

Föreläsning 1

Gränsvärden: Definition och räkneregler

Arvid Karlgren

2023-01-19

1 Kursens mål

Kursen kommer att hantera följande områden:

1. Kontinuitet
2. Gränsvärden
3. Derivata
4. Funktionsundersökning
5. Primitiva funktioner
6. Integraler

2 Gränsvärden

2.1 Definition

Gränsvärden handlar om hur en funktion ser ut (vilka värden den antar) när x närmar sig olika värden. Det finns två typer av gränsvärden.

- Nära (men ej i) en punkt $a \in x$.
- För obegränsat stora positiva eller negativa $x \in \mathbb{R}$.

Gränsvärden betecknas med \rightarrow , till exempel $x \rightarrow a$ ("x går mot a").

Figur 1 visar några fall där den exakta definitionen av gränsvärden spelar stor roll.

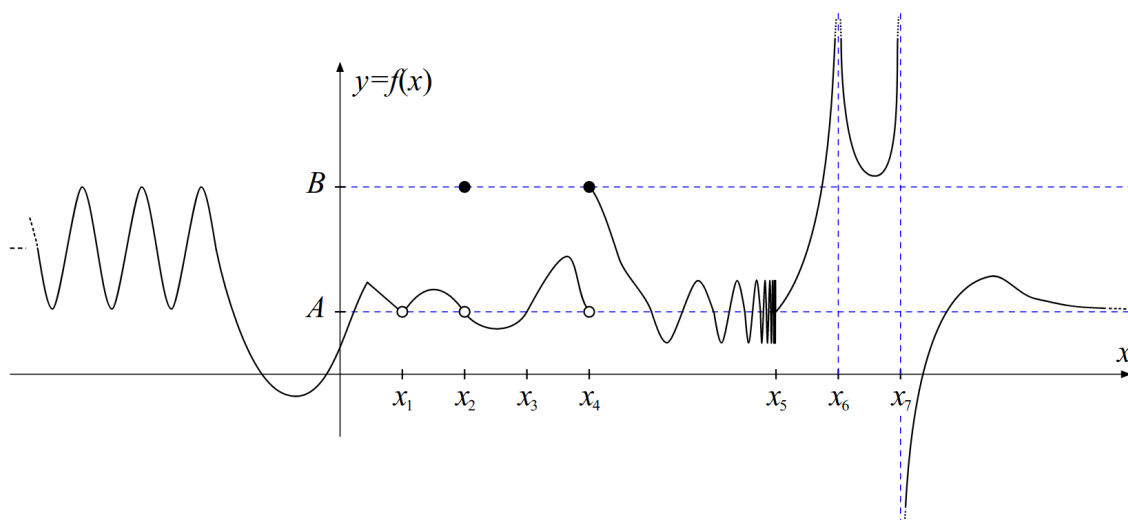


Figure 1: Olika fall för gränsvärden.

Utifrån figur 1 vill vi, utifrån definitionen för gränsvärden, kunna säga följande:

- $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow x_1$, ($x_1 \notin D_f$), skrivs $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = A$
- $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow x_2$, ($x_2 \in D_f$, $f(x_2) = B$).
- $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow x_3$, ($x_3 \in D_f$, $f(x_3) = A$).
- $f(x)$ saknar gränsvärden då $x \rightarrow x_4$ eller $x \rightarrow x_5$, skrivs $\lim_{x \rightarrow x_4} f(x) \nexists$

– Däremot:

$$\lim_{x \rightarrow x_4^-} f(x) = A \quad (\text{Vänstergränsvärde, från vänster})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_4^+} f(x) = B \quad (\text{Högergränsvärde, från höger})$$

- $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow x_6$
- $f(x)$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow x_7$
- $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$
- $f(x)$ saknar gränsvärde då $x \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow a$

Definition:

Gränsvärdet för $x \rightarrow a$ blir A , dvs. $\lim_{x \rightarrow a} = A$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ om $x \in D_f$ och $0 < |x - a| < \delta$ (se figur 2 nedan).

