerda vagamente al Teorema de Rolle, en el que se tiene una función Φ diferenciable con $\Phi'(c) = 0$ para algún punto c si Φ tiene imágenes iguales en los extremos de un intervalo. Dadas las propiedades de los determinantes, definimos $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, estratégicamente, dada por

$$\Phi(x) := \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

de manera que, sencillamente,

$$\Phi'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Como $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, pues en cualquiera de los casos una de las filas en el determinante está repetida, y dado que Φ es continua y derivable en (a, b), deducimos que $\Phi'(c) = 0$ para cierto $c \in (a, b)$, en virtud del Teorema de Rolle. El Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy es un caso particular de éste cuando $h = 1$. □

Ejercicio 6.15.a. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\varepsilon}},$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Solución. En virtud de la Regla de Bernoulli-L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{x^{\varepsilon}} = 0,$$

lo cual justifica que, asintóticamente, $\log(x)$ crece de manera «menos rápida» que x^{ε}, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. □

Ejercicio 6.15.b. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x)$$

cualquiera que sea $a > 0$.

Solución. Nótese que

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{x})}{x^a} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a},$$

el cual hemos calculado en el apartado anterior. □

El primer cambio en la variable de límite

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = \lim_{y\to +\infty} u\left(\frac{1}{y}\right)$$

se justifica de la siguiente forma en términos del Criterio ε-δ de Weierstraß: es equivalente que para un $\varepsilon > 0$ prefijado encontremos $\delta_{\varepsilon} > 0$ de forma que si $0 < x < \delta_{\varepsilon}$ entonces se tenga que $|u(x) - L| \leq \varepsilon$ a que dado dicho $\varepsilon > 0$ encontremos $M_{\varepsilon} \equiv 1/\delta_{\varepsilon} > 0$ de forma que si $y \equiv 1/x$ satisface $y > M_{\varepsilon}$ (i.e. $0 < x < \delta_{\varepsilon}$) entonces $|u(1/y) - L| \leq \varepsilon$.

Simulacro #1: problemas de continuidad y diferenciabilidad

Problema 1. Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$ si todo intervalo real contiene un punto de A. Demuestra que:

(i) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(t) = 0$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
(ii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) = g(t)$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (pista: usa el apartado anterior).
(iii) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas y $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in A$, entonces $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la propiedad de aditividad:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Demuestra que $f(0) = 0$.
(ii) Demuestra que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(iii) Demuestra que f es continua en $x = 0$ si y solo si lo es en $\mathbb{R}$.
(iv) Denotemos en adelante $\gamma := f(1)$. Demuestra que $f(n) = \gamma\, n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(v) Con ello demuestra que $f(k) = \gamma\, k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
(vi) Ahora demuestra que $f(r) = \gamma\, r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.
(vii) Supuesto ahora que f es continua en 0, razona por qué a partir de (iii) y (vi) se concluye que $f(x) = \gamma\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Así, habremos demostrado que una función aditiva que sea continua debe ser necesariamente una función lineal por el origen. La condición de continuidad es necesaria pues (si se considera el Axioma de Elección) se pueden construir funciones aditivas no continuas.

Problema 3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sean α y C números positivos reales. Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función que satisface la siguiente propiedad conocida como continuidad-Hölder, llamada así en honor al matemático Otto Hölder:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \qquad \text{para todos } x, y \in I.$$

(i) Demuestra que f es uniformemente continua en I. (ii) Demuestra que si $\alpha > 1$, entonces la función es diferenciable en $\mathbb{R}$ y su derivada, f', es idénticamente nula en $\mathbb{R}$ (pista: escribe $\alpha = 1 + s$, $s > 0$); razona que, por tanto, la función es constante.

Unas soluciones propuestas son las siguientes, pero es mejor que intentes los ejercicios antes de consultarlas:

Solución propuesta para el Problema 1. Para el primer apartado, supongamos por reducción al absurdo que no, de forma que existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ tal que $f(t_0) \neq 0$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(t_0) > 0$ (esto quiere decir que el argumento se puede hacer análogamente si $f(t_0) < 0$). Así, vamos a encontrar un entorno de t_0 en el que f sea positiva, lo cual será absurdo dado que podremos encontrar un punto de dicho entorno en el que por hipótesis su imagen es necesariamente nula. Entonces, para $\varepsilon := f(t_0)/2$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$, de donde se deduce que $0 < f(t_0)/2 \leq f(t)$. Sin embargo, como A es denso, existe $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap A$ (por definición de densidad), y por ende $f(t_1) = 0$, lo cual contradice lo anterior. Para el segundo apartado basta considerar que $f = g$ si y solo si $h := f - g = 0$, lo cual nos ha proporcionado el apartado anterior. El último apartado se razona de manera exactamente análoga al primer apartado. Lo hago a continuación para que la solución sea autocontenida. Denotemos $\phi := f - g$. Supongamos por reducción al absurdo que no se tiene que $\phi \geq 0$ en $\mathbb{R}$, de forma que existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ tal que $\phi(t_0) < 0$; entonces, para $\varepsilon := -\phi(t_0)/2 > 0$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq -\phi(t_0)/2 < 0$; en particular, $\phi(t) \leq \phi(t_0) - \phi(t_0)/2 = \phi(t_0)/2 < 0$ $(*)$. Sin embargo, como A es denso, existe $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap A$, de forma que $\phi(t_1) = 0 \not< 0$, lo cual contradice $(*)$.

Solución propuesta para el Problema 2. (i) Dada la condición de aditividad, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, y restando en ambos lados $f(0)$, $0 = f(0)$, como queríamos demostrar. (ii) Dado que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, restando $f(x)$ en ambos lados, obtenemos que $f(-x) = -f(x)$. (iii) Supongamos que f es continua en 0, esto es, $f(h) \to 0$ cuando $h \to 0$; entonces, fijado $x \in \mathbb{R}$, se tendrá que $f(x + h) = f(x) + f(h) \to f(x) + 0 = f(x)$, cuando $h \to 0$, esto es, f es continua en x y dada su arbitrariedad, en $\mathbb{R}$. (iv) Denotemos $\gamma = f(1)$. El caso base es trivial, $f(1) = \gamma \cdot 1$, por definición; supongamos que $f(n) = \gamma n$ para cierto natural n, entonces $f(n + 1) = f(n) + f(1) = \gamma n + \gamma = \gamma(n + 1)$, luego por el Principio de Inducción se cumple para todo n natural. (v) Para todo entero n negativo, $f(-n) = -n\gamma$ por el anterior paso, de forma que por (ii), $f(n) = -f(-n) = n\gamma$, como queríamos. (vi) Sea $r = p/q$ un número racional, $\gamma p = f(p) = f(qr) = qf(r)$, de forma que $f(r) = \gamma p/q = \gamma r$ (para demostrar que $f(nx) = nf(x)$ se utiliza el Principio de Inducción, es inmediato dada la condición de aditividad). (vii) Por el Problema 1, como f y $x \mapsto \gamma x$ son dos funciones continuas que coinciden en los racionales, necesariamente $f(x) = \gamma x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución propuesta para el Problema 3. (i) Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe $\delta_\varepsilon > 0$, el cual determinaremos más adelante, de forma que para todos $x, y \in I$ tales que $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \leq C\delta_\varepsilon^\alpha := \varepsilon$$

