CLASE #8: 21 DE FEBRERO DE 2019

Ejercicio 6.11. *Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y dos veces derivable en (a, b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un $c \in (a, b)$.*

Solución. Denotemos $P = (p, f(p))$ para cierto $p \in (a, b)$. La recta que une los puntos A y B viene dada por la expresión punto-pendiente:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

y una representación gráfica que nos permita ponernos en contexto podría ser, por ejemplo, la dada en la Figura 5.

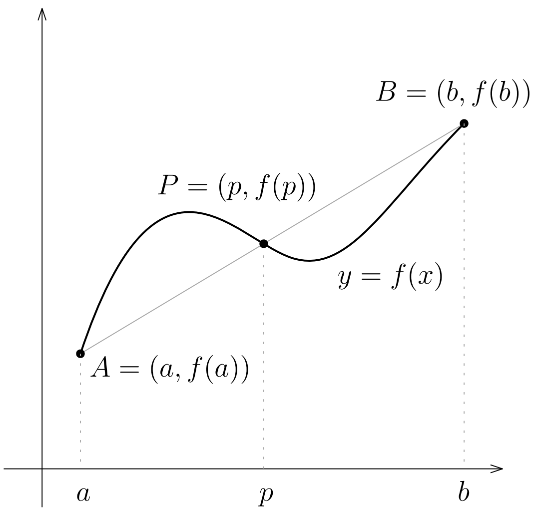

FIGURA 5. Ejemplo sencillo de la gráfica de una función que satisface las hipótesis.

En virtud del Teorema del Valor Medio, existen $c_1 \in (a, p)$ y $c_2 \in (p, b)$ de forma que

$$f'(c_1) = \frac{f(p) - f(a)}{p - a} = \frac{f(b) - f(p)}{b - p} = f'(c_2),$$

donde la segunda igualdad se debe a que dichas cantidades son, sencillamente, la pendiente de la recta que pasa por A y B. Así, como consecuencia del Teorema de Rolle, ha de existir $c \in (c_1, c_2)$ de forma que $f''(c) = 0$, como queríamos. $\square$

Ejercicio 6.12. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tres veces derivable en $[a, b]$ y si*

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$$

probar que $f'''(c) = 0$ para cierto $c \in (a, b)$.

Solución. En virtud del Teorema de Rolle, dado que $f(a) = f(b) = 0$ y la regularidad de f, existe $c_1 \in (a, b)$ tal que $f'(c_1) = 0$. Aplicando de nuevo el Teorema de Rolle sabido que $f'(a) = f'(c_1) = 0$ y que $f'(c_1) = f'(b) = 0$, deducimos que existen $c_2 \in (a, c_1)$ y $c_3 \in (c_1, b)$ de forma que $f''(c_2) =$

$f''(c_3) = 0$. Aplicando una última vez el Teorema de Rolle deducimos que existe $c \in (c_2, c_3)$ de forma que $f'''(c) = 0$, como queríamos demostrar. $\square$

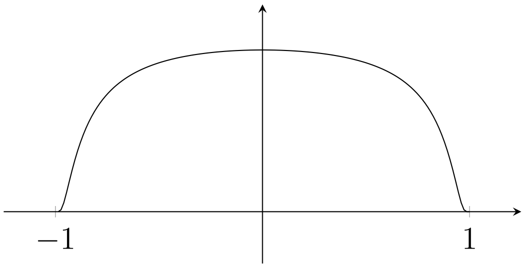

FIGURA 6. Un ejemplo de función que cumple las hipótesis, $x \mapsto e^{1/(x^2-1)}$ en $(-1, 1)$ y nula en $\mathbb{R}\setminus(-1, 1)$. De hecho, todas sus derivadas se anulan en -1 y 1 y es una función $C^\infty(\mathbb{R})$, aunque no es analítica (no se puede escribir un desarrollo de Taylor de la función en un entorno de cada punto, más concretamente de -1 o 1). Se usa en numerosas áreas de las Matemáticas y es fundamental en teoría de distribuciones, ecuaciones en derivadas parciales, en el estudio de variedades diferenciables, etc.

Ejercicio 6.13. *Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y tres veces derivable en $(0, 1)$. Si f se anula en dos puntos, por lo menos, de $(0, 1)$, entonces $f'''(c) = 0$ para algún $c \in (0, 1)$.*

Solución. Aunque la demostración es sencilla, hay muchos pasos intermedios que justificar y puede ser un poco tediosa, siempre guiados por un ejemplo de función que satisfaga, como el de la Figura 7, las hipótesis del problema.

