آریان مختاری (۹۵۱۰۵۸۹۵)

سوال ۱

یک سیگنال $u[n]$ قویا ایستا است اگر توزیع توام هر سری مانند $\{u[l] \quad 1\le l\le k\}$ با توزیع توام این سری به صورت جابه‌جا شده $(\{u[l+m] \quad 1\le l\le k\})$ برای هر m و k صحیح برابر باشد. یک سیگنال ایستا است اگر دارای شرایط زیر باشد:

۱) میانگین در همه‌ی نقاط برابر باشد:

$$E[u[n]]=\mu \qquad \forall n\in \mathbb{Z}$$

۲) کوواریانس بین دو نقطه‌ی n و n' تابعی از $n-n'$ باشد.

$$r(n,n')=f(n-n')$$

ماتریس های auto-covariance و auto-correlation ویژگی های زیر را دارند.

۱) این ماتریس ها هرمیتی هستند.

$$R_{i,j}=R^*_{j,i}$$
$$C_{i,j}=C^*_{j,i}$$

۲) این ماتریس ها نیمه‌معین مثبت هستند.

$$\forall x\in \mathbb{R}^n \begin{cases} x^T R x\ge 0 \\ x^T C x\ge 0 \end{cases}$$

اثبات ویژگی اول را می‌توانید در زیر مشاهده کنید. توجه کنید که چون ماتریس auto correlation و ماتریس auto covariance در حالتی که میانگین سیگنال صفر باشد، برابرند، اثبات برای ماتریس کوواریانس، درستی اثبات برای ماتریس auto correlation را نیز به دنبال دارد.

$$R_{i,j} = E\left[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)^*\right] = E\left[\left((X_i-\mu_i)^*(X_j-\mu_j)\right)^*\right] =$$

$$\left(E\left[(X_j-\mu_j)(X_i-\mu_i)^*\right]\right)^* = R_{j,i}^* \Rightarrow$$

$\boxed{\text{ماتریس کوواریانس هرمیتی است}}$

سوال 2

(a) ماتریس ایستا است. در نتیجه: $\gamma(\tau) = Cov(x_t, x_{t+\tau})$

$$\Rightarrow \gamma(0) = Cov(x_t, x_t) = Var(x_t)$$

$$\boxed{Var(x_t) = \gamma(0) = 16 + 8 = 24}$$

(b)

$$\gamma(\tau) \xrightarrow{FFT} PSD(x(\tau))$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}(8\cos 10\pi\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau}_{A} +$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0}(16e^{5\tau}\cos 20\pi\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau}_{B} + \underbrace{\int_{0}^{\infty}(16e^{-5\tau}\cos 20\pi\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau}_{C}$$

برای محاسبه عبارت بالا ابتدا چند قضیه را اثبات می کنیم.

قضیه I :

$$f(t) = u(t)e^{-at}\cos\omega_0 t \xrightarrow{FFt} \frac{a+j\omega}{\omega_0^2+(a+j\omega)^2}$$

اثبات :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\cos\omega_0 t\, e^{-j\omega t}\,dt$$

می دانیم :

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}}{2}$$

پس :

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-at}\times e^{-j\omega_0 t}\times e^{-j\omega t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-at}\times e^{j\omega_0 t}\times e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-t(a+j\omega_0+j\omega)}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-t(a-j\omega_0+j\omega)}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+j\omega_0+j\omega}+\frac{1}{a-j\omega_0+j\omega}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2a+2j\omega}{\omega_0^2+(a+j\omega)^2}\right)=\boxed{\frac{a+j\omega}{\omega_0^2+(a+j\omega)^2}}$$

قضیه‌ی II :

$$\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FFT} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

اثبات:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}+\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}\,dt=$$

$$\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}=\boxed{\cos\omega_0 t}$$

حال که دو قضیه‌ی بالا را اثبات کردیم، به مسئله‌ی اصلی باز می‌گردیم:

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}8\cos 10\pi\tau\, e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

طبق قضیه‌ی II و خطی بودن تبدیل فوریه داریم:

$$A=8\pi\left(\delta(\omega-10\pi)+\delta(\omega+10\pi)\right)$$

تا اینجا می‌دانیم که B و C به ترتیب تبدیل فوریه‌ی توابع زیر هستند:

$$f_B(t) = u(-t)\, e^{-5(-t)} \cos 20\pi(-t)$$

$$f_C(t) = u(t)\, e^{-5t} \cos 20\pi t$$

در قضیه‌ی I ثابت کردیم،

$$C = \frac{5+j\omega}{400\pi^2 + (5+j\omega)^2}$$

حال برای یافتن B قضیه‌ی دلخواه را اثبات می‌کنیم:

