El Teorema Fundamental del Álgebra establece que:

Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz.

lo cual puede reformularse de la siguiente manera:

Todo polinomio no nulo de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades.

Además, también se puede deducir, del hecho de que en el caso de que el polinomio tenga coeficientes reales solo posee raíces reales o pares de raíces complejas no reales conjugadas, que:

Proposición. *Todo polinomio Q no nulo con coeficientes reales factoriza de manera única en polinomios lineales y polinomios cuadráticos irreducibles, esto es, existen $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}$, $\beta_1, ..., \beta_n, \gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}$, $\ell_1, ..., \ell_n \in \mathbb{N}$ tales que*

$$Q(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{\ell_1} \cdots (x^2+\beta_n x+\gamma_n)^{\ell_n} \tag{1}$$

con $k_1 + \cdots + k_m + 2\ell_1 + \cdots + 2\ell_n = \deg(Q)$ y todos los términos son irreducibles y primos entre sí.

Demostración. Digamos que $\alpha_1, ...\alpha_m$ son todas las raíces reales (distintas entre sí) que posee el polinomio Q, con multiplicidades $k_1, ..., k_m$ respectivamente y digamos que $\zeta_1, \bar{\zeta}_1 ..., \zeta_m, \bar{\zeta}_m$ son todas las raíces complejas no reales (distintas entre sí), con multiplicidades $\ell_1, ..., \ell_n$ respectivamente. Como consecuencia del Teorema Fundamental del Álgebra

$$Q(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}(x-\zeta_1)^{\ell_1/2}(x-\bar{\zeta}_1)^{\ell_1/2} \cdots (x-\zeta_n)^{\ell_n/2}(x-\bar{\zeta}_n)^{\ell_n/2}.$$

Basta observar entonces que $(x-\zeta_i)(x-\bar{\zeta}_i) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\zeta_i)x + |\zeta|^2$, de lo que se deriva la fórmula del enunciado con $\beta_i = -2\operatorname{Re}(\zeta_i) \in \mathbb{R}$ y $\gamma_i = |\zeta_i|^2 \in \mathbb{R}$, cualquiera que sea $i \in \{1, ..., n\}$. □

Proposición. *Sean P y Q dos polinomios no nulos con $\deg(P) < \deg(Q)$. Si se factoriza $Q = Q_1 Q_2$, siendo Q_1 y Q_2 dos polinomios primos entre sí, existen polinomios S_1 y S_2 tales que*

$$\frac{P}{Q} = \frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{S_1}{Q_1} + \frac{S_2}{Q_2}, \tag{2}$$

con $\deg(S_i) < \deg(Q_i)$, $i = 1, 2$.

Demostración. Por la Identidad de Bézout, existen polinomios H_1 y H_2 tales que

$$Q_1 H_2 + Q_2 H_1 = 1. \tag{3}$$

De esta forma,

$$P = Q_1(H_2 P) + Q_2(H_1 P), \tag{4}$$

y por el algoritmo de división también podemos escribir

$$H_1 P = Q_1 C + S_1 \tag{5}$$

para ciertos polinomios C y S_1 con $\deg(S_1) < \deg(Q_1)$. Denotemos

$$S_2 = H_2 P + C Q_2, \tag{6}$$

entonces, efectivamente

$$P = Q_1 S_2 + Q_2 S_1 \tag{7}$$

y por ende la fórmula del enunciado. Falta demostrar que $\deg(S_2) < \deg(Q_2)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\deg(S_2) \geq \deg(Q_2)$. Entonces,

$$\deg(Q_1S_2) = \deg(Q_1) + \deg(S_2) \geq \deg(Q_1) + \deg(Q_2) = \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q), \tag{8}$$

pero

$$\deg(Q_2S_1) < \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q) \tag{9}$$

de forma que en $Q_1S_2 + Q_2S_1 = P$ el término Q_1S_2 es dominante y

$$\deg(P) = \deg(Q_1S_2 + Q_2S_1) = \deg(Q_1S_2) \geq \deg(Q_1Q_2) = \deg(Q), \tag{10}$$

lo cual es una contradicción, y con ello finaliza la demostración. □

Proposición. *Sea P un polinomio con $\deg(P) < k$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, existen números reales únicos $A_k, ..., A_1$ tales que:*

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \cdots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} \tag{11}$$

y si $\deg(P) < 2k$ y $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ son tales que $\beta^2 - 4\gamma < 0$, existen números reales únicos $B_1, ..., B_k, C_1, ..., C_k$ tales que:

$$\frac{P(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \frac{B_kx + C_k}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + \cdots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)} \tag{12}$$

Demostración. En virtud del algoritmo de división,

$$P(x) = P_k(x)(x-\alpha) + A_k,$$

de forma que

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{P_k(x)}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k},$$

y aplicando sucesivamente el razonamiento a P_k, deducimos las fórmulas del enunciado. La unicidad de las constantes es consecuencia de la unicidad del resto en el Algoritmo de División. □

Como combinación de las tres proposiciones, deducimos que toda fracción racional P/Q (sin tener necesariamente $\deg(P) < \deg(Q)$) tiene así una descomposición en lo que se conoce como fracciones parciales:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}} \tag{13}$$

donde R es un polinomio y $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ son constantes reales.