



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخنامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نامگذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

- ۱- ۴ نمره) عبارت‌های زیر را با استفاده از قوانین جبر بول ساده کنید.

a. $A\bar{B} \oplus BC$
b. $\overline{(A\bar{B} + ABC)} + A(B + A\bar{B})$

پاسخ:

a.

$$\begin{aligned} A\bar{B} \oplus BC &= (A\bar{B} \cdot \overline{BC}) + (\overline{A\bar{B}} \cdot BC) = A\bar{B}(\bar{B} + \bar{C}) + (\bar{A} + B)BC = A\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + BC \\ &= A\bar{B} + BC \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \overline{(A\bar{B} + ABC)} + A(B + A\bar{B}) &= \overline{(\bar{A} + B)(ABC)} + (AB + A\bar{B}) \\ &= \overline{(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}) + A(B + \bar{B})} = \overline{(\bar{A} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + B\bar{A} + B\bar{C}) + A} \\ &= \overline{\bar{A} \cdot (1 + \bar{B} + \bar{C} + B) + B\bar{C}} + A = \overline{\bar{A} + B\bar{C} + A} = \overline{(\bar{A} + A) + B\bar{C}} \\ &= \overline{1 + B\bar{C}} = \overline{1} = 0 \end{aligned}$$

- ۲- ۴ نمره) کدام یک از توابع زیر می‌تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند. علت پاسخ خود را به طور مختصر شرح دهید.

الف - $g(x, y) = \bar{x} + \bar{y}$

ب - $f(x, y, z) = \bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z})$

پاسخ:

الف- این تابع یک منطق کامل است چون می‌توانیم NOT و OR را با آن بسازیم:

$$g(x, x) = \bar{x} + \bar{x} = \bar{x}$$

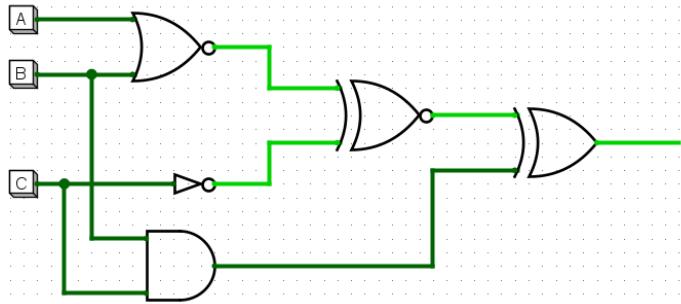
$$g(g(x, x), g(y, y)) = g(\bar{x}, \bar{y}) = x + y$$

ب- این تابع یک منطق کامل است چون می‌توانیم NOT و AND را با آن بسازیم:

$$f(x, x, x) = \bar{x} \cdot (\bar{x} + \bar{x}) = \bar{x}$$

$$f(f(x, x, x), f(y, y, y), f(y, y, y)) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) = x \cdot (y + y) = x \cdot y$$

۳- (۳ نمره) مدار زیر را در نظر بگیرید:



الف- خروجی این مدار را بر حسب ورودی‌های آن بنویسید.

ب- جواب به دست آمده در بخش الف را تا حد امکان ساده کنید به صورتی که با سه گیت قابل پیاده‌سازی باشد.

ج- اگر گیت XNOR داخل مدار را به XOR تغییر دهیم، در خروجی مدار چه تغییراتی ایجاد می‌شود.

پاسخ:

-الف-

$$((\bar{A} + \bar{B}) \odot \bar{C}) \oplus B \cdot C$$

-ب-

$$\begin{aligned} & ((\bar{A} + \bar{B}) \odot \bar{C}) \oplus B \cdot C \\ &= (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + (\bar{A} + \bar{B}) \cdot C) \oplus B \cdot C \\ &= (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AC + BC) \oplus B \cdot C \\ &= (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AC + BC) \cdot (\bar{B} + \bar{C}) + (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + AC + BC) \cdot BC \\ &= (\bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C) + (A + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{C}) \cdot (\bar{B} + \bar{C}) \cdot BC \\ &= (\bar{A}\bar{C} + AC)\bar{B} + (ABC + BC)(\bar{A}\bar{B} + \bar{C}) \\ &= \bar{B}(A \odot C) \end{aligned}$$

ج- خروجی این مدار مکمل می‌شود.

اگر فرض کنیم عبارت سمت چپ XOR در عبارت اولیه برابر با Z است، خروجی برابر است با $Z \oplus B \cdot C$ حال اگر

XOR به \bar{Z} تبدیل شود به این معنا است که Z به \bar{Z} تبدیل شده است، یعنی خروجی برابر شده با $C \oplus B \cdot C$

وقتی یکی از ورودی‌های تابع XOR مکمل شود، کل تابع مکمل می‌شود.

بنابراین، خروجی برابر خواهد شد با:

$$f = \overline{\bar{B}(A \odot C)} = B + (A \oplus C)$$

۴- (۴ نمره) بدون رسم جدول درستی و با استفاده از جبر بول، وجود خاصیت شرکت‌پذیری را در مورد توابع NAND،

XOR و NOR بررسی کنید.

(راهنمایی: در هر مورد بررسی کنید آیا $f(f(x, f(y, z))) = f(f(x, y), z) = f(x, y, z)$ است).

