آریان کاملی

سوال اول

(a) پیدا کردن معادله‌ی خط بین دو نقطه‌ی (x_i, y_i) و (x_j, y_j) به صورت زیر امکان پذیر است:

$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \dfrac{y_j - y_i}{x_j - x_i} \\ b = y_i - x_i\left(\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right) \end{cases}$$

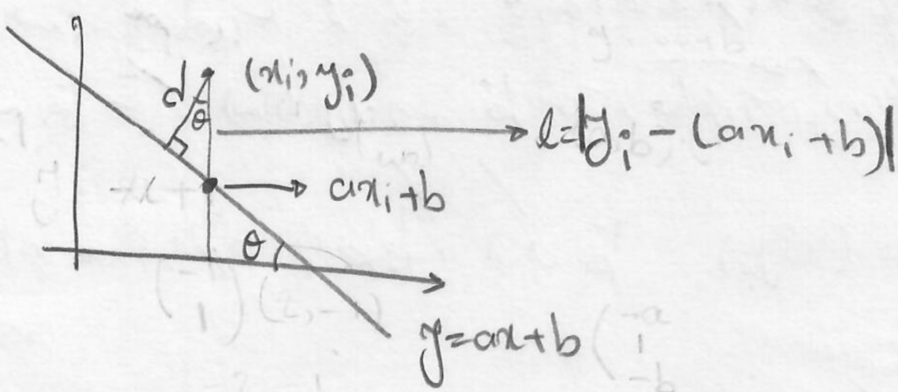
پیدا کردن شیب و عرض از مبدا خط گذرنده از هر دو نقطه از مرتبه‌ی $O(1)$ طول می‌کشد. و چون $\frac{n(n-1)}{2}$ زوج نقطه داریم، پیدا کردن همه‌ی معادلات خطوط از مرتبه‌ی $O(n^2)$ طول می‌کشد.

از سوی دیگر فاصله‌ی هر نقطه‌ای (x_i, y_i) از خط $y = ax + b$ را می‌توان با فرمول

$$\circledast \quad d = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}\left(y_i - (ax_i + b)\right)$$

بدست آورد که از مرتبه‌ی $O(1)$ طول می‌کشد. پس چون برای هر خط باید فاصله‌ی $n-2$ نقطه را بدست بیاوریم و از مرتبه‌ی n^2 خط داریم، کل الگوریتم از مرتبه‌ی $O(n^3)$ طول می‌کشد.

اثبات $\circledast$:

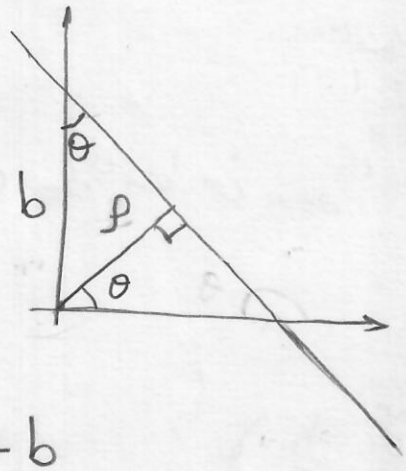


$$d = \cos\theta \, l$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+tg^2\theta} = \frac{1}{1+(-a)^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \Rightarrow$$

$$d = \frac{1}{} \left| y_i - (ax_i + b) \right|$$

(b)



$$y = ax + b$$

$$\Rightarrow y = tg(90+\theta)\,x + b \Rightarrow y = \frac{\sin(90+\theta)}{\cos(90+\theta)}\,x + b =$$

$$\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}\,x + b \Rightarrow y + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,x = b \Rightarrow$$

$$\cos\theta\, x + \sin\theta\, y = b\sin\theta \xrightarrow{\sin\theta = \frac{\rho}{b}} \boxed{\cos\theta\, x + \sin\theta\, y = \rho}$$

(c) ابتدا این مقدار را برای θ بدست می آوریم. برای هر نقطه از تصویر، این مقدار می تواند بین $\boxed{-90 \text{ تا } +90}$ باشد. حال چون برای ρ داریم $\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$ و x و y همواره در یک تصویر مثبت هستند، مینیمم وقتی است که یکی از $\cos\theta$ یا $\sin\theta$ صفر باشد یعنی برابر $\boxed{1-\max(H,W)}$ و ماکسیمم وقتی است که $(x,y)=(H,W)$ و قطر تصویر بر خط عمود است که در این حالت: $\boxed{\rho = \sqrt{H^2+W^2}}$

(d) هر منحنی در فضای پارامترها همه خطوطی که از یک نقطه (x_i,y_i) در فضای x-y عبور می کنند را نشان می دهد.

(e) از هندسه اقلیدسی می دانیم که از هر دو نقطه ای (x_i,y_i) و (x_j,y_j) تنها یک خط عبور می کند. لذا چون از سوی دیگر داریم که در فضای پارامترها (ρ,θ) هر منحنی نشانگر همه خطوطی است که از یک نقطه می گذرند، پس هر دو منحنی تنها در یک نقطه با هم برخورد دارند.