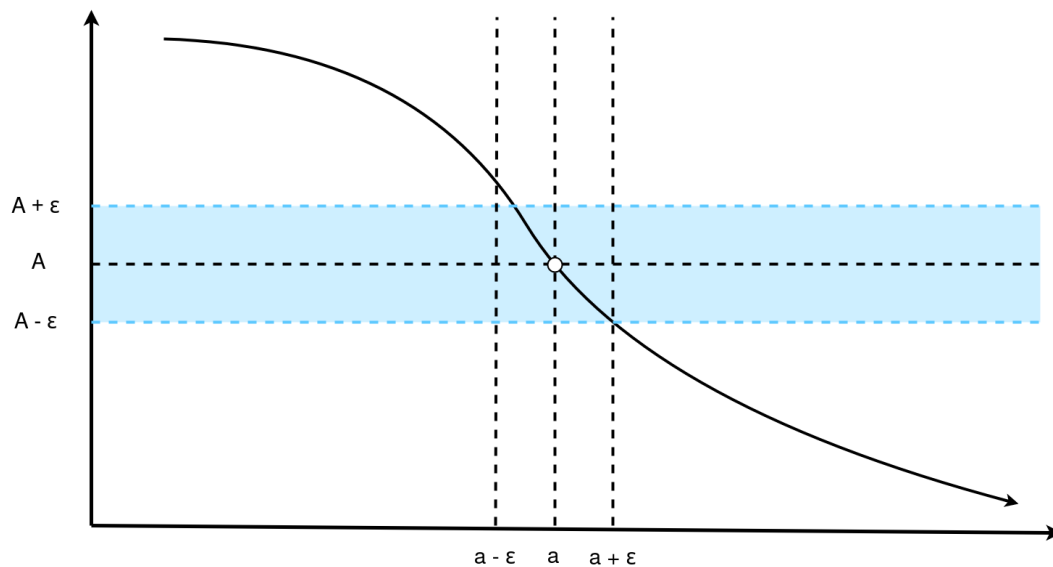


Figure 2: Definition av $x \rightarrow a$.

$x \rightarrow \infty$

Definition:

Gränsvärdet för $x \rightarrow \infty$ blir A om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett ω sådant att $|f(x) - A| < \epsilon$ om $x \in D_f$ och $x > \omega$. **OBS!** krav finns på D_f , se boken.

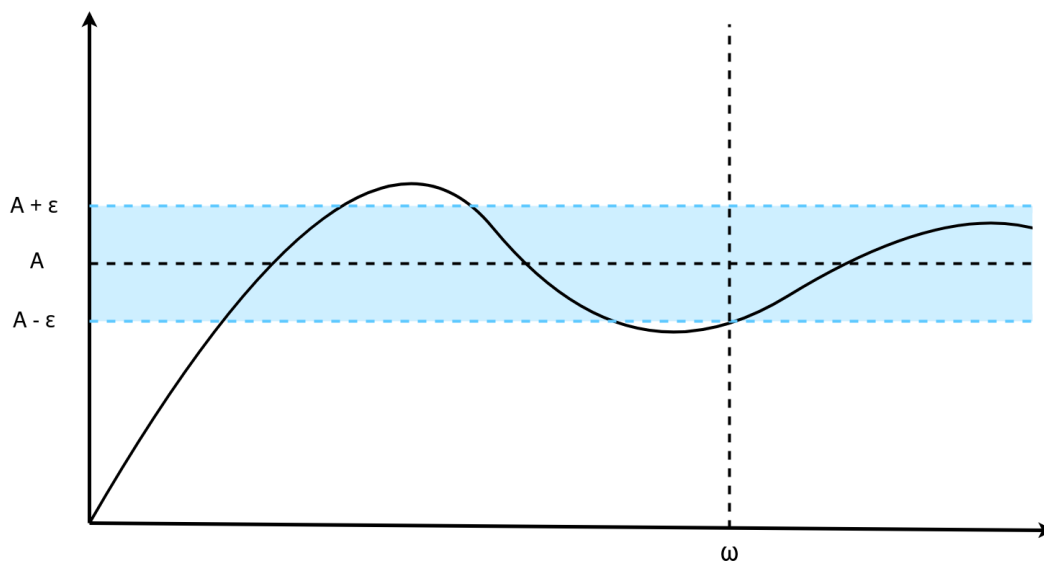


Figure 3: Definition av $x \rightarrow a$.

