L1 SA & SN Semestre 2

Traitement Numérique de l'Information (Archi 1)

Thème 2 : Algèbre de Boole et fonction logique

UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Algèbre de Boole

❑ Plan

Introduction

- **Les systèmes automatiques qui nous entourent sont souvent de nature numérique, i.e. :**
  - manipulent des signaux logiques représentés par 2 états possibles (0 ou 1)
  - Fonctionnent en Tout ou Rien
- **Exemples:**
  - Interrupteur ON/OFF
  - Déplacement vers le haut/bas d'un escalier roulant
  - Gestion d'un ascenseur
- **Pour réaliser ces systèmes avec des informations ne possédant que 2 états (ou valeurs) on utilise l'algèbre de Boole**

Introduction

Électronique Numérique

- Chaque circuit électronique fournit une ou plusieurs fonctions bien déterminées .
- Exemple : La fonction d'arrêt de la machine séchante dépend de 3 variables qui sont le taux d'humidité, la température et le temps de séchage programmé. Ces variables ne peuvent prendre que 2 valeurs : 0 ou 1 (par exemple, température =1 si supérieure à un seuil et 0 sinon).
- Pour concevoir et réaliser un tel circuit, on doit avoir un modèle mathématique de la fonction réalisée par ce circuit. Ce modèle s'appuie sur le système binaire.
- Ce modèle mathématique est celui de Boole.

Informatique

- Dans la machine, les informations sont représentées par des séquences de bits = mots mémoire. Le bit (binary digit) ne peut prendre que la valeur 0 ou 1.
- Pour réaliser des opérations avec ces informations, on doit avoir une algèbre prenant en compte le système binaire.
- On utilise l'algèbre de Boole.

Définition

- **C'est une algèbre mise en oeuvre en 1847 par le mathématicien George BOOLE (1815-1864) pour étudier la logique.**
- **Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications notamment en informatique, automatisme et électronique. Elle fut utilisée la première fois en 1938 pour les circuits de commutation téléphonique par Claude Shannon.**
- **L'algèbre de Boole permet la mise en équation de systèmes qui possèdent 2 états, ces fonctions sont appelées des fonctions logiques.**
  - Un tel système ne peut se trouver que dans l'un des 2 états, dont l'un est le complément de l'autre
    - Ex : La Porte est ouverte ou fermée (non ouverte)

Définition

❑ Variables booléennes

- ❖ C'est une variable qui ne peut prendre que 2 valeurs : 0 ou 1, elle est représentée par une lettre. Ex : A, b, L

❑ Fonctions booléennes

- ❖ Une fonction logique ou fonction booléenne est le résultat de la combinaison d'une ou plusieurs variables booléennes reliées entre elles par des opérateurs booléens.

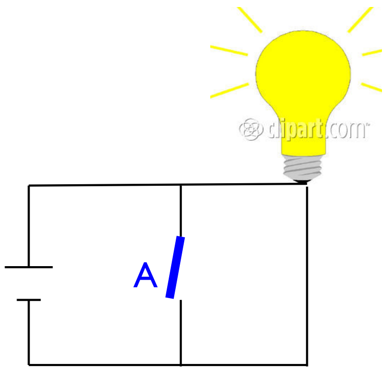
Opérateurs booléens et leurs propriétés

- **Les opérateurs de l'algèbre de Boole et leurs différentes notations**

Complément (unaire)	INV	$\overline{}$
OU	OR	$+$
ET	AND	$\cdot$

- **Leurs représentations**
  - Schéma à contact électrique
  - Table de vérité
  - Forme algébrique

