



## مدارسای منطقی

اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۲۰ دقیقه

## آزمون میان ترم اول

۱- (۳ نمره) فرض کنید  $A = 01000101$  و  $B = 10010111$ . در هر یک از سه حالت زیر  $A + B$  را محاسبه کنید و نتیجه را در مبنای ده نمایش دهید.

- الف- اگر دو عدد بدون علامت باشند.
- ب- اگر دو عدد به صورت مکمل دو نمایش داده شده باشند.
- ج- اگر دو عدد به صورت BCD نمایش داده شده باشند.

پاسخ:  
الف-

$$A = (01000101)_2 = (1 + 4 + 64)_{10} = (69)_{10}$$

$$B = (10010111)_2 = (1 + 2 + 4 + 16 + 128)_{10} = (151)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 01000101 + \\ 10010111 \\ \hline 11011100 \end{array}$$

$$A + B = (11011100)_2 = (220)_{10} = (69 + 151)_{10} \checkmark$$

ب-

$$A = (01000101)_2 = (1 + 4 + 64)_{10} = (69)_{10}$$

$$B = (10010111)_2 = -(01101001)_2 = -(105)_{10}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 01000101 + \\ 10010111 \\ \hline 11011100 \end{array}$$

$$A + B = (11011100)_2 = -(00100100)_2 = -(36)_{10}$$

$$= (69 - 105)_{10} \checkmark$$

ج-

$$A = (0100\ 0101)_2 = (45)_{BCD}$$

$$B = (1001\ 0111)_2 = (97)_{BCD}$$

$$A + B = (1\ 0100\ 0010)_2 = (142)_{BCD} = (45 + 97)_{BCD} \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 0100\ 0101 + \\ 1001\ 0111 \\ \hline \boxed{1101\ 1100} + \\ \quad \boxed{0110} \\ \quad 1\ 0010 \\ \hline 0110 \\ \hline 1\ 0100 \end{array}$$

بارمبندي:

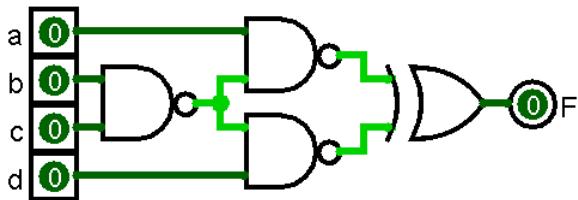
هر بند یک نمره.

جمع صحیح دو عدد و نمایش نتیجه به باینری: ۵،۰

نتیجه به باینری: ۰،۲۵

نتیجه به دهدهی: ۰،۲۵

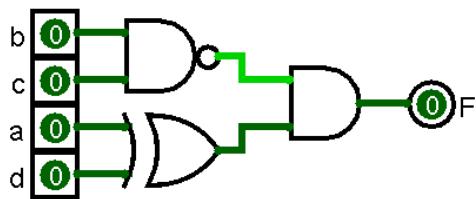
۲- (۲ نمره) مدار شکل زیر را به کمک قوانین جبر بول طوری ساده کنید که فقط با سه گیت دو ورودی قابل ساخت باشد.



پاسخ:

$$\begin{aligned}
 F &= (a \cdot (b \cdot c)'')' \oplus (d \cdot (b \cdot c)')' = (a' + bc) \oplus (d' + bc) \\
 &= ((a' + bc) + (d' + bc))((a' + bc)' + (d' + bc)') = (a' + d' + bc)(a(bc)' + d(bc)') \\
 &= (a' + d' + bc)(bc)'(a + d) = (a' + d')(bc)'(a + d) = (a \oplus d) \cdot (bc)'
 \end{aligned}$$

بنابراین همان مدار را می‌توانیم با سه گیت دو ورودی بسازیم:



بارمبندي:

اگر به نتیجه اشتباه رسیده‌اند، از هر جا که اشتباه بوده، متناسب با کل راه حل نمره کم شود.

اگر همه راه حل درست است اما نتیجه را با سه گیت نشان نداده‌اند، ۵+ نمره کم شود.