si escojemos $\delta_\varepsilon := (\varepsilon/C)^{1/\alpha}$, donde hemos usado que $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$ implica que $|x - y|^\alpha \leq \delta_\varepsilon^\alpha$, pues $(\,\cdot\,)^\alpha$ es una función monótona creciente, cualquiera que sea $\alpha > 0$. (ii) Para la segunda parte del problema, si $\alpha > 1$, escribamos $\alpha := 1 + s$ para $s := \alpha - 1 > 0$. Entonces,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^{1+s} = C|x - x_0||x - x_0|^s,$$

de donde obtenemos que

$$0 \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq C|x - x_0|^s,$$

y tomando límites cuando $x \to x_0$, se deduce que el límite anterior, definitorio de la derivada de f, existe y es nulo, por el Teorema del Sandwich. Así, f es necesariamente constante, pues aplicado el Teorema del Valor Medio a cualesquiera dos puntos x e y de I distintos, se deduce que, para cierto $c_{x,y}$ entre x e y,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c_{x,y}) = 0,$$

de forma que $f(x) = f(y)$, esto es, f es constante.

6/3/2019

Ejercicio 6.18.a. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$$

en $[-2, 2]$.

Solución. Dado que la función $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^\infty[-2, 2]$, los máximos y mínimos *absolutos* han de encontrarse bien en la frontera de dicho intervalo o ser máximos y mínimos relativos en el interior, $(-2, 2)$, los cuales se encuentran necesariamente entre los puntos críticos de f. Evaluamos en primer lugar

$$f(-2) = 5 \qquad \text{y} \qquad f(2) = -11$$

Por otra parte, los puntos críticos de f, es decir, los ceros de f', son las soluciones de

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 2x - 8,$$

es decir,

$$x = 2 \notin (-2, 2) \qquad x = -4/3 \in (-2, 2)$$

Evaluando la segunda derivada, obtenemos que

$$f''(-4/3) = -10 < 0$$

de forma que $-4/3$ es un máximo relativo. Sin embargo, comparándolo con los valores en la frontera, deducimos que el mínimo absoluto de f en $[-2, 2]$ se alcanza en $x = 2$ mientras que el máximo absoluto de f en $[-2, 2]$ se alcanza en $x = -4/3$, pues $7{,}5185 \approx 203/27 = f(-4/3) > f(-2) = 5$. □

Ejercicio 6.18.c. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(1 + x)$$

en su dominio.

Solución sin derivadas. Dado que el dominio de $\operatorname{arc\,sen}(\,\cdot\,)$ es sencillamente $[-1, 1]$, el dominio de f será $[-2, 0]$. Dado que $\operatorname{sen}(\,\cdot\,) : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ es estrictamente creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$, su inversa $\operatorname{arc\,sen}(\,\cdot\,)$ también lo es*, con lo que f claramente también, pues es una traslación horizontal de ésta simplemente. Así, su mínimo absoluto se encuentra en $x = -2$, para

*Veamos rigurosamente que la inversa de una función estrictamente monótona es también estrictamente monótona. Si $\phi : I \to J$ es una biyección estrictamente monótona entre dos intervalos reales, digamos estrictamente creciente sin pérdida de generalidad,

$$x_1 < x_2 \iff \phi(x_1) < \phi(x_2) \quad \text{para todos} \quad x_1, x_2 \in I$$

Denotando por y_k el único punto en J por el cual $\phi^{-1}(y_k) = x_k$, ésto es, $y_k = \phi(x_k)$, la anterior expresión se reescribe en la forma:

$$\phi^{-1}(y_1) < \phi^{-1}(y_2) \iff y_1 < y_2 \quad \text{para todos} \quad y_1, y_2 \in J,$$

es decir, ϕ^{-1} es también estrictamente creciente.

el cual $f(-2) = -\pi/2$, mientras que su máximo absoluto se encuentra en $x = 0$, para el cual $f(0) = \pi/2$. $\square$

Solución usando derivadas. La función f es derivable en el interor de su dominio, $(-2, 0)$, y su derivada resulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-x(2+x)}} > 0$$

para todo $x \in (-2, 0)$, puesto que tanto $-x$ como $(2+x)$ son números positivos. Por la caracterización de la monotonía en términos de la derivada vista en clase, ya que f es continua en $[-2, 0]$, deducimos que f es estrictamente creciente en $[-2, 0]$, como queríamos obtener, de forma que -2 es un mínimo absoluto y 0 es un máximo absoluto. $\square$

Ejercicio 6.18.f. *Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, de*

$$f(x) = x^2 \log(x)$$

en $[e^{-1}, e]$ *y en* $(0, \infty)$.

Solución. Observemos en primer lugar que la función está bien definida en $(0, \infty)$, y por ende en $[e^{-1}, e]$. Además,

$$f(e^{-1}) = -e^{-2}, \quad f(e) = e^2, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x)}{1/x^2} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

donde el primer límite se ha calculado empleando la Regla de Bernoulli-l'Hôpital. Hallemos ahora los extremos relativos, para lo cual nos valdremos del estudio de los puntos críticos de la función,

$$0 = f'(x) = 2x\log(x) + x = x[1 + 2\log(x)]$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (el cual no está en el interior de ningún intervalo que queramos estudiar, y por ende descartamos) y $x = e^{-1/2}$. Se comprueba usando la segunda derivada que $x = e^{-1/2}$ es un mínimo local. Así, con todo lo anterior, deducimos que en $(0, \infty)$ el mínimo global se encuentra en $x = e^{-1/2}$, mientras que no existe un máximo global, mientras que en $[e^{-1}, e]$, dado que $e^{-1/2}$ pertenece a dicho intervalo (la exponencial $x \mapsto e^x$ es estrictamente creciente, por lo que $e^{-1} < e^{-1/2} < e^1$), el mínimo global se alcanza en este punto, y el máximo global se alcanza obviamente en e. $\square$

7/3/2019

Ejercicio 6.19. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que f *tiene en* 0 *un mínimo local. (b) Demostrar que* $f'(0) = f''(0) = 0$ *y que no existe* $f'''(0)$.