Complément



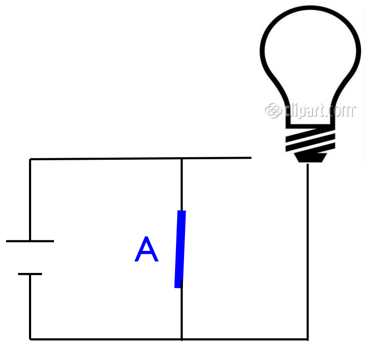


Schéma à contact électrique

Variable d'entrée — Variable de sortie

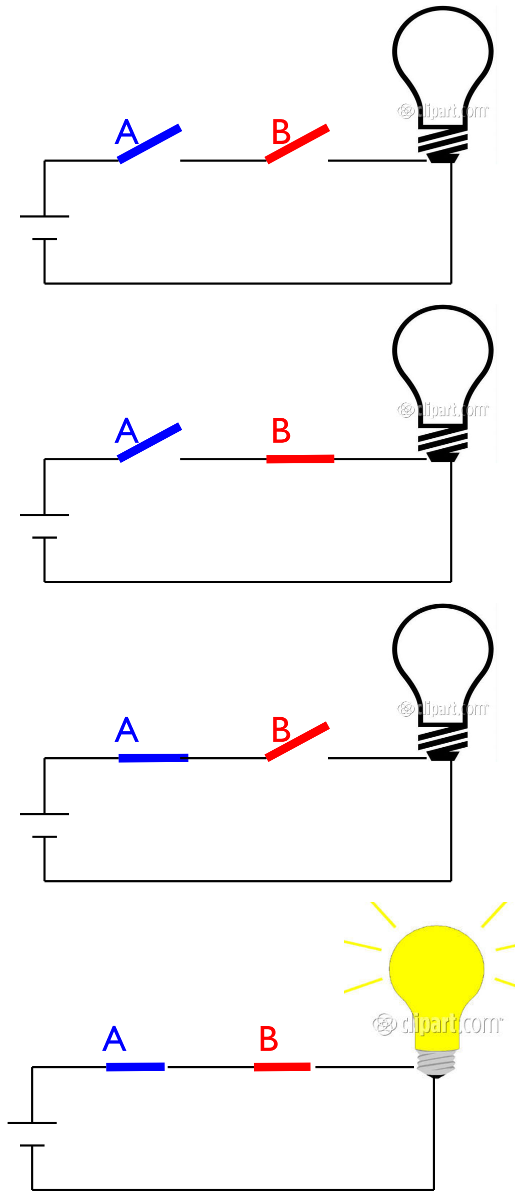
A	L
0	1
1	0

Table de vérité

$$\boxed{L = \overline{A}}$$

Forme algébrique

ET (AND)

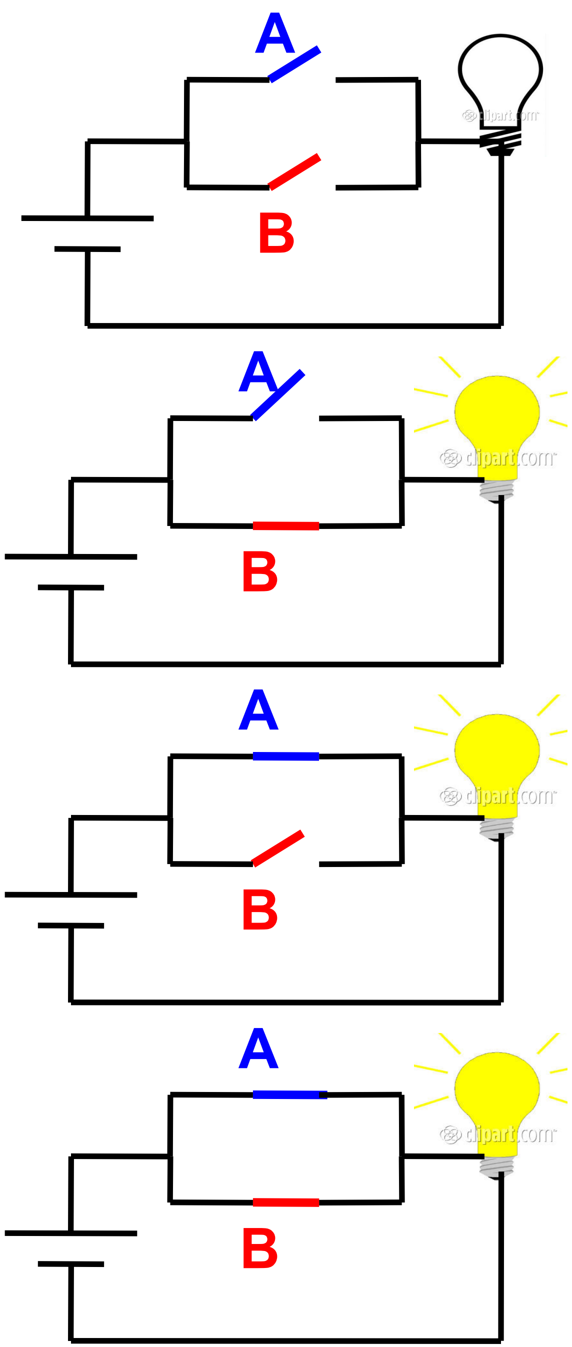


A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\boxed{L = A \cdot B}$$

- L'opérateur ET est **commutatif**
  - **A.B = B.A (P1)**
- L'opérateur ET est **associatif**
  - **A. (B.C)=(A.B).C=A.B.C (P2)**

