۹۵۳۲۴۰۱۴ آریا خلیقی

۱) الف) برای $x \geq 0$ و هر $a > 0$ ثابت کنید:

$$P(X > a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x)\,dx \overset{a>0}{=} \int_0^a x f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} x f(x)\,dx \geq \int_a^\infty x f(x)\,dx$$

$$\overset{*}{\geq} a\int_a^\infty f(x)\,dx \geq aP(x \geq a) \Rightarrow E[X] \geq aP(x \geq a) \Rightarrow \frac{E[X]}{a} \geq P(x \geq a)$$

(*) چون x همواره بزرگتر از a است (در بازه $(a, +\infty)$)

ب) تغییر متغیر $Y = (X - E[X])^2$ را در نظر بگیرید

$$P(|x - \mu| > a) \leq \frac{\operatorname{var}(x)}{a^2}$$

$$\operatorname{var}[X] = E[\underbrace{(X - E[X])^2}_{Y}] = E[Y]$$

$$|x - \mu| > a \Rightarrow \underbrace{(X - E[X])^2}_{Y} > a^2$$

$$\Rightarrow P(|x - \mu| > a) = P(Y > a^2)$$

$$\frac{E[Y]}{a^2} \geq P(Y \geq a^2)$$

$$\xrightarrow{a^2 = k} \frac{E[Y]}{k} \geq P(Y \geq k) \sim$$ ✓

صورت الف $\Rightarrow \dfrac{\operatorname{var}[X]}{a^2} \geq P(|x - \mu| > a)$

۲) $\mu = 0 \quad \sigma = 2$

$$P(-5 < x < 5) = P\left(-2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{k} < x < 2 \times \frac{5}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$P(A') = P(x > 5) + P(x < -5) \leq \frac{4}{25} \Rightarrow P(x > 5) \leq \frac{4}{25}$$

۲_ الف

$$E[ax+b]=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}ax f(x)\,dx+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}b f(x)\,dx}_{1}$$

$$=aE[x]+b$$

ب)

$$E[xy]=\iint_{-\infty}^{+\infty}xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx\times\int_{-\infty}^{+\infty}y f(y)\,dy$$

$$=E[X]E[Y]$$

ج)

$$\mathrm{Var}[ax+by+c]=E[(ax+by+c-\mu(ax+by+c))^2]$$

$$=E[(ax+by+\cancel{c}-a\mu_x-b\mu_y-\cancel{c})^2]=E[a^2(x-\mu_x)^2]+E[b^2(y-\mu_y)^2]$$

$$=a^2\underbrace{E[(x-\mu_x)^2]}_{\sigma_x^2}+b^2\underbrace{E[(y-\mu_y)^2]}_{\sigma_y^2}+2ab\,\underbrace{E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]}_{\mathrm{cov}(x,y)}$$

$$=a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2+2ab\,\sigma_{xy}$$

۲-۱)

$\sigma^2_{ax-by} = \sigma_x^2 a^2 + \sigma_y^2 b^2$ x و y مستقل از هم‌اند

$$\sigma^2_{ax-by} = E[(ax-by-E[ax-by])^2] = E[(ax-by-a\overbrace{E[x]}^{\mu_x}+b\overbrace{E[y]}^{\mu_y})^2]$$

۰ ← x و y مستقل از هم‌اند

$$= E[(a(x-\mu_x)-b(y-\mu_y))^2] = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 - 2ab\,\cancel{cov(x,y)}$$

$$= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \checkmark$$

۳-

$$cov(x,y) = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$$

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

الف)

$$var\left[\frac{x}{\sigma_x}+\frac{y}{\sigma_y}\right] = \cancel{\left(\frac{1}{\sigma_x}\right)^2 \sigma_x^2}^{\,1} + \cancel{\left(\frac{1}{\sigma_y}\right)^2 \sigma_y^2}^{\,1} + 2\left(\frac{1}{\sigma_x}\times\frac{1}{\sigma_y}\right)\sigma_{xy}$$

$$= 2 + 2\,\frac{\overset{cov(x,y)}{\sigma_{xy}}}{\sigma_x\sigma_y} \to \rho = 2+2\rho(x,y)$$

برای حالت بعد که - است: ضریب σ_y منفی می‌شود:
(ضریب ⊖ در توان ۲ تاثیر ندارد.)

$$2-2\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

ب) در آخر سوالات جواب داده شد. ۱.