قضیه‌ی III:

$$x(t) \xleftrightarrow{FFT} X(j\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(-t) \xleftrightarrow{FFT} X(-j\omega)$$

اثبات: تبدیل فوریه‌ی $y(t) = x(-t)$ برابر است با:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = -\int_{\infty}^{-\infty} x(-t)\, e^{-j(-\omega)t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j(-\omega)t}\, dt = \boxed{X(-j\omega)}$$

با استفاده از قضیه‌ی III:

$$B = \frac{5-j\omega}{400\pi^2 + (5-j\omega)^2}$$

پس :

$$PSD(x(\tau)) = A + B + C =$$

$$\boxed{8\pi\left(\delta(\omega-10\pi)+\delta(\omega+10\pi)\right) + \frac{5+j\omega}{400\pi^2+(5+j\omega)^2} + \frac{5-j\omega}{400\pi^2+(5-j\omega)^2}}$$

(c)

$$ACF(x(t)) = \frac{Cov(x_t, x_{t+\tau})}{\sigma_t \, \sigma_{t+\tau}} = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma_t \sigma_t} =$$

$$\frac{\gamma(\tau)}{Var(x_t)} = \frac{\gamma(\tau)}{24} = \boxed{\frac{2}{3}e^{-5|\tau|}\cos 20\pi\tau + 8\cos 10\pi\tau}$$

(d) تابع spectral density در قسمت (b) خواسته شد .

$$PSD(\omega=0) = \frac{5}{400\pi^2+25} + \frac{5}{400\pi^2+25} = \boxed{\frac{10}{400\pi^2+25}}$$

سوال 3

جدایی پذیری در یک سیگنال دو بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$u(x,y) = u_1(x)\,u_2(y)$$

اثبات جدایی پذیری تبدیل فوریه در دو بعدی:

$$F(\omega_1,\omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-j\omega_1 x - j\omega_2 y}\, dx\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y)\, e^{-j\omega_1 x} \times e^{-j\omega_2 y}\, dx\, dy =$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, e^{-j\omega_1 x}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\, e^{-j\omega_2 y}\, dy\right) = \boxed{F_1(\omega_1)\,F_2(\omega_2)}$$

سوال ۴

فرض کنید تبدیل فوریه یک سیگنال $x[t]$ برابر باشد با:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

می دانیم $x(t)$ برابر است با:

$$x[t] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

عبارت بالا برابر سری فوریه یک تابع متناوب است. همین طور که مشخص است، تابع Comb نیز یک تابع متناوب است پس اگر ضرایب سری فوریه آن را پیدا کنیم، تابع تبدیل فوریه آن نیز بدست می آید

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \Rightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

پس تبدیل فوریه تابع Comb برابر است با:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi k)}$$

$$X(j\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^K \delta\left(3\omega - \frac{k\pi}{2}\right) = \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(3\omega - r\pi) - \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(3\omega - \frac{(2r+1)}{2}\pi\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(3\omega - r\pi)\right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(3\omega - \frac{(2r+1)}{2}\pi\right)\right) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3\omega - r\pi) e^{j\omega t} d\omega\right) - \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(3\omega - \frac{(2r+1)}{2}\pi\right) e^{j\omega t} d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{3}rt} - \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\left(\frac{\pi}{3}r + \frac{\pi}{6}\right)t} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{3}rt} - \frac{e^{j\frac{\pi}{6}t}}{2\pi}\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{3}rt}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{\pi}{3}rt}\left(1 - e^{j\frac{\pi}{6}t}\right) =$$

$$\frac{6}{2\pi}\sum \frac{1}{6} e^{j\frac{2\pi}{6}rt}\left(1 - e^{j\frac{\pi}{6}t}\right) = \boxed{\frac{3\left(1 - e^{j\frac{\pi}{6}t}\right)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-6n) = \begin{cases} 0 & n=2K \\ \frac{6}{\pi} & n=2K+1 \end{cases}}$$

که در خط آخر از این نکته استفاده شده است که ضرایب سری فوریه $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-6n)$ برابر $1/6$ هستند

یعنی تبدیل فوریه تابع بالا برابر است با :

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} e^{j\frac{2\pi}{6}t}$$