OU (OR)



A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$\boxed{L = A + B}$$

- L’opérateur OU est **commutatif**
  - **A+B = B+A (P1*)**
- L’opérateur OU est **associatif**
  - **A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C (P2*)**

Théorèmes

Propriétés des opérateurs ET et OU

Élément neutre

- 0 est l'élément neutre de l'opérateur OU
  - $A + 0 = A$ (P3*)
- 1 est l'élément neutre de l'opérateur ET
  - $A \cdot 1 = A$ (P3)

Élément absorbant

- 0 est l'élément absorbant de l'opérateur ET
  - $A \cdot 0 = 0$ (P4)
- 1 est l'élément absorbant de l'opérateur OU
  - $A + 1 = 1$ (P4*)

Théorèmes

Propriétés des opérateurs ET et OU

- **Distributivité**
  - Les opérateurs ET et OU sont distributifs l'un par rapport à l'autre
    - $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ (P5)
    - $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ (P5*)
- **Idempotence (redondance)**
  - $A + A = A$ (P6*)
  - $A \cdot A = A$ (P6)
- **Propriété du complément**
  - $A + \overline{A} = 1$ (P7*)
  - $A \cdot \overline{A} = 0$ (P7)

Théorèmes

Dualité

- Si l'équation suivante est vraie : $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$
- Alors par dualité en remplaçant tous les ET par des OU et tous les OU par des ET on a : $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Théorèmes de De Morgan

- 1er Théorème (T1)
  - $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$
- 2ème Théorème (T1*)
  - $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Théorème du consensus (T2)

- $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot \overline{a} = a \cdot b + c \cdot \overline{a}$

Multiple du complément (T3*)

- $a \cdot \overline{b} + b = a + b$

En se basant sur :

- [P1] $\boldsymbol{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\boldsymbol{a}$ [P1*] $\boldsymbol{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \boldsymbol{a}$
- [P2] $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c} = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}).\boldsymbol{c}$ [P2*] $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
- [P3] $\boldsymbol{a}.\mathbf{1} = \boldsymbol{a}$ [P3*] $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$
- [P4] $\boldsymbol{a}.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [P4*] $\boldsymbol{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$
- [P5] $\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$
- [P6] $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ [P6*] $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
- [P7] $\boldsymbol{a}.\overline{\boldsymbol{a}} = \mathbf{0}$ [P7*] $\boldsymbol{a} + \overline{\boldsymbol{a}} = \mathbf{1}$

Démontrer

- **P5*** $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$
- **T2 et son dual T2***
- **T3 et son dual T3***
- **T4** $\overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{a}$

P5*

- $\boldsymbol{a + (b.c) = (a + b).(a + c)}$
- $\boldsymbol{(a + b).(a + c) = a \cdot a + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot c}$ [P5]
- $\boldsymbol{a + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot c}$ [P6]
- $\boldsymbol{a.1 + a \cdot c + b \cdot a + b \cdot c}$ [P3]
- $\boldsymbol{a \cdot (1 + c) + b \cdot a + b \cdot c}$ [P5]
- $\boldsymbol{a.1 + b \cdot a + b \cdot c}$ [P4*]
- $\boldsymbol{a \cdot (1 + b) + b \cdot c}$ [P5]
- $\boldsymbol{a.1 + b \cdot c}$ [P4*]
- $\boldsymbol{a + b \cdot c}$ [P3]

T2

- $a \cdot b + c \cdot \bar{a} = a.b.(c + \bar{c}) + \bar{a}.c.\left(b + \bar{b}\right)$ [P3] [P7*]
  $= a.b.c + a.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c$ [P5]
  $= a.b.c + a.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + \bar{a}.\bar{b}.c + a.b.c + \bar{a}.b.c$ [P6]
  $= a.b.(c + \bar{c}) + \bar{a}.c.\left(b + \bar{b}\right) + b.c.(a + \bar{a})$ [P5]
  $= a.b + \bar{a}.c + b.c$ [P3] [P7*]