ج) ۱

$Y = ax + b$

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y) ①}{\sigma_x ② \; \sigma_y ③}$$

① $Cov(x,y) = E[XY] - E[X]\,E[Y] = E[ax^2 + bx] - E[X] \cdot E[ax+b]$

$= aE[x^2] + b\cancel{E[x]} - aE[x]^2 - b\cancel{E[x]} = a\left(E[x^2] - E^2[x]\right) = a\sigma_x^2$

② $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x$

③ $\sigma_y = E[y^2] - E^2[y] \Rightarrow E[(ax+b)^2] - E^2[ax+b] = E[a^2x^2 + 2abx + b^2]$

$- E^2[ax+b] = a^2E[x^2] + 2ab\cancel{E}[x] + \cancel{b}^2 - a^2E^2[x] - \cancel{b^2} - 2abE[\cancel{x}]$

$= a^2\left(E[x^2] - E^2[x]\right) = a^2\sigma_x^2 \Rightarrow \sigma_y = a\sigma_x$

$$\rho = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x a \sigma_x} = 1$$

۳-د)

$P(x,y)=1 \Rightarrow Y=ax+b \quad a>0$

از قسمت الف داریم:

$$\operatorname{var}\left[\frac{x}{\sigma_x}-\frac{y}{\sigma_y}\right]=2-2\rho(x,y)$$

$$2-2\rho(x,y)\xrightarrow{\rho(x,y)=1} 2-2\times1=0 \Rightarrow \operatorname{var}\left[\frac{x}{\sigma_x}-\frac{y}{\sigma_y}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sigma_x}-\frac{y}{\sigma_y}=C \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x}x-y=C\sigma_y \Rightarrow y=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x-C\sigma_y$$

۴-

$P(X=Y)=P(X=Z)=P(Y=Z)$

$\Rightarrow P(X>Y)=P(Y>Z)=P(Z>x)=0/7$

طبق فرض:

$P(x>y)=P(x>y>z)+P(z>x>y)+P(x>z>y)=0/7$

$P(Y>Z)=P(x>y>z)+P(y>z>x)+P(y>x>z)=0/7$

$P(Z>x)=P(y>z>x)+P(z>x>y)+P(z>y>x)=0/7$

$\Downarrow +$

$=P(x>y>z)+P(z>x>y)+P(x>z>y)+P(x>y>z)+P(y>z>x)$

$+P(y>x>z)+P(y>z>x)+P(z>x>y)+P(z>y>x)$

آنهایی که زیرشان = کشیده شده

$\Rightarrow 1+X=0/7\times3 \Rightarrow X=1/1 \longrightarrow$ جمع احتمالات بیشتر از ۱ شده

۵- الف)

در صورت سوال اشتباه

$$f(k;p)=\begin{cases} p & \text{if } k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$$

$$\mu_x = E[x] = 0\times(1-p)+1\times p = p$$

$$\sigma_x^2 = 0(1-p)+(1)^2 \times p - p^2 = p-p^2$$

ب)

$$E[x] = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k} = np\sum\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$= np\sum_{1}^{n}\binom{\overset{\alpha}{n-1}}{\underset{\beta}{k-1}}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} = np\underbrace{\sum_{\beta=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{\beta}p^{\beta}q^{\alpha-\beta}}_{1} = np$$

$$E[x^2] = \sum_{0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n} k\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k=0}^{m}(\alpha+1)p^{\alpha}q^{\beta-\alpha}$$