-۳ (۲ نمره) تابع زیر را به صورت جمع ضرب‌ها (SOP) ساده کنید.

$$f(a, b, c, d, e) = \prod M(0, 1, 6, 8, 9, 14, 16, 17, 26, 27, 31), d(4, 12, 24, 25, 30)$$

		a=0				
		bc	00	01	11	10
de	00	0	x	x	0	
	01	0	1	1	0	
11	1	1	1	1		
	10	1	0	0	1	

		a=1				
		bc	00	01	11	10
de	00	0	1	1	x	
	01	0	1	1	x	
11	1	1	0	0		
	10	1	1	x	0	

$$F = a'c'd + ab'd + cd' + a'de$$

$$F = a'c'd + ab'd + cd' + a'ce$$

پاسخ:

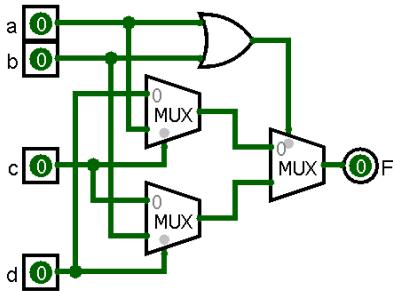
بارمبنده:

اگر تابع را اشتباه در جدول وارد کرده‌اند، اما با همان اشتباه به پاسخ درست رسیده‌اند، ۵، ۰ نمره کم شود.

به ازای هر جمله ضربی که می‌شده بزرگتر درنظر بگیرند، ۵، ۰ نمره کم شود.

به ازای هر جمله‌ای که جا افتاده، ۵، ۰ نمره کم شود.

۴- (۳ نمره) تابع  $F$  را در شکل زیر به صورت SOP ساده کنید و سپس آن را با استفاده از یک مالتی‌پلکسر چهار به یک بسازید.



پاسخ:

$$\begin{aligned} F &= (a+b)'I_0 + (a+b)I_1 = (a'b')(c'd + ac) + (a+b)(cd' + bd) \\ &= a'b'c'd + acd' + abd + bcd' + bd \end{aligned}$$

حال می‌توانیم این عبارت را با جدول کارنو ساده کنیم:

ab	cd	00	01	11	10
00					
01	1	1	1		
11		1	1		
10		1	1	1	

$$F = a'c'd + bcd' + bd + bc$$

اگر بخواهیم این تابع را با یک مالتی‌پلکسر چهار به یک بسازیم، می‌توانیم ورودی‌های  $c$  و  $d$  را به ورودی‌های انتخاب بدهیم و مقادیر زیر را به ورودی‌های داده وصل کنیم:

$$I_0 = 0 \quad I_1 = a' + b \quad I_2 = a + b \quad I_3 = b$$

بارمبندي:

بخش اول، ساده کردن به صورت SOP:

اگر تابع را اشتباہ در جدول وارد کرده‌اند، اما با همان اشتباہ به پاسخ درست رسیده‌اند، ۵، ۰ نمره کم شود.

به ازای هر جمله ضربی که می‌شده بزرگتر در نظر بگیرند، ۵، ۰ نمره کم شود.

به ازای هر جمله‌ای که جا افتاده، ۵، ۰ نمره کم شود.

بخش دوم، ساخت با مالتی‌پلکسر:

ورودی هر مالتی‌پلکسر، ۲۵، ۰ نمره

اگر به جای  $cd$ ،  $ab$  را به ورودی کنترل داده باشند، ۲۵، ۰ نمره کم شود.

۵- (۴ نمره) دو تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(a, b, c, d) = \sum m(1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14)$$

$$g(a, b, c, d) = \prod M(2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$$

الف- آنها را با استفاده از کوچکترین OR-AND PLA ممکن بسازید. منظور این است که ابتدا یک آرایه برنامه‌پذیر از گیت‌های OR داریم که خروجی آنها وارد یک آرایه برنامه‌پذیر از AND‌ها می‌شود. فرض کنید در خروجی PLA گیت‌های XOR وجود دارند که می‌توانند در صورت نیاز، مکمل تابع ساخته شده را تولید کنند.

