ACSystèmes :

Commandabilité & Observabilité des Systèmes

Plan

I. Introduction

II. Critères de Kalman

1. de commandabilité
2. d'observabilité
3. Exemples

III. Décomposition de Kalman

IV. Application : systèmes composites

Chap. 3 : Commandabilité & Observabilité des Systèmes

I- Introduction

Problèmes

1. Peut-on à partir des commandes $u(t)$ contrôler l'état du système $(x(t))$?
   $\longrightarrow$ problème de commandabilité
2. Peut-on à partir de l'observation de $y(t)$ remonter à l'état du système $(x(t))$?
   $\longrightarrow$ problème d'observabilité

Définitions

1. Un système est totalement commandable s'il existe $u(t)$ qui conduise en un temps fini d'un état $x(t_0)$ à un état $x(t_1)$ quels que soient $x(t_0)$ et $x(t_1)$.
2. Un système est observable, si l'observation de $y(t)$ entre t_0 et t_1 permet de retrouver $x(t_0)$.

Remarques

1. Un système est dit stabilisable si ses modes instables sont commandables.
2. Un système est dit détectable si ses modes instables sont observables.
3. Un système à la fois stabilisable et détectable est dit gouvernable.

Commandabilité d'un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad (1)$$

Critère 1: Condition de commandabilité

Le système linéaire 1 est commandable si et seulement si

$$rang \underbrace{\begin{pmatrix} B & | & AB & | & A^2B & | & \cdots & | & A^{n-1}B \end{pmatrix}}_{\Gamma_{com}} = n$$

où n est la dimension de x.

Observabilité d'un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \qquad (1)$$

Critère 2: Condition d'observabilité

Le système linéaire 1 est observable si et seulement si

$$rang \underbrace{\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}_{\Gamma_{obs}} = n$$

Remarque : Le fait que le système ne soit pas observable ne signifie pas que l'on ne peut pas construire l'état mais que la solution n'est pas unique.

Exemple 1 :

Moteur commandé par l'inducteur

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- $\Gamma_{com} = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ b_0 & -b_0 a_1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ donc le système est commandable (si $b_0 \neq 0$).
- $\Gamma_{obs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ donc le système est observable ($\det(\Gamma_{obs}) \neq 0$).

Exemple 2 :

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

1. Étudier la commandabilité de ce système?
2. La matrice de commande est maintenant donnée par:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   est ce que le système est commandable?

III. Décomposition de Kalman

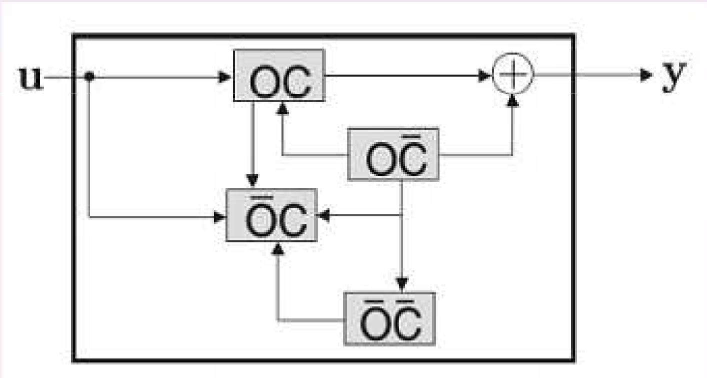
Objectifs

La décomposition de Kalman va nous permettre de mieux comprendre comment interviennent les problèmes de commandabilité et d'observabilité dans les systèmes linéaires.

Décomposition

Un système linéaire peut toujours se décomposer, après un changement de base adapté, en quatre sous-systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 où:

1. S_1 est commandable et observable,
2. S_2 est non commandable et observable,
3. S_3 est commandable et non observable,
4. S_4 n'est ni commandable ni observable.



$\Downarrow$

C : commandable, O : observable, $\bar{C}$: non-commandable, $\bar{O}$: non observable.

