Лабораторная работа №5

Модель эпидемии (SIR)

Ендонова Арюна Валерьевна

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Построить модель SIR в *xcos* и OpenModelica.

Задание

1. Реализовать модель SIR в в *xcos*;
2. Реализовать модель SIR с помощью блока Modelica в в *xcos*;
3. Реализовать модель SIR в OpenModelica;
4. Реализовать модель SIR с учётом процесса рождения / гибели особей в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
5. Построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр μ);
6. Сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели.

Выполнение лабораторной работы

Задача о распространении эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta s(t) i(t); \\ \dot{i} = \beta s(t) i(t) - \nu i(t); \\ \dot{r} = \nu i(t), \end{cases}$$

где β – скорость заражения, ν – скорость выздоровления.

Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные данные: $\beta = 1$, $\nu = 0,3$, $s(0) = 0,999$, $i(0) = 0,001$, $r(0) = 0$.

В меню Моделирование, Установить контекст зададим значения переменных β и ν (рис. [-@fig:001]).

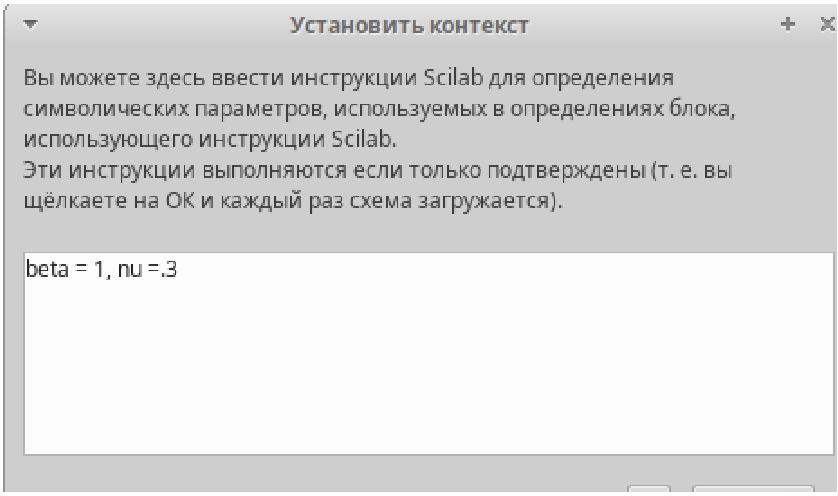

Рис. 1: Задание переменных окружения в xcos

Для реализации модели (рис. [-@fig:002]) потребуются следующие блоки xcos:

- CLOCK_c – запуск часов модельного времени;
- CSCOPE – регистрирующее устройство для построения графика;
- TEXT_f – задаёт текст примечаний;
- MUX – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых;
- INTEGRAL_m – блок интегрирования;
- GAINBLK_f – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов β и ν ;
- SUMMATION – блок суммирования;
- PROD_f – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

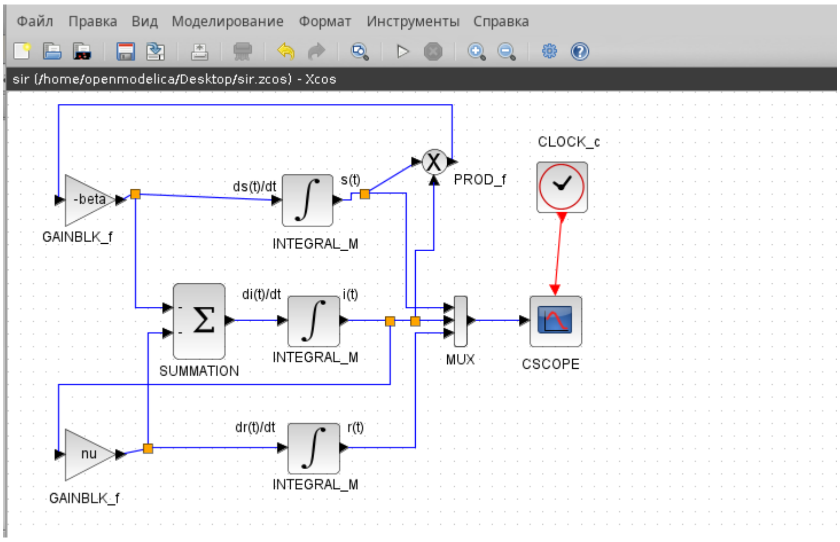

Рис. 2: Модель SIR в xcos

В параметрах верхнего и среднего блока интегрирования необходимо задать начальные значения $s(0) = 0,999$ и $i(0) = 0,001$ (рис. [-@fig:003],[-@fig:004]).

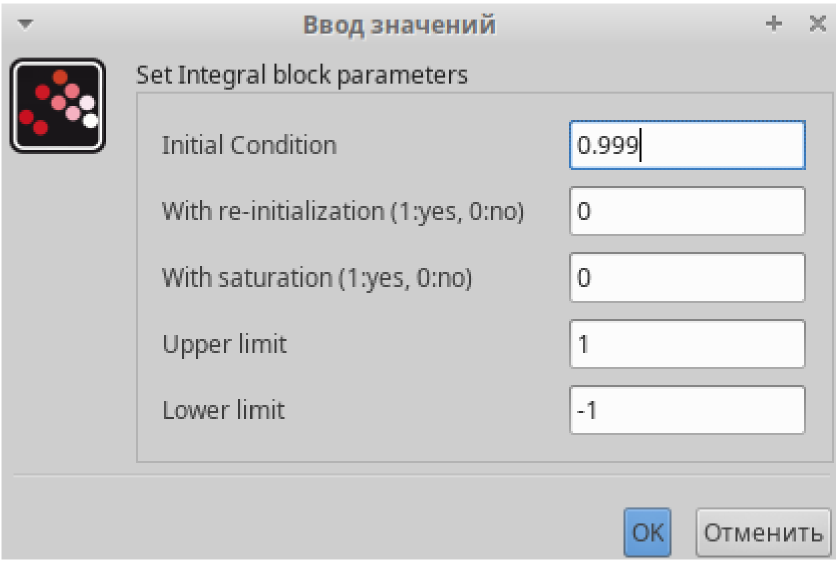

Рