



مدارهای منطقی

نیمسال دوم ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مهلت ارسال: ۱۴۰۴ جمعه ۵ اردیبهشت

تمرین پنج

به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخنامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نامگذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

- ۱- ۲(نمره) با استفاده از یک ROM چهار ورودی یک مدار جمع‌کننده دو بیتی بسازید.

a_1	a_0	b_1	b_0	C_{out}	S_1	S_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

پاسخ:

جدول درستی این مدار مطابق جدول رویه‌رو است. a_1, a_0, b_1, b_0 و C_{out}, S_1, S_0 خروجی‌های آن هستند.

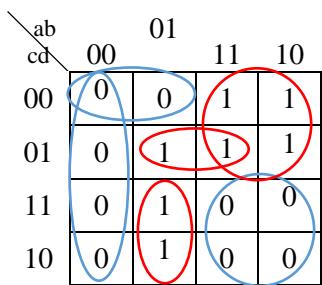
- ۲- ۳(نمره) سهتابع زیر را با استفاده از کوچکترین PLA ممکن بسازید. فرض کنید در خروجی PLA گیتهای XOR ای وجود دارند که می‌توانند در صورت نیاز، مکمل تابع ساخته شده را تولید کنند.

$$f(a, b, c, d) = \sum m(5, 6, 7, 8, 9, 12, 13)$$

$$g(a, b, c, d) = \sum m(4, 5, 10, 11, 14, 15)$$

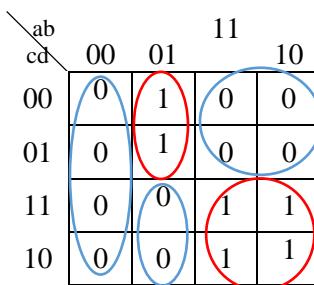
$$h(a, b, c, d) = \sum m(5, 6, 7, 13, 14, 15)$$

پاسخ:



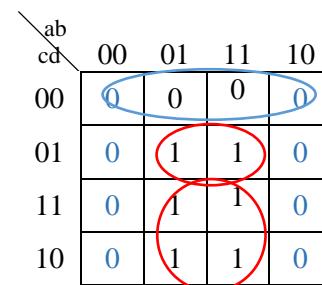
$$f = ac' + bc'd + a'b'c$$

$$f' = a'b + a'c'd' + ac$$



$$g = a'b + ac$$

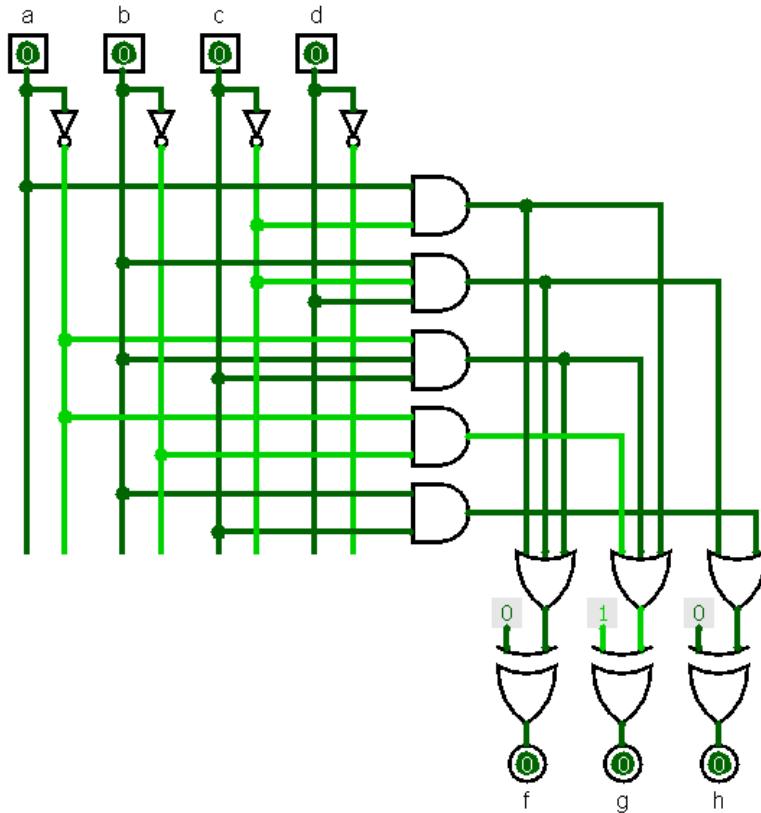
$$g' = a'b' + a'bc + ac'$$



$$h = bc'd + bc$$

$$h' = b' + c'd'$$

با توجه به مقادیر ساده شده توابع، می بینیم که اگر f و g' و h را بسازیم، به ساده ترین PLA نیاز خواهیم داشت.



-۳ (۳ نمره) تابع زیر را به کمک کوچکترین و ساده ترین OR-AND PAL بسازید. منظور این است که ابتدا یک آرایه برنامه پذیر از گیت های OR داریم که خروجی آنها وارد یک آرایه ثابت از AND ها می شود.

$$F_1 = \prod M(0,1,2,5,9,12)$$

$$F_2 = \prod M(3,6,7,8,9,12,14,15)$$

پاسخ:

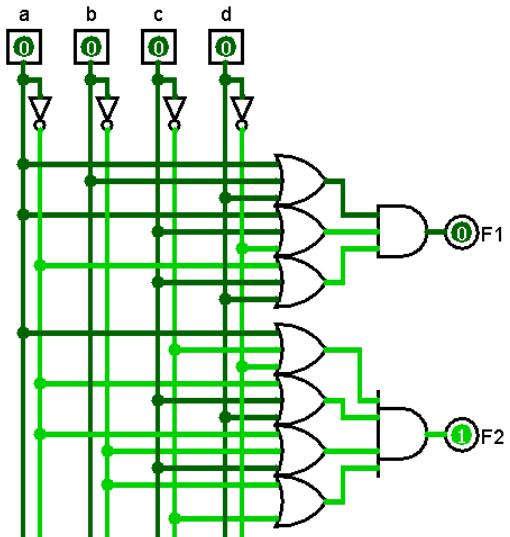
دو تابع را به صورت POS ساده می کنیم و آنها را با یک OR-AND-PAL می سازیم.

ab	00	01	11	10
cd	00		0	
00	0			
01	0	0		0
11				
10	0			

ab	00	01	11	10
cd	00		0	0
00	0			
01	0	0		0
11	0	0	0	
10	0	0	0	

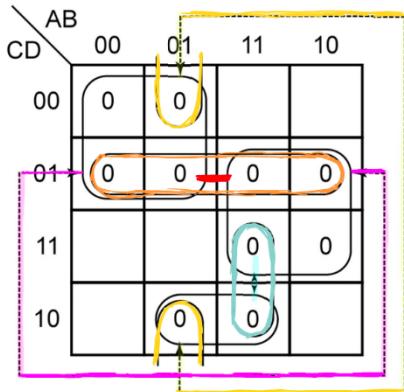
$$F_1 = (a + b + d)(a + c + d') \\ (b + c + d')(a' + b' + c + d')$$

$$F_2 = (b' + c')(a + c' + d') \\ (a' + c + d)(a' + b' + c)$$



۴- (۲ نمره) با رسم جدول کارنو برایتابع زیر مدار را طوری تغییر دهید که مخاطره پنهان نداشته باشد.

$$F = (A + C)(\bar{A} + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + D)$$



پاسخ:

با توجه به جدول کارنو، باید سه عبارت اضافه کنیم و تابع را به شکل زیر بنویسیم:

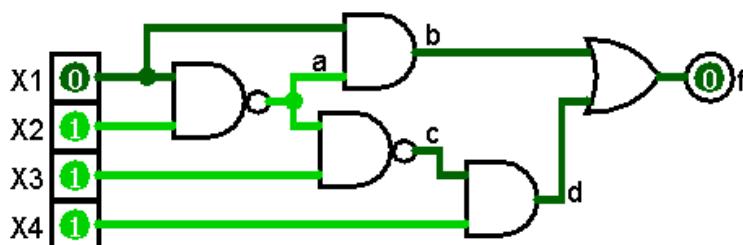
$$F = (A + C)(\bar{A} + \bar{D})(\bar{B} + \bar{C} + D)$$

۵- (۳ نمره) مدار زیر را در نظر بگیرید. با فرض اینکه همه گیت‌ها d واحد زمانی تاخیر داشته باشند، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف- مسیر بحرانی را مشخص کرده و تاخیر آن را محاسبه کنید.

ب- فرض کنید در ابتدا ورودی x_1 صفر و بقیه ورودی‌ها یک باشند. اگر در زمان t مقدار x_1 از صفر به یک تغییر کند، نمودار سیگنال‌های a, b, c, d و f را بر حسب زمان رسم کنید.

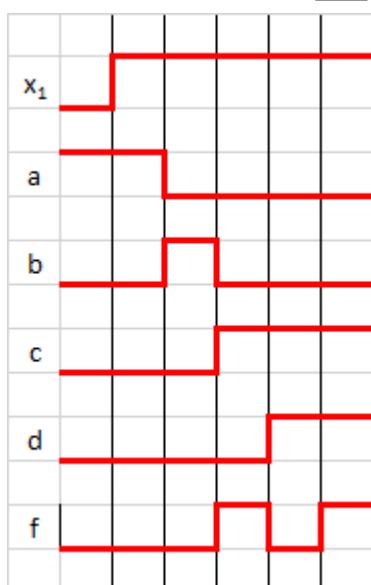
ج- با توجه به نموداری که برای سیگنال f در بند ب رسم کردید، بگویید که چه نوع مخاطره‌ای در این مدار رخداده است و برای جلوگیری از آن چه کاری می‌توان انجام داد؟



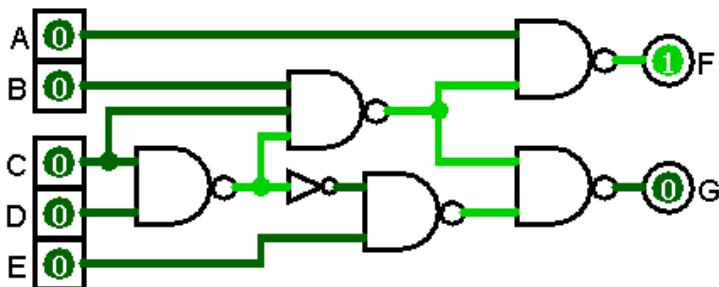
پاسخ:

مسیر بحرانی از x_1 و x_2 و از طریق دو گیت NAND، یک گیت AND و یک گیت OR به خروجی می‌رسد و تأخیر آن $4d$ است.

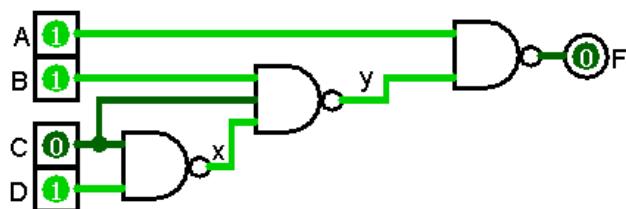
با رسم نمودار زمانی می‌بینیم مخاطره‌ای که در مدار وجود دارد از نوع دینامیک است و منشاء آن این است که ورودی x_1 از دو مسیر به b می‌رسد. بنابراین برای رفع آن باید کاری کنیم که با تغییر x_1 مقدار b تغییر نکند. بنابراین می‌توانیم \bar{x}_2 را به ورودی گیت AND ای که b را تولید می‌کند بدهیم.



