CLASE #24: 25 DE ABRIL DE 2019

Ejercicio 8.2.1. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(n)}{n^2}.$$

Solución. Resulta absolutamente convergente, y por consiguiente convergente, en virtud del Criterio de Comparación, pues

$$\left| \frac{\sin^4(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

para todos los números naturales n, ya que es bien conocido que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente. □

Ejercicio 8.2.2. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 2/3}.$$

Solución. Diverge pues, intuitivamente, el «orden» del denominador no resulta mayor que uno. Más concretamente, $\sqrt{n} - 2/3 \leq 2\sqrt{n}$ para cada número natural n, y por ende

$$\frac{1}{\sqrt{n} - 2/3} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

de forma que, por el Criterio de Comparación, la serie diverge, pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ es conocida divergente. Otra forma consiste en comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}-2/3}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - 2/3} = 1,$$

de forma que, por el Criterio de Comparación Asintótica, tiene el mismo comportamiento que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$. □

Ejercicio 8.2.3. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2}{n!}$$

Solución. Como consecuencia del Criterio del cociente, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{1+n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (n+1)^2}{n^2} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2} \frac{1}{n+1} = 0,$$

la serie es convergente. □

Ejercicio 8.2.4. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n\left(a + \frac{b}{n}\right),$$

donde a *y* b *son dos números reales y* $0 < a < \pi/2$.

Solución. Como consecuencia del Criterio de la Raíz y la continuidad de las funciones valor absoluto y coseno, tras observar que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\cos^n\left(a + \frac{b}{n}\right)\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left|\cos\left(a + \frac{b}{n}\right)\right| = |\cos(a)| < 1,$$

pues $0 < a < \pi/2$ por hipótesis, deducimos que la serie converge. $\square$

Ejercicio 8.2.5. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{na^n},$$

donde a es un número real no nulo.

Solución. Por el Criterio de la Raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n|a|^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|a|}\left(n + \frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{|a|},$$

y por ende diverge si $|a| < 1$ o, equivalentemente, $1/|a| > 1$ mientras que si $|a| > 1$ la serie converge, donde hemos usado que

$$\lim_{x\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\log(x + 1/x)}{x}\right) = 1,$$

en virtud de las propiedades de la función logaritmo, la continuidad de la función exponencial, y la Regla de Bernoulli-l'Hôpital. Sin embargo, el criterio no proporciona ninguna información sobre la convergencia o divergencia de la serie en el caso crítico en que $1/|a| = 1$, y por tanto lo tenemos que estudiar independientemente. En este caso particular, si $|a| = 1$, ni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \quad \text{ni} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n}$$

convergen, pues no satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = 0 \quad \text{ni} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n} = 0$$

respectivamente, condiciones necesarias para su convergencia. $\square$

Ejercicio 8.2.6. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Solución. Por el Criterio del Cociente, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,n!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

pues es bien conocido que $e > 2$, la serie es convergente. $\square$

Ejercicio 8.2.7. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1}.$$

Solución. Diverge claramente, pues no satisface la condición necesaria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2+1} = 0$$

para la convergencia de la serie. $\square$

Ejercicio 8.2.8. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^3}$$

Solución. Como consecuencia del Criterio de la Raíz,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^3/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty} -n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0\end{aligned}$$

pues $-n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$ mientras que $\log(1+1/n)^n \to \log(e) = 1$, con lo que la serie es convergente. $\square$

Ejercicio 8.2.9. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}.$$

Solución. Es sencillo comprobar que $\log(n) \le n$ para cada número natural n. Por tanto,

$$\frac{1}{\log(n)} \ge \frac{1}{n},$$

y por la divergencia de la serie armónica, diverge por el Criterio de Comparación Asintótica. Otra forma de abordar el problema consiste en observar que la aplicación dada por $n \mapsto 1/\log(n)$ para todos los números naturales n es eventualmente monótona decreciente, de forma que por el Criterio de Condensación de Cauchy, esta serie presenta el mismo comportamiento que la dada por

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \frac{1}{\log(2^m)} = \log(2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{m},$$

la cual diverge trivialmente pues sus coeficientes no convergen a cero. $\square$

Ejercicio 8.2.10. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b},$$

donde a y b son cualesquiera dos números reales no simultáneamente nulos.

Solución. Supongamos que $a \neq 0$, pues en caso contrario no cumple la condición suficiente de convergencia por la que los coeficientes han de converger a cero. Por el Criterio de Comparación Asintótica con la serie armónica, la cual es bien conocida divergente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{an+b}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{an+b} = \frac{1}{a} \neq 0$$

podemos concluir que la serie del enunciado diverge siempre. $\square$

Ejercicio 8.2.11. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

Solución. Es absolutamente convergente, y por ende convergente, pues por el Criterio de Comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, la cual es convergente, se tiene

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

para cualquier número natural n, lo cual concluye el ejercicio. □

Ejercicio 8.2.12. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 3/2}$$

Solución. Como consecuencia del Criterio de Comparación Asintótica con la serie armónica, deducimos que la serie es divergente. □

Ejercicio 8.2.13. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Solución. Como consecuencia del Criterio de Comparación Asintótica con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, deducimos que la serie es convergente. □

Ejercicio 8.2.14. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}^2(nx)}{n^2}$$

Solución. Es absolutamente convergente, y por ende convergente, pues para todo número natural n,

$$\left| \frac{1 + \operatorname{sen}^2(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1 + |\operatorname{sen}(nx)|}{n^2} \leq \frac{2}{n^2},$$

en virtud del Criterio de Comparación con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$, que es convergente. □

Ejercicio 8.2.15. *Determina si la siguiente serie es convergente o no:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solución. Por el Criterio de Comparación Asintótica aplicado con respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, la cual es convergente, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}|\sin(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin(\frac{1}{n})|}{\frac{1}{n}} = 1,$$

en virtud de la ya conocida propiedad trigonométrica:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(x)|}{x} = 1,$$

podemos concluir que la serie es absolutamente convergente, y por ende convergente. □