Exercice 1:

Un système est donné par la représentation d'état suivante : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$

Avec ; $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le système est –il commandable ? expliquer
2. Le système est-il observable ? expliquer
3. Le système est-il stable ? expliquer
4. Le système est-il stabilisable ? expliquer

<u>Correction exercice 1 :</u>

1 et 2) On peut décomposer la matrice A en deux parties : Type II et Type III.

On remarque bien que la partie 1 (système de type II) est commandable mais n'est pas observable et la partie 2 (système de type III) n'est pas commande mais elle est observable.

En conclusion le système n'est pas complètement commandable et n'est complètement observable

3) Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 1 - 2j$; $\lambda_2 = 1 + 2j$; $\lambda_3 = -3$; $\lambda_4 = -3$; $\lambda_5 = -3$

Il y a une valeur propre à partie réelle strictement positive donc le système n'est pas stable.

4) La partie qui n'est pas stable, est commandable. Par la suite le système est stabilisable.

Exercice 2:

Un système est donné par la représentation d'état suivante : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$

Avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$.

1. Est-ce que le système est commandable?
2. Est-ce que le système est observable?

Correction:

1. Le système est sous sa forme canonique de commandabilité donc il est commandable
2. Nous pouvons déduire facilement la fonction de transfert sans calcul:

$$F(p) = \frac{p}{p^4 - p} = \frac{1}{p^3 - 1}$$

Il y a une simplification dans la fonction de transfert, Dim(X)> deg(FT) donc il y a un problème de commandabilité et/ou d'observabilité,
Puisqu'on a vérifié que le système est complètement commandable, donc il n'est pas complètement observable.

Exercice 3:

Un système est donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$$

Avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Est-ce que le système est commandable?
2. Le système est-il stable ?
3. Le système est-il stabilisable ?

Correction exercice 3 :

1) Le système n'est pas commandable car $\det(\varphi) = \det(B \;\; AB) = 0$
2) Le système n'est pas stable car il possède une valeur propre strictement positive ($\lambda_1 = -2 \; et \; \lambda_2 = 3$)
3) Puisque le système n'est pas complètement commandable et n'est pas stable on ne peut pas conclure directement sur la stabilisation. Pour cela nous allons spécifier les parties commandables et non commandables du système. Pour ce faire nous allons appliquer un changement de variables. Puisque les valeurs propres sont simples, le changement de variable consiste à diagonaliser la matrice.

On a:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}$$

Soit le changement de variables suivant:

$$X(t) = TZ(t)$$

T: est la matrice de passage formée par les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A'Z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'Z(t) \end{cases}$$

$$A' = T^{-1}AT \qquad B' = T^{-1}B \qquad C' = CT$$

les vecteurs propres associés ou valeurs propres.

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_1 = -2$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \begin{cases} -x_1 + 2y_1 = -2x_1 \\ 2x_1 + 2y_1 = -2y_1 \end{cases} \qquad 2y_1 = -x_1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 3$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \begin{cases} -x_2 + 2y_2 = 3x_2 \\ 2x_2 + 2y_2 = 3y_2 \end{cases} \qquad 2x_2 = y_2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B' = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La partie qui n’est pas stable elle est commandable donc le système est stabilisable

Exercice 4

Un système est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Etudier la commandabilité et l'observabilité de système
2. Déterminer la fonction de transfert
3. Déduire la fonction de transfert du système échantillonné
4. Conclure sur le choix de la période d'échantillonnage

Correction exercice 4 :

1. Système de type II, $B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc il est commandable et $C \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc il est observable.

2. $F(p) = C(PI - A)^{-1}B = \frac{p}{p^2+1}$

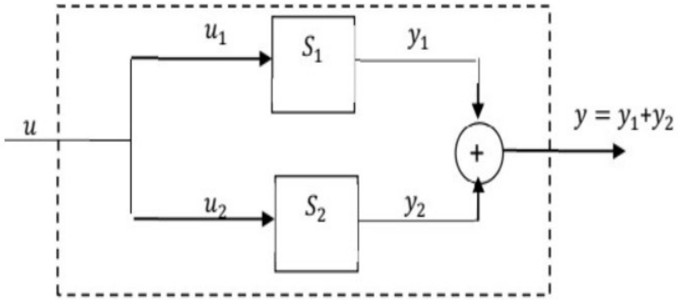
3. $F(z) = Z(B_0(p)F(p)) = (1 - z^{-1})Z(\frac{F(p)}{p})$

