



به موارد زیر توجه کنید:

- ۱- حتما نام و شماره دانشجویی خود را روی پاسخ نامه بنویسید.
- ۲- در حل سوالات به نوشتن جواب آخر اکتفا نکنید. همه مراحل میانی را هم بنویسید.
- ۳- کل پاسخ تمرینات را در قالب یک فایل pdf با شماره دانشجویی خود نام گذاری کرده در سامانه CW بارگذاری کنید.
- ۴- در صورت مشاهده هر گونه مشابهت نامتعارف هر دو (یا چند) نفر کل نمره این تمرین را از دست خواهند داد.

سوالات:

۱- (۴ نمره) عبارت های زیر را با استفاده از قوانین جبر بول ساده کنید.

a.  $A\bar{B} \oplus BC$

b.  $\overline{(A\bar{B} + ABC) + A(B + A\bar{B})}$

پاسخ:

a.

$$A\bar{B} \oplus BC = (A\bar{B}.BC) + (\overline{A\bar{B}.BC}) = A\bar{B}(\bar{B} + C) + (\bar{A} + B)BC = A\bar{B} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + BC$$

$$= A\bar{B} + BC$$

b.

$$\overline{(A\bar{B} + ABC) + A(B + A\bar{B})} = \overline{(\bar{A} + B)(ABC) + (AB + A\bar{B})}$$

$$= \overline{(\bar{A} + B)(\bar{A} + \bar{B} + C) + A(B + \bar{B})} = \overline{(\bar{A} + \bar{A}\bar{B} + \bar{A}C + B\bar{A} + BC) + A}$$

$$= \overline{(\bar{A}.(1 + \bar{B} + C + B) + BC) + A} = \overline{\bar{A} + BC + A} = \overline{(\bar{A} + A) + BC}$$

$$= \overline{1 + BC} = \bar{1} = 0$$

۲- (۴ نمره) کدام یک از توابع زیر می تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند. علت پاسخ خود را به طور مختصر شرح دهید.

الف-  $g(x, y) = \bar{x} + \bar{y}$

ب-  $f(x, y, z) = \bar{x}.(\bar{y} + \bar{z})$

پاسخ:

الف- این تابع یک منطق کامل است چون می توانیم NOT و OR را با آن بسازیم:

$$g(x, x) = \bar{x} + \bar{x} = \bar{x}$$

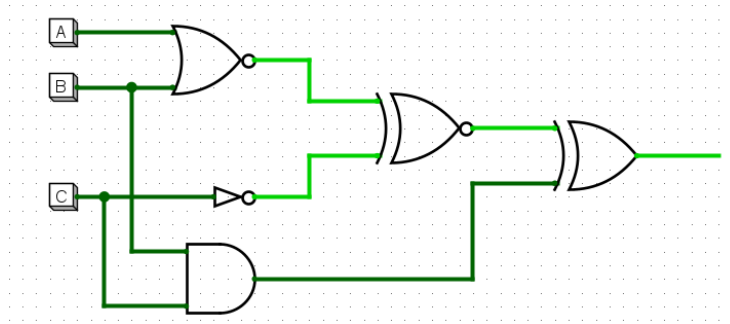
$$g(g(x, x), g(y, y)) = g(\bar{x}, \bar{y}) = x + y$$

ب- این تابع یک منطق کامل است چون می توانیم NOT و AND را با آن بسازیم:

$$f(x, x, x) = \bar{x}.(\bar{x} + \bar{x}) = \bar{x}$$

$$f(f(x, x, x), f(y, y, y), f(y, y, y)) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}) = x.(y + y) = x.y$$

۳- (۳ نمره) مدار زیر را در نظر بگیرید:



الف- خروجی این مدار را بر حسب ورودی‌های آن بنویسید.

ب- جواب به دست آمده در بخش الف را تا حد امکان ساده کنید به صورتی که با سه گیت قابل پیاده‌سازی باشد.

ج- اگر گیت XNOR داخل مدار را به XOR تغییر دهیم، در خروجی مدار چه تغییراتی ایجاد می‌شود.

