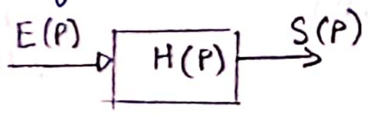
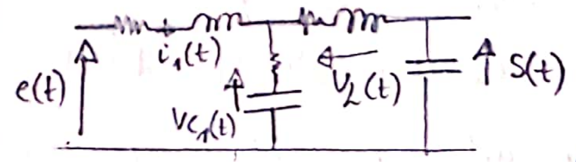
Chp I. Représentation des systèmes Linéaires continus dans l'espace d'état

I – Introduction :

Le modèle donné par la fonction de transfert est :



$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$



→ Le modèle donné par la F.T
⇒ Représentation externe.

② Pour le cas d'un système non-linéaire ⇒ On ne peut pas utiliser le modèle donné par la F.T.

→ Un autre type de modélisation (ou de représentation).
↳ Le modèle donné par la représentation d'état (Représentation externe).

II – Représentation d'état :

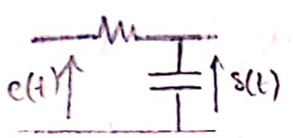
Un S.L.C est donné par :

E.D :

$$a_n \frac{d^{(n)} S(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dS(t)}{dt} + a_0 S(t) = b_m \frac{d^{(m)} e(t)}{dt^m} + \dots + b_0\, e(t).$$

$$\boxed{\text{avec } n \geq m}$$

example :



$$RC \frac{dS(t)}{dt} + S(t) = e(t)$$

$\mathcal{L}$, CI=0 : F.T : $H(P) = \dfrac{S(P)}{E(P)} = \dfrac{b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$

→ R.E.

$$R.E = \begin{cases} \dot{X}(t) = A\, X(t) + B\, e(t) : \text{équation d'état} \\ S(t) = C X(t) + D.e(t) : \text{éq. de la sortie} \end{cases}$$

$e(t)$: l'entrée ; $s(t)$ = sortie.

$$\dot{X}(t) = \frac{d X(t)}{dt}.$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \text{vecteur d'état } (N \times 1)$$

exp : $x_1(t) = i_1(t)$.

$x_i(t)$ = Variable d'état.

$A = (N,N)$: Matrice d'état ou bien Matrice caractéristique.

$B = (N,p)$ = vecteur d'entrée ou de commande.

$C = (q,N)$ = Matrice de sortie ou d'observation.

$D = (q,p)$ = Matrice de couplage E/S

Remarque :

Pour le cas d'un système monovariable (1e seule entrée et 1e seule sortie).

$D(1,1)$ = cste → cste = 0 si $n \neq m$.
→ cste ≠ 0 si $n = m$

$H(P) = \dfrac{N(P)}{D(P)}$ si $\deg(N) = \deg(D)$.

→ $H(P) = \underset{D}{\text{cste}} + \boxed{\dfrac{N_1(P)}{D(P)}}^{\,A,B,C}$ avec $\deg(N_1) < \deg(D)$

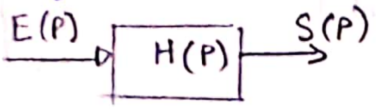
$$\frac{S(P)}{E(P)} = H(P) = \frac{P+1}{P+2} = \frac{P+2-1}{P+2} = \underbrace{1}_{\text{Cste}} - \frac{1}{P+2}.$$

② La F.T d'un système donné est unique par contre on peut trouver plusieurs représentations d'état du système, tout dépend du choix des variables d'état.

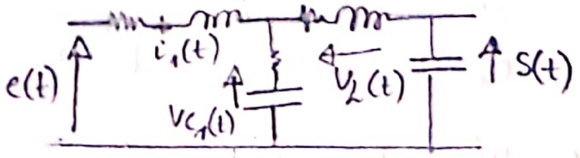
Chp I. Représentation des systèmes Linéaires continus dans l'espace d'état

I - Introduction :

Le modèle donné par la fonction de transfert est :



$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$



→ Le modèle donné par la F.T

⇒ Représentation externe .

② Pour le cas d'un système non-linéaire ⇒ On ne peut pas utiliser le modèle donné par la F.T .

→ Un autre type de modélisation (ou de représentation).

↳ Le modèle donné par la représentation d'état (Représentation externe) .

II - Représentation d'état :

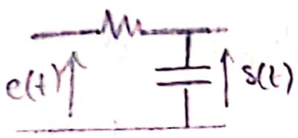
Un S.L.C est donné par :

E.D. :

$$a_n \frac{d^{(n)}S(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dS(t)}{dt} + a_0 S(t) = b_m \frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \dots + b_0\, e(t).$$

$$\boxed{\text{avec } n \geq m}$$

example :



$$RC \frac{dS(t)}{dt} + S(t) = e(t)$$

$\xrightarrow[CI=0]{\mathcal{L}}$ F.T : $H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0}{a_n P^n + \dots + a_1 P + a_0}$

→ R.E .

$$R.E = \begin{cases} \dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,e(t) : \text{équation d'état} \\ S(t) = CX(t) + D.e(t) : \text{éq. de la sortie.} \end{cases}$$

$e(t)$: l'entrée ; $s(t)$ = sortie .

$$\dot{X}(t) = \frac{d\,X(t)}{dt}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix} = \text{vecteur d'état } (N \times 1)$$

exp : $x_1(t) = i_1(t)$

$x_i(t)$ = Variable d'état .

$A = (N,N)$: Matrice d'état ou bien Matrice caractéristique .

$B = (N,p)$ = vecteur d'entrée ou de commande .

$C = (q,N)$ = Matrice de sortie ou d'observation .

$D = (q,p)$ = Matrice de couplage E/S .

Remarque :

Pour le cas d'un système monovariable (1e seule entrée et 1e seule sortie) .

$D(1,1)$ = cste → cste = 0 si $n \neq m$; → cste ≠ 0 si $n = m$

$H(P) = \frac{N(P)}{D(P)}$ si $\deg(N) = \deg(D)$.

→ $H(P) = \underbrace{\text{cste}}_{D} + \underbrace{\boxed{\frac{N_1(P)}{D(P)}}}_{A,B,C}$ avec $\deg(N_1) < \deg(D)$.

$$\frac{S(P)}{E(P)} = H(P) = \frac{P+1}{P+2} = \frac{P+2-1}{P+2} = \underbrace{1}_{\text{Cste}} - \frac{1}{P+2}.$$

② La F.T d'un système est unique par contre on peut trouver plusieurs représentations d'état du système, tout dépend du choix des variables d'état .

③ $N \geq n$

$x_1 = s(t)$

$x_2 = \dot{x}_1$

$x_3 = \dot{x}_2$ ...

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \dfrac{d s^n(t)}{dt} \ldots \end{cases} \quad (*)$$

Toutes ces représentations d'état doivent vérifier la condition suivant :

Le nombre de variable utilisé doit être >= du degré du système.