$$\sigma_x^2 = E[x^2]-E^2[x] = np(1-p)+n^2p^2-(np)^2 = np(1-p)$$

(۲- ه

$$f(k;\lambda)=\frac{\lambda^{k}e^{-\lambda}}{k!}\qquad k=0,1,2,\dots$$

$$E[X]=\sum_{k\geq 0} k\frac{1}{\cancel{k!}_{(k-1)!}}\lambda^{k}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}\lambda^{k}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}\times\lambda^{k-1}=\lambda e^{-\lambda}.e^{\lambda}=\lambda$$

$$\mathrm{var}(X)=E[X^{2}]-E^{2}[X]=E[x(x-1)+x]-E^{2}[x]=E[x(x-1)]+E[\cancel{x}]^{\lambda}-E[\cancel{x}]^{2}_{\lambda^{2}}$$

$$E[x(x-1)]=\sum_{0}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x-2)!}$$

$$=\lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=\lambda^{2}e^{-\lambda}.e^{\lambda}=\lambda^{2}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{var}(x)=\lambda^{2}+\lambda-\lambda^{2}=\lambda$$

(و

$$E[x]=\int_{0}^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

$$E[x^{2}]=\int_{0}^{\infty}x^{2}\lambda e^{-\lambda x}dx\xrightarrow{\text{انتگرال بالا}}\frac{2}{\lambda^{2}}$$

$$\mathrm{var}[x]=\frac{2}{\lambda^{2}}-\frac{1}{\lambda^{2}}=\frac{1}{\lambda^{2}}$$

۴ـ الف)

$P(x,y) = P(y)P(x|y) \qquad E[x|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y)\, dx$

$E(x) = E(E(x|y))$

مرحله

$E[E(x|y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x|y) \cdot f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y) f(y)\, dx\, dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x,y)}{\cancel{f(y)}} \cancel{f(y)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\, dx\, dy = E[x]$ ✓

ب)

علی قصد دارد یک فصل از کتاب احتمال یا یک فصل از کتاب تاریخ را مطالعه

$P(A) \rightarrow$ کتاب تاریخ را مطالعه کند. $\qquad P(A') \rightarrow$ کتاب احتمال را مطالعه کند $\qquad * E[x] = \lambda$

$P(A) \cdot E[x|A] + P(A') E[x|A'] = \frac{1}{۲} \times \lambda_A + \frac{1}{۲} \times \lambda_{A'} = \frac{1}{۲} \times ۵ + \frac{1}{۲} \times ۲ = ۳/۵$

سوال ۸ ← پاسخ در آخر

سوال ۷ ← پاسخ در آخر

Scanned by CamScanner

۷)

میانگین زمان رسیدن هر مسافر

$E[x] = \frac{1}{5} = 12\,min$

اگر منتظر دو مسافر دیگر شود:

$\left(\frac{2 \times \cancel{12}^{4}}{\cancel{60}_{\cancel{4}}} \times 20\right) + 5 = 13$

اگر اسنپ بگیرد:

$cost \to 20$

یعنی اگر علی منتظر دو مسافر دیگر شود به صورت میانگین ۷ هزار تومان سود می کند.

۸ - الف)

$E(T_F | A) = E(1 + T_F | B) = E(T_F | B) + 1$

$E(T_F | B) = \frac{1}{3}\left(E(T_F | A) + E(T_F | C) + E(T_F | D)\right) + 1$

$E(T_F | C) = \frac{1}{2}\left(E(T_F | B) + E(T_F | E)\right) + 1$

$E(T_F | D) = \frac{1}{2}\left(E(T_F | B) + E(T_F | E)\right) + 1$

$E(T_F | E) = \frac{1}{3}\left(E(T_F | C) + E(T_F | D) + E(T_F | F)\right) + 1$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}E(T_F|A) - \frac{1}{3}E(T_F|C) - \frac{1}{3}E(T_F|D) = 2 \\ \frac{1}{2}E(T_F|A) - E(T_F|C) + \frac{1}{2}E(T_F|E) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}E(T_F|A) - E(T_F|D) + \frac{1}{2}E(T_F|E) = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}E(T_F|C) + \frac{1}{3}E(T_F|D) - E(T_F|E) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(T_F|A) = 18 \\ E(T_F|C) = 15 \\ E(T_F|D) = 15 \\ E(T_F|E) = 11 \\ E(T_F|B) = 17 \end{cases}$$