پاسخ:

الف-

$$((\overline{A+B}) \odot \overline{C}) \oplus B.C$$

ب-

$$\begin{aligned} & ((\overline{A+B}) \odot \overline{C}) \oplus B.C \\ &= (\overline{A}\overline{B}\overline{C} + (A+B).C) \oplus B.C \\ &= (\overline{A}\overline{B}\overline{C} + AC + BC) \oplus B.C \\ &= (\overline{A}\overline{B}\overline{C} + AC + BC).(\overline{B} + \overline{C}) + \overline{(\overline{A}\overline{B}\overline{C} + AC + BC)}.BC \\ &= (\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) + (A + B + C).(\overline{A} + \overline{C}).(\overline{B} + \overline{C}).BC \\ &= (\overline{A}\overline{C} + AC)\overline{B} + (ABC + BC)(\overline{A}\overline{B} + \overline{C}) \\ &= \overline{B}(A \odot C) \end{aligned}$$

ج- خروجی این مدار مکمل می‌شود.

اگر فرض کنیم عبارت سمت چپ XOR در عبارت اولیه برابر با Z است، خروجی برابر است با  $Z \oplus B.C$ . حال اگر XNOR به XOR تبدیل شود به این معنا است که Z به  $\overline{Z}$  تبدیل شده است، یعنی خروجی برابر شده با  $\overline{Z} \oplus B.C$  وقتی یکی از ورودی‌های تابع XOR مکمل شود، کل تابع مکمل می‌شود.

بنابراین، خروجی برابر خواهد شد با:

$$f = \overline{\overline{B}(A \odot C)} = B + (A \oplus C)$$

۴- (۴ نمره) بدون رسم جدول درستی و با استفاده از جبر بول، وجود خاصیت شرکت‌پذیری را در مورد توابع NAND،

NOR، XOR و XNOR بررسی کنید.

(راهنمایی: در هر مورد بررسی کنید آیا  $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ )

پاسخ:

تابع NAND:

$$(a \uparrow b) \uparrow c = \overline{(ab)} \uparrow c = ab + \overline{c}$$

$$a \uparrow (b \uparrow c) = a \uparrow \overline{(bc)} = \overline{a} + bc$$

دو عبارت بالا معادل نیستند (مثلاً در حالت  $abc = 110$ ). بنابراین تابع NAND خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

تابع NOR:

$$(a \downarrow b) \downarrow c = \overline{(a + b)} \downarrow c = (a + b) \cdot \bar{c} = a\bar{c} + b\bar{c}$$

$$a \downarrow (b \downarrow c) = a \downarrow \overline{(b + c)} = \bar{a} \cdot (b + c) = \bar{a}b + \bar{a}c$$

دو عبارت بالا معادل نیستند (مثلاً در حالت  $abc = 011$ ). بنابراین تابع NOR خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

تابع XOR:

$$(a \oplus b) \oplus c = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (a \odot b) \cdot c = (a\bar{b} + \bar{a}b) \cdot \bar{c} + (ab + \bar{a}\bar{b}) \cdot c$$

$$= a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + abc + \bar{a}\bar{b}c$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \cdot (b \odot c) + \bar{a} \cdot (b \odot c) = a \cdot (bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a} \cdot (b\bar{c} + \bar{b}c)$$

$$= abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

خروجی تابع XOR زمانی یک است که تعداد فردی از ورودی‌های آن یک باشند، بنابراین:

$$XOR(a, b, c) = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

از برابری سه عبارت بالا نتیجه می‌گیریم که تابع XOR خاصیت شرکت‌پذیری دارد.

