Föreläsning 1
Gränsvärden: Definition och räkneregler

Arvid Karlgren

2023-01-16

1 Kursens mål

Kursen kommer att hantera följande områden:

1. Kontinuitet
2. Gränsvärden
3. Derivata
4. Funktionsundersökning
5. Primitiva funktioner
6. Integraler

2 Gränsvärden

2.1 Definition

Gränsvärden handlar om hur en funktion ser ut (vilka värden den antar) när x närmar sig olika värden. Det finns två typer av gränsvärden.

- Nära (men ej i) en punkt $a \in x$.
- För obegränsat stora positiva eller negativa $x \in \mathbb{R}$.

Gränsvärden betecknas med $\to$, till exempel $x \to a$ ("x går mot a").
Figur 1 visar några fall där den exakta definitionen av gränsvärden spelar stor roll.

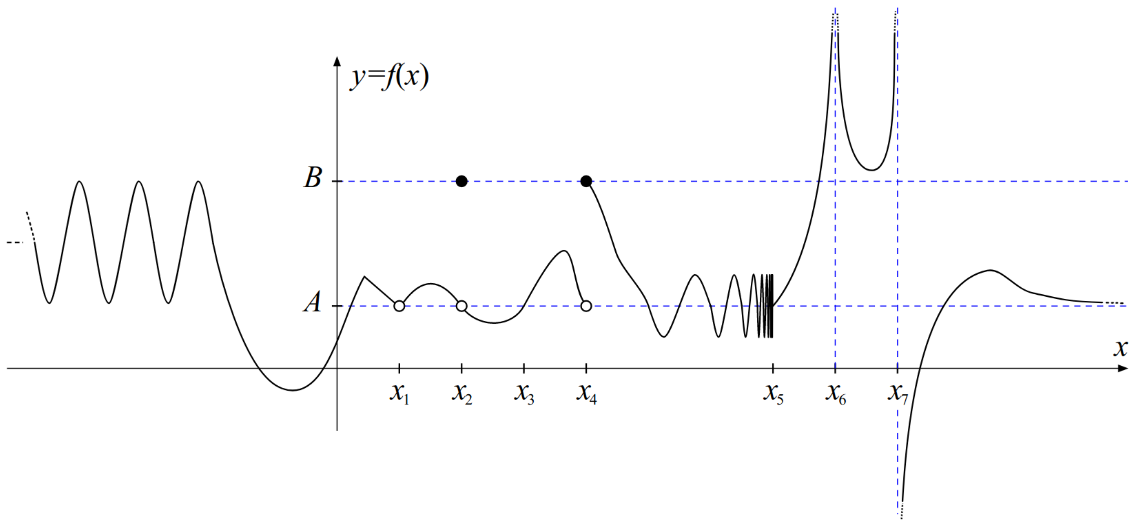

Figure 1: Olika fall för gränsvärden.

Utifrån figur 1 vill vi, utifrån definitionen för gränsvärden, kunna säga följande:

- $f(x) \to A$ då $x \to x_1$, $(x_1 \notin D_f)$, skrivs $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = A$
- $f(x) \to A$ då $x \to x_2$, $(x_2 \in D_f,\ f(x_2) = B)$.
- $f(x) \to A$ då $x \to x_3$, $(x_3 \in D_f,\ f(x_3) = A)$.
- $f(x)$ saknar gränsvärden då $x \to x_4$ eller $x \to x_5$, skrivs $\lim\limits_{x \to x_4} f(x) \nexists$
  - Däremot:

    $\lim\limits_{x \to x_4^-} = A$ (Vänstergränsvärde, från vänster)

    $\lim\limits_{x \to x_4^+} = B$ (Högergränsvärde, från höger)
- $f(x) \to \infty$ då $x \to x_6$
- $f(x)$ saknar gränsvärde då $x \to x_7$
- $f(x) \to A$ då $x \to \infty$
- $f(x)$ saknar gränsvärde då $x \to -\infty$

$\underline{x \to a}$

Definition:

Gränsvärdet för $x \to a$ blir A, dvs. $\lim_{x \to a} = A$ om det till varje $\epsilon < 0$ finns ett $\delta < 0$ sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ om $x \in D_f$ och $0 < |x - a| < \delta$ (se figur 2 nedan).