Solución. (a) Que sea mínimo local significa que se puede encontrar un entorno $(-\delta, \delta)$ de 0 en el cual $f(x) \geq f(0)$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$ (¡ojo!, no necesariamente ha de ser estrictamente mayor, ésto es lo que se conoce como mínimo local estricto, de hecho, no lo es porque la sucesión $\{x_k = 1/k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ converge a 0 cuando $k \to \infty$ y sin embargo $f(x_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$). Esto es claro ya que $f(x) \geq 0$ para todo $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, con lo que siempre se va a tener que $f(x) \geq f(0)$. (b) Veamos ahora que la primera derivada de f en 0 existe empleando la definición de ésta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 \operatorname{sen}^2(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x^3 \operatorname{sen}^2(1/x) = 0$$

puesto que $x \mapsto x^3$ es una función que converge a 0 cuando $x \to 0$ y $x \mapsto \operatorname{sen}^2(1/x)$ es una función acotada, y sabemos por la teoría que el límite de un producto de una función acotada y una convergente a cero es cero. Ahora bien, empleando las reglas del cálculo de derivadas, así como lo anterior, deducimos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Con ello, razonando de la misma forma, deducimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 2x \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)] = 0$$

ya que $x \mapsto 2x$ es una función que converge a 0 cuando $x \to 0$ mientras que la función $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)[2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)]$ es acotada en un entorno de 0. Nuevamente, empleando las reglas del cálculo de derivadas,

$$f''(x) = \begin{cases} 2[(6x^2 - 1) \operatorname{sen}^2(1/x) + \cos^2(1/x) - 6x \operatorname{sen}(1/x) \cos(1/x)] & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ahora, sin embargo, se comprueba sencillamente que no existe el límite definitorio de $f'''(0)$, usando, por ejemplo, la sucesión $\{x_k = 1/2\pi k : k \in \mathbb{N}\}$, convergente a 0, para la cual se anulan todos los términos con senos en la expresión de f'', y por consiguiente

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f''(x_k) - f''(0)}{x_k - 0} = \lim_{k \to \infty} 4\pi k \cos^2(2\pi k) = +\infty.$$

$\square$

Ejercicio 6.20. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Probar que f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \geq 9/8$.

Solución. En primer lugar, observemos que la función f está bien definida en $\mathbb{R}$ cualquiera que sea a una constante real. Dada la regularidad de f, podemos estudiar el crecimiento y decrecimiento de ésta a través de su derivada, que resulta:

$$f'(x) = a - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 2x}{(1+x^2)^2} = a - \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2},$$

y como f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es,

$$a \geq \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2}$$

podemos calcular el máximo global de la función auxiliar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2},$$

hallando los puntos críticos de su derivada,

$$g'(x) = -\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

éstos son, $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, dado que la función no crece arbitrariamente, pues es continua y acotada:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1} = 1,$$

Se comprueba de manera sencilla que

$$g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$$

es máximo global de g y por ende $a \geq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solo si $a \geq 9/8$. $\square$

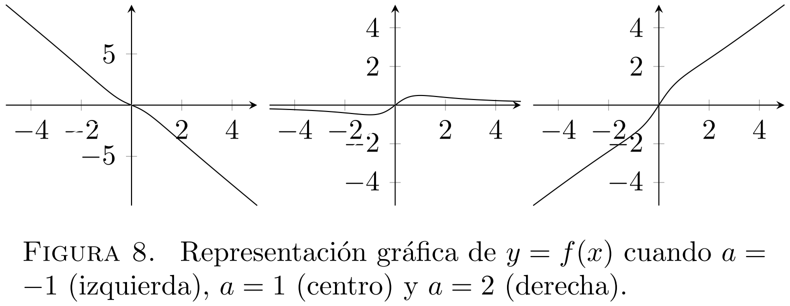


FIGURA 8. Representación gráfica de $y = f(x)$ cuando $a = -1$ (izquierda), $a = 1$ (centro) y $a = 2$ (derecha).

Ejercicio 6.21. *¿Qué número es mayor, e^π o π^e? Probar que si $x > e$, entonces $e^x > x^e$.*

Solución. Dado que el logaritmo preserva el orden (es una función estrictamente creciente), se tiene que $x^e < e^x$ si y solo si $\log(x^e) < \log(e^x)$, y por las propiedades de los logaritmos, esto equivale a

$$\frac{e}{\log(e)} < \frac{x}{\log(x)}. \tag{\dagger}$$

Definimos la función auxiliar $h : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) := \frac{x}{\log(x)},$$

la cual está bien definida en $(1, \infty)$, y es continua y derivable en dicho intervalo. En virtud de la desigualdad (†), el enunciado del problema es entonces equivalente a demostrar que $h(e) < h(x)$ para todo $x > e$. Ahora bien,

$$h'(x) = \frac{\log(x) - 1}{\log^2(x)} > 0$$

para todo $x > e$, de forma que h es estrictamente creciente en (e, ∞) y, en particular, $h(e) < h(x)$ para todo $x \in (e, \infty)$. □

Ejercicio 6.22. *Escribir* $x^4+x^3-3x^2+4x-4$ *como una suma de potencias de* $x-1$. *Escribir* $x^4-11x^3+43x^2-60x+14$ *como una suma de potencias de* $x-3$.

Solución. Escrito el polinomio del enunciado en la forma:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4 = \sum_{k=0}^{4} a_k (x-1)^k,$$

podemos determinar los coeficientes $a_0, ..., a_4 \in \mathbb{R}$ derivando sucesivas veces y evaluando en 1, de forma que

$$a_0 = P(1) = -1, \quad a_1 = \frac{P'(1)}{1!} = 5, \qquad a_2 = \frac{P''(1)}{2!} = 6,$$

$$a_3 = \frac{P'''(1)}{3!} = 5, \quad a_4 = \frac{P^{(\mathrm{iv})}(1)}{4!} = 1, \quad a_n = 0$$

para todo $n \geq 5$, tras operar y simplificar. El otro polinomio se escribe como suma de potencias de $x-3$ de manera análoga. También se pueden usar resultados como el Teorema de Taylor para obtener dicha expresión. □

Ejercicio 6.23.a. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden* n *de la función*

$$f(x) = e^{x^2}.$$

Solución. Dado que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m),$$

deducimos que la fórmula de MacLaurin de orden $2m$ es

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2m}}{m!} + o(x^{2m}),$$

o bien, que la fórmula de orden n es

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^n)$$

□

¡Ojo! aunque en el anterior ejercicio solo nos piden la fórmula de Taylor y no el polinomio de la función enunciada, podemos deducir, por la unicidad del polinomio de Taylor, que, en efecto, $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{x^{2k}}{k!}$ es el polinomio de Taylor de orden n.