(f) برای اثبات این موضوع از استقرا استفاده می‌کنیم

فرض استقرا: مجموعه‌ی نقاط $S=\{(x_1,y_1),\dots,(x_s,y_s)\}$ را داریم که روی یک خط قرار دارند، واضح است که منحنی خطوط گذرنده از نقاط $S'=\{(x_1,y_1),\dots,(x_{s-1},y_{s-1})\}$ نیز روی یک خط قرار دارند. فرض این است که در فضای پارامترها دقیقا در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

پایه‌ی استقرا: برای دو نقطه در متن سوال اثبات شد

اثبات: طبق فرض استقرا منحنی‌های $x_i\cos\theta+y_i\sin\theta=\rho$ $(1\le i\le s-1)$ دقیقا در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، که این نقطه بیانگر خطی است که از این $s-1$ نقطه عبور می‌کند. حال اگر نقطه‌ی (x_s,y_s) و (x_{s-1},y_{s-1}) را در نظر بگیریم، در فضای x-y خط گذرنده از این دو نقطه همان خط گذرنده از S نقطه است زیرا از هر دو نقطه فقط یک خط عبور می‌کند. پس منحنی مربوط به (x_s,y_s)، منحنی مربوط به (x_{s-1},y_{s-1}) را در نقطه‌ای که همه‌ی $s-1$ منحنی یکدیگر را قطع می‌کردند قطع می‌کند، پس منحنی‌های $x_i\cos\theta+y_i\sin\theta=\rho$ $(1\le i\le s)$ همه یکدیگر را در دقیقا یک نقطه قطع می‌کنند که این حکم استقرا است.

$\boxtimes$

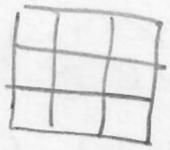
(g) ماتریس $M[\rho_{min}:\rho_{max},\theta_{min}:\theta_{max}]$ را در نظر بگیرید. حال برای هر $\rho_{min}\le\rho_i\le\rho_{max}$، برای هر نقطه (x_i,y_i) $1\le i\le N$، θ_i متناظر را محاسبه کرده و $M[\rho_i,\theta_i]$ را به اندازه‌ی یک واحد اضافه می‌کنیم. در انتهای الگوریتم، $M[\rho,\theta]$ هایی که بزرگتر هستند (تعداد منحنی‌های بیشتری از آن‌ها عبور می‌کند) را به عنوان خطوط یافت شده بازمی‌گردانیم. که این الگوریتم از مرتبه‌ی $O(N\frac{\rho_{max}-\rho_{min}}{q})$ زمان می‌برد که q برابر دوره‌ی quantization ρ هاست. البته بهتر است که حلقه را روی θ ها اجرا کرده و ρ های متناظر را پیدا کنیم چون $\theta_{max}-\theta_{min}$ حداکثر برابر 2π است و الگوریتم از مرتبه‌ی $O(N\frac{2\pi}{q})$ خواهد بود که درصورت ثابت بودن q می‌توان آن را $O(N)$

سوال 2

(a) dilation: $A \oplus B = \{z \mid (B)_z \cap A \neq \emptyset\}$

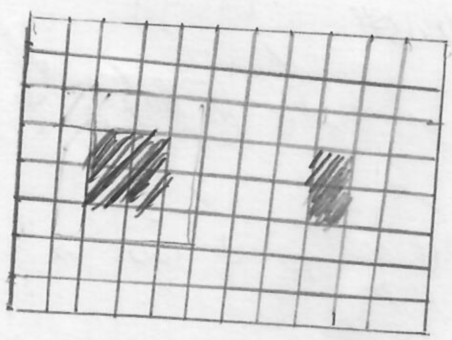
پس اگر B تنها یک نقطه باشد $A \oplus B = A$ چون B تنها در نقاطی که A دارد با A اشتراک خواهد داشت.

(b) برای این کار از عملیات opening با یک structuring element به صورت یک مربع 3x3 شده B کنیم.

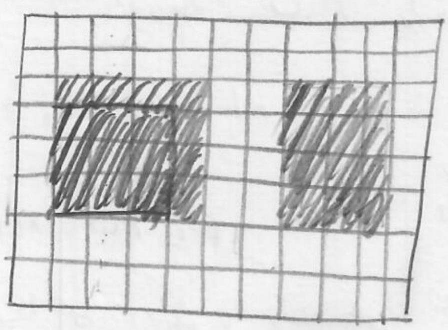
$B =$ 

$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$

$A \ominus B$:



$(A \ominus B) \oplus B$:



(c) عمل Opening مرزهای اشیاء در تصویر را هموار می‌کند. همچنین برآمدگی ها و باریکه‌های باریک را حذف می‌کند.

عمل closing نیز مرزهای اشیاء را هموار می‌کند. همچنین فرورفتگی ها را پر کرده و سوراخ‌ها و فواصل را پر می‌کند. همچنین باریکه‌های باریک را با یکدیگر ترکیب می‌کند.

(d)

$$(A \ominus B) = \{z \mid (B)_z \subseteq A\} = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \phi\}$$

$$\Rightarrow (A \ominus B)^c = \{z \mid (B)_z \cap A^c \neq \phi\} = \boxed{A^c \oplus \hat{B}}$$