# פרק 18

(מדובר כאן רק בשפות בנות-מנייה מסדר ראשון).

## שאלה 1

לכל אחד מכללי ההיסק דלהלן בשפה מסוימת $\mathcal{L}$ בדוק אם הוא נאות או לא.

1. $\dfrac{\varphi(\bar{x},\bar{y})}{\varphi(\bar{y},\bar{x})}$ (כאשר $\varphi$ נוסחה חסרת כמתים).

2. $\dfrac{\psi(\bar{x})}{\forall\bar{z}(\psi(\bar{z})\vee\bar{z}\not\approx\bar{x})}$

3. $\dfrac{\exists\bar{x}\chi(\bar{x}),\forall\bar{x}(\bar{x}\approx\bar{a})}{\forall\bar{x}\chi(\bar{x})}$ ( $\varphi(\bar{y},\bar{x})$ פירושו $\mathrm{Sub}[\bar{x},\bar{y};\bar{y},\bar{x}|\varphi(\bar{x},\bar{y})]$ ו- $\psi(\bar{z})$ זה $\mathrm{Sub}[\bar{x};\bar{z}|\psi(\bar{x})]$).

## שאלה 2

יהיו $\alpha$ ו- $\beta$ פסוקים ב- $\mathcal{L}$. הוכח ש- $\alpha\vee\beta$ אינו יכיח מהם במערכת ההיסק $\mathcal{D}_1$ מעמוד 44 בפרק 18.

## שאלה 3

תהי $\mathcal{D}$ מערכת ההיסק בשפת השוויון, אשר אקסיומותיה הלוגיות הן כל הנוסחות האמיתיות לוגית בשפה, וכלל ההיסק היחיד שלה הוא כלל הניתוק.

א. הוכח ש- $\mathcal{D}$ היא שלמה במובן החלש, אך אינה שלמה.

ב. מצא כלל היסק, שהוספתו ל- $\mathcal{D}$ תהפוך אותה לשלמה.

## שאלה 4

תהי $\mathcal{L}$ שפה, שמלבד קבוע השוויון, מכילה עוד קבוע אחד, והוא הקבוע האישי $\bar{a}$. נסתכל במבנה היצירה $\mathcal{D}$, שיוצריו הם הפסוקים של $\mathcal{L}$, שהם אמיתיים לוגית, והיחס היחיד בו הוא היחס הדו-מקומי, שאיבריו הם כל הזוגות מן הצורה $\langle\varphi,\psi\rangle$, כאשר $\varphi$ הוא פסוק מהצורה $\forall\bar{x}\chi(\bar{x})$ ו- $\psi$ הוא $\chi(t)$, כאשר $t$ הוא שם עצם כשר להצבה במקום $\bar{x}$ ב- $\chi$.

א. הוכח ש- $\mathcal{D}$ היא מערכת היסק.

ב. הוכח ש- $\mathcal{D}$ שלמה במובן החלש.

ג. הוכח ש- $\mathcal{D}$ אינה שלמה.

ד. הוכח שאם נשמיט את כלל ההיסק, נקבל מערכת היסק, שאינה שלמה במובן החלש.

ה. הוכח שהוספת כלל הניתוק וכלל ההכללה ככללי היסק תהפוך את $\mathcal{D}$ למערכת היסק שלמה, אבל הוספת כל אחד מהם לבדו לא תהפוך אותה לשלמה.

## שאלה 5

תהי $\mathcal{D}$ מערכת היסק בשפה $\mathcal{L}_0$, שקבוצת משפטיה כריעה. הוכח ש- $\mathcal{D}$ אינה שלמה במובן החלש.

## שאלה 6

תהי $\mathcal{D}$ מערכת היסק בשפה $\mathcal{L}$, שמספר קבועיה סופי, ותהי $\Gamma$ קבוצה כריעה ועקבית של פסוקים ב- $\mathcal{L}$.

נניח שלכל פסוק $\varphi$ ב- $\mathcal{L}$ מתקיים $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \varphi$ או $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \sim\varphi$.

הוכח שקבוצת הפסוקים ב- $\mathcal{L}$, היכיחים ב- $\mathcal{D}$ מ- $\Gamma$, היא כריעה.

## שאלה 7

תהי $\mathcal{D}$ מערכת היסק שלמה בשפה $\mathcal{L}$. הוכח שכל קבוצה $\Gamma$ של פסוקים ב- $\mathcal{L}$, שממנה אי אפשר להוכיח ב- $\mathcal{D}$ פסוק שקרי לוגית, היא עקבית.