Ejercicio 6.23.b. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden* n *de la función*

$$f(x) = (1 + e^x)^2.$$

Solución. Hallamos las derivadas sucesivas de f,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+e^x)^2 \\ f'(x) &= 2(1+e^x)e^x \\ f''(x) &= 2e^x(1+2e^x) \\ f'''(x) &= 2e^x(1+4e^x). \end{aligned}$$

Podemos demostrar por inducción en el número de derivadas que

$$f^{(n)}(x) = 2e^x(1+2^{n-1}e^x)$$

para todo $n \geq 1$, y por ende

$$f^{(n)}(0) = 2(1+2^{n-1}) = 2+2^n.$$

En efecto, el caso base ya lo hemos considerado, de forma que supongamos la fórmula anterior cierta, como hipótesis de inducción, de donde deducimos

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= \frac{d}{dx}[2e^x(1+2^{n-1}e^x)] \\ &= 2e^x(1+2^{n-1}e^x) + 2e^x 2^{n-1} e^x \\ &= 2e^x(1+2^{n-1}+2^{n-1}e^x) \\ &= 2e^x(1+2^n e^x), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Ejercicio 6.24.a. *Escribir la fórmula de Taylor de orden n de $f(x) = (2-x)^{-1}$ en potencias de $x-1$.*

Solución. Resulta sencillo comprobar y demostrar por inducción que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(2-x)^{k+1}}$$

para todo $x \neq 2$ y todo entero $k \geq 0$, de forma que $f^{(k)}(1) = k!$ y por tanto la fórmula de Taylor de orden n resulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n) = \sum_{k=0}^{n}(x-1)^k + o((x-1)^n)$$

□

Ejercicio 6.24.b. *Escribir la fórmula de Taylor de orden n de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)$ en potencias de $x-\pi$.*

Solución. Resulta sencillo comprobar y demostrar por inducción que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \left(\frac{3x}{2}\right)^k \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 0 \mod 4, \\ \left(\frac{3x}{2}\right)^k \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 1 \mod 4, \\ -\left(\frac{3x}{2}\right)^k \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 2 \mod 4, \\ -\left(\frac{3x}{2}\right)^k \cos\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{si } k = 3 \mod 4, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo entero $k \geq 0$, de forma que $f^{(k)}(\pi) = 0$ si k es impar y $f^{(k)}(\pi) = (-1)^{k/2+1}(3\pi/2)^k$ si k es par, y la fórmula de Taylor de orden n resulta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k+1} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(2k)!}(x-\pi)^{2k} + o((x-\pi)^n)$$

□

Ejercicio 6.23.c. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función*
$$f(x) = xe^x.$$

Solución. Dado que, cualquiera que sea $n > 1$ un número natural,
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{n-1}),$$
concluimos que
$$xe^x = x + x^2 + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(k-1)!} + o(x^n).$$
sin más que observar que $xo(x^m) = o(x^{m+1})$. □

Ejercicio 6.23.d. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función*
$$f(x) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

Solución. Basta observar que
$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{2}\log(1-x)$$
por las propiedades de los logaritmos, y como sabemos que
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + o(x^m),$$
para todo natural m,
$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^m}{m} + o(x^m).$$
y por ende
$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$
cualquiera que sea n un número natural. □

Ejercicio 6.23.e. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden n de la función*
$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Solución. Por las propiedades de los logaritmos, $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$. Podemos empezar usando la fórmula de MacLaurin para ambos sumandos,
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + o(x^m),$$

de forma que, como en el apartado anterior,

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^m}{m} + o(x^m).$$

Restando ambas expresiones deducimos que los términos con grados pares su cancelan mientras que los impares se suman, de forma que

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \cdots + 2\frac{x^{2\lfloor (n+1)/2\rfloor -1}}{2\lfloor (n+1)/2\rfloor - 1} + o(x^n) \\ &= 2\sum_{k=1}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^n) \end{aligned}$$

es la fórmula de MacLaurin para f de orden n. □

Ejercicio 6.23.f. *Escribir la fórmula de MacLaurin de orden* n *de la función*

$$f(x) = (1+x)\log(1+x)$$

Solución. De la misma forma que en el apartado anterior, considerando la fórmula de MacLaurin

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}x^m}{m} + o(x^m),$$

al multiplicar por $1+x$, deducimos que

$$\begin{aligned} (1+x)\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) \\ &\quad + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1}), \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)x^k + o(x^n) \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

donde hemos agrupado $o(x^n) + (-1)^{n+1}x^{n+1}/n + o(x^{n+1})$ bajo el término $o(x^n)$ nuevamente. □

14/3/2019

Ejercicio 6.25. *Probar que el error cometido al sustituir* $\operatorname{sen}(x)$ *por*

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$$

es menor que 10^{-4} *supuesto que* $|x| \leq \pi/4$.

Solución. Observemos en primer lugar que $x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5$ es el polinomio de Taylor de orden 5 (o de orden 6) del seno entorno a 0. En virtud del Teorema de Taylor para el residuo (de Lagrange), sabemos que el error cometido al aproximar una función como es $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, por su polinomio de Taylor de orden 6, que denotaremos $P_6(x)$, viene dado por el valor absoluto del residuo de Lagrange:

$$|f(x) - P_6(x)| = |R_6(x)| = \left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right|$$

para cierto θ interior al intervalo de extremos 0 y x. Como queremos demostrar que el error cometido en $[-\pi/4, \pi/4]$ resultará menor que 10^{-4}, hemos de encontrar una cota superior para la anterior expresión para todo x y para todo θ. Sin embargo, la dependencia de θ y x no es explícita, de modo que buscaremos sencillamente una cota uniforme cualquiera que sea θ y x en el intervalo citado, una cota posiblemente muy mejorable, aunque suficiente en el caso de nuestros ejemplos. Por ejemplo, dado que

$$f^{(6+1)}(t) = -\cos(t), \quad (6+1)! = 5040,$$

podemos mayorar el valor absoluto del residuo de Lagrange por

$$\left| \frac{f^{(6+1)}(\theta)}{(6+1)!} x^{6+1} \right| \leq \frac{1}{5040} |f^{(7)}(\theta)| |x^7| = \frac{1}{5040} \cdot 1 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^7 \leq 3{,}6576 \cdot 10^{-5} \leq 10^{-4},$$

como queríamos. □

Ejercicio 6.26. *Probar que el error cometido al sustituir* $\operatorname{sen}(e^x - 1)$ *por*

$$x + \frac{1}{2}x^2$$

es menor que $3 \cdot 10^{-3}$ *supuesto que* $|x| \leq 10^{-1}$.