Pour exprimer une dynamique d'un système d'ordre 2, il faut parler de la dérivée nième de la sortie par rapport au temps, dans le meilleur cas, si on choisi (*)

Remarque 4 :

Les variables d'états peuvent avoir un sens physique ou non

En effet:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,e(t). \\ s(t) = C\,x(t) + D.e(t). \end{cases}$$

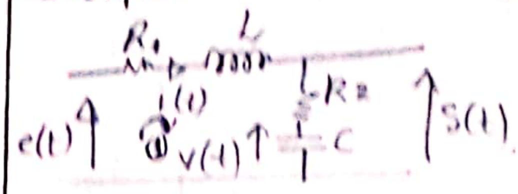
Soit $x(t) = T.z(t)$.

$$\begin{cases} T\,\dot{z}(t) = A\,T\,z(t) + B\,e(t). \\ s(t) = C.T.z(t) + D.e(t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = (T^{-1}AT)z(t) + (T^{-1}B)\,e(t). \\ s(t) = (CT).z(t) + D.e(t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = Az + Be. \\ s = Cz + D.e. \end{cases}$$

Exemple :



Déterminer la R.E tq $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix}$

(A, B, C, D) ?

$$\frac{di(t)}{dt} = a_{11}\,i(t) + a_{12}V_c(t) + b_1 e(t).$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = a_{21}\,i(t) + a_{22}V_c(t) + b_2\,e(t).$$

$$s(t) = c_1\,i(t) + c_2 V_c(t) + d.e(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix};\ C = (c_1\ c_2)\quad D = d.$$

① Loi des mailles :

$$\boxed{u(t) = (R_1+R_2)\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + C\,V_c(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left(u(t) - (R_1+R_2)\,i(t) - C\,V_c(t)\right)$$

$b_1 = 1/L.$

$a_{11} = -(R_1+R_2)/L.$

$a_{12} = -\frac{C}{L}.$

$$\boxed{s(t) = V_c(t) + R_2\,i(t)}$$

$$\begin{cases} c_1 = R_2. \\ c_2 = 1. \\ d = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -(R_1+R_2)/L & \frac{-C}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$C = (R_2\ \ 1)\qquad d = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dV_c}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t).$$

$$s(t) = (c_1\ \ c_2)\begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix} + d.u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{(R_1+R_2)}{L}x_1 - \dfrac{C}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u(t). \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1(t) \\ s(t) = R_2\,x_1(t). \end{cases}$$

③ $N > n$

$x_1 = s(t)$.
$x_2 = \dot{x}_1$
$x_3 = \dot{x}_2$ ...

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = \dfrac{d\, s^n(t)}{dt} + \dots \end{cases} \quad (*)$$

Toutes ces représentations d'état doivent vérifier la condition suivant :
le nombre de variable utilisé doit être >= du degré du système.

Pour exprimer une dynamique d'un système d'ordre 2, il faut parler de la dérivée nième de la sortie par rapport au temps, dans le meilleur cas, si on choisi (*)

Remarque 4 :
des variables d'états peuvent avoir un sens physique ou non
En effet :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,e(t). \\ S(t) = C\,x(t) + D.e(t). \end{cases}$$

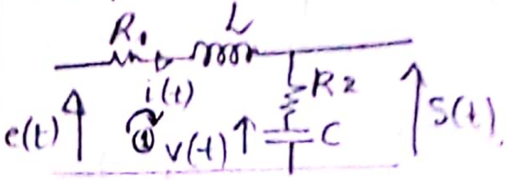
Soit $x(t) = T.Z(t)$.

$$\begin{cases} T\,\dot{Z}(t) = AT\,Z(t) + B\,e(t). \\ S(t) = C.T.Z(t) + D.e(t). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = (T^{-1}AT)Z(t) + (T^{-1}B)\,e(t). \\ S(t) = (CT).Z(t) + D.e(t). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z} = AZ + Be. \\ S = CZ + D.e. \end{cases}$$

Exemple :



Déterminer la R.E tq $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix}$.
(A, B, C, D)?

$$\frac{di(t)}{dt} = a_{11}\,i(t) + a_{12}V_c(t) + b_1\,e(t).$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = a_{21}\,i(t) + a_{22}V_c(t) + b_2\,e(t)$$

$$S(t) = c_1\,i(t) + c_2V_c(t) + d.e(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix};\ C = (c_1\ \ c_2)\quad D = d.$$

① Loi des mailles :

$$\boxed{u(t) = (R_1+R_2)\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + C\,V_c(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}\left(u(t) - (R_1+R_2)\,i(t) - C\,V_c(t)\right)$$

$b_1 = 1/L$.
$a_{11} = -(R_1+R_2)/L$.
$a_{12} = -\frac{C}{L}$.

$$\boxed{S(t) = V_c(t) + R_2\,i(t)}$$

$$\begin{cases} c_1 = R_2. \\ c_2 = 1. \\ d = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -(R_1+R_2)/L & \frac{-C}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$C = (R_2\ \ 1)\qquad d = 0$.

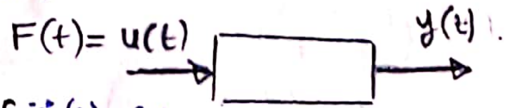
$$\begin{pmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dV_c}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t).$$

$$S(t) = (c_1\ \ c_2)\begin{pmatrix} i(t) \\ V_c(t) \end{pmatrix} + d.u(t)$$

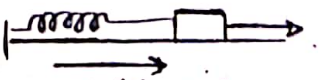
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{(R_1+R_2)}{L}\,x_1 - \dfrac{C}{L}\,x_2 + \dfrac{1}{L}\,u(t). \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}\,x_1(t). \\ S(t) = R_2\,x_1(t). \end{cases}$$

Exemple 2 :

Un système mécanique est donné par :



$$\begin{cases} \ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=u(t) \\ y(t)=x(t) : \text{la position.} \end{cases}$$



$y(t)=x(t)=$ position

Déterminer la R.E en prenant $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

$x_1(t)=x(t)$.
$x_2(t)=\dot{x}(t)$.

$$\boxed{\dot{x}_1=x_2}$$

$\dot{x}_2=\ddot{x}=-2\dot{x}-5x+u$.

$$\boxed{\dot{x}_2(t)=-5\cdot x_1(t)-2x_2(t)+u(t)}$$

$$\boxed{y(t)=x(t)=x_1(t)}$$

$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+d\,u(t).$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$d=0$$

Résolution de l'éq d'état :

$$\boxed{\dot{X}(t)=AX(t)+B\cdot u(t)} \quad \text{I}$$

$\Longleftrightarrow \dot{X}(t)-AX(t)=Bu(t)$

Sans second membre (En régime libre = R. impulsionnelle).

$\dot{X}(t)-AX(t)=0 \Longrightarrow \boxed{X(t)=e^{At}\cdot k}$

• Solution globale :

$\Rightarrow X(t)=e^{At}\cdot k(t)=$ solution globale

$k(t)=?$

$X(t)=e^{At}\cdot k(t)$.

$\dot{X}(t)=Ae^{At}\cdot k(t)+e^{At}\cdot\dot{k}(t)$.

$$\boxed{\dot{X}(t)=AX(t)+e^{At}\cdot\dot{k}(t)} \quad \text{II}.$$

I = II

$\Rightarrow e^{At}\cdot\dot{k}(t)=B\cdot u(t)$.