ب- آنها را با استفاده از یک دیکودر  $4 \times 16$  با خروجی‌های active-high و با کمترین تعداد گیت با کمترین تعداد ورودی بسازید.

پاسخ:  
الف-

ab	00	01	11	10
cd	00	0	1	1
00	1	1	0	0
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

ab	00	01	11	10
cd	00	1	0	0
00	1	0	0	0
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

ab	00	01	11	10
cd	00	0	0	0
00	0	0	0	0
01				
11			0	0
10	0	0	0	0

ab	00	01	11	10
cd	00			
00	0			
01	0	0	0	0
11	0	0		
10				

$$f = (a + b + c + d)$$

$$(a + c' + d')(a' + d')$$

$$f' = (a + c + d')$$

$$(c' + d)(b' + d)(a' + d)$$

$$g = (a' + c')$$

$$(c' + d)(b' + d)(a' + d)$$

$$g' = (a + b + c + d)$$

$$(a + c' + d')(c + d')$$

اگر  $f$  و  $g'$  را ساده کنیم، می‌توانیم دو تابع را با چهار جمله جمعی بسازیم.

ب- برای ساخت این دو تابع با دیکودر، برای این که ورودی گیت‌ها حداقل باشد، باید تابع  $f$  را با گیت NOR و تابع  $g$  را با گیت OR بسازیم.

$$f = NOR(d_0, d_3, d_7, d_9, d_{11}, d_{13}, d_{15})$$

$$g = OR(d_0, d_1, d_3, d_5, d_7, d_9, d_{13})$$

بارمبنده:

الف:

ساده کردن هر تابع و نقیض آن، هر کدام ۵، ۰ نمره

انتخاب درست: ۵، ۰ نمره

اگر طوری انتخاب کردہ‌اند که بیشتر از ۴ جمله مشترک دارد، هر جمله اضافه ۲۵، ۰ نمره کم شود.

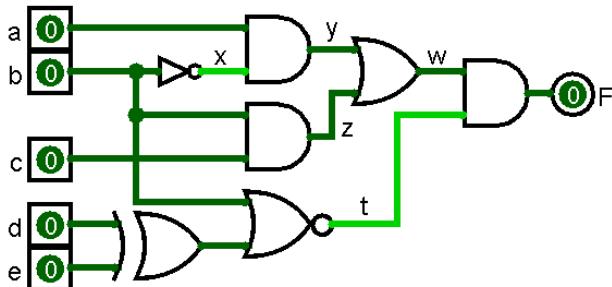
ب:

هر خروجی ۵، ۰ نمره

اگر به جای OR از NOR استفاده کردہ‌اند، ۲۵، ۰ نمره کم شود.

۶- (۳ نمره) فرض کنید همه گیت‌های مدار شکل زیر تأخیر ثابت و برابر با یک نانوثانیه دارند. با رسم جدولی مشابه با جدول زیر، مخاطره پنهان این مدار را پیدا کنید. دو سطر اول این جدول برای نمونه پر شده‌اند، اما شما جدول را از اول پر کنید، چون این دو سطر منجر به مخاطره نمی‌شوند.

در مرحله بعد معادله خروجی را به صورت SOP ساده کنید و بررسی کنید که آیا در شکل ساده‌شده کمکان مخاطره‌ای وجود دارد یا خیر.



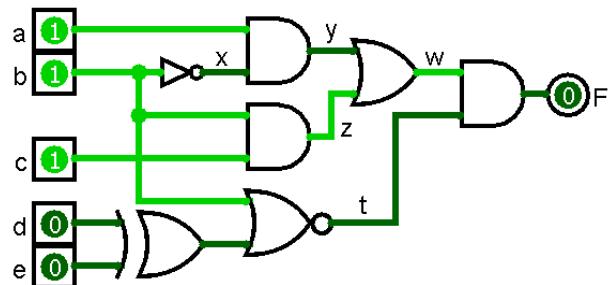
Time	Node Transitions
$t$	$a: 1 \rightarrow 0$
$t + 1$	$y: 1 \rightarrow 0$

پاسخ:

تنها متغیری که از دو مسیر به خروجی راه دارد،  $b$  است. بنابراین فقط  $b$  ممکن است مخاطره ایجاد کند. برای بررسی این موضوع، فرض می‌کنیم  $a = c = 1$  و دو ورودی  $d$  و  $e$  هم‌زمان صفر یا یک باشند.