III. Décomposition de Kalman

Tout système peut être mis sous l'une des formes suivantes (il existe une matrice de passage) dite Décomposition de Kalman :

1ere forme :

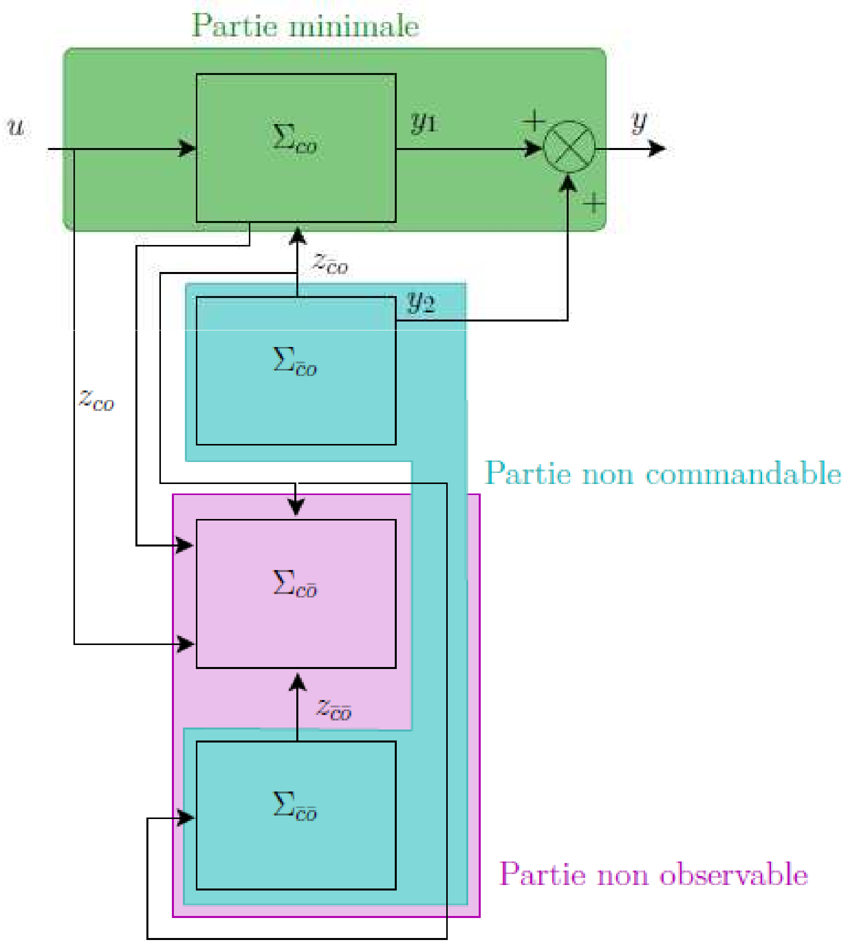
$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix} z + Du. \end{cases}$$

2eme forme :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} z + Du. \end{cases}$$

Rque : la décomposition de Kalman n'est pas unique

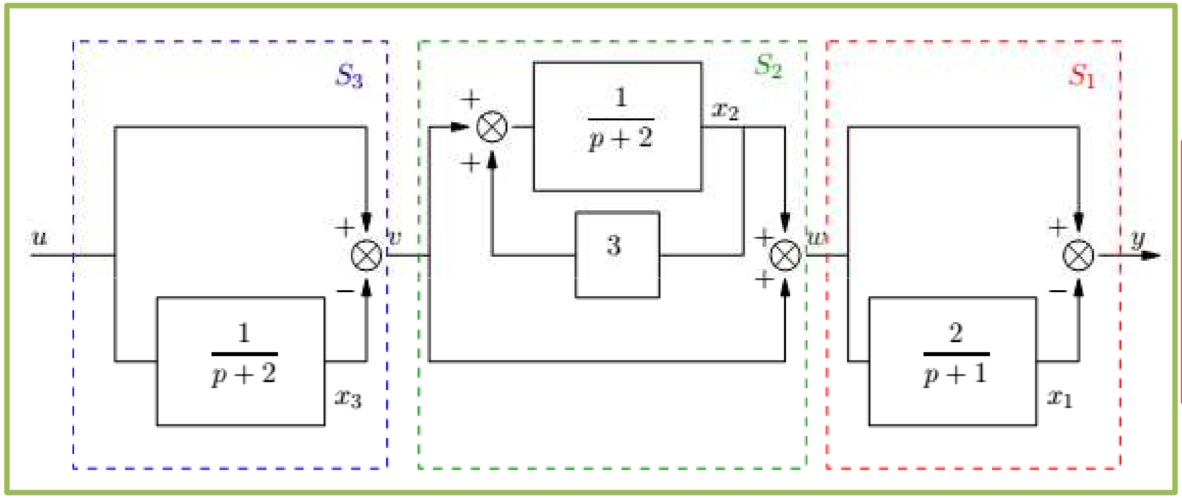
Schéma synthétique de la décomposition de Kalman