Solución. Observamos nuevamente que $x + \frac{1}{2}x^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1)$, de forma que procedemos análogamente al ejercicio anterior. El error al aproximar f por su polinomio de Taylor es el residuo de Lagrange

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left| \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{6} |f'''(\theta)| \cdot 10^{-3}$$

para cierto θ entre 0 y x, donde,

$$f'''(\theta) = -e^{\theta}[3e^{\theta} \operatorname{sen}(e^{\theta} - 1) + (e^{2\theta} - 1) \cos(e^{\theta} - 1)]$$

y, empleando la desigualdad triangular,

$$|f'''(\theta)| \leq e^{\theta}[3e^{\theta}|\operatorname{sen}(e^{\theta}-1)| + (e^{2\theta}+1)|\cos(e^{\theta}-1)]$$

Ahora bien, dado que $|\operatorname{sen}| \leq 1$, $|\cos| \leq 1$ en $\mathbb{R}$, y puesto que la exponencial es estrictamente creciente, $e^{1/10} \leq e^{3/10} \approx 1{,}35$ y

$$|f'''(\theta)| \leq e^{3/10}[3e^{3/10} + (e^{3/10}+1)] \approx 8{,}64$$

de modo que podemos concluir que el error cometido está acotado superiormente por:

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|f'''(\theta)||x|^3 \leq \frac{e^{3/10)}(4e^{3/10}+1)}{6}10^{-3} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Esto concluye el ejercicio. □

Ejercicio 6.29.a. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ es finito cuando*

$$f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = 0.$$

Solución. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1,$$

mientras que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{2x} = \infty.$$

Así, la función seno es un infinitésimo de orden 1 cuando $x \to 0$. Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\operatorname{sen}(x) = x^{\mathbf{1}} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

□

Ejercicio 6.29.b. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ es finito cuando*

$$f(x) = \log(1+x), \quad a = 0.$$

Solución. Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x(1+x)} = \infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$\log(1+x) = x^{\mathbf{1}} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

□

Ejercicio 6.29.c. *Hallar el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que* $\lim_{x\to a} f(x)/(x-a)^p$ *es finito cuando*

$$f(x) = 1 - x + \log(x), \quad a = 1.$$

Solución. Sabemos que, en virtud de la Regla de Bernoulli-l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

también se tiene que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{2(x-1)} = -\lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2},$$

mientras que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-x+\log(x)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1+\frac{1}{x}}{3(x-1)^2} = -\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3(x-1)x} = -\infty.$$

Esto se constata observando el desarrollo de Taylor de la función, que resulta:

$$1 - x + \log(1+x) = -\frac{1}{2}(x-1)^{\mathbf{2}} + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$

□

Ejercicio 6.30.a. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen}(ax) - 3ax - a^3x^3}{6bx - 6\operatorname{sen}(bx) + b^3x^3}$$

Solución. En virtud del Teorema de Taylor, se obtiene que

$$3\operatorname{sen}(ax) = 3ax - \frac{a^3x^3}{2} + o(x^3) \quad \text{y} \quad 6\operatorname{sen}(bx) = 6bx - b^3x^3 + o(x^3),$$

de forma que, sustituyendo ambas expresiones en el límite del enunciado, deducimos que éste resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{[3ax - \frac{1}{2}a^3x^3 + o(x^3)] - 3ax - a^3x^3}{6bx - [6bx - b^3x^3 + o(x^3)] + b^3x^3}$$

y simplificando, éste es equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3x^3 + o(x^3)}{2b^3x^3 + o(x^3)}.$$

Dividiendo en ambos numerador y denominador por x^3 y observando que, por la definición de o de Landau, $o(x^3)/x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, concluimos que el anterior límite es, finalmente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}a^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2b^3 + \frac{o(x^3)}{x^3}} = -\frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

□

20/3/2019

Ejercicio 6.30.b. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}.$$

Solución. En primer lugar, resulta sencillo obtener la fórmula de Taylor para el logaritmo entorno a 1, que resulta:

$$\log(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

de manera que, sustituyéndolo en el límite, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x+[(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)]}{1-\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{1-\sqrt{2x-x^2}}\end{aligned}$$

racionalizamos la expresión y observando que $1-2x+x^2 = (x-1)^2$:

$$= \lim_{x\to 1} \frac{[-\frac{1}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)][1+\sqrt{2x-x^2}]}{(x-1)^2}$$

y dividiendo en ambos numerador y denominador por $(x-1)^2$:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x\to 1} \frac{[-\frac{1}{2}+\frac{o((x-1)^2)}{(x-1)^2}][1+\sqrt{2x-x^2}]}{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}} \\ &= \lim_{x\to 1} \left(-\frac{1}{2}+\frac{o((x-1)^2)}{(x-1)^2}\right)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right) = -1.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.30.d. *Calcular el siguiente límite usando la fórmula de Taylor-Young:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{(x^2-\operatorname{sen}^2(x))^{1/2}}.$$

Solución. En virtud del Teorema de Taylor, resulta sencillo obtener que

$$\operatorname{sen}(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\ x\cos(x) = x-\frac{x^3}{2}+o(x^3),\ \operatorname{sen}^2(x) = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

de modo que, sustituyendo en el límite del enunciado,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)}{(x^2-\operatorname{sen}^2(x))^{1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]-[x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)]}{(x^2-[x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)])^{1/2}}$$

de manera que, tras simplificar,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{(\frac{1}{3}x^4 + o(x^4))^{1/2}}$$

y dividiendo en ambos miembros por x^2,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x + \frac{o(x^3)}{x^2}}{(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4})^{1/2}} = 0,$$

como queríamos concluir, dado que $o(x^3)/x^2 \to 0$ y $o(x^4)/x^4 \to 0$ cuando $x \to 0$. □

Ejercicio 6.31.a. *Estudiar el crecimiento, los extremos y la convexidad de la siguiente función, y dibujar su gráfica:*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Solución. En primer lugar observamos que el denominador se anula en $x = -1$, y la función está bien definida en el resto de puntos, de forma que el dominio es exactamente $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. No presenta simetrías par ni impar, claramente, y tampoco periodicidad. Además, es de clase C^∞ en dicho conjunto y sus primeras derivadas resultan

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \qquad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

en $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Con ello, los puntos críticos de la función son $x = 0$ y $x = -3$. Se comprueba de manera sencilla que $x = -3$ es un máximo, bien evaluando el signo de la derivada en un entorno del punto o el signo de la segunda derivada en $x = -3$. Además, $x = 0$ es un punto de inflexión. Por otra parte, resulta sencillo comprobar que

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$$

de manera que presenta una asíntota vertical en $x = -1$ y, además, presenta una asíntota oblicua $y = ax + b$ en $\pm\infty$, con coeficientes

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = -2.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento resultan, en virtud de lo anterior, $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$ y $(-3,-1)$, respectivamente, y la función es cóncava en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y convexa en $(0,\infty)$, como se puede apreciar inmediatamente a partir de la expresión de la segunda derivada. Finalmente, la gráfica de la función resulta la presentada en la Figura 9. □

Ejercicio 7.1.1. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{(1+\sqrt{x})^3}{x^{1/3}}.$$

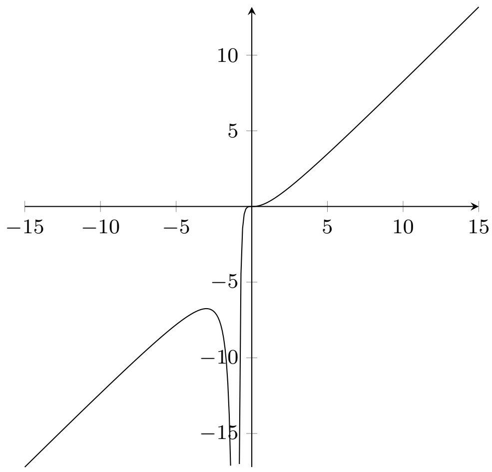


FIGURA 9. Representación gráfica de $y = f(x) = x^3/(x+1)^2$

Solución. Desarrollamos el cubo en el numerador del integrando e integramos la expresión simplificada:

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{x^{1/3}}\,dx &= \int \frac{1+3x^{1/2}+3x^{2/2}+x^{3/2}}{x^{1/3}}\,dx \\ &= \int (x^{-1/3}+3x^{1/6}+3x^{2/3}+x^{7/6})\,dx \\ &= \frac{3}{2}x^{2/3}+\frac{18}{7}x^{7/6}+\frac{9}{5}x^{5/3}+\frac{6}{13}x^{13/6}+C,\end{aligned}$$

siendo C cualquier constante real. Observamos que tanto la función original como las primitivas obtenidas están bien definidas en $(0,\infty)$ únicamente. □

21/3/2019

Ejercicio 5.6.b. *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2(1+e^{-1/x})^{-1} & \textit{si } x \neq 0, \\ 2 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, dado que f es una composición de funciones de clase C^∞ en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, deducimos que f es de clase C^∞ en dicho dominio, y por ende continuas, y para estudiar la continuidad de la función bastará comprobar que los límites laterales entorno a $x = 0$ coincidan. Recordemos que la función exponencial $x \mapsto e^x$ es una función estrictamente creciente con $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $e^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$. De aquí que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2 \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{1+e^y} = \frac{2}{1+0} = 2,$$

empleando el cambio $y \equiv -1/x$ para simplificar el cálculo anterior, mientras que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{1+e^{-1/x}} = 2 \lim_{y \to \infty} \frac{1}{1+e^y} = 0,$$

empleando el mismo cambio, de forma que la función no es continua en 0. □

Ejercicio 6.27. *Probar que el error cometido al sustituir* $\cos^2(3x)$ *por* $1 - 9x^2 + 27x^4$ *es menor que* $4 \cdot 10^{-5}$ *si* $|x| \leq 1/10$.

Solución. De la misma forma que en los Ejercicios 6.25 y 6.26, se comprueba sencillamente que $1 - 9x^2 + 27x^4$ es el polinomio de Taylor de orden 5 (¡ojo!, es el mismo que el polinomio de Taylor de orden 4, pero no vale para la estimación del error pedida que solo lo consideremos hasta dicho orden). Además, tras unas cuentas, obtenemos que, si denotamos $f(x) = \cos^2(3x)$, calculando las derivadas sucesivas y empleando la fórmula del seno del ángulo doble,

$$f^{(6)}(x) = -23328 \cos(6x),$$

con lo que el error cometido en la aproximación, que resulta el valor absoluto del residuo de Lagrange, puede ser mayorado de la siguiente forma:

$$|f(x) - P_5(x)| = |R_5(x)| = \left| \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} x^6 \right| \leq \frac{23328}{720} 10^{-6} = 32{,}4 \cdot 10^{-6} \leq 4 \cdot 10^{-5},$$

como queríamos obtener. □

Ejercicio 6.28. *Probar que el error cometido al sustituir* $e^{\operatorname{sen}(x)}$ *por* $1 + x + x^2/2$ *es menor que* $3|x|^3$.

Solución. Observamos que la expresión en el enunciado se corresponde efectivamente con el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$, para lo cual obtenemos las siguientes derivadas, así como la tercera derivada, que emplearemos en la fórmula del residuo de Lagrange:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)},\\
f(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)} = e^0 = 1,\\
f'(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x),\\
f'(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)}\cos(0) = 1,\\
f''(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)}(\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x)),\\
f''(0) &= e^{\operatorname{sen}(0)}(\cos^2(0) - \operatorname{sen}(0)) = 1,\\
f'''(x) &= e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)[-3\operatorname{sen}(x) + \cos^2(x) - 1]\\
&= -e^{\operatorname{sen}(x)}\operatorname{sen}(x)\cos(x)[\operatorname{sen}(x) + 3]
\end{aligned}
$$

Por el Teorema de Taylor, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe cierto θ entre 0 y x que nos permite mayorar la siguiente expresión uniformemente:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| &= \left|\frac{f'''(\theta)}{3!}x^3\right|\\
&\leq \frac{e^{\operatorname{sen}(\theta)}|\operatorname{sen}(\theta)||\cos(\theta)||\operatorname{sen}(\theta)+3|}{3!}|x|^3\\
&\leq \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 4}{6}|x|^3 = 2|x|^3,
\end{aligned}
$$

donde hemos empleado que $|\operatorname{sen}(\theta)|, |\cos(\theta)| \leq 1$ cualquiera que sea θ, que $e^{\operatorname{sen}(\theta)} \leq e^1 \leq 3$, así como la desigualdad triangular para concluir que $|\operatorname{sen}(\theta) + 3| \leq |\operatorname{sen}(\theta)| + 3 \leq 4$. □

27/3/2019

Ejercicio 7.1.2. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solución. Esta integral resulta inmediata empleando el Teorema del Cambio de Variable, pues considerando

$$u \equiv \operatorname{arc\,sen}(x), \quad \mathrm{d}u \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

deducimos que:

$$\int \frac{(\operatorname{arc\,sen}(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x)^3 + C.$$

siendo C cualquier constante real. Nótese que tanto la función como la primitiva solo están bien definidas y tienen sentido en $(-1,1)$. □

Ejercicio 7.1.3. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Solución. Completamos cuadrados para $x-x^2$ escribiendo

$$x-x^2 = \frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

de forma que la integral resulta, tras operar estratégicamente el denominador y realizar el cambio de variable $y \equiv 2x-1$, $\mathrm{d}y \equiv 2\,\mathrm{d}x$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$
$$= \operatorname{arc\,sen}(y) + C = \operatorname{arc\,sen}(2x-1) + C,$$

donde C es una constante real cualquiera. Observamos que, aunque esta función está bien definida en $\mathbb{R}$, es sólo primitiva de la función del enunciado cuando esta última está bien definida, esto es, en $(0,1)$ únicamente. □

Ejercicio 7.1.4. *Calcular las primitivas de:*

$$4\cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}(x).$$

Solución. Dada la linealidad de la integral indefinida,

$$\int [4\cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}(x)]\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x - 3\int \cos(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x,$$

donde el primer término se puede simplicar empleando la conocida identidad pitagórica $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, y observando que $\int \phi^n \phi' = \phi^{n+1}/(n+1)$, $n \neq -1$, deducimos que:

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \cos(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \cos(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int \cos(x)\operatorname{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C\end{aligned}$$

y el segundo término se calcula de manera análoga:

$$\int \cos(x)\operatorname{sen}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) + C$$