Utilisant la table, nous trouvons :

$$F(z) = \frac{(z-1)\sin(T)}{z^2 - 2zcos(T) + 1}$$

4. Pour $T = k\pi$ nous avons une simplification dans la fonction de transfert d'où le deg(FT)<dim(X) donc le système à un problème de commandabilité ou/et d'observabilité

Exercice 5:



Deux systèmes S1 et S2 sont donnés par :

(S1) : $u_1 \longrightarrow \boxed{\dfrac{p+a}{p+b}} \xrightarrow{\;y_1\;}$ (S2) : $u_2 \longrightarrow \boxed{\dfrac{p+c}{p+d}} \xrightarrow{\;y_2\;}$

1. Donner la représentation d'état, sous la forme canonique d'observabilité, de chacun des systèmes. En déduire les conditions de commandabilité et d'observabilité de chaque système.

EXE5

1) $\dfrac{p+a}{p+b} = \dfrac{p+b-b+a}{p+b} = \underbrace{1}_{D} + \dfrac{a-b}{p+b}$

$A=(-b)$; $B=(a-b)$; $C=(1)$; $D=1$

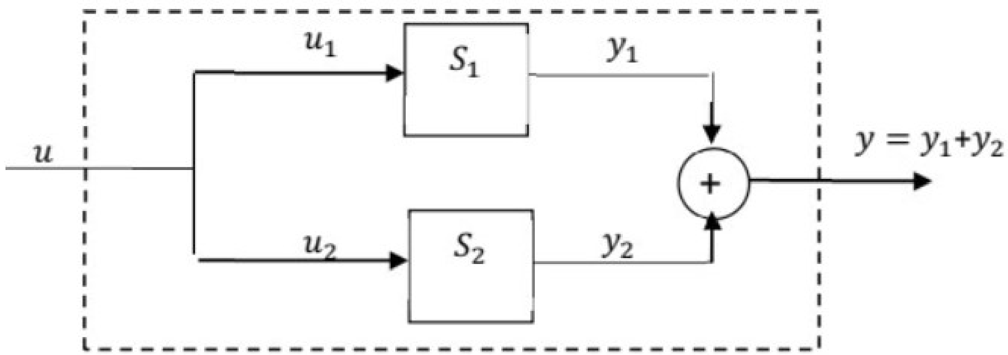
$$(S_1): \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b) u_1 \\ y_1 = x_1 + u_1 \end{cases}}$$

Condition de la

$a \neq b$ et $c \neq d$

de même pour (S_2) : $\boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = -d x_2 + (c-d) u_2 \\ y_2 = x_2 + u_2 \end{cases}}$

2. Utilisant les représentations d'état données dans la question 1), proposer une représentation d'état du système (S3) donné par la figure suivante :



2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b)u \\ \dot{x}_2 = -d x_2 + (c-d)u \\ y = y_1 + y_2 = x_1 + u + x_2 + u \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}$; $C = (1 \;\; 1)$; $D = 2$

•) <u>Cond de Commandabilité</u>

$\mathcal{C} = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} a-b & -b(a-b) \\ c-d & -d(c-d) \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{C}) = (a-b)(c-d)(b-d)$

$\det(\mathcal{C}) \neq 0 \Leftrightarrow b \neq d$ (S_1 et S_2 N'ont pas un pôle en commun)

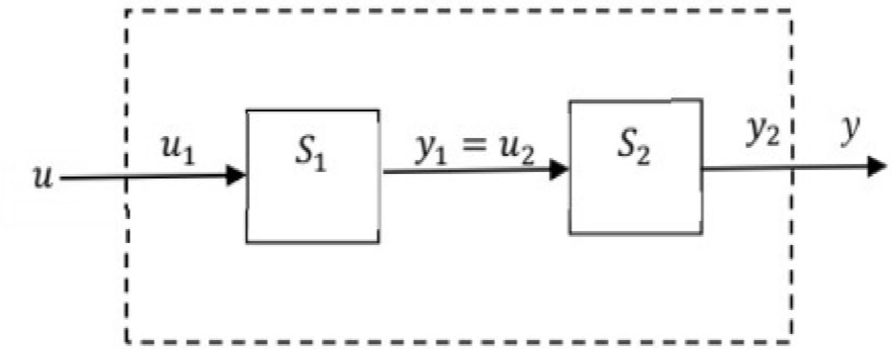
•) <u>Cond d'Observabilité</u>

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & -d \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{O}) = b - d \Rightarrow (S_3)$ est Observable si $b \neq d$

