

# 煙シミュレーションのための部分空間法的高速化

須之内 俊樹

中央大学理工学研究科 情報工学専攻  
形状情報処理研究室 23N8100018B

2025 年 2 月 21 日

# 概要

- 流体と接する製品の設計・製造
- 物理的に正確なシミュレーション

# 研究背景

## 流体シミュレーション

### 工業分野

- 流体と接する製品の設計・製造
- 物理的に正確なシミュレーションが重要視

### CG 分野

- 流体の映像の生成に利用
- 計算負荷を少なくすること，流体の挙動が制御しやすいことが重要視
- 物理的な正確さよりも，それらしさを重要視

### 流体シミュレーションの課題

- 希薄な流体や，水飛沫は手法によっては再現できない
- 近年は高品質な映像が求められ，計算負荷が大きい

# 研究背景

## 流体シミュレーションの数値モデル

### ナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

- $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ : 流体の速度, 外力
- $p$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ : 流体の圧力, 密度, 粘性
- $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

# 研究背景

## 流体シミュレーションの数値モデル

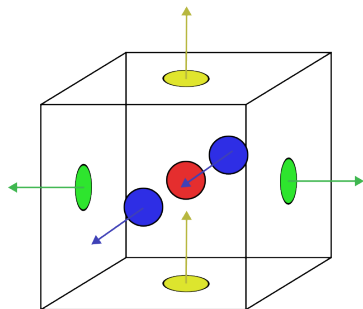
### ナビエ・ストークス方程式の離散化

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) - \Delta t((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f})$$

### スタッガード格子

- 速度と圧力の配置位置を工夫し，計算の安定性を向上
- 非直交格子への適用が困難



- x成分速度の位置
- y成分速度の位置
- z成分速度の位置
- 圧力の位置

# 研究背景

## 流体シミュレーションの数値モデル

### 部分段階法

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) - \Delta t((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f})$$

中間子  $\mathbf{u}_0$  から  $\mathbf{u}_3$  を用いて、以下のように各項ごとに分割して計算する

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t) - \Delta t\mathbf{f}$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \Delta t(\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 - \Delta t\nu\nabla^2\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 - \Delta t\frac{1}{\rho}\nabla p$$

# 研究背景

流体シミュレーションの数値モデル

## 部分段階法

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(t) - \Delta t \mathbf{f}$$

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}_0) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{V} \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{W} \mathbf{u}_2 \quad (2)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{Y} \mathbf{p}$$

- 式 1 は semi-Lagrangian 法 [3], 式 2, 3 はコリンの射影法 [1]
- $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$  は離散ラプラシアン行列を用いて  $\nabla^2$  を離散化
- $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Y}$  は勾配演算子  $\nabla$  を離散化

# 研究背景

## 先行研究

### Visual Simulaton of Smoke [4] [Fedkiw et al. 2001]

- CGにおいて広く用いられる煙のオフラインシミュレーション手法
- 密度を計算した後、ボリュームレンダリングを用いて描画
- 計算量は空間解像度に依存

### 計算機実験

- 解像度  $128^3$ , 200 フレーム
- シミュレーション ms/f
- 圧力項  $p = A^{-1}b$  は反復回数 20 回, ms/f
- レンダリング ms/f



# 部分空間法 (subspace method)

## 部分空間法

- 部分空間に射影し，計算負荷を軽減する手法
- 空間解像度を保ったまま高速化可能
- 前処理の計算負荷が大きい

## 概要

- シミュレーションの前処理として， $A^T A = I$  を満たし， $x = A\tilde{x}$  が成り立つような， $n \times r$  行列  $A$  を考える

$$\tilde{x} = Ax$$

- $\tilde{x}$  を用いてシミュレーションを行い， $x = A^T \tilde{x}$  を用いて  $x$  を求める
- $\tilde{u}$  は，流体の非圧縮条件  $\nabla \cdot \tilde{u} = 0$  を満たしていなければならない

## 部分空間法 (subspace method)

### 特異値分解を用いた直交基底の計算

- 既存のシミュレーションの時系列データを  $T$  個用いて、行列  $A$  を作成する手法
- 空間解像度を  $n$  とする．一般に、 $n \gg m \gg r$
- 時刻  $t$  における速度ベクトル  $u_t$  を用いて、 $3n \times m$  行列  $S$  を定義する

$$S = [u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{m-1}]$$

- $S$  を以下のように特異値分解して得られるユニタリ行列  $U$  を  $A$  とする

$$S = U \Sigma V^T$$

先に QR 分解を適用し、サイズを小さくすることができる

# 部分空間法の課題

## 空間計算量

一般に,

$$64^3 \leq n \leq 1024^3$$

$$30 \leq r \leq 150$$

- $n = 256^3$ ,  $r = 50$  のとき, 行列  $A$  のために 10GB ほど必要
- 削減後の次元の数に制限.  $r \leq T$
- GPU による高速化が不可能

## 計算時間

- $n \times m$  行列の特異値分解, QR 分解の計算量は  $O(nm^2)$

# 提案手法



- [1] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104):745–762, 1968.
- [2] A. Treuille, A. Lewis, and Z. Popović. Model reduction for real-time fluids. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3):826–834, 2006.
- [3] J. Stam. Stable fluids. In *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings, Annual Conference Series*, pages 121–128, 1999.
- [4] R. Fedkiew, J. Stam, and H. Jensen. Visual simulation of smoke. In *Proceedings of SIGGRAPH 01*, 15–22, 2001.
- [5] T. Kim and J. Delaney. Subspace fluid re-simulation. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4):62:1–62:9, 2013.