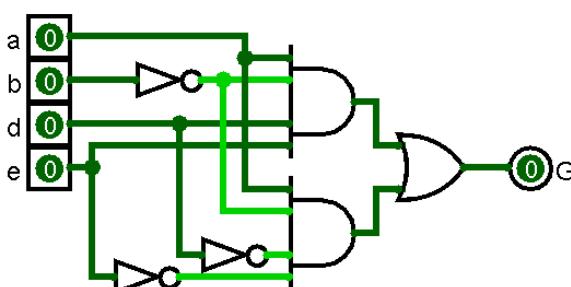
حال اگر  $b$  از یک به صفر تغییر وضعیت دهد، یک مخاطره دینامیک در  $F$  خواهیم داشت:

Time	Node Transitions
$t$	$b: 1 \rightarrow 0$
$t + 1$	$x: 0 \rightarrow 1, z: 1 \rightarrow 0, t: 0 \rightarrow 1$
$t + 2$	$y: 0 \rightarrow 1, w: 1 \rightarrow 0, F: 0 \rightarrow 1$
$t + 3$	$w: 0 \rightarrow 1, F: 1 \rightarrow 0$
$t + 4$	$F: 0 \rightarrow 1$



اگر معادله خروجی را ساده کنیم، به عبارت زیر می‌رسیم که با رسم جدول کارنو می‌بینیم که مخاطره‌ای ندارد:

$$F = wt = (y + z)(b + (d \oplus e))' = (ab' + bc)b'(de + d'e') = ab'(de + d'e') = ab'de + ab'd'e'$$



ab	de	00	01	11	10
00			1		
01					
11					
10					

پاسخ:

هر سطر از جدول (از سطر دوم به بعد): هر کدام ۰ نمره

ساده کردن به صورت SOP ۵ نمره

تشخیص این که مخاطره ندارد: ۰ نمره

-۷ (۱ نمره) اندازه ROM لازم برای پیاده‌سازی هر یک از مدارهای ترکیبی زیر چقدر است؟

الف- یک جمع کننده ۱۶ بیتی با  $C_{out}$  و  $C_{in}$

ب- انکودر بدون اولویت ۱۶ بیتی

پاسخ:

الف- مدار جمعباً ۳۳ ورودی و ۱۷ خروجی دارد لذا اندازه حافظه عبارت است از:  $2^{33} \times 17$  bits

ب- مدار ۱۶ ورودی و ۴ خروجی دارد لذا:  $2^{16} \times 4$  bits

بارمبندي:

هر بخش ۵،۰ نمره

اگر پاسخ را به صورت دو به توان ننوشته باشند، ۰،۲۵ کم شود. (۵،۰ نمره برای هر دو بخش)

-۸ (۲ نمره) در سیستمی که از کد همینگ استفاده می‌کند داده‌ای به صورت 1010001 در گیرنده دریافت شده است. (اگر اندیس بیت‌ها از

سمت چپ به راست باشد) مشخص کنید که داده اصلی که فرستنده ارسال کرده بود، پس از حذف بیت‌های توازن، چه بوده است؟

پاسخ:

$$P_1 P_2 X_3 P_4 X_5 X_6 X_7 = 1010001 \Rightarrow C_1 = 1 \quad C_2 = 0 \quad C_4 = 1$$

$$XOR(P_1, X_3, X_5, X_7) = 1$$

$$XOR(P_2, X_3, X_6, X_7) = 0$$

$$XOR(P_4, X_5, X_6, X_7) = 1$$

بیت ۵ X دچار خطا شده و باید یک باشد. لذا ۴ بیت ارسالی عبارت بوده از: 1101

بارمبندي:

محاسبه درست XORها، هر کدام ۵،۰ نمره

تشخیص بیت اشتباه: ۰،۲۵ نمره

تشخیص اصل داده ارسالی: ۰،۲۵ نمره

موفق باشید