T2*

- $(a + b).(\bar{a} + c).(b + c) = (a + b).(c + \bar{a}.b) = a.c + \bar{a}.a.b + b.c + b.\bar{a}.b$
- $= a.c + b.c + \bar{a}.b = a.\bar{a} + a.c + b.c + \bar{a}.b = a.(\bar{a} + c) + b.(\bar{a} + c)$
  $= (a + b).(\bar{a} + c)$

- **T3**
  - $a.(\bar{a}+b)=a.\bar{a}+a.b=0+a.b=a.b$
- **T3***

$a+\bar{a}.b$

$=a.1+\bar{a}.b$ **[P3]**

$=a.\left(\bar{b}+b\right)+\bar{a}.b$ **[P7*]**

$=a.\bar{b}+a.b+\bar{a}.b$ **[P5]**

$=a.b+\bar{a}.b+a.b+a.\bar{b}$ $[\boldsymbol{P6}]$

$=(a+\bar{a}).b+a.\left(b+\bar{b}\right)$ **[P5]**

$=a+b$ **[P7*] [P3]** [P1]

- **T4 =** $\bar{\bar{a}}$
  - $\bar{\bar{a}}=\bar{\bar{a}}.1$
  - $\bar{\bar{a}}.(a+\bar{a})=\bar{\bar{a}}.a+\bar{\bar{a}}.\bar{a}=\bar{\bar{a}}.a+0=\bar{\bar{a}}.a+\bar{a}.a=(\bar{\bar{a}}+\bar{a}).a=1.a=a$

Fonctions booléennes et leurs représentations

- **Une fonction booléenne est définie par la donnée de ses valeurs pour les 2^n combinaisons possibles des valeurs de ses n variables booléennes. Elle est entièrement définie par les n-uplets pour lesquels elle prend la valeur 1.**
  - Les opérateurs OU et ET sont des fonctions booléennes à 2 variables
- **Les fonctions booléennes peuvent être représentées de plusieurs manières :**
  - Table de vérité
  - Forme algébrique
  - …

Table de vérité

- **L'état 0 ou 1 de la fonction pour les 2^n combinaisons de n variables est donné dans la table de vérité**
  - Les opérateurs ET et OU sont représentés par une table de vérité à 3 colonnes (2 entrées, 1 sortie) et 4 lignes (2^2 combinaisons)
- **De la table de vérité on déduira l'équation de la fonction (Forme Algébrique)**

Forme algébrique d'une fonction

On représente toutes les combinaisons de variables par des termes

minterme	maxterme
$\overline{A}\cdot\overline{B}$	$A+B$
$\overline{A}\cdot B$	$A+\overline{B}$
$A\cdot\overline{B}$	$\overline{A}+B$
$A\cdot B$	$\overline{A}+\overline{B}$

A	B	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On cherche toutes les combinaison pour lesquelles L= 1

$$L = A\cdot B$$

On cherche toutes les combinaison pour lesquelles L= 0

$$L = (A+B)\cdot(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)$$

Mintermes & Maxtermes

Définition des mintermes

- Soit n variables ($e_1, e_2, \ldots, e_n$): un minterme est composé de n variables liées par des ET, il existe 2^n mintermes notés m_j où j représente le nombre décimal équivalent au nombre binaire désigné par le minterme

$$m_0 = \overline{e_1} \cdot \overline{e_2} \cdot \ldots \cdot \overline{e_n} \ , m_1 = \overline{e_1} \cdot \overline{e_2} \cdot \ldots \cdot e_n \ , \cdots , m_{2^n - 1} = e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n$$

avec variable égale à 0 notée $\overline{e_i}$; variable égale à 1 notée e_i

Définition des maxtermes

- Soit n variables ($e_1, e_2, \ldots, e_n$): un maxterme est composé de n variables liées par des OU, il existe 2^n maxtermes notés M_j où j représente le nombre décimal équivalent au nombre binaire désigné par le maxterme

