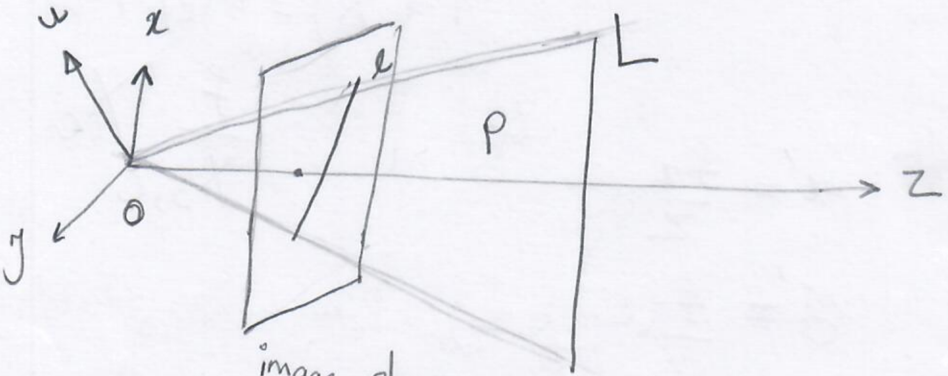
(۹۸۱۰۵۸۹۸) آریان مهاتیلی

تمرین اول

سوال اول

(a) Preimage of a line : Preimage یک خط، مجموعه‌ای در دنیای سه بعدی است که همان خط را در صفحه‌ی تصویر بدست می‌دهد. برای یک خط این مجموعه صفحه‌ای است که از O (مرکز دوربین) و آن خط می‌گذرد. در تصویر زیر صفحه‌ی P، Preimage خط l است و L یکی از خطوطی است که در دنیای 3 بعدی به l تصویر می‌شود



(b) coimage of a line : coimage یک خط زیرفضایی از فضای $\mathbb{R}^3$ است که به طور یکتا مشخص می‌شود و بر Preimage آن خط عمود است. در شکل بالا خطی که توسط بردار $\vec{v}$ ساخته می‌شود، coimage خط l است.

(c) gimbal lock : این پدیده در سیستم چرخش اویلر رخ می‌دهد به این صورت که اگر در سلسله مراتب زیر

$$R = R_x R_y R_z$$

Y را به اندازه‌ی $\pi/2$ بچرخانیم، دو محور چرخش X و Z هم‌تراز می‌شوند و چرخش یک درجه‌ی آزادی خود را از دست می‌دهد.

در این حالت برای چرخش در محور از دست رفته باید هر سه محور چرخانده شوند که این پدیده می‌تواند مشکلاتی را بوجود آورد.

سوال 2

دو نقطه‌ای زیر را در فضای دو بعدی در نظر بگیرید.

$$P_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 : \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

خطی که از این دو نقطه می‌گذرد به صورت زیر است:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1) y + (y_1 - y_2) x + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

پس بردار نرمال این خط به صورت زیر است.

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

حال در فضای homogenous دو نقطه به صورت $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ خواهد بود که ضرب خارجی آن‌ها برابر است با:

$$\boxed{\vec{O} = \vec{P}_1^h \times \vec{P}_2^h = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \vec{\omega}}$$

سوال 3

ابتدا نمایش homogeneous خط ها را بدست می آوریم:

$$l_1: \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$l_2: \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$l_3: \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن رئوس های مثلث، ضرب خارجی دو به دوی خطوط را بدست می آوریم.

$$l_1 \times l_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$l_1 \times l_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$l_2 \times l_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سوال ۴

(a, b)

خطی که در دنیای سه بعدی قرار دارد، در نمایش homogeneous به صورت زیر است:

$$L: X^h(s) = X^h(0) + sT^h$$

حال فرض می‌کنیم که از قبل مختصات دوربین و دنیا با هم منطبق شده‌اند. یعنی در واقع خط بالا (L) معادله‌ی خط نسبت به مختصات دوربین است. پس تصویر این خط به صورت زیر خواهد بود.

$$l: MX^h(s) = MX^h(0) + sMT^h$$

که در این جا $\underset{3\times3}{K}\,\underset{3\times4}{\Pi_0}$ = M یک ماتریس 3x4، و حاصل ضرب ماتریس $K = \begin{bmatrix} fs_x & 0 & o_x \\ 0 & fs_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\Pi_0 = [I|0]_{3\times4}$ است.