۶- (۴ نمره) در مدار شکل زیر همه مخاطرات پنهان را پیدا کنید. سپس معادلات خروجی F و G را ساده کنید و اگر مخاطرهای باقی مانده است، آن را برطرف کنید.



پاسخ:



دو خروجی F و G را جداگانه بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که ورودی‌های A، B و D تنها از یک مسیر روی F اثر دارند، بنابراین نمی‌توانند مخاطرهای ایجاد کنند. اما ورودی C از دو مسیر به F می‌رسد. اگر بقیه ورودی‌ها یک و C صفر باشد، مدار به شکل رویه رو خواهد بود.

در ابتدا زمانی که C=0 باشد، x و y هر دو یک هستند. اگر C از صفر به یک تبدیل شود و با فرض این که تأخیر هر گیت را یک واحد زمانی درنظر بگیریم، تغییرات سایر نقاط مدار به این شکل خواهد بود:

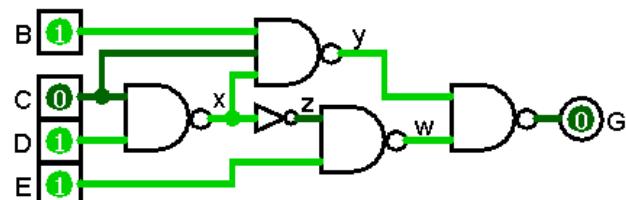
$$t = 0: \quad C: 0 \rightarrow 1$$

$$t = 1: \quad x: 1 \rightarrow 0, \quad y: 1 \rightarrow 0$$

$$t = 2: \quad y: 0 \rightarrow 1, \quad F: 0 \rightarrow 1$$

$$t = 3: \quad F: 1 \rightarrow 0$$

بنابراین F برای یک واحد زمانی یک و دوباره صفر می‌شود.



ورودی‌های B و E فقط از یک مسیر به G می‌رسند، اما هر کدام از دو ورودی C و B ممکن است مخاطره ایجاد کنند. شکل رویه رو حالتی را نشان می‌دهد که C=0 و بقیه ورودی‌ها یک باشند.

باز فرض می‌کنیم C در زمان t=0 از صفر به یک تبدیل شود:

$$t = 0: \quad C: 0 \rightarrow 1$$

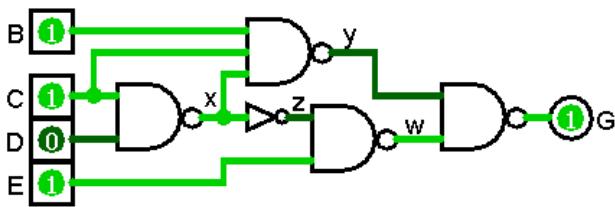
$$t = 1: \quad x: 1 \rightarrow 0, \quad y: 1 \rightarrow 0$$

$$t = 2: \quad y: 0 \rightarrow 1, \quad z: 0 \rightarrow 1, \quad G: 0 \rightarrow 1$$

$$t = 3: \quad G: 1 \rightarrow 0, \quad w: 1 \rightarrow 0$$

$$t = 4: \quad G: 0 \rightarrow 1$$

بنابراین G یک بار یک شده، دوباره صفر و بار دیگر یک می‌شود.



این بار فرض می‌کنیم که $D=0$ و بقیه ورودی‌ها یک باشند. شکل مدار به صورت رو به رو خواهد بود.

فرض می‌کنیم D در زمان $t=0$ از صفر به یک تبدیل شود:

$$t = 0: D: 0 \rightarrow 1$$

$$t = 1: x: 1 \rightarrow 0$$

$$t = 2: z: 0 \rightarrow 1, \quad y: 0 \rightarrow 1$$

$$t = 3: w: 1 \rightarrow 0, \quad G: 1 \rightarrow 0$$

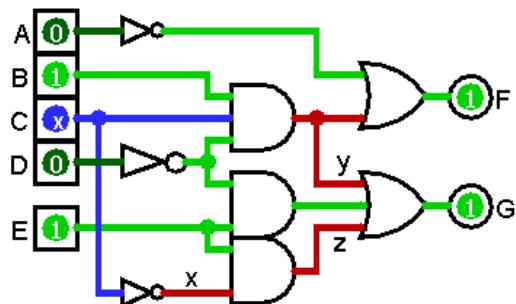
$$t = 4: G: 0 \rightarrow 1$$

بنابراین G برای یک واحد زمانی صفر و دوباره یک می‌شود.