Con todo ello, la primitiva de la función del enunciado resulta

$$4\operatorname{sen}(x) - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3(x) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2(x) + C$$

donde C es una constante real arbitraria, lo que concluye el ejercicio. □

Ejercicio 7.1.9. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}.$$

Solución. En primer lugar, observemos que

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\pi/4),$$

con lo que, tras el cambio de variable $y \equiv x + \pi/4$, $\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}x$, la integral resulta, tras multiplicar y dividir por $\operatorname{sen}(x)$ y emplear la identidad pitagórica:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \csc(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\operatorname{sen}(y)}{1-\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

y en virtud del cambio de variable $u \equiv \cos(y)$, $\mathrm{d}u \equiv -\operatorname{sen}(y)\,\mathrm{d}y$,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

para lo cual empleamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u},$$

de donde se obtiene, imponiendo la anterior igualdad que $A = B = 1/2$, con lo que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} + C\end{aligned}$$

También se puede resolver fácilmente empleando el cambio $t \equiv \tan(y/2)$. $\square$

El Teorema Fundamental del Álgebra establece que:

> *Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz.*

lo cual puede reformularse de la siguiente manera:

> *Todo polinomio no nulo de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades.*

Además, también se puede deducir, del hecho de que en el caso de que el polinomio tenga coeficientes reales solo posee raíces reales o pares de raíces complejas no reales conjugadas, que:

Proposición. *Todo polinomio Q no nulo con coeficientes reales factoriza de manera única en polinomios lineales y polinomios cuadráticos irreducibles, esto es, existen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$, $\beta_1, ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}$, $\ell_1, ..., \ell_n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$Q(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\ell_1} \cdots (x^2+\beta_n x+\gamma_n)^{\ell_n} \quad (1)$$

con $k_1 + \cdots + k_m + 2\ell_1 + \cdots + 2\ell_n = \deg(Q)$ y todos los términos son irreducibles y primos entre sí.

Demostración. Digamos que $\alpha_1, ...\alpha_m$ son todas las raíces reales (distintas entre sí) que posee el polinomio Q, con multiplicidades $k_1, ..., k_m$ respectivamente y digamos que $\zeta_1, \bar{\zeta}_1 ..., \zeta_m, \bar{\zeta}_m$ son todas las raíces complejas no reales (distintas entre sí), con multiplicidades $\ell_1, ..., \ell_n$ respectivamente. Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra

$$Q(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}(x-\zeta_1)^{\ell_1}(x-\bar{\zeta}_1)^{\ell_1} \cdots (x-\zeta_n)^{\ell_n}(x-\bar{\zeta}_n)^{\ell_n}.$$

Basta observar entonces que $(x-\zeta_i)(x-\bar{\zeta}_i) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\zeta_i)x + |\zeta|^2$, de lo que se deriva la fórmula del enunciado con $\beta_i = -2\,\mathrm{Re}(\zeta_i) \in \mathbb{R}$ y $\gamma_i = |\zeta_i|^2 \in \mathbb{R}$, cualquiera que sea $i \in \{1, ..., n\}$. □

Proposición. *Sean P y Q dos polinomios no nulos con $\deg(P) < \deg(Q)$. Si se factoriza $Q = Q_1 Q_2$, siendo Q_1 y Q_2 dos polinomios primos entre sí, existen polinomios S_1 y S_2 tales que*

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{S_1}{Q_1} + \frac{S_2}{Q_2}, \quad (2)$$

con $\deg(S_i) < \deg(Q_i)$, $i = 1, 2$.

Demostración. Por la Identidad de Bézout, existen polinomios H_1 y H_2 tales que

$$Q_1 H_2 + Q_2 H_1 = 1. \quad (3)$$

De esta forma,

$$P = Q_1(H_2 P) + Q_2(H_1 P), \quad (4)$$

y por el algoritmo de división también podemos escribir

$$H_1P = Q_1C + S_1 \tag{5}$$

para ciertos polinomios C y S_1 con $\deg(S_1) < \deg(Q_1)$. Denotemos

$$S_2 = H_2P + CQ_2, \tag{6}$$

entonces, efectivamente

$$P = Q_1S_2 + Q_2S_1 \tag{7}$$

y por ende la fórmula del enunciado. Falta demostrar que $\deg(S_2) < \deg(Q_2)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\deg(S_2) \geq \deg(Q_2)$. Entonces,

$$\deg(Q_1S_2) \geq \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q), \tag{8}$$

pero

$$\deg(Q_2S_1) < \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q) \tag{9}$$

de forma que en $Q_1S_2 + Q_2S_1 = P$ el término Q_1S_2 es dominante y

$$\deg(P) = \deg(Q_1S_2 + Q_2S_1) = \deg(Q_1S_2) \geq \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q), \tag{10}$$

lo cual es una contradicción, y con ello finaliza la demostración. □

Proposición. *Sea P un polinomio con $\deg(P) < k$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, existen números reales únicos $A_k, ..., A_1$ tales que:*

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} \tag{11}$$

y si $\deg(P) < 2k$ y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son tales que $\beta^2 - 4\gamma < 0$, existen números reales únicos $B_1, ..., B_k, C_1, ..., C_k$ tales que:

$$\frac{P(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \frac{B_kx + C_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + \cdots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)} \tag{12}$$

Demostración. En virtud del algoritmo de división,

$$P(x) = P_k(x)(x-\alpha) + A_k,$$

de forma que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k},$$

y aplicando sucesivamente el razonamiento a P_k, deducimos las fórmulas del enunciado. La unicidad de las constantes es consecuencia de la unicidad del resto en el Algoritmo de División. □

Como combinación de las tres proposiciones, deducimos que toda fracción racional P/Q (sin tener necesariamente $\deg(P) < \deg(Q)$) tiene así una descomposición en lo que se conoce como fracciones parciales:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}} \tag{13}$$

donde R es un polinomio y $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ son constantes reales.

28/3/2019

Sea $\mathscr{R}$ una función racional con dos variables, las integrales de la forma

$$\int \mathscr{R}(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

se racionalizan con el cambio de variable $t = \tan(\theta/2)$. Conocidas las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}, \ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}, \ \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)},$$

(¡las cuales tienen interés propio a la hora de integrar!), se deduce sencillamente que

$$1+t^2 = \frac{2}{1+\cos\theta}, \quad t = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

y de éstas que

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

es decir, *¡ambas funciones seno y coseno, así como el término asociado a la diferencial, son ahora funciones racionales!* de forma que, presumiblemente, la nueva integral será fácilmente resoluble pues adopta la forma:

$$\int \mathscr{R}(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int \mathscr{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

que será la de una integral de función racional, y que podemos resolver mediante su descomposición en fracciones parciales o mediante el método de Hermite. Sin embargo, podemos apurar más con este tipo de cambios de variable. En general:

- Si la función $\mathscr{R}$ es par en ambos argumentos, en el siguiente sentido preciso: $\mathscr{R}(-\operatorname{sen}(\theta), -\cos(\theta)) = \mathscr{R}(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$, puede resultar ser más útil el cambio de variable $t = \tan(\theta)$.
- Si la función $\mathscr{R}$ es impar en el seno, entonces suele ser más útil el cambio $t = \cos(\theta)$,
- Si la función $\mathscr{R}$ es impar en el coseno, suele ser más útil el cambio $t = \operatorname{sen}(\theta)$.