$\dot{k}(t)=e^{-At}\cdot Bu(t)$.

$$\int_{t_0}^{t}\dot{k}(\tau)\cdot d\tau=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}\cdot Bu(\tau)\cdot d\tau.$$

$$k(t)-k(t_0)=\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)\cdot d\tau.$$

$k(t_0)=e^{-At_0}\cdot x(t)$

$$\Rightarrow \boxed{k(t)=e^{-At_0}X(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}\cdot B\cdot u(\tau)d\tau}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau}$$

Si $t_0=0$

$$\Rightarrow \boxed{X(t)=\underbrace{e^{At}X(0)}_{\text{Solution en régime libre}}+\int_{0}^{t}\underbrace{e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau}_{\text{En régime forcé}}}$$ à apprendre

Calcul de e^{At} :

Propriétés :

•) $A(n,n)\longrightarrow e^{At}(n\times n)$.

•) $\dfrac{de^{At}}{dt}=A\cdot e^{At}=e^{At}\cdot A$.

•) $e^{At}=I+\dfrac{At}{1!}+\dfrac{(A\cdot t)^2}{2!}+\ldots$

$$\boxed{e^{At}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}}$$

Formes remarquables :

* $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$: V.P simples : $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \; e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; $P_c(A)=\det(\lambda I-A)$.

$$P_c(A) = \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right|$$

$$P_c(A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ b & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$P_c(A) = (\lambda - a)(\lambda - a) + b^2$$
$$P_c(A) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$
$$\Delta' = a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0$$
$$\lambda_1 = a + bj$$
$$\lambda_2 = a - bj$$

$$\boxed{e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}}$$

* $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = (n \times n)$

$\Rightarrow \lambda$: est une valeur propre d'ordre $= n$.

$$e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Forme quelconque :

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a} = (p-a)^{-1}$$
$$\mathcal{L}(e^{At}) = (pI - A)^{-1} \Rightarrow \boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left((pI-A)^{-1}\right)}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e^{At} = ?$

$$pI - A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 & 0 \\ 1 & p-2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot \mathrm{Com}^t(M)$$

$$\mathrm{Com}(M) = i \begin{pmatrix} & (-1)^{i+j} & \\ & (-1)^{i+j} \cdot \det(\text{Reste}) & \end{pmatrix}$$

$$\det(pI - A) = (p-1) \cdot (p+2)$$

$$\mathrm{Com}(pI - A) = \begin{pmatrix} p-2 & -1 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}^t(pI - A) = \begin{pmatrix} p-2 & 0 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{(p-1)(p-2)} \begin{pmatrix} p-2 & 0 \\ -1 & p-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{p-1} & 0 \\ \frac{-1}{(p-1)(p-2)} & \frac{1}{p-2} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right) & \mathcal{L}^{-1}(0) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{(p-1)(p-2)}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2}\right) \end{pmatrix}$$

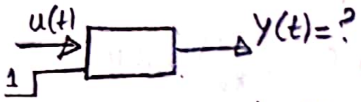
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{(p-1)(p-2)} = \frac{\alpha}{p-1} + \frac{\beta}{p-2} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}$$

$$\alpha = \left.\frac{-1}{p-2}\right|_{p=1} = 1 \; ; \; \beta = \left.\frac{-1}{p-1}\right|_{p=2} = -1$$

Réponse indicielle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = AX(t) + B.U(t) \\ y(t) = CX(t) + \underset{0}{D}U(t) \end{cases}$$

$$y(t) = Cx(t)$$
$$x(t) = e^{At} \, x(0) + \int_0^t e^{A(t-z)} . B . \underbrace{U(z)}_{1} . dz, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{A(t-z)} = \begin{pmatrix} e^{t-z} & 0 \\ e^{t-z} - e^{2(t-z)} & e^{2(t-z)} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-z} & 0 \\ e^{t-z} - e^{2(t-z)} & e^{2(t-z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . dz$$

$$X(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-z} \\ e^{t-z} \end{pmatrix} . dz$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} [-e^{t-3}]_0^t \\ [-e^{t-3}]_0^t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} -1 + e^t \\ -1 + e^t \end{pmatrix}$$

$$y(t) = (1 \; 0) \begin{pmatrix} -1 + e^t \\ -1 + e^t \end{pmatrix} = -1 + e^t .$$

$$\boxed{y(t) = -1 + e^t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \Rightarrow \text{Non stable}$$

$\mathcal{E}(t) = e^{At}$ = Matrice de transition

Si $e^{At} \xrightarrow[t\to+\infty]{} cst \longrightarrow$ stable

$\qquad\qquad \searrow +\infty \longrightarrow$ Non-stable.

R. impulsionnelle $\Rightarrow y(t) = \sum \alpha_i e^{P_i t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

P_i : pôle.

$Ref(P_i) < 0$

$\hookrightarrow y(t) = \sum \alpha_i e^{\lambda_i t}$.

$Ref(\lambda_i) < 0$

Relations entre F.T et RE :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B.u(t) \\ y(t) = Cx(t) + D.u(t) \end{cases}$$

Q : $F.T = \dfrac{Y(P)}{U(P)} = ?$

$$\begin{cases} PX(P) = AX(P) + BU(P) \\ Y(P) = CX(P) + DU(P) \end{cases}$$

$\rightarrow (PI - A)X(P) = B.U(P)$.

$\rightarrow X(P) = (PI - A)^{-1}.BU(P)$.

$Y(P) = C(PI - A)^{-1}.BU(P) + DU(P)$.

$$\Rightarrow \boxed{F.T = \frac{Y(P)}{U(P)} = C(PI - A)^{-1}.B + D}$$

Remarque :
Pour un système donnée, nous pouvons avoir plusieurs R.E.
(A, B, C, D) ; (A', B', C', D') ; (A'', B'', C'', D'')
Il faut avoir :

$$C(P.I - A)^{-1}.B + D = C'(PI - A')^{-1}.B' + D'$$
$$= C''(PI - A'')B'' + D''$$

Passage de la F.T $\longrightarrow$ R.E.

Méthode 1 : Forme canonique de commandabilité :

F.T : $\dfrac{Y(P)}{U(P)} = \dfrac{b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0}{P^n + a_{n-1}P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0}$ avec $n > m$

$$\frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\left(b_m \frac{P^m}{P^n} + \dots + b_1 \frac{P}{P^n} + \frac{b_0}{P^n}\right)V(P)}{\left(\frac{P^n}{P^n} + a_{n-1}\frac{P^{n-1}}{P^n} + \dots + a_1 \frac{P}{P^n} + \frac{a_0}{P^n}\right)V(P)}$$

Cas $n = 2$:

$$\frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{b_1 P + b_0}{P^2 + a_1 P + a_0} = \frac{(b_1 P^{-1} + b_0 P^{-2})V(P)}{(1 + a_1 P^{-1} + a_0 P^{-2})V(P)}$$

$$\begin{cases} Y(P) = b_1 \underbrace{P^{-1}V(P)}_{X_2} + b_0 \underbrace{P^{-2}V(P)}_{X_1} \\ U(P) = V(P) + a_1 \underbrace{P^{-1}V(P)}_{X_2} + a_0 \underbrace{P^{-2}V(P)}_{X_1} \end{cases}$$

Soient : $X_1(P) = P^{-2}.V(P)$.
$X_2(P) = P^{-1}.V(P) = P X_1(P)$

$$\rightarrow \boxed{\dot{x}_1(t) = x_2(t)}$$

$X_2(P) = P^{-1}.V(P) \Rightarrow P X_2(P) = V(P)$.

$$\rightarrow \boxed{\dot{x}_2(t) = v(t)}$$

$\rightarrow v(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t)$.

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + u(t) \\ y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = (b_0 \;\; b_1)$.

Cas général :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$C = (b_0 \; b_1, \dots, b_m \; 0 - 0)$

$\hookrightarrow P_c(\lambda) = \lambda^n + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \\ y(t) = b_0 x_1(t) + \dots + b_m x_m(t) \end{cases}$$

Exemple 1

$$H(p) = \frac{2p+1}{2p^3+4p^2-6}$$

Déterminer la R.E.

$$H(p) = \frac{p+\frac{1}{2}}{(p^3+2p^2-3)} = \frac{\;}{p^3+2p^2+0p-3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Example 2 :

$H(p) = \frac{p+2}{p+5}$, Déterminer la R.E.

$$H(p) = \frac{p+2}{p+5} = \frac{p+5-3}{p+5} = \underbrace{1}_{D} + \underbrace{\frac{-3}{p+5}}_{A,B,C}$$

$A = (-5)$; $B = (1)$; $C = (-3)$;
$D = 1$.

Méthode 2 : Forme canonique d'observabilité.

$$\text{F.T} : \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad n > m$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

PC

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 3 : Forme modale.

R.imp $\Rightarrow y(t) = \sum \alpha_i e^{p_i t}$

p_i : pôle, $e^{p_i t}$: Mode

$\rightarrow y(t) = \sum \alpha e^{\lambda_i t}$

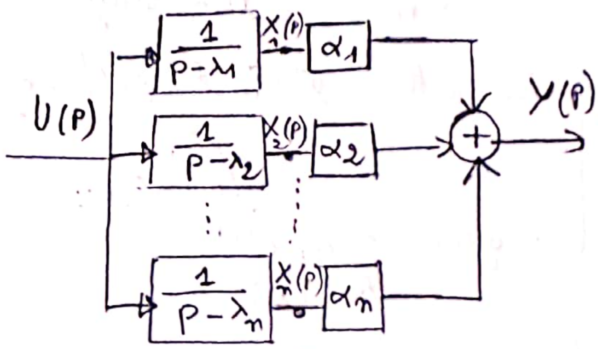
λ_i, V.P.

$e^{\lambda_i t}$: Mode.

Cas 1 : Pôle simple $\in \mathbb{R}$.

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\alpha_1}{p-\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{p-\lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p-\lambda_n}$$

$$\rightarrow Y(p) = \alpha_1 \frac{U(p)}{p-\lambda_1} + \alpha_2 \frac{U(p)}{p-\lambda_2} + \dots + \alpha_n \frac{U(p)}{p-\lambda_n}$$



Soient :

$X_1(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda_1} \rightarrow pX_1(p) - \lambda_1 X_1(p) = U(p) \rightarrow \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + u(t)$

$X_2(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda_2} \rightarrow \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + u(t)$

$\vdots$

$X_n(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda_n} \rightarrow \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t)$

$\hookrightarrow y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Cas 2 : pôles multiples $\in \mathbb{R}$:

Soit "λ" un pôle d'ordre n de $F(p)$.

$$\Rightarrow F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\beta_1}{(p-\lambda)^n} + \frac{\beta_2}{(p-\lambda)^{n-1}} + \dots + \frac{\beta_n}{p-\lambda}.$$

$$\rightarrow Y(p) = \beta_1 \frac{U(p)}{(p-\lambda)^n} + \beta_2 \frac{U(p)}{(p-\lambda)^{n-1}} + \dots + \beta_n \frac{U(p)}{p-\lambda}$$

Soient:

$$X_1(P) = \frac{U(P)}{(p-\lambda)^n} \rightarrow \dot{x}_1(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t).$$

$$X_2(P) = \frac{U(P)}{(p-\lambda)^{n-1}}$$

$\vdots$

$$X_{n-1}(P) = \frac{U(P)}{(P-\lambda)^2} = \frac{1}{p-\lambda} \cdot \frac{U(P)}{P-\lambda} \rightarrow \frac{X_n(P)}{P-\lambda}$$

$$\rightarrow pX_{n-1}(P) = \lambda X_{n-1}(P) + X_n(P)$$

$$\rightarrow \dot{x}_{n-1}(t) = d\, x_{n-1}(t) + x_n(t).$$

$$X_n(P) = \frac{U(P)}{p-\lambda} \rightarrow p X_n(P) = \lambda_n X_n(P) + U(P)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) \cdot u(t)$$

$$\rightarrow y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \dots + \beta_n x_n(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = (\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_m).$$

Cas 3 : Pôles complexes conjugués :

$$F(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{\alpha + j\beta}{p-(a+jb)} + \frac{\alpha - j\beta}{p-(a-jb)}.$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = (\alpha + j\beta \quad \alpha - j\beta).$$

Cas général :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{matrix} \end{array}\right) ; \quad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \hline 1 \\ 1 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

$$C = (\alpha_1 \dots \alpha_k \mid \alpha + j\beta \quad \alpha - j\beta \mid \beta_1 \dots \beta_p)$$

Exemple :

$$H(P) = \frac{2p+1}{p^3 + 2p^2 + p}.$$

Donner la R.E sous la forme modale :

$$H(P) = \frac{2p+1}{P(p+1)^2} = \frac{\beta_1}{P} + \frac{\beta_2}{(p+1)^2} + \frac{\beta_3}{p+1}$$

$$= \frac{1}{P} + \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1}.$$

$$\beta_1 = 1 \; ; \; \beta_2 = 1 \; ; \; \beta_3 = -1.$$

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad B = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right)$$

$$C = (1 \mid 1\ 1).$$

Ch2 : Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés.

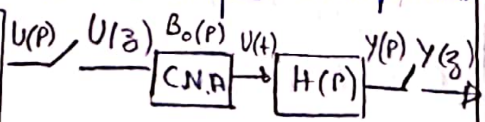
I - Introduction :

Le modèle analogique donné par une fonction de transfert :

$$U(P) \rightarrow \boxed{H(P)} \rightarrow Y(P) \quad ; \quad H(P) = \frac{Y(P)}{U(P)}$$

↳ Le modèle numérique correspondant.

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}}$$

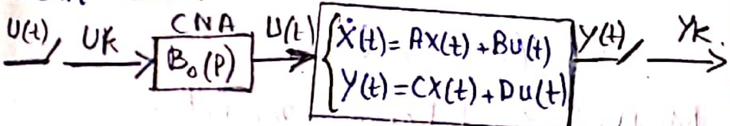


$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \mathcal{Z}\left(B_0(p)\cdot H(p)\right)}$$

Le modèle analogique donné par : R.E

$$U(t) \rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + D.U(t) \end{cases}} \rightarrow y(t).$$

↳ Le modèle numérique correspondant est :



Le modèle numérique :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A'x_k + B'u_k \\ y_k = C'x_k + D'U_k. \end{cases}$$

A', B', C' et D' ?