2.1.1 Exempel 1

Visa att $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$ då $x \rightarrow a$ och $a > 0$.

Låt $\epsilon > 0$. Vi ska hitta passande δ .

$$\left| \underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)} - \underbrace{\sqrt{a}}_A \right| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \leq \left| \frac{x-a}{\sqrt{a}} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x-a|$$

så om $\frac{1}{\sqrt{a}} < |x-a| < \epsilon$, dvs om $0 < |x-a| < \epsilon \cdot \sqrt{a}$, så är $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon$

Vi har alltså till varje $\epsilon > 0$ hittat ett δ ($\delta = \epsilon \cdot \sqrt{a}$) så vi har visat att $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

2.1.2 Exempel 2

$\lim_{x \rightarrow \infty}$ existerar ej ty $\sin(n\pi) = 0$ och $\sin\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = 1$, $n \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Exempel 3

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists$

2.2 Räkneregler

- **Sats 1:** $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow a \\ g(x) \text{ är begränsad.} \end{array} \right. \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow a$
 - $A, B \in \mathbb{R}$ och a kan bytas mot $a^-, a^+, -\infty, \infty$.
 - ”Begränsad” innebär att det finns ett stort tal C sådant att $|g(x)| < C$ i D_g .

- **Sats 2:** $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow A \\ g(x) \rightarrow B \end{array} \right. \text{ då } x \rightarrow a \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) \pm g(x) \rightarrow A \pm B \\ f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B \\ \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B} \text{ endast om } B \neq 0 \end{array} \right.$

- **Sats 3:** $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow A \\ g(x) \rightarrow \infty \end{array} \right. \text{ då } x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ om } A > 0 \\ -\infty \text{ om } A < 0 \\ \text{oklart om } A = 0 \end{array} \right.$

- Se även sats 3.3 och 3.4 i boken.

2.3 Räkne-exempel

Lösta exempel på lösta gränsvärden enligt teori räkneregler ovan.

2.3.1 Exempel 4

Vad blir $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = ?$

Notera att detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$.

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \xrightarrow{\text{Sats 2}} \frac{1+3}{1+1} = 2 \text{ då } x \rightarrow 1$$

Alltså blir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

2.3.2 Exempel 5

Vad blir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = ?$

Detta gränsvärde är av typen $\left[\frac{\infty+\infty}{-\infty}\right]$

$$\frac{4x^2-3x}{17-5x^2} = \frac{x^2(4-\frac{3}{x})}{x^2(\frac{17}{x^2}-5)} = \frac{4-\frac{3}{x}}{\frac{17}{x^2}-5} \rightarrow \frac{4-0}{+-5} = -\frac{4}{5} \text{ då } x \rightarrow \infty$$

2.3.3 Exempel 6

Vad blir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x^3}{x^2+x} = ?$

$$\frac{x-x^3}{x^2+x} = \frac{x^3(\frac{1}{x^2}-1)}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x}}}_{\rightarrow \frac{0-1}{1+0} = -1} \xrightarrow{\text{Sats 3}} -\infty \text{ då } x \rightarrow \infty$$

2.3.4 Exempel 7

Vad händer när ett gränsvärde är av typen $[0 \cdot \infty]$?

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{17}{x^2} \cdot x = \frac{17}{x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^2 = 17 \rightarrow 17 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \frac{17}{x^2} \cdot x^3 = 17x \rightarrow \infty \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Svar: Det beror på.

2.3.5 Exempel 8

Vad blir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2\sin x}{x} = ?$

Notera att sats 2 inte fungerar, eftersom $2\sin x$ inte har något gränsvärde.

$$\frac{1+2\sin x}{x} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{(1+2\sin x)}_{\text{Begränsad}} \xrightarrow{\text{Sats 1}} 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$