تابع XNOR:

$$(a \odot b) \odot c = (a \odot b) \cdot c + (a \oplus b) \cdot \bar{c} = (ab + \bar{a}\bar{b}) \cdot c + (a\bar{b} + \bar{a}b) \cdot \bar{c}$$

$$= abc + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$

$$a \odot (b \odot c) = a \cdot (b \odot c) + \bar{a} \cdot (b \oplus c) = a \cdot (bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a} \cdot (b\bar{c} + \bar{b}c)$$

$$= abc + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c}$$

خروجی تابع XNOR زمانی یک است که تعداد زوجی از ورودی‌های آن یک باشند، بنابراین:

$$XNOR(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + abc$$

می‌بینیم دو عبارت اول معادل عبارت سوم نیستند (کاملاً نقیض یکدیگرند). بنابراین تابع XNOR خاصیت شرکت‌پذیری ندارد.

۵- (۲ نمره) بررسی کنید که آیا دو طرف معادلات زیر همواره با یکدیگر برابر هستند یا خیر.

- $\bar{A}C + AB + \bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B} + BC + A\bar{C}$
- $B + \bar{A}C + A\bar{B} = A + B + C$

پاسخ:

$$a. \quad \bar{A}C + AB + \bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} =$$

$$\bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + (\bar{A} + A)BC + AC(\bar{B} + B) = \bar{A}\bar{B} + BC + A\bar{C}$$

$$b. \quad B + \bar{A}C + A\bar{B} = B(\bar{A} + A) + \bar{A}C + A\bar{B}$$

$$= B\bar{A} + BA + \bar{A}C + A\bar{B} = A + B\bar{A} + \bar{A}C$$

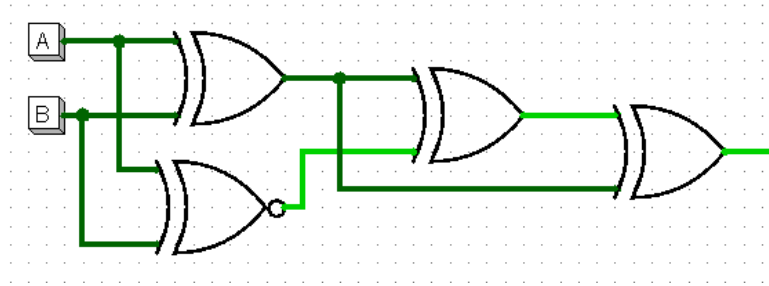
$$= A + \bar{A}(B + C) = A + B + C$$

۶- (۳ نمره) با توجه به مدار زیر به این سوالات پاسخ دهید.

الف- تابع خروجی این مدار را بر حسب ورودی‌های نوشته و با استفاده از قوانین جبر بول تا حد امکان ساده کنید.

ب- مدار ساده شده بخش الف را رسم کنید.

ج- اگر گیت XNOR را با OR جایگزین کنیم آیا تغییری در خروجی مدار ایجاد می‌شود؟ اگر آن را با AND جایگزین کنیم چطور؟ توضیح دهید.



پاسخ:

الف-

$$f = ((A \oplus B) \oplus (A \odot B)) \oplus (A \oplus B)$$

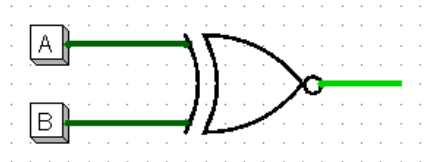
$$\text{if } Z = (A \oplus B) \text{ then } f = (Z \oplus \bar{Z}) \oplus Z$$

$$Z \oplus \bar{Z} = 1$$

$$1 \oplus Z = \bar{Z}$$

$$f = ((A \oplus B) \oplus (A \odot B)) \oplus (A \oplus B) = A \odot B$$

ب-



ج- با جایگزین کردن این گیت با OR:

$$f_{OR} = ((A \oplus B) \oplus (A + B)) \oplus (A \oplus B) = ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B)) \oplus (A + B) = 0 \oplus (A + B) = A + B$$

با جایگزین کردن این گیت با AND:

$$f_{AND} = ((A \oplus B) \oplus AB) \oplus (A \oplus B) = ((A \oplus B) \oplus (A \oplus B)) \oplus AB = 0 \oplus AB = AB$$

بنابراین در هر دو حالت خروجی تغییر می‌کند.