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \ldots + \mathrm{e}_n \ , \mathrm{M}_1 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \ldots + \overline{\mathrm{e}_n} \ , \cdots , \mathrm{M}_{2^n - 1} = \overline{\mathrm{e}_1} + \ldots + \overline{\mathrm{e}_n}$$

avec variable égale à 0 notée e_i ; variable égale à 1 notée $\overline{e_i}$

$1^{ère}$ forme canonique ou forme disjonctive

- **Toute fonction booléenne peut être exprimée sous forme de somme de mintermes.**
  - Les mintermes dont la somme définit la fonction sont ceux qui donnent 1 pour la fonction dans la table de vérité.
  - Pour mettre une fonction booléenne sous cette forme, il faut faire apparaître chaque variable binaire dans chacun des termes.
  - Si une variable x manque dans un terme, il faut faire le ET de ce terme et de $(x + \bar{x})$
  - Exemple: représenter la fonction $F = a.c + \bar{a}.b$ sous la $1^{ère}$ forme canonique

2ème forme canonique ou forme conjonctive

- **Toute fonction booléenne peut être exprimée sous forme de produit de maxtermes.**
  - Les maxtermes dont le produit définit la fonction sont ceux qui donnent 0 pour la fonction dans la table de vérité.
  - pour mettre une fonction booléenne sous cette forme, il faut:
    - l'écrire sous la forme de termes OU en utilisant la distributivité $x + y.z = (x + y).(x + z)$
    - faire apparaître chaque variable binaire dans chacun des termes.
  - Si une variable x manque dans un terme:

    => faire le OU de ce terme et de $(x.\bar{x})$
  - Exemple: représenter la fonction $F = a.c + \bar{a}.b$ sous la 2ème forme canonique

Passage d'une forme algébrique à l'autre

- Le complément d'une fonction exprimée par une somme de mintermes est la somme des mintermes non exprimés

$$F = \bar{a}.b.\bar{c} + \bar{a}.b.c + a.\bar{b}.c + a.b.c$$

$$F = m_2 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\bar{F} = m_0 + m_1 + m_4 + m_6$$

$$\bar{\bar{F}} = \overline{m_0 + m_1 + m_4 + m_6} = \overline{m_0} . \overline{m_1} . \overline{m_4} . \overline{m_6}$$

- Le complément d'un minterme est le maxterme de même indice $\overline{m_j} = M_j$

- d'où $\bar{\bar{F}} = F = M_0 . M_1 . M_4 . M_6$

Fonctions à 2 variables

- Pour les fonctions booléennes à **2** variables, il y a $2^{\mathbf{2}}$ **= 4** combinaisons des variables
- Il existe $2^{\mathbf{4}}$ **= 16** fonctions booléennes à **2** variables
  - Exemple

x	y	F0
0	**0**	0
0	**1**	0
1	**0**	0
1	**1**	0

$$F0 = 0$$

x	y	F13
0	**0**	1
0	**1**	0
1	**0**	1
1	**1**	1

$$F13 = \sum(m_0, m_2, m_3) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

$$F13 = \prod(M_1) = x + \overline{y}$$

16 fonctions à 2 variables

x	y	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

NAND, NOR

x	y	F7
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F7 = \sum(m_0, m_1, m_2) = \bar{x}\cdot\bar{y} + \bar{x}\cdot y + x\cdot\bar{y}$$

$$F7 = \prod(M_3) = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\text{De Morgan} : \bar{x} + \bar{y} = \overline{x\cdot y}$$

Fonction ET complémentée = NAND

x	y	F1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$F1 = \sum(m_0) = \bar{x}\cdot\bar{y}$$

$$F1 = \prod(M_1, M_2, M_3) =$$

$$(x + \bar{y})\cdot(\bar{x} + y)\cdot(\bar{x} + \bar{y})$$

$$\text{De Morgan} : \bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{x + y}$$

Fonction OU complémentée = NOR

Ces 2 fonctions sont **dites universelles** : on peut exprimer toutes les fonctions uniquement avec des NAND ou des NOR

Expression du complément, du ET et du OU sous forme de NAND et de NOR

$$\overline{A} = \overline{A \,.\, A}$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B}} = \overline{\overline{A} \,.\, \overline{B}}$$

$$A \,.\, B = \overline{\overline{A \,.\, B}}$$

$$\overline{A} = \overline{A + A}$$

$$A + B = \overline{\overline{A + B}}$$

$$A \,.\, B = \overline{\overline{A \,.\, B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