II - Représentation d'état des systèmes échantillonnés :

$$X(t) = e^{At}.X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B\,u(\tau).d\tau.$$

↳ ?

Pour $t = T$:

$$X(T) = e^{AT}.X(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B\,u(\tau).d\tau.$$

$$\boxed{X_1 = e^{AT}X_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B\,u(\tau).d\tau} \quad (I)$$

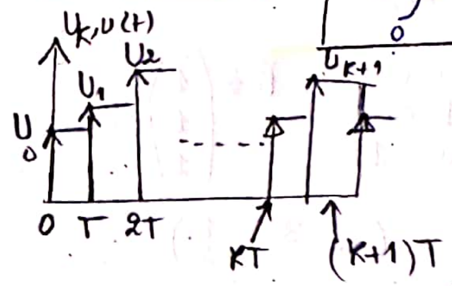
$$X_9 = A'X_8 + B'U_8.$$
$$X_3 = A'X_2 + B'U_2.$$
$$\boxed{X_1 = A'X_0 + B'U_0}$$

↓ X_K : $t = K.T$.

D'une façon générale :

$$\Rightarrow \boxed{X_{k+1} = e^{AT}.X_k + \int_0^T e^{A(T-\tau)}.BU(\tau).d\tau} \quad (II)$$

$$(I) = (II) \Rightarrow \boxed{A' = e^{AT}} \text{ et } \boxed{B'U_k = \int_0^T e^{A(T-\tau)}BU(\tau)d\tau}$$



Entre τ : $[KT, K+T]$.

$$\rightarrow U(\tau) = U_K.$$

$$B'\cancel{U_K} = \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B\cancel{U_K}.d\tau.$$

$$\Rightarrow \boxed{B' = \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B.d\tau}.$$

On a : $y(t) = CX(t) + DU(t)$

$\rightarrow y_K = CX_K + DU_K$, par identification

$$\boxed{C' = C} \quad \text{et} \quad \boxed{D' = D}$$

Résumé :

R.E. Analogique $\begin{cases} \dot{X} = AX + B.U \\ Y = CX + D.U. \end{cases}$

R.E échantillonnée $\begin{cases} X_{k+1} = A'X_k + B'U_k. \\ y_k = C'X_k + D'U_k. \end{cases}$

avec $A' = e^{AT}$; $B' = \int_0^T e^{A(T-\tau)}.B\,d\tau$.
$C' = C$;
$D' = D$.

Exemple :

Un système est donné par :

$$F(P) = \frac{Y(P)}{U(P)} = \frac{2p+1}{p^3 - p}.$$

1) Proposer une R.E.
2) Chercher la R.E. discrète correspondante.

Réponse :

1) Forme modale :

$$F(p) = \frac{2p+1}{p(p^2-1)} = \frac{2p+1}{p(p-1)(p+1)}$$

$$= \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p-1} + \frac{\gamma}{p+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 3/2 \\ \gamma = -1/2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) $$A' = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^T & 0 \\ 0 & 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

$$B' = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B . d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{T-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(T-\tau)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . d\tau$$

$$= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 \\ e^{T-\tau} \\ e^{-(T-\tau)} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} T \\ -\left[e^{T-\tau}\right]_0^T \\ \left[e^{-(T-\tau)}\right]_0^T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} T \\ -1 + e^T \\ 1 + e^{-T} \end{pmatrix}$$

$C' = C$, $D' = D = 0$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Passage de la R.E $\longrightarrow$ F.T.

$$\begin{cases} X_{k+1} = A X_k + B u_k \\ y_k = C X_k + D u_k \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \begin{cases} z X(z) = A X(z) + B u(z) \\ Y(z) = C X(z) + D u(z) \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = ?$$

$$(zI - A) X(z) = B U(z) \Rightarrow X(z) = (zI - A)^{-1} B U(z)$$

$$\rightarrow Y(z) = C (zI - A)^{-1} B U(z) + D U(z).$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = C (zI - A)^{-1} B + D}$$

Passage de la F.T $\longrightarrow$ RE.

Méthode 1 : Forme canonique de commandabilité

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad n > m$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 : Forme canonique d'observabilité :

$$F(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad n > m.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 3 : | Forme modale.

Cas 1 : Pôles simples $\in \mathbb{R}$.

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha_1}{z - \lambda_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - \lambda_n}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Cas 2 : Pôles Multiples $\in \mathbb{R}$.

Soit " λ " un pôle d'ordre n de $F(z)$

$$\rightarrow F(z) = \frac{\beta_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{\beta_2}{(z-\lambda)^{n-1}} + \dots + \frac{\beta_1}{z - \lambda}.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Exercice :

Soit $F(p) = \frac{2p+1}{p^3-p} = \frac{Y(p)}{U(p)}$.

Déterminer le modèle numérique correspondant $F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ en utilisant deux méthodes.

Méthode 1 :

On a $\begin{cases} X_{n+1} = A' X_K + B' U_K \\ Y_K = C' X_K + D' U_K \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{F(z) = C'(zI - A')^{-1}.B' + D'}$

Méthode 2 :

$$F(z) = Z\left(B_0(p).F(p)\right)$$
$$= (1-z^{-1})Z\left(\frac{F(p)}{p}\right)$$
$$= (1-z^{-1})Z\left(\frac{2p+1}{p^4-p^2}\right)$$

Stabilité :

point d'équilibre : État d'équilibre = Situation d'équilibre = position d'équilibre = point de fonctionnement.

↳ Pas de variation de l'état pour $t \geq t_1$.

$\Rightarrow \dot{X}(t) = 0$.

pour un S.L en régime libre :

$\dot{X}(t) = AX(t) \longrightarrow$ Les points d'équilibre sol $\dot{X}(t)=0 \Leftrightarrow$ sol de $AX(t) = 0$.

- Si A inversible $\rightarrow$ une seule solution : $X(t) = 0$ (repos)
- Si A non inversible $\rightarrow$ infinité de solution

Cas d'un système non-linéaire :

$\dot{x}(t) = f(x(t))$; f : vecteur de fonctions N.L.

points d'éq $\Rightarrow$ sol de $\dot{x}(t) = 0$.

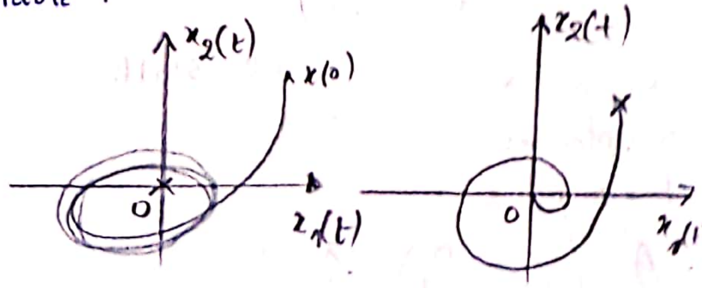
$\Leftrightarrow$ sol $f(x(t)) = 0$

$\rightarrow$ plusieurs solutions.

