

# Föreläsning 1

## Gränsvärden: Definition och räkneregler

Arvid Karlgren

2023-01-19

# 1 Kursens mål

Kursen kommer att hantera följande områden:

1. Kontinuitet
2. Gränsvärden
3. Derivata
4. Funktionsundersökning
5. Primitiva funktioner
6. Integraler

## 2 Gränsvärden

### 2.1 Definition

Gränsvärden handlar om hur en funktion ser ut (vilka värden den antar) när  $x$  närmar sig olika värden. Det finns två typer av gränsvärden.

- Nära (men ej i) en punkt  $a \in \mathbb{R}$ .
- För obegränsat stora positiva eller negativa  $x \in \mathbb{R}$ .

Gränsvärden betecknas med  $\rightarrow$ , till exempel  $x \rightarrow a$  ("x går mot a").

Figur 1 visar några fall där den exakta definitionen av gränsvärden spelar stor roll.

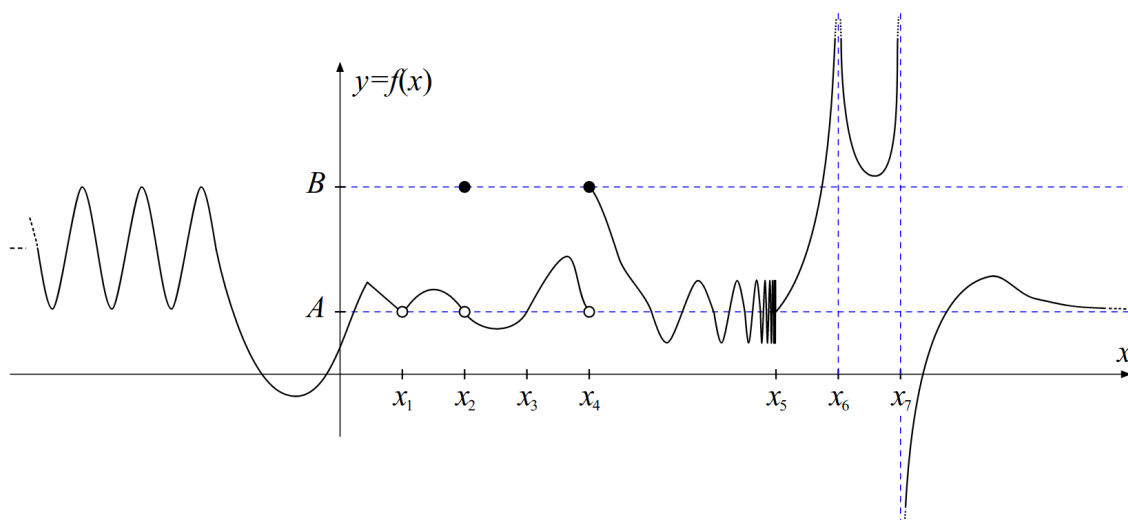


Figure 1: Olika fall för gränsvärden.

Utifrån figur 1 vill vi, utifrån definitionen för gränsvärden, kunna säga följande:

- $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow x_1$ , ( $x_1 \notin D_f$ ), skrivs  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow x_2$ , ( $x_2 \in D_f$ ,  $f(x_2) = B$ ).
- $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow x_3$ , ( $x_3 \in D_f$ ,  $f(x_3) = A$ ).
- $f(x)$  saknar gränsvärden då  $x \rightarrow x_4$  eller  $x \rightarrow x_5$ , skrivs  $\lim_{x \rightarrow x_4} f(x) \nexists$

– Däremot:

$$\lim_{x \rightarrow x_4^-} f(x) = A \quad (\text{Vänstergränsvärde, från vänster})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_4^+} f(x) = B \quad (\text{Högergränsvärde, från höger})$$

- $f(x) \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow x_6$
- $f(x)$  saknar gränsvärde då  $x \rightarrow x_7$
- $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow \infty$
- $f(x)$  saknar gränsvärde då  $x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow a$

**Definition:**

Gränsvärdet för  $x \rightarrow a$  blir  $A$ , dvs.  $\lim_{x \rightarrow a} = A$  om det till varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x) - A| < \epsilon$  om  $x \in D_f$  och  $0 < |x - a| < \delta$  (se figur 2 nedan).