(S_1 et S_2 N'ont pas un pôle en commun)

3. Mêmes questions pour (S3) donné par la figure suivante :



3)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b) u_1 \\ \dot{x}_2 = -d x_2 + (c-d) u_2 \\ y_1 = x_1 + u_1 \\ y_2 = x_2 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b) u \\ \dot{x}_2 = -d x_2 + (c-d)(x_1 + u) \\ y = x_2 + (x_1 + u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b) u \\ \dot{x}_2 = (c-d) x_1 - d x_2 + (a-b) u \\ y = x_1 + x_2 + u \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ c-d & -d \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} ; D =$$

•) <u>Cond de commandabilité</u>

$\mathcal{C} = (B \quad AB) \Rightarrow \det(\mathcal{C}) = (a-b)(c-d)(a-d)$

par hyp $a \neq b$ et $c \neq d$.

donc le Sys Global est commandable ssi $a \neq d$.

(pas de simplification entre zéro de S_1 avec pôle de S_2)

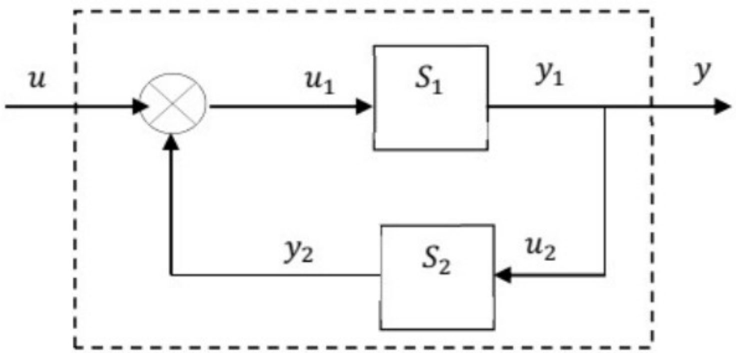
•) <u>Cond d'observabilité</u>

$\Theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\Theta) = (b-c)$.

le sys Global est observable ssi $b \neq c$.

(pas de simplification entre zéro de S_2 et pôle de S_1)

Mêmes questions pour (S3) donné par la figure suivante :



3) On a $\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b)\, u_1 \\ \dot{x}_2 = -d\, x_2 + (c-d)\, u_2 \\ y_1 = x_1 + u_1 \\ y_2 = x_2 + u_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b)\,(u - y_2) \\ \dot{x}_2 = -d\, x_2 + (c-d)\, y_1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -b x_1 + (a-b)(u - x_2 - y) \\ \dot{x}_2 = -d\, x_2 + (c-d)\, y \end{cases}$$

$y = x_1 + u_1 = x_1 + u - y_2$

$y = x_1 + u - x_2 - u_2 \longrightarrow y = x_1 + u - x_2 - y$

$\longrightarrow \boxed{y = \dfrac{x_1 - x_2 + u}{2}}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\left(\frac{a+b}{2}\right) x_1 - \left(\frac{a-b}{2}\right) x_2 + \left(\frac{a-b}{2}\right) u \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{c-d}{2}\right) x_1 - \left(\frac{c+d}{2}\right) x_2 + \left(\frac{c-d}{2}\right) u \\ y = \frac{x_1 - x_2 + u}{2} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\left(\frac{a+b}{2}\right) & -\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \left(\frac{c-d}{2}\right) & -\left(\frac{c+d}{2}\right) \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} \\ \frac{c-d}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} ; \quad D = 1/2$$

Cond de Commandabilité

$\mathcal{C} = (B \;\; AB) \Rightarrow \det(\mathcal{C}) = \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{c-d}{2}\right)(a-d)$

puisque $a \neq b$ et $c \neq d$ $\Rightarrow$ le système est Commandable

ssi $a \neq b$ (La série $S_1\,S_2$ est Commandable)

Cond d'observabilité

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathcal{O}) = \frac{d-a}{4}$

Le sys Global est Observable ssi $a \neq d$

(La Cascade $S_2\,S_1$ est observable)

même condition