Définition stabilité :

Un point d'équilibre "0" stable " ssi on excite le système de son état $x(t)$ reste borné (stabilité marginale ou simple).

Si de plus $x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on dit que le point d'équilibre est asymptotiquement stable.



Stabilité simple. Stabilité asymptotique

En régime libre :

$\dot{X}(t) = AX(t)$.

$\rightarrow \boxed{X(t) = e^{At}.x(0)}$

$\mathcal{E}(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left((pI-A)^{-1}\right)$.

Soit $\Phi(p) = (pI-A)^{-1}$.

$\Phi(p) = \frac{1}{\det(pI-A)} Com^t(pI-A)$.

Soit $\Delta(p) = \det(pI-A)$.

$\Delta(p) = (p-\lambda_1)^{\beta_1}(p-\lambda_2)^{\beta_2}\cdots(p-\lambda_p)^{\beta_p}$.

avec $\sum_{i=1}^{p} \beta_i = n$

En décomposant en éléments simples $\Phi(p)$.

$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{A_{ij}}{(p-\lambda_i)^j}$; A_{ij} : Matrices ctes

$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}(\Phi(p))$.

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(t) = e^{At} = \sum_{i=1}^{q} \exp(\lambda_i t).A_i(t)}$

avec $\boxed{A_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta_i} A_{ij} \frac{t^{(j-1)}}{(j-1)!}}$

Conclusion :

1) Si $Re(\lambda_i) < 0 \Rightarrow e^{At} \to 0 \Rightarrow X(t) \to 0$.
$\Rightarrow$ Stabilité asymptotique.

2) Si $\exists\, Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow$ non stable.

3) Si $Re(\lambda_i) \leq 0$ deux cas possibles

a) Si $Re(\lambda_i)=0$ est simple.

$\Rightarrow$ La stabilité marginale ou simple.

b) Si $Re(\lambda_i)=0$ est multiple.

$\Rightarrow$ Non stable.

Exemple 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=0$; $\lambda_2=-1$; $\lambda_3=-2$: stable simplement.

Exemple 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 0-j,\quad \lambda_3 = 0+j$$

Stable simplement.

Exemple 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_c(A) = p^3 + 2p^2 = \underbrace{p^2}_{p=0 \text{ double}} \underbrace{(p+2)}_{p=-2}.$$

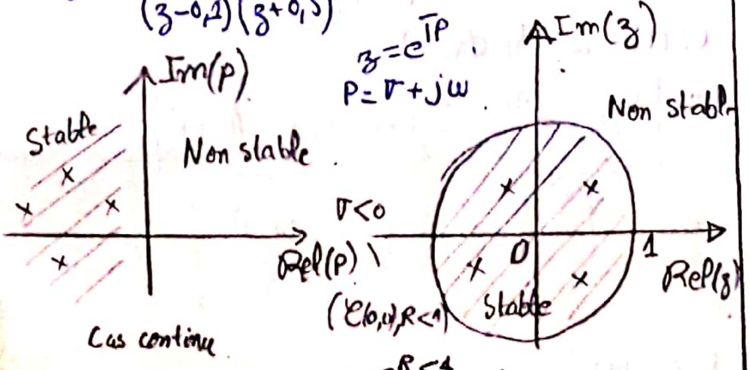
$\Rightarrow$ Non stable.

Stabilité des systèmes échantillonnés:

$$R.imp \Rightarrow y_k = \sum P_i(k) \cdot |r_i|^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

pôles

$$H(z) = \frac{2z+1}{(z-0,1)(z+0,5)} \qquad |z_1 = 0,1| < 1 \qquad |z_2 = -0,5| < 1$$



$z = e^{Tp}$.

$p = \sigma + j\omega \rightarrow z = \underbrace{e^{T\sigma}}_{R<1} e^{Tj\omega}$

$\sigma = 0 \rightarrow z = e^{Tj\omega} \in \mathcal{C}(0,0)$.

Conclusion:

- Si $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ asymptotiquement stable
- Si $\exists\, |\lambda_i| > 1 \Rightarrow$ Non stable.
- Si $|\lambda_i| \le 1$ deux cas possibles.
  - Si $|\lambda_i| = 1$ et λ_i : simple $\Rightarrow$ Stable marginalement.
  - Si $|\lambda_i| = 1$ et λ_i multiple $\Rightarrow$ Non stable.

Chp III : Commandabilité et observabilité des systèmes linéaires

I) Introduction :

Q_1 : Peut-on agir sur les entiers du système pour transformer un système d'un état initial x_0 vers un état final désiré x_f ?

→ Problème de commandabilité.

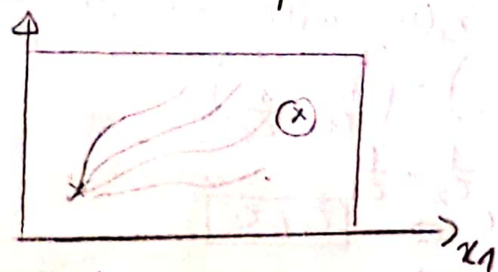
Q_2 : Connaissant le couple (E/S), peut-on estimer l'état $x(t)$ à un instant t ?

→ Problème d'observabilité.

II) Commandabilité :

Un système est complètement commandable ssi, en agissant sur les entrées, nous pouvons transformer l'état du système d'un état initial x_0 vers un état final x_f $\boxed{\text{quelconque}}$.

Dans l'espace admissible pour l'état.



Cas continu :

Critère de commandabilité : avec $X(t) \in \mathbb{R}^n$

Le système donné par : $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ est commandable ssi :

Le rang$(\mathcal{C}) = n$ avec : $B = (n,p)$.

$\mathcal{C} = [B \; AB \; A^2B \dots A^{n-1}B]$: Matrice de commandabilité.

$M = (n \times m)$ avec $n > m$.

Rang $(M) \leq m$.

Cas particulier : $M = (n \times n)$.

$Rg(M) = n \iff \det(M) \neq 0$

$\mathcal{C} = (n, np)$.

Pour un système mono-entrée, $B = (n \times 1) \rightarrow \mathcal{C} = (n \times n) \rightarrow Rg(\mathcal{C}) = n$

$\Rightarrow \det(\mathcal{C}) = 0$

$\dot{X}(t) = AX(t) + B.u(t)$.

$\hookrightarrow x(t) = e^{At}.x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$ (*)

$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \longrightarrow \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t).A^i = e^{At}}$

$A(n \times n) \rightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$

$A^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$.

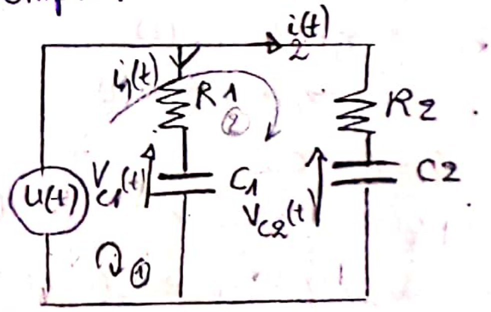
$(*) = e^{At}x(0) + \int_0^t \alpha_i \sum_{i=0}^{n-1} A^i.B\, u(\tau).d\tau$.