## שאלה 8

תהי $\mathcal{L}$ השפה שקבועיה, מלבד $\approx$, הם הקבועים האישיים $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_{10}}$.

תהי $\mathcal{D}$ מערכת ההיסק ב- $\mathcal{L}$, עם אקסיומה לוגית אחת: $\overline{a_1} \approx \overline{a_1}$, ושלושה כללי הסק:

1. מ- $\varphi$ הַסֵּק $\psi$, אם ורק אם $\varphi \models \psi$. 2. $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$. 3. כלל ההכללה $\dfrac{\varphi}{\forall \overline{x} \varphi}$

א. הוכח ש- $\mathcal{D}$ היא מערכת היסק שלמה.

ב. הוכח שהשמטת אחד מכללי ההיסק תותיר אותנו עם מערכת היסק שאינה שלמה.

בכל אחת מן השאלות 10,9 נסתכל במערכת ההיסק $\tau_{\mathcal{L}}$, בשפה $\mathcal{L}$ כלשהי.

## שאלה 9

בנה עץ הוכחה לכל אחת מן הנוסחות הבאות:

1. $\forall \overline{x} \varphi(\overline{x}) \rightarrow \varphi(t)$ ( $t$ שם עצם הכשר להצבה במקום $\overline{x}$ ב- $\varphi$) 2. $\forall \overline{x} \varphi \vee \exists \overline{x}(\sim \varphi)$

## שאלה 10

בנה עץ הוכחה מן הקבוצה $\left\{\forall \overline{x}\, \overline{T}(\overline{x}), \overline{x} \approx \overline{a}, \overline{S}(\overline{x}, \overline{y})\right\}$ לכל אחת מן הנוסחות הבאות:

1. $\sim \exists \overline{x}(\sim \overline{T}(\overline{x}))$ 2. $\overline{T}(\overline{a})$ 3. $\overline{y} \approx \overline{x} \rightarrow \overline{y} \approx \overline{a}$

4. $\overline{b} \approx \overline{b}$ 5. $\exists \overline{z}\, \overline{S}(\overline{a}, \overline{z})$

שאלה 11

תהי $\mathcal{L}$ שפה, ונסתכל במבנה היצירה המתקבל מ- $\tau_{\mathcal{L}}$ על ידי השמטת כל האקסיומות הלוגיות מן הקבוצה $(i)$ (כל הטאוטולוגיות), וצירוף היחס $R$, שאיבריו הם כל הזוגות הסדורים של נוסחות, שבהם יושבת מימין נוסחה, הנובעת טאוטולוגית מזו שמשמאל. הוכח שמבנה יצירה זה הוא מערכת היסק שלמה.

שאלה 12

הוכח שאם במערכת ההיסק משאלה 11 נחליף את כלל הניתוק בכלל ההיסק $\frac{\varphi,\psi}{\varphi\wedge\psi}$, נקבל מערכת היסק שלמה.

בשאלות 17,16,15,14,13 נסתכל במערכת ההיסק $\tau_{\mathcal{L}}$, בשפה $\mathcal{L}$ כלשהי.

שאלה 13

הוכח שלכל קבוצה $\Gamma$ של נוסחות ב- $\mathcal{L}$, ולכל שתי נוסחות $\alpha,\beta$ ב- $\mathcal{L}$, אם $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$, אז $\Gamma,\alpha\vdash\beta$.

שאלה 14

הראה קבוצה $\Gamma$ של נוסחות, ונוסחות $\alpha,\beta$, כך ש- $\Gamma,\alpha\vdash\beta$, אבל לא נכון ש- $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$.

שאלה 15

הוכח שאם $\Gamma,\alpha\vdash\beta$, ויש הוכחה של $\beta$ מ- $\Gamma$ ו- $\alpha$, שאינה משתמשת בכלל ההכללה, אז $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$.

שאלה 16

הוכח את משפט הדידוקציה של תחשיב היחסים, האומר כך:

אם $\Gamma,\alpha\vdash\beta$, ויש הוכחה שבה בכל שימוש בכלל ההכללה מסיקים מ- $\gamma$ את $\forall\bar{x}\gamma$, רק אם $\bar{x}$ אינו מופיע חופשי ב- $\alpha$, אז $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$.

שאלה 17

הוכח שאם $\alpha,\beta$ הם פסוקים ו- $\Gamma$ היא קבוצת פסוקים, אז $\Gamma\vdash\alpha\to\beta$ אם ורק אם $\Gamma,\alpha\vdash\beta$.