XOR, /XOR

x	y	F6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F6 = \sum(m_1, m_2) = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

$$F6 = \prod(M_0, M_3) = (x + y) \cdot (\overline{x} + \overline{y})$$

$$F6 = x \oplus y$$

Fonction OU exclusif = XOR

x	y	F9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$F9 = \sum(m_0, m_3) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y$$

$$F9 = \prod(M_1, M_2) = (x + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + y)$$

$$F9 = \overline{x \oplus y}$$

Fonction OU exclusif complémentée = /XOR

Simplification d'une fonction logique

- **Soit S définie par la table de vérité suivante**

$$S = \prod (M_0, M_1, M_3)$$

$$S = (A + B + C) \cdot (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C})$$

$$S = \sum (m_2, m_4, m_5, m_6, m_7)$$

$$S = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$$

  - Forme algébrique compliquée, gourmande en code et/ou en circuit électronique

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- **2 méthodes pour simplifier :**
  - Algèbre de Boole
    - Propriétés des opérateurs ET et OU
    - Théorèmes fondamentaux
  - Tableau de Karnaugh

Tableau de Karnaugh

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table de vérité

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Table de Karnaugh

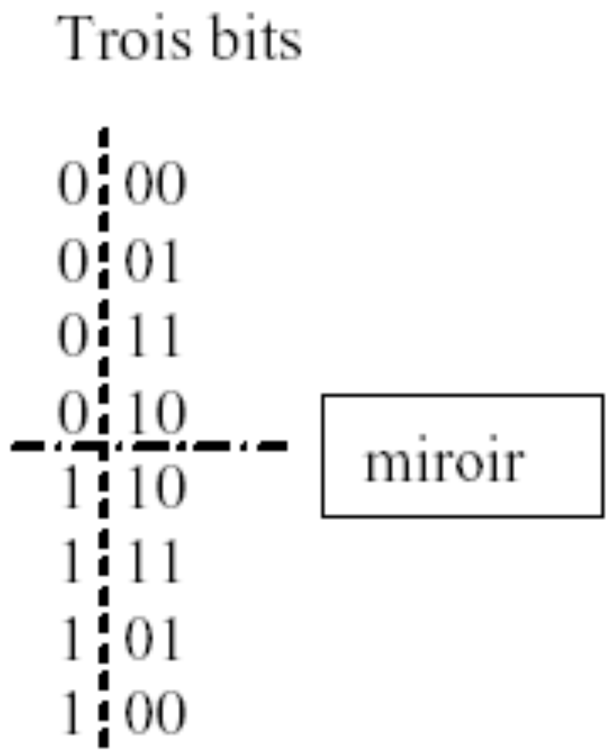
Tableau de Karnaugh

Définition

- Le tableau de Karnaugh est une autre représentation d'une fonction logique, sous forme d'une matrice
- C'est un tableau de 2^n cases, n étant le nombre de variables.
  - Dans chacune des cases, on place l'état de la sortie 0 ou 1 pour les combinaisons d'entrée correspondantes.
  - On utilise le Code de GRAY pour numéroter les lignes et les colonnes et ainsi représenter les 2^n combinaisons de la table de vérité
    - On obtient ainsi des cases adjacentes : 1 seule variable d'entrée change d'état d'une case à l'autre

Code de GRAY
Binaire Réfléchi

- On change le bit de poids faible en premier. Si la combinaison existe, on passe au bit de rang supérieur
- On ne peut changer qu'un seul bit à la fois (d'une combinaison à l'autre)



Utilisation des tableaux de Karnaugh pour simplifier les fonctions *(cas des mintermes)*

- **Regroupement de 2^x cases adjacentes ayant la valeur 1, en commençant par le regroupement le plus grand**
  - Un regroupement de 2^X cases adjacentes permet d'éliminer x variables
  - Les x variables à éliminer sont celles qui **changent d'état dans le regroupement**
  - Chaque regroupement est équivalent à 1 terme de n-x **variables ne changeant pas d'état** liées par des ET, n étant le nombre de variables d'entrée de la fonction
- **L'équation simplifiée de la fonction sera exprimée sous la forme d'une somme de produits. Chaque terme produit correspond à 1 regroupement.**

Exemple

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$$S = \boxed{A} + \boxed{B \cdot \overline{C}}$$

Regroupements autorisés

zw \ xy	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	1	1	0

zw \ xy	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	0	0	0	1

zw \ xy	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Regroupements non autorisés

zw \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

zw \ xy	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	1	0	0

Solutions

xy zw	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

xy zw	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	1	0	0

Fonctions incomplètes

- **Une fonction incomplète est une fonction dont on ne connaît pas l'état pour toutes les combinaisons des entrées.**
  - Car combinaisons jamais rencontrées
  - Car combinaisons impossibles physiquement
    - Exemple : F permettant de déterminer si une case de la grille représentée par son numéro est noire ou blanche. Si la case est noire, alors F doit donner 1