Cas échantillonné (Discret) avec $X_k \in \mathbb{R}^n$

Le système donné par : $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$ est commandable ssi :

Le Rang $(\mathcal{C}) = n$ avec $\mathcal{C} = [B \; AB \; A^2B \dots A^{n-1}B]$: Matrice de commandabilité.

Exemple :



1) Déterminer la RE. en prenant comme $X(t) = \begin{pmatrix} V_{c1}(t) \\ V_{c2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

2) Posons $\tau_1 = R_1C_1$ et $\tau_2 = R_2 \cdot C_2$. Discuter selon τ_1 et τ_2 la commandabilité.

① $u(t) = R_1 i_1(t) + V_{c1}(t) \rightarrow$

$V_{c1}(t) = \frac{q_1}{C_1} = \frac{1}{C_1} \int i_1(t) \rightarrow \frac{dV_{c1}(t)}{dt} = \frac{i_1(t)}{C_1}$

$\rightarrow i_1(t) = C_1 . \frac{dV_{c1}(t)}{dt}$.

$\hookrightarrow \boxed{\frac{dV_{c1}(t)}{dt} = \frac{-1}{R_1C_1}.V_{c1}(t) + \frac{1}{R_1C_1}u(t)}$

$R_1C_1 . \frac{dV_{c1}(t)}{dt} + V_{c1}(t) = u(t)$.

De même :

$$\frac{dV_{c2}(t)}{dt} = \frac{-1}{R_2C_2} V_{c2}(t) + \frac{1}{R_2C_2} u(t).$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_2C_2} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} -1/\tau_1 & 0 \\ 0 & -1/\tau_2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix}$

$$\mathcal{C} = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} & \frac{-1}{\tau_1^2} \\ \frac{1}{\tau_2} & \frac{-1}{\tau_2^2} \end{pmatrix}.$$

Rang $(\mathcal{C}) = 2$, $\det(\mathcal{C}) \neq 0$.

$$\det(\mathcal{C}) = \frac{1}{\tau_1\tau_2^2} + \frac{1}{\tau_2\tau_1^2}$$

$$\det(\mathcal{C}) = \frac{1}{\tau_1\tau_2}\left[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right].$$

$\det(\mathcal{C}) \neq 0 \Leftrightarrow \tau_1 \neq \tau_2$.

Le système est commandable ssi $\tau_1 \neq \tau_2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{\tau_1} x_1(t) + \frac{1}{\tau_1} u(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{\tau_2} x_2(t) + \frac{1}{\tau_2} u(t). \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{\tau} x_1(t) + \frac{1}{\tau} u(t). \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau} x_2(t) + \frac{1}{\tau} u(t). \end{cases}$$

Si $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

$\boxed{\text{Si } x_1(0) = x_2(0) \Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \quad \forall u(t)}$

Si $x_1(0) = 0V$; $x_2(0) = 1V \Rightarrow x_2(t) - x_1(t) = 1V \quad \forall u(t)$

Observabilité :

Un système est observable ssi Nous connaissant le couple E/S pouvons estimer l'état initial $X(0)$.

Si on arrive à déterminer l'état initial $X(0) \rightarrow$ On peut déduire $X(t)$.

En effet :

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot u(\tau)\, d\tau.$$

Cas continu :

. Le système donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\underset{X \in \mathbb{R}^n}{X(t)} + Bu(t). \\ y(t) = C \cdot X(t). \end{cases}$$

ssi le rang $(\theta) = n$ avec $\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$.

Matrice d'observabilité.

$y(t) = CX(t)$.

En régime libre $\Rightarrow X(t) = e^{At} \cdot X(0)$.

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \Rightarrow X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i X(0).$$

$$y = CX(t) \Leftrightarrow y(t) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i C A^i}_{\text{inversible}} \cdot X(0)$$

exemple :

3) Soit $y(t) = x_1(t)$, Étudier selon τ_1 et τ_2 l'observabilité du système.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} ; \quad C = (1 \quad 0).$$

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\tau_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$Rg(\theta) = 2 \Leftrightarrow \det(\theta) \neq 0$.

$\det(\theta) = 0 \quad \forall \tau_1$ et τ_2.

Le système n'est pas observable $\forall \tau_1$ et τ_2.

4) $y(t) = x_1(t) - x_2(t) \rightarrow C = (1 \quad -1)$.

$$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{\tau_1} & \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix}.$$

$$\det(\theta) = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}$$

$x_1 - x_2 = cte$

$\det(\theta) \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau_1 \neq \tau_2}$

Cas discret :

Le système échantillonné donné par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A\underset{\in \mathbb{R}^n}{X_k} + Bu_k. \\ Y_k = CX_k. \end{cases}$$

est observable ssi le rang $(\theta) = n$ avec $\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

Relations entre les notions de $\mathcal{C}$ et θ et F.T.

Soit $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}$, Soit le changement des variables suivant :

$$X(t) = T \cdot z(t) \Rightarrow \begin{cases} T\dot{z}(t) = AT z(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT z(t). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = (T^{-1}AT)z(t) + (T^{-1}B).u(t). \\ y(t) = (CT).z(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A'z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'z(t) \end{cases}$$ avec $A' = (T^{-1}AT)$;

$B' = (T^{-1}B)$; $C' = CT$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

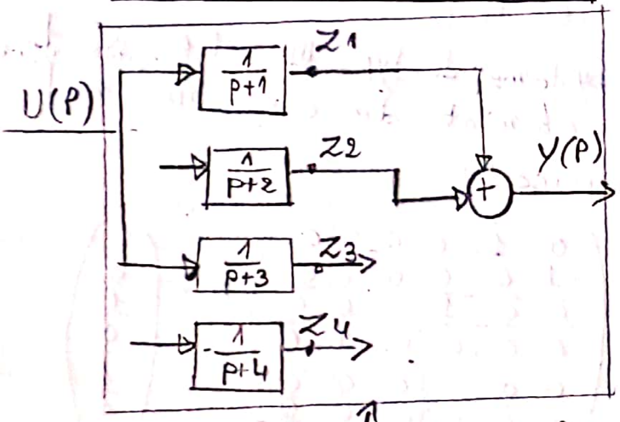
$$C = (7 \ \ 6 \ \ 4 \ \ 2).$$

$X(t) = T.z(t)$ avec $T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -2 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -4 \end{pmatrix}; \quad B' = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C' = CT = (1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0).$$

$$\boxed{F(p) = C(pI - A)^{-1}B = \frac{1}{p+1}}$$



Système global

Un système d'ordre 1 est dit commandable si il est lié à l'entrée et observable si il est lié à la sortie.

(S_1) : est Cℓ et θ.

(S_2) : Non Cℓ et θ.

(S_3) : Cℓ et Non θ.

(S_4) : Non Cℓ et Non θ

Conclusions :

* Le seul système qui est à la fois commandable et observable est S_1 avec $\frac{1}{P+1} = F(P)$ globale donc la F. de transfert représente que les parties qui sont à la fois Cℓ et θ du système.

* Si la dimension de l'espace d'état : $\dim(X(t)) >$ ordre du sys (deg (F.T)), nous avons un problème de commandabilité ou/et d'observabilité.