در نتیجه اگر نقاط خط تصویر شده را p نامگذاری کنیم، معادله به صورت زیر در خواهد آمد

$$P^h(s) = P^h(0) + st^h$$

که $t^h = MT^h$

حال برای تبدیل فضای homogeneous به فضای دو بعدی داریم:

$$P(s) = \overset{A}{\frac{\overset{h}{P}(0)}{\overset{h}{P}_3(s)}} + \overset{B}{\frac{s}{\overset{h}{P}_3(s)}}\, t^{h}$$

که داریم:

$$\overset{h}{P}_3(s) = \overset{h}{P}(0) + \underbrace{s \underbrace{[0,0,1]}_{K \text{ سطر سوم ماتریس}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\Pi_0} T^{h}}_{\beta}$$

حال اگر $s \to \infty$. داریم:

$$\lim_{s \to \infty} A = 0$$

$$\lim_{s \to \infty} B = \frac{1}{\beta}$$

یعنی تصویر نقطه‌ی نهایت برابر خواهد بود با:

$$\lim_{s \to \infty} P(s) = \frac{1}{\beta} t^{h} = \boxed{\frac{1}{\beta} M T^{h}}$$

توجه کنید که مختصات تصویر نقطه‌ی نهایت تنها به T بستگی دارد. پس چون خطوط موازی T یکسانی دارند، همه در این نقطه یکدیگر را قطع خواهند کرد.

ج) به دو روش اثبات می‌کنیم که اگر دو خط موازی روی صفحه‌ی $z=\alpha$ باشند، یکدیگر را در تصویر قطع خواهند کرد.

روش اول

طبق قسمت قبل چند دسته خط موازی یکدیگر را در نقطه‌ای $\frac{1}{\beta}MT^h$ تصویر قطع می‌کنند. برای اینکه این نقطه نیز در بی‌نهایت باشد، باید $\beta \to 0$. به عبارتی باید:

$$[0,0,1]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}T^h = 0$$

برای اینکه این اتفاق بیفتد، باید درایه‌ی سوم T صفر باشد که این به این معنی است که خط روی صفحه‌ی $z=\alpha$ قرار دارد.

روش دوم: فرض کنید یک خط داریم که معادله‌ی آن به صورت $\begin{cases} z=\alpha \\ ax+by=c \end{cases}$ است. در این صورت برای تصویر داریم:

$$x' = \frac{f}{z}x$$

$$y' = \frac{f}{z}y = \frac{f}{z}y$$

$$z = f$$

که واضح است که اگر $x \to \pm\infty$ یا $y \to \pm\infty$، x', y' نیز به ترتیب بی‌نهایت خواهند بود.

این در حالی است که اگر فرض کنیم معادله‌ی خط به صورت $\begin{cases} x=\alpha \\ ay+bz=c \end{cases}$ باشند، خواهیم داشت:

$$x' = \frac{f}{z} x = \frac{f}{z} \alpha$$

$$y' = \frac{f}{z} y = \frac{f}{z} \frac{(c - bz)}{a}$$

$$z' = f$$

که در این صورت اگر $z \to \pm\infty$ ، خواهیم داشت $x' = 0$ ، $y' = -\frac{b}{a}$ ، $z' = f$

یعنی همه خطوط موازی با شیب $-\frac{b}{a}$ در صفحه $x = \alpha$ یکدیگر را در نقطه $(0, -\frac{b}{a})$ تصویر
قطع خواهند کرد.

$\boxed{\checkmark}$