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Simplification d'une fonction incomplète

A	B	C	D	F
0	0	0	0	*
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	*
1	0	1	1	*
1	1	0	0	*
1	1	0	1	*
1	1	1	0	*
1	1	1	1	*

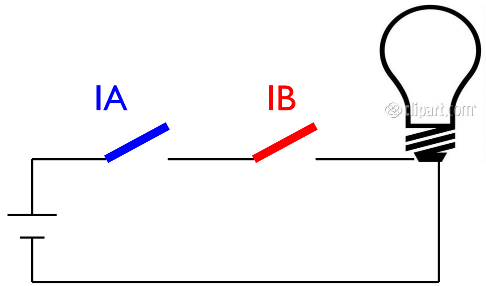
Les * représentent des combinaisons indifférentes

AB \ CD	00	01	11	10
00	*	0	1	1
01	0	0	1	0
11	*	*	*	*
10	0	0	*	*

$$F = C \cdot D + \overline{B} \cdot C$$

Impact des conventions

- **Convention 1**
  - **Interrupteur fermé I=1**
  - **Interrupteur ouvert I=0**
  - **Lampe allumée L=1**
  - **Lampe éteinte L=0**



- **Convention 2**
  - **Interrupteur fermé I=1**
  - **Interrupteur ouvert I=0**
  - **Lampe allumée L=0**
  - **Lampe éteinte L=1**

IA	IB	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

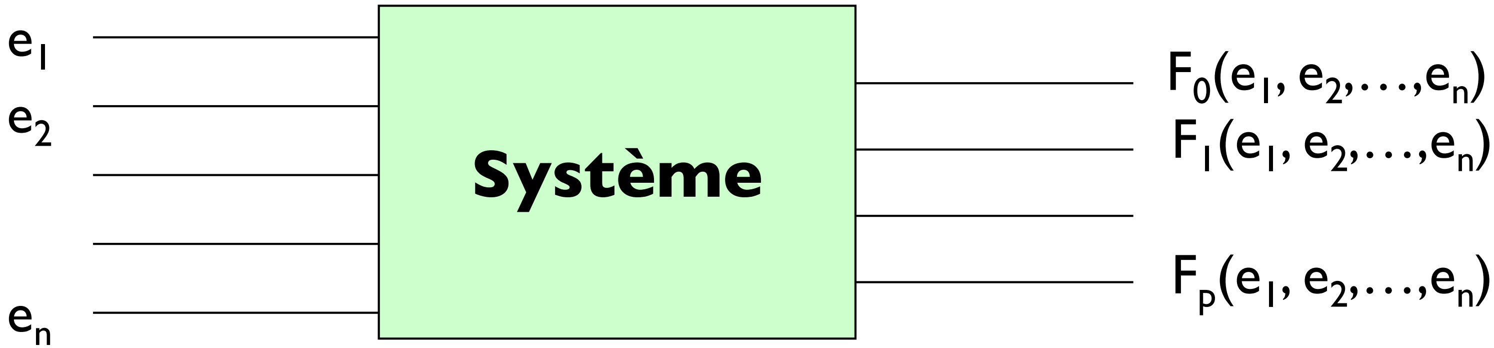
$$L = IA \cdot IB$$

IA	IB	L
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$L = \overline{IA \cdot IB}$$

L’expression algébrique d’un système dépend de la convention choisie

Synthèse d'un système logique



- **Identifier les entrées : n entrées**
- **Identifier les sorties : p sorties**
- **Etablir la table de vérité**
  - n+p colonnes représentant les variables d'entrée et de sortie
  - 2^n lignes représentant toutes les combinaisons possibles des entrées
- **Mettre sous forme algébrique**
  - 1ère forme canonique : somme de produits
  - 2ème forme canonique : produit de sommes
- **Simplification des équations de sortie**
  - Algèbre de Boole
  - Table de Karnaugh

Exemple

- **Gestion de sonnerie d'alerte d'une voiture**
  - Une sonnerie se déclenche dans la voiture lorsque
    - Les feux sont allumés et que vous ouvrez la portière conducteur ou les clefs sont sur le contact et vous ouvrez la portière conducteur