* Si $\dim(X(t)) =$ ordre (F.T)

$\Rightarrow$ Le système est Cℓ et θ.

Décomposition en système élémentaires:

Cas continu :

Un système donné par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}$$ Nous pouvons toujours trouver un changement de variables : $X(t) = T.z(t)$.

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{z}(t) = A' z(t) + B'u(t). \\ y(t) = C' z(t). \end{cases}$$

avec $A' = (T^{-1}AT)$; $B' = (T^{-1}B)$; $C' = (CT)$

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix} & & \\ \hline & \begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{matrix} \end{array}\right) \quad B' = \left(\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_k \\ \hline h_\alpha \\ h_\beta \\ \hline h_i \\ \vdots \\ h_j \end{array}\right)$$

$$C' = (\ell_1 \dots \ell_k \mid \ell_\alpha \ \ \ell_\beta \mid \ell_i \dots \ell_j)$$

$\rightarrow$ 3 types :

type I : V.P simples $\in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$$

$$C = (\ell_1 \dots \ell_k).$$

type II : V.P. complexes conjuguées :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} \ell_\alpha & \ell_\beta \end{pmatrix}$.

type III : V.P Multiples $\in \mathbb{R}$.

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} h_i \\ \vdots \\ h_j \end{pmatrix}$; $C = (\ell_i \ldots \ell_j)$.

type I : V.P. simple $\in \mathbb{R}$.
Commandabilité de $\mathcal{C}$ et θ :

$K = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$C = (\ell_1 \ \ \ell_2)$.

$\mathcal{C} = (B \ \ AB) = \begin{pmatrix} h_1 & \lambda_1 h_1 \\ h_2 & \lambda_2 h_2 \end{pmatrix}$.

$\text{Rang}(\mathcal{C}) = 2 \iff \det(\mathcal{C}) = 0$

$\det(\mathcal{C}) = h_1 h_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$.

$\det(\mathcal{C}) = 0 \iff h_1 = 0$ ou $h_2 = 0$.

$A = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & -3 & \\ 0 & & & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Système de type est $\mathcal{C}$ ssi tous les éléments de B sont non nuls.

$C = (1 \ 1 \ \ 0 \ 0)$.

$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \lambda_1 \ell_1 & \ell_2 \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\det(\theta) = \ell_1 \cdot \ell_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$.

$\det(\theta) \neq 0$ ssi $\ell_1 \neq 0$ et $\ell_2 \neq 0$.

type II : V.P. complexes conjugués.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \ell_\alpha & \ell_\beta \end{pmatrix}$

$\mathcal{C} = (B \ \ AB) = \begin{pmatrix} h_\alpha & a h_\alpha + b h_\beta \\ h_\beta & -b h_\alpha + a h_\beta \end{pmatrix}$.

$\det(\mathcal{C}) = -b h_\alpha^2 + a h_\alpha h_\beta - a h_\alpha h_\beta - b h_\beta^2$

$\boxed{\det(\mathcal{C}) = -b\,(h_\alpha^2 + h_\beta^2)}$

$\det(\mathcal{C}) = 0 \iff \begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_\alpha & \ell_\beta \\ a\ell_\alpha - b\ell_\beta & b\ell_\alpha + a\ell_\beta \end{pmatrix}$.

$\det(\theta) = b\,\ell_\alpha^2 + \cancel{a \ell_\alpha \ell_\beta} - \cancel{a \ell_\alpha \ell_\beta} + b\,\ell_\beta^2$.

$\det(\theta) = b\,(\ell_\alpha^2 + \ell_\beta^2)$.

$\det(\theta) = 0 \iff (\ell_\alpha \ \ \ell_\beta) = (0 \ \ 0)$.

$\mathcal{C}$ ssi $\begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

θ ssi $(\ell_\alpha \ \ \ell_\beta) \neq (0 \ \ 0)$

type III : V.P Multiples $\in \mathbb{R}$.

Cas $n = 2$:

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} h_i \\ h_j \end{pmatrix}$, $C = (\ell_i \ \ \ell_j)$

Cond de $\mathcal{C}$?

$\mathcal{C} = (B \ \ AB) = \begin{pmatrix} h_i & \lambda h_i + h_j \\ h_j & \lambda h_j \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{C}) = \lambda h_i h_j - \lambda h_i h_j - h_j^2 = -h_j^2$.

Système de type III est $\mathcal{C}$ ssi le dernier élément de B (h_j) est non nul.

Cond de θ ;

$\theta = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_i & \ell_j \\ \lambda \ell_i & \ell_i + \lambda \ell_j \end{pmatrix}$.

$\det(\theta) = \ell_i^2 + \lambda \ell_i \cdot \ell_j - \lambda \ell_i \ell_j$.

$\boxed{\det(\theta) = \ell_i^2}$

$\Rightarrow$ Système de type III est θ ssi le 1er élément de C est non nul.

Exercice 1 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II I III I

$\mathcal{C}$ et Non θ

$C = (0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1)$.

$\mathcal{C}$?, θ ?

$\mathcal{C}$ et θ.

Exercice 2 :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$C = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$

$\mathcal{C}$? $\longrightarrow$ Sous sa forme canonique de $\mathcal{C}$

$\longrightarrow$ Bien $\mathcal{C}$.

θ ? $\longrightarrow F(p) = \dfrac{p}{p^4 - p} = \dfrac{1}{p^3 - 1}$ N'est pas θ.

Exercice 3 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (1\ 0\ 1).$

F(P) : sans calcul.

$F(P) = 0$.

stabilisable → On peut le rendre stable : stabilité de BF.

Exercice 4 :

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Est-ce que le système est stabilisable ?

• $\mathcal{C} = (B \quad AB)$.

$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$\det(\mathcal{C}) = 0$

•) $\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -2 & \lambda-2 \end{pmatrix} \right|$.

$\det = (\lambda+1)(\lambda-2) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6$

$\Delta = 25 \rightarrow \lambda_1 = \frac{1+5}{2} ; \lambda_2 = \frac{1-5}{2}$.

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\boxed{\lambda_2 = -2}$.

→ Changement de variables :

Soit T : Matrice de passage.

$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$.

V1 : vecteur propre associé à $\lambda_1 = 3$.
V2 : vecteur propre associé à $\lambda_2 = -2$.

Soit $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$AV_1 = \lambda V_1$.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} -x_1 + 2y_1 = 3x_1 \\ 2x_1 + 2y_1 = 3y_1 \end{cases} \rightarrow \boxed{y_1 = 2x_1}$

$\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$AV_2 = \lambda_2 V_2$.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} -x_2 + 2y_2 = -2x_2 \\ 2x_2 + 2y_2 = -2y_2 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_2 = -2y_2}$

$\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \dot{x} = AX + BU \\ y = CX \end{cases} \xrightarrow{X = T.Z} \begin{cases} \dot{z} = (T^{-1}A.T)z + (T^{-1}B).U \\ y = (CT).z \end{cases}$.

$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} ; B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$B' = T^{-1}B$ est bien stabilisable.

$B' = T^{-1}B$.

$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} . com^t(T)$.

$\det(T) = 5$.

$com(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

$B' = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/5 & \frac{2}{5} \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.