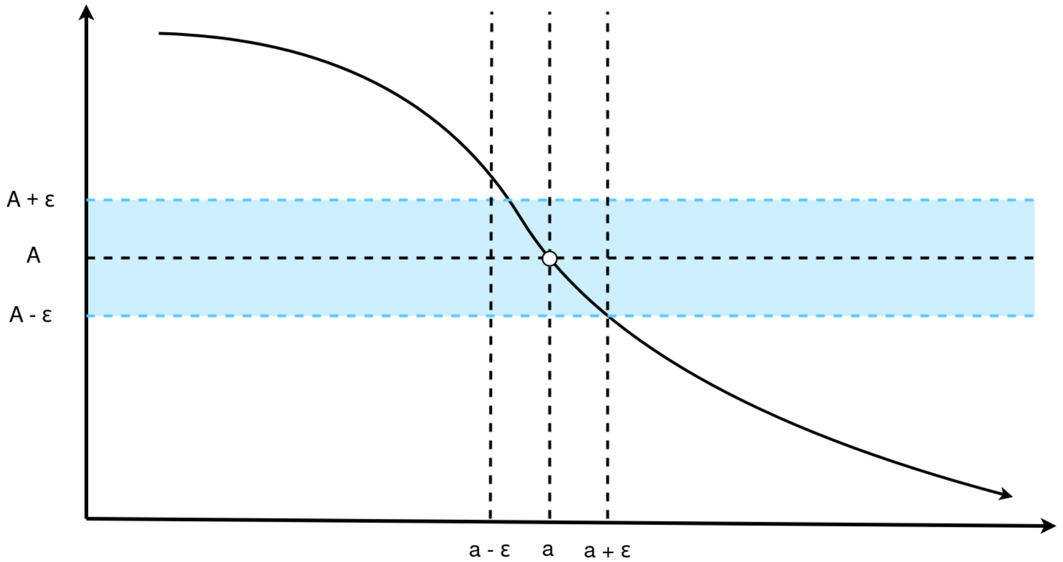

Figure 2: Definition av $x \to a$.

$\underline{x \to \infty}$

Definition:

Gränsvärdet för $x \to \infty$ blir A om det till varje $\epsilon < 0$ finns ett ω sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ om $x \in D_f$ och $x > \omega$. **OBS!** krav finns på D_f, se boken.

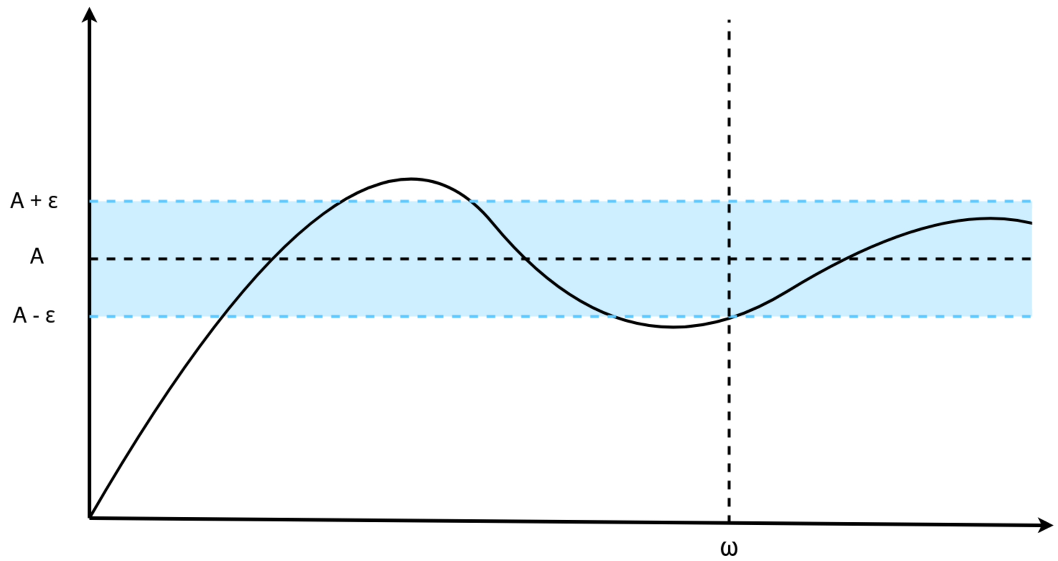

Figure 3: Definition av $x \to a$.