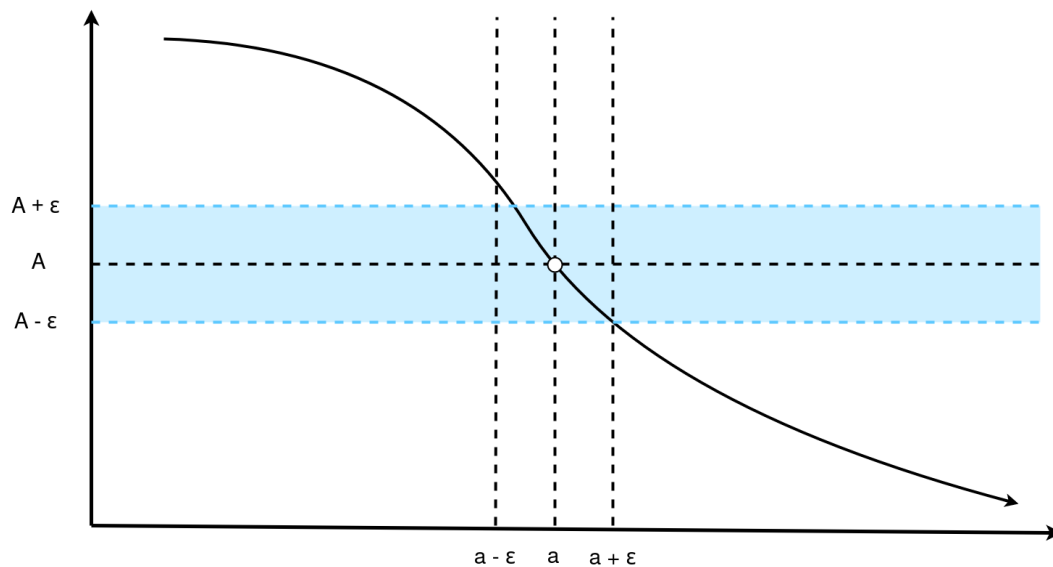


Figure 2: Definition av  $x \rightarrow a$ .

$x \rightarrow \infty$

**Definition:**

Gränsvärdet för  $x \rightarrow \infty$  blir  $A$  om det till varje  $\epsilon > 0$  finns ett  $\omega$  sådant att  $|f(x) - A| < \epsilon$  om  $x \in D_f$  och  $x > \omega$ . **OBS!** krav finns på  $D_f$ , se boken.

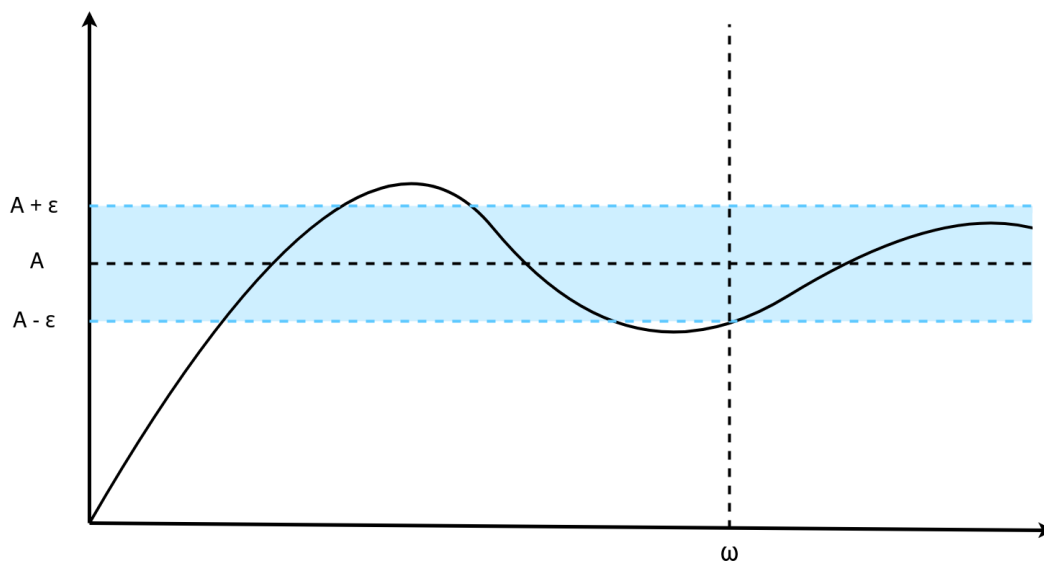


Figure 3: Definition av  $x \rightarrow a$ .