Chap. 3 : Commandabilité & Observabilité des Systèmes

IV. Application : les systèmes composites

On considère le système composite de la figure suivante, formé de trois systèmes en cascade. Une représentation d'état est d'abord établie en utilisant x1 , x2 et x3 comme variables d'état.



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$$

Système est d'ordre 3 et a pour modes {−1; 1; −2}.
Matrices de commandabilité et d'observabilité :

$$Q_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad Q_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Elles sont toutes deux de rang 2 ce qui indiquent qu'il existe un mode non commandable et un mode non observable.

une réalisation diagonale possible en utilisant la matrice de passage V :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CV = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D = 1.$$

Cette réalisation diagonale, fait apparaître que le mode -1 est non commandable et que le mode 1 est non observable.

Interprétation 1: Les trois équations différentielles relatives à chaque sous système conduisent à : $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \ddot{u} + \dot{u}.$

une équation différentielle d'ordre 2 qui laisse penser que le système est d'ordre 2.

Les modes associés sont -1 et -2 : perte du mode non observable (1).

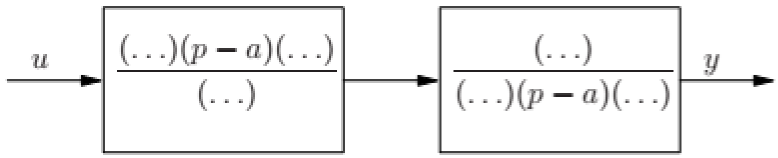
Interprétation 2 : La fonction de transfert globale du système est : $G(p) = S_1(p)S_2(p)S_3(p) = \frac{p}{p+2}.$

perte du mode non observable (1) et du mode non commandable (-1).

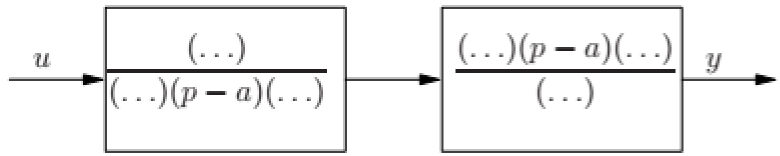
Conclusion :

- ✓ L'équation différentielle ne représente que la partie observable du système.
- ✓ La fonction de transfert ne représente que la partie commandable et observable du système.

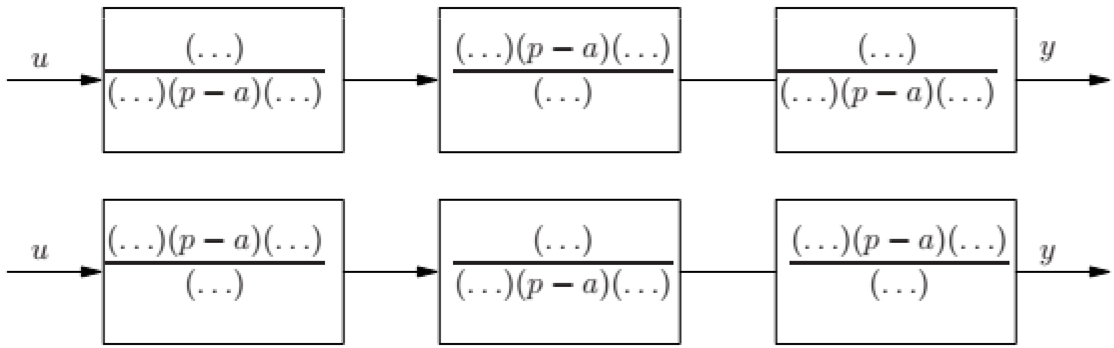
Relation (structure, commandabilité & observabilité)



Cas 1 : mode a non commandable



Cas 2 : mode a non observable



Cas 3 : mode a non commandable et non observable

Toute réalisation restreinte à la partie commandable et observable d'un système est dite réalisation minimale.