28/3/2019

Ejercicio 7.1.10. *Calcular las primitivas de:*

$$\arctan(x)$$

Solución. Empleamos integración por partes:

$$u \equiv \arctan(x), \qquad \mathrm{d}u \equiv \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v \equiv \mathrm{d}x, \qquad v \equiv x,$$

para obtener que:

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\end{aligned}$$

siendo C una constante real arbitraria. Obsérvese que tanto la función como la primitiva están bien definidas en $\mathbb{R}$. $\square$

Ejercicio 7.1.11. *Calcular las primitivas de:*

$$\cos(x)\ \log(1+\cos(x)).$$

Solución. Nótese que la función no está bien definida en $\mathbb{R}$, de forma que tendremos que considerar las restricciones de la función a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $1+\cos(x) > 0$, esto es, tales que $x \notin \pi+2\pi\mathbb{Z} = \{\pi+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Considerado esto, empleamos integración por partes,

$$u \equiv \log(1+\cos(x)), \quad \mathrm{d}u \equiv -\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v \equiv \cos(x)\,\mathrm{d}x, \quad v \equiv \operatorname{sen}(x),$$

para concluir

$$\int \cos(x)\log(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x)) + \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

con lo que, empleando la identidad pitagórica:

$$= \operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x)) + \int \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

así como la resta de cuadrados $1-\cos^2(x) = (1-\cos(x))(1+\cos(x))$:

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x)) + \int (1-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \operatorname{sen}(x)\log(1+\cos(x)) + x - \operatorname{sen}(x) + C \end{aligned}$$

siendo C una constante real arbitraria, y simplificando:

$$= x + \operatorname{sen}(x)[\log(1+\cos(x)) - 1] + C,$$

lo que concluye el ejercicio. Obsérvese que la constante se podría elegir, para más generalidad, distinta en cada una de las componentes conexas del dominio, esto es, en cada intervalo de la forma $(\pi+2\pi k, \pi+2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ejercicio 7.1.13. *Calcular las primitivas de:*

$$\frac{\cos(2x)}{e^x}.$$

Solución. Empleamos integración por partes, con

$$u \equiv e^{-x}, \quad \mathrm{d}u = -e^{-x}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}v \equiv \cos(2x)\,\mathrm{d}x, \quad v = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x),$$

de forma que

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(2x)}{e^x}\,\mathrm{d}x &= \int \cos(2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

y nuevamente usando integración por partes,

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)e^{-x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(2x)e^{-x} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Observando que el último término es la integral de partida, deducimos que

$$\int \frac{\cos(2x)}{e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)}{5e^x}.$$

□

Ejercicio 7.2.a. *Calcular el siguiente límite mediante integrales definidas:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right) + \cos\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{nx}{n}\right)\right)$$

Solución. Dicho límite se corresponde con

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}t,$$

en virtud de la definición de suma de Riemann, donde observamos que $t_k \equiv k/n$ representa un punto de cada intervalo correspondiente a la partición de $[0,1]$, consistente en intervalos de la misma longitud, $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, Así, si $x = 0$, el límite resulta trivialmente 1, mientras que si $x \neq 0$, el límite resulta

$$\int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\operatorname{sen}(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{\operatorname{sen}(1\cdot x) - \operatorname{sen}(0\cdot x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo (¡ojo!, la variable muda de integración es t, de forma que x se interpreta como una constante a estos efectos). □

Ejercicio 7.2.b. *Calcular el siguiente límite mediante integrales definidas:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

Solución. Multiplicando y dividiendo por n,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo. Nótese que los puntos de la forma $t_k = k/n$ se corresponden con puntos de los intervalos de las particiones formadas por intervalos de la misma longitud $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, $k = 1, ..., n$. □

Ejercicio 7.3. *Sea $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ continua en $[0,a]$. Comprobar que*

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x,$$

y calcular, para $n = 1$ y $n = 3$,

$$\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Solución. Consideremos equiparticiones de $[0,a]$, de forma que se tiene la simetría en la Figura 10, y ambas sumas inferiores y superiores coinciden. Así, ambas integrales, las cuales existen dado que $x \mapsto f(x)$ y $x \mapsto f(x-a)$ son continuas, han de ser iguales. Otra forma consiste en observar que, como

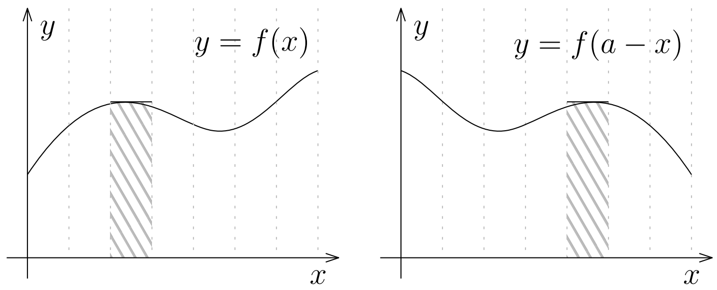


FIGURA 10. Representación de $y = f(x)$ e $y = f(a-x)$. Nótese que las áreas rayadas coinciden, de forma que necesariamente coincidirán las sumas inferiores y superiores.

consecuencia del Teorema del Cambio de Variable, si $y \equiv a - x$, y tal y como justificamos la inversión de los límites de integración:

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(a-y)(-\mathrm{d}y) = \int_0^a f(a-y)\,\mathrm{d}y.$$

como queríamos comprobar. Para calcular las integrales enunciadas, observamos que

$$I_n := \int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\,\mathrm{sen}^n(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,\mathrm{d}x$$

tras unas sencillas comprobaciones de que $\mathrm{sen}^n(\pi - x) = \mathrm{sen}^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ así como que $\cos^2(\pi - x) = (-\cos(x))^2 = \cos^2(x)$,

$$= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\,\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$

donde el último término es precisamente I_n, de manera que, despejando en la ecuación resultante, se obtiene la expresión más sencilla:

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\mathrm{sen}^n(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Supuesto que $n = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2}\, \arctan(\cos(x)) \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Supuesto que $n = 3$, obtenemos

$$I_3 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{1+\cos^2(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)} \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$$

y usando el cambio de variable con $y \equiv \cos(x)$, $\mathrm{d}y \equiv -\operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{1+y^2}\, \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y^2}\, \mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{1+y^2} - 1 \right) \mathrm{d}y \\ &= \pi \left(2 \arctan(y) - y \right)_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi(\pi-2)}{2}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la solución del ejercicio. $\square$