پاسخ:

:NAND تابع

$$(a \uparrow b) \uparrow c = \overline{(ab)} \uparrow c = ab + \bar{c}$$

$$a \uparrow (b \uparrow c) = a \uparrow \overline{(bc)} = \bar{a} + bc$$

دو عبارت بالا معادل نیستند (مثلا در حالت $abc = 110$ خاصیت NAND شرکت‌پذیری ندارد).

تابع :NOR

$$(a \downarrow b) \downarrow c = \overline{(a + b)} \downarrow c = (a + b). \bar{c} = a\bar{c} + b\bar{c}$$

$$a \downarrow (b \downarrow c) = a \downarrow \overline{(b + c)} = \bar{a}. (b + c) = \bar{a}b + \bar{a}c$$

دو عبارت بالا معادل نیستند (مثلا در حالت $abc = 011$ خاصیت NOR شرکت‌پذیری ندارد).

تابع :XOR

$$(a \oplus b) \oplus c = (a \oplus b). \bar{c} + (a \odot b). c = (a\bar{b} + \bar{a}b). \bar{c} + (ab + \bar{a}\bar{b}). c$$

$$= a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}c$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a. (b \odot c) + \bar{a}. (b \odot c) = a. (bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a}. (b\bar{c} + \bar{b}c)$$

$$= abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

خروجی تابع XOR زمانی یک است که تعداد فردی از ورودی‌های آن یک باشند، بنابراین:

$$XOR(a, b, c) = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

از برابری سه عبارت بالا نتیجه می‌گیریم که تابع XOR خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

تابع :XNOR

$$(a \odot b) \odot c = (a \odot b). c + (a \oplus b). \bar{c} = (ab + \bar{a}\bar{b}). c + (a\bar{b} + \bar{a}b). \bar{c}$$

$$= abc + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$$

$$a \odot (b \odot c) = a. (b \odot c) + \bar{a}. (b \oplus c) = a. (bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a}. (b\bar{c} + \bar{b}c)$$

$$= abc + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$$

خروجی تابع XNOR زمانی یک است که تعداد زوجی از ورودی‌های آن یک باشند، بنابراین:

$$XNOR(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c}$$

می‌بینیم دو عبارت اول معادل عبارت سوم نیستند (کاملاً نقیض یکدیگرند). بنابراین تابع XNOR خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

- (۲ نمره) بررسی کنید که آیا دو طرف معادلات زیر همواره با یکدیگر برابر هستند یا خیر.

a. $\bar{A}C + AB + \bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B} + BC + A\bar{C}$

b. $B + \bar{A}C + A\bar{B} = A + B + C$

پاسخ:

a. $\bar{A}C + AB + \bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} =$
 $\bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + (\bar{A} + A)BC + AC(\bar{B} + B) = \bar{A}\bar{B} + BC + A\bar{C}$

b. $B + \bar{A}C + A\bar{B} = B(\bar{A} + A) + \bar{A}C + A\bar{B}$

$= B\bar{A} + BA + \bar{A}C + A\bar{B} = A + B\bar{A} + \bar{A}C$

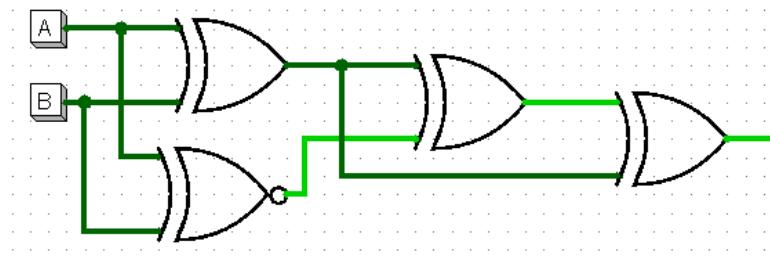
$= A + \bar{A}(B + C) = A + B + C$

۶- (۳ نمره) با توجه به مدار زیر به این سوالات پاسخ دهید.

الف- تابع خروجی این مدار را بر حسب ورودی‌های نوشته و با استفاده از قوانین جبر بول تا حد امکان ساده کنید.

ب- مدار ساده شده بخش الف را رسم کنید.

ج- اگر گیت OR را با XNOR جایگزین کنیم آیا تغییری در خروجی مدار ایجاد می‌شود؟ اگر آن را با XNOR جایگزین کنیم چطور؟ توضیح دهید.



پاسخ:

-الف-

$$f = ((A \oplus B) \oplus (A \odot B)) \oplus (A \oplus B)$$

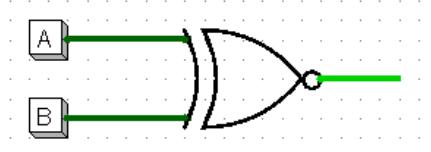
$$\text{if } Z = (A \oplus B) \text{ then } f = (Z \oplus \bar{Z}) \oplus Z$$

$$Z \oplus \bar{Z} = 1$$

$$1 \oplus Z = \bar{Z}$$

$$f = ((A \oplus B) \oplus (A \odot B)) \oplus (A \oplus B) = A \odot B$$

-ب-



ج- با جایگزین کردن این گیت با OR:

$$f_{OR} = ((A \oplus B) \oplus (A + B)) \oplus (A \oplus B) = ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B)) \oplus (A + B) = 0 \oplus (A + B) = A + B$$

با جایگزین کردن این گیت با AND:

$$f_{AND} = ((A \oplus B) \oplus AB) \oplus (A \oplus B) = ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B)) \oplus AB = 0 \oplus AB = AB$$

بنابراین در هر دو حالت خروجی تغییر می‌کند.