2.1.1 Exempel 1

Visa att $\sqrt{x} \to \sqrt{a}$ då $x \to a$ och $a > 0$.

Låt $\epsilon > 0$. Vi ska hitta passande δ.

$$|\underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)} - \underbrace{\sqrt{a}}_{A}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leq \left|\frac{x-a}{\sqrt{a}}\right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x-a|$$

så om $\frac{1}{\sqrt{a}} < |x-a| < \epsilon$, dvs om $0 < |x-a| < \epsilon \cdot \sqrt{a}$, så är $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$

Vi har alltså till varje $\epsilon < 0$ hittat ett δ ($\delta = \epsilon \cdot \sqrt{a}$) så vo har visat att $\lim\limits_{x\to a} = \sqrt{a}$.

2.1.2 Exempel 2

$\lim\limits_{x\to\infty}$ existerar ej ty $sin(n\pi) = 0$ och $sin\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = 1,\ n \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Exempel 3

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0,\ \ n = 1,\ 2,\ 3...$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty,\ \ n = 1,\ 2,\ 3...$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$

2.2 Räkneregler

- **Sats 1:** $\left\{\begin{array}{l} f(x) \to 0 \text{ då } x \to a \\ \\ g(x) \text{ är begränsad.} \end{array}\right. \quad \Rightarrow\ f(x) \cdot g(x) \to 0 \text{ då } x \to a$
  - $A,\ B \in \mathbb{R}$ och a kan bytas mot $a^-,\ a^+,\ -\infty,\ \infty$.
  - "Begränsad" innebär att det finns ett stort tal C sådant att $|g(x)| < C$ i D_g.
- **Sats 2:** $\left\{\begin{array}{l} f(x) \to A \\ \\ g(x) \to B \end{array}\right. \quad \text{då } x \to a\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \pm g(x) \to A \pm B \\ \\ f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B \\ \\ \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}\ \textbf{endast om}\ B \neq 0 \end{array}\right.$
- **Sats 3:** $\left\{\begin{array}{l} f(x) \to A \\ \\ g(x) \to \infty \end{array}\right. \quad \text{då } x \to a\ \Rightarrow\ f(x) \cdot g(x) \to \left\{\begin{array}{l} \infty \text{ om } A > 0 \\ \\ -\infty \text{ om } A < 0 \text{ då } x \to a \\ \\ \text{oklart om } A = 0 \end{array}\right.$
- Se även sats 3.3 och 3.4 i boken.

2.3 Räkne-exempel

Lösta exempel på lösta gränsvärden enligt teori räkneregler ovan.

2.3.1 Exempel 4

Vad blir $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = ?$

Notera att detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \xrightarrow{\text{Sats 2}} \frac{1+3}{1+1} = 2 \text{ då } x \to 1$$

Alltså blir $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

2.3.2 Exempel 5

Vad blir $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = ?$

Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{\infty+\infty}{-\infty}\right]$

$$\frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = \frac{x^2(4-\frac{3}{x})}{x^2(\frac{17}{x^2}-5)} = \frac{4-\frac{3}{x}}{\frac{17}{x^2}-5} \to \frac{4-0}{+-5} = -\frac{4}{5} \text{ då } x \to \infty$$

2.3.3 Exempel 6

Vad blir $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-x^3}{x^2+x} = ?$

$$\frac{x-x^3}{x^2+x} = \frac{x^3(\frac{1}{x^2}-1)}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}}}_{\to\frac{0-1}{1+0}=-1} \xrightarrow{\text{Sats 3}} -\infty \text{ då } x \to \infty$$

2.3.4 Exempel 7

Vad händer när ett gränsvärde är av typen $[0 \cdot \infty]$?

$$\begin{cases} \frac{17}{x^2} \cdot x = \frac{17}{x} \to 0 \text{ då } x \to \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^2 = 17 \to 17 \text{ då } x \to \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^3 = 17x \to \infty \text{ då } x \to \infty \end{cases}$$

Svar: Det beror på.

2.3.5 Exempel 8

Vad blir $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+2sinx}{x}$?

Notera att sats 2 inte fungerar, eftersom $2sinx$ inte har något gränsvärde.

$$\frac{1+2sinx}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \underbrace{(1+2sinx)}_{\text{Begränsad}} \xrightarrow{\text{Sats 1}} 0 \text{ då } x \to \infty$$