حالا معادلات F و G را ساده می‌کنیم و یک بار دیگر مدار را رسم کرده و تحلیل می‌کنیم.

$$F = (A.y)' = A' + y' = A' + BCx = A' + BC(CD)' = A' + BC(C' + D') = A' + BCD'$$

$$G = (y.w)' = y' + w' = BCx + Ex = BC(CD)' + E(CD)' = BCD' + C'E + D'E$$



می‌بینیم که F مخاطره‌ای ندارد چون هیچ‌کدام از ورودی‌ها با بیش از یک مسیر به F نمی‌رسند.

درباره G می‌بینیم که ورودی C از دو مسیر به G می‌رسد، اما تغییر در این ورودی تأثیری روی G ندارد چون در شرایطی که $D' = E = 1$ باشد (که بتواند تأثیرگذار شود)، مقدار $D'E$ یک است و بنابراین مقدار G هم علی‌رغم تغییر C یک باقی می‌ماند.

	BC	DE	00	01	11	10
00						
01	1	1	1	1		
11	1				1	
10						

با توجه به این که مدار حاصل SOP است، نبودن مخاطره را از روی جدول کارنو هم می‌توان بررسی کرد.

۷- (۳ نمره) می‌خواهیم برای تشخیص و اصلاح خطای تک‌بیتی در یک مجموعه داده ۱۱ بیتی از کد همینگ استفاده کنیم. به این منظور باید چهار بیت توازن P1، P2، P4 و P8 را به مجموعه بیت‌های اصلی اضافه کنیم.

الف- روابط این چهار بیت توازن را بر حسب بیت‌های داده X3، X5، X6، X7، X9، X10، X11، X12، X13 و X15 بنویسید.

ب- با فرض فقط یک بیت خطای اگر رشته‌ای با این روش کد شود و به صورت ۱۱۰۰۱۰۱۰۱۱۰۱۱۰۱۱۰ دریافت شود، درست دریافت شده یا خطای دارد؟ توضیح دهید.

پاسخ:

$$P_1 = XOR(X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}, X_{13}, X_{15})$$

$$P_2 = XOR(X_3, X_6, X_7, X_{10}, X_{11}, X_{14}, X_{15})$$

$$P_4 = XOR(X_5, X_6, X_7, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15})$$

$$P_8 = XOR(X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15})$$

شماره بیت‌های عدد دریافتی به این شکل است:

$$P_1 = 1, P_2 = 1, X_3 = 0, P_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0, X_7 = 1, P_8 = 0,$$

$$X_9 = 0, X_{10} = 1, X_{11} = 1, X_{12} = 0, X_{13} = 1, X_{14} = 1, X_{15} = 0$$

برای بررسی صحت دریافت، باید عملیات زیر را انجام دهیم:

$$XOR(P_1, X_3, X_5, X_7, X_9, X_{11}, X_{13}, X_{15}) = XOR(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) = 1$$

$$XOR(P_2, X_3, X_6, X_7, X_{10}, X_{11}, X_{14}, X_{15}) = XOR(1, 0, 0, 1, 1, 1, 0) = 1$$

$$XOR(P_4, X_5, X_6, X_7, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}) = XOR(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) = 0$$

$$XOR(P_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}) = XOR(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) = 0$$

با توجه به عدد به دست آمده، X3 اشتباه است، بنابراین عدد ارسال شده برابر بوده با:

$--1 - 101 - 0110110$