**2.1.1 Exempel 1**

**Visa att  $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$  då  $x \rightarrow a$  och  $a > 0$ .**

Låt  $\epsilon > 0$ . Vi ska hitta passande  $\delta$ .

$$\left| \underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)} - \underbrace{\sqrt{a}}_A \right| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \left| \frac{x-a}{\sqrt{a}} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x-a|$$

så om  $\frac{1}{\sqrt{a}} < |x-a| < \epsilon$ , dvs om  $0 < |x-a| < \epsilon \cdot \sqrt{a}$ , så är  $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$

Vi har alltså till varje  $\epsilon > 0$  hittat ett  $\delta$  ( $\delta = \epsilon \cdot \sqrt{a}$ ) så vi har visat att  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

### 2.1.2 Exempel 2

$\lim_{x \rightarrow \infty}$  existerar ej ty  $\sin(n\pi) = 0$  och  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = 1$ ,  $n \in \mathbb{R}$ .

### 2.1.3 Exempel 3

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$

## 2.2 Räkneregler

- **Sats 1:**  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow a \\ g(x) \text{ är begränsad.} \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow a$ 
  - $A, B \in \mathbb{R}$  och  $a$  kan bytas mot  $a^-, a^+, -\infty, \infty$ .
  - ”Begränsad” innebär att det finns ett stort tal  $C$  sådant att  $|g(x)| < C$  i  $D_g$ .

- **Sats 2:**  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow A \\ g(x) \rightarrow B \end{array} \right. \text{ då } x \rightarrow a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \pm g(x) \rightarrow A \pm B \\ f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B \\ \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B} \text{ endast om } B \neq 0 \end{array} \right.$

- **Sats 3:**  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow A \\ g(x) \rightarrow \infty \end{array} \right. \text{ då } x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ om } A > 0 \\ -\infty \text{ om } A < 0 \text{ då } x \rightarrow a \\ \text{oklart om } A = 0 \end{array} \right.$

- Se även sats 3.3 och 3.4 i boken.

## 2.3 Räkne-exempel

Lösta exempel på lösta gränsvärden enligt teori räkneregler ovan.

### 2.3.1 Exempel 4

Vad blir  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = ?$

Notera att detta gränsvärde är av typen  $\left[\frac{0}{0}\right]$ .

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \xrightarrow{\text{Sats 2}} \frac{1+3}{1+1} = 2 \text{ då } x \rightarrow 1$$

Alltså blir  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

### 2.3.2 Exempel 5

Vad blir  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = ?$

Detta gränsvärde är av typen  $\left[\frac{\infty+\infty}{-\infty}\right]$

$$\frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = \frac{x^2(4-\frac{3}{x})}{x^2(\frac{17}{x^2}-5)} = \frac{4-\frac{3}{x}}{\frac{17}{x^2}-5} \rightarrow \frac{4-0}{+-5} = -\frac{4}{5} \text{ då } x \rightarrow \infty$$

### 2.3.3 Exempel 6

Vad blir  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x^3}{x^2+x} = ?$

$$\frac{x-x^3}{x^2+x} = \frac{x^3(\frac{1}{x^2}-1)}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}}}_{\rightarrow \frac{0-1}{1+0} = -1} \xrightarrow{\text{Sats 3}} -\infty \text{ då } x \rightarrow \infty$$

### 2.3.4 Exempel 7

Vad händer när ett gränsvärde är av typen  $[0 \cdot \infty]$  ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{17}{x^2} \cdot x = \frac{17}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^2 = 17 \rightarrow 17 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^3 = 17x \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

**Svar:** Det beror på.

### 2.3.5 Exempel 8

Vad blir  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2\sin x}{x} = ?$

Notera att sats 2 inte fungerar, eftersom  $2\sin x$  inte har något gränsvärde.

$$\frac{1+2\sin x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{(1+2\sin x)}_{\text{Begränsad}} \xrightarrow{\text{Sats 1}} 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$