- Sabemos, por hipótesis, que existen al menos dos ceros de la función, digamos $z_0, z_1 \in (0, 1)$ tales que $f(z_0) = f(z_1) = 0$. Digamos también que que $z_0 < z_1$.
- Si f es idénticamente nula en $(0, z_0)$, (z_0, z_1) o $(z_1, 1)$, entonces f''' también lo sería, y el ejercicio terminaría, de forma que supongamos en adelante que esto no ocurre.
- Por tanto, existen puntos $p_1 \in (0, z_0)$, $p_2 \in (z_0, z_1)$ y $p_3 \in (z_1, 1)$ tales que $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) > 0$, pues f es no negativa.
- Aplicando el Teorema del Valor Medio a f en $[p_1, z_0]$, $[z_0, p_2]$, $[p_2, z_1]$ y $[z_1, p_3]$, deducimos que existen puntos α_0, α_1, α_2 y α_3 en los respectivos interiores de los intervalos tales que $f'(\alpha_0) < 0$, $f'(\alpha_1) > 0$, $f'(\alpha_2) < 0$ y $f'(\alpha_3) > 0$.
- Así, como consecuencia del Teorema de Bolzano aplicado a f' entre los anteriores puntos, existen tres puntos críticos $c_0 \in (\alpha_0, \alpha_1)$, $c_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $c_2 \in (\alpha_2, \alpha_3)$ tales que $f'(c_0) = f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.
- Aplicando el Teorema de Rolle a f' en los intervalos (c_0, c_1), (c_1, c_2) y (c_2, c_3), deducimos que existen dos puntos de inflexión $i_0 \in (c_0, c_1)$ y $i_1 \in (c_1, c_2)$, de forma que $f''(i_0) = f''(i_1) = 0$.
- Finalmente, otra aplicación del Teorema de Rolle para f'' en (i_0, i_1) nos proporciona la existencia de un $c \in (i_0, i_1)$ tal que $f'''(c) = 0$.

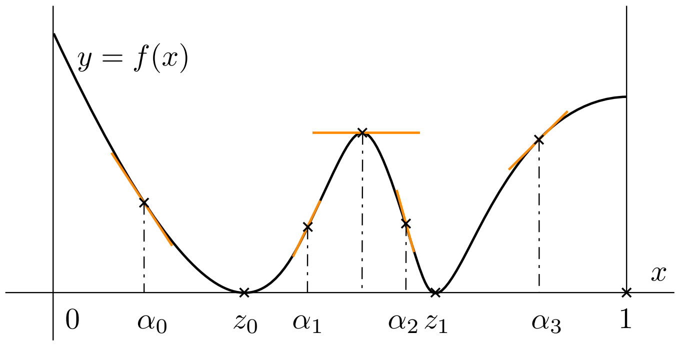

FIGURA 7. Ejemplo de función sencilla que cumple las hipótesis.

Con esto concluye la demostración. □

Ejercicio 6.14. *Probar el Teorema del Valor Medio Generalizado de Peano: sean $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tres funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & h'(c) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix} = 0$$

Probar también que el Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy es un caso particular de este.

Solución. La expresión con el determinante recuerda vagamente al Teorema de Rolle, en el que se tiene una función Φ diferenciable con $\Phi'(c) = 0$ para algún punto c si Φ tiene imágenes iguales en los extremos de un intervalo. Dadas las propiedades de los determinantes, definimos $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, estratégicamente, dada por

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

de manera que, sencillamente,

$$\Phi'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}.$$

Como $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, pues en cualquiera de los casos una de las filas en el determinante está repetida, y dado que Φ es continua y derivable en (a, b), deducimos que $\Phi'(c) = 0$ para cierto $c \in (a, b)$, en virtud del Teorema de Rolle. El Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy es un caso particular de éste cuando $h = 1$. □

Ejercicio 6.15.a. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\varepsilon}},$$

cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Solución. En virtud de la Regla de Bernoulli-L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{x^{\varepsilon}} = 0,$$

lo cual justifica que, asintóticamente, $\log(x)$ crece de manera «menos rápida» que x^ε, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$. $\square$

Ejercicio 6.15.b. *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x)$$

cualquiera que sea $a > 0$.

Solución. Nótese que

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \log(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(\frac{1}{x})}{x^a} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a},$$

el cual hemos calculado en el apartado anterior. $\square$

El primer cambio en la variable de límite

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = \lim_{y\to +\infty} u\left(\frac{1}{y}\right)$$

se justifica de la siguiente forma en términos del Criterio ε-δ de Weierstraß: es equivalente que para un $\varepsilon > 0$ prefijado encontremos $\delta_\varepsilon > 0$ de forma que si $0 < x < \delta_\varepsilon$ entonces se tenga que $|u(x) - L| \leq \varepsilon$ a que dado dicho $\varepsilon > 0$ encontremos $M_\varepsilon \equiv 1/\delta_\varepsilon > 0$ de forma que si $y \equiv 1/x$ satisface $y > M_\varepsilon$ (i.e. $0 < x < \delta_\varepsilon$) entonces $|u(1/y) - L| \leq \varepsilon$.