$E(T_F + 2 | C) = E(T_F | C) + 2 = 15 + 2 = 17$

ب)

۸ - ج) حالت هایی که با ۴ خانه می توان به F رسید:

$$\overset{A\to B}{1}\times\underset{B\to D}{\frac{1}{3}}\times\overset{D\to E}{\frac{1}{2}}\times\underset{E\to F}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{18}$$

$$\overset{A\to B}{1}\times\underset{B\to C}{\frac{1}{3}}\times\overset{C\to E}{\frac{1}{2}}\times\underset{E\to F}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

د) چون خانه اول A می باشد باید حتما به خانه B برویم (۱ گام) و حتما باید از E به F برویم (۱ گام)

پس تا اینجا ۲ گام حرکت شده و ۳ گام مانده که مسیری که از B به E باشد و با ۳ گام طی شود

وجود ندارد پس احتمال صفر است.

۱۰) الف)

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{x_1} 6x_2\,dx_2 = 3x_2^2 \Big]_0^{x_1} = 3x_1^2$$

$$\int_0^1 f_{X_1}(x_1)\,dx_1 = \int_0^1 3x_1^2\,dx_1 = x_1^3 \Big|_0^1 = 1 \checkmark$$

ب)

$x_2 < x_1 \checkmark$

$$P(x_2 < 0.5 \mid x_1 = 0.7) = \frac{P(x_2 < 0.5 ,\ x_1 = 0.7)}{P(x_1 = 0.7)} = \int_0^{0.5} 6x_2\,dx_2 \times \frac{1}{3 \times 0.49}$$

$$\frac{\cancel{3}x_2^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}}}{\cancel{3} \times 0.49} = \frac{\frac{1}{4}}{0.49} \checkmark$$

۹) الف)

$① \to 2 \qquad E[x \mid y=1] = E[x] + 2$

$② \to 3 \qquad E[x \mid y=2] = E[x] + 3$

$③ \to 5 \qquad E[x \mid y=3] = E[x] + 5 = E[x]$

$$\mu_x = 0.5(\mu_x + 2) + 0.2(\mu_x + 3) + \alpha\,\mu_x \Rightarrow \mu_x = 0.5\mu_x + 1 + 0.3\mu_x + 0.9 + 0$$

$$\Rightarrow 0.2\mu_x = 1.9 \Rightarrow \mu_x = 9.5$$

Scanned by CamScanner

① → ۲

② → ۳

③ → آزادی

ب) آزادی در ۰ روز ← ③ $\in \frac{1}{3}$

" در ۲ روز ← $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

" " ۳ " ← $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

" " ۵ " ← $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

$$E[x] = 0\times\frac{1}{3} + 2\times\cancel{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{6}} + 3\times\cancel{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{6}} + \frac{1}{3}\times 5 = 0 + \frac{5}{6} + \frac{5}{3} = 2.5$$

۲) برای حالت الف

$$Var[x] = E[x^2] - E^2[x]$$

$$E^2[x] = 9.5^2$$

$$E[x^2] = 0\times 0.2 + (3+E[x])^2\times 0.3 + (2+E[x])^2\times 0.5 = \frac{1}{2}(4+4E[x]+E[x^2])$$

$$+\,0.3(9+6E[x]+E[x^2]) = 2+2E[x]+0.5E[x^2]+2.7+1.8E[x]+0.3E[x^2]$$

$$= 4.7+3.8E[\overset{9.5}{\cancel{x}}]+0.8E[x^2] = 4.7+36.1+0.8E[x^2] \Rightarrow E[x^2] = 204$$

$$Var[x] = 204 - 90.25 = 113.75$$

برای حالت ب) حال داریم:

$$E[x^2] = 0\times\frac{1}{3} + 4\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 25\times\frac{1}{3} = 10.5$$

$$10.5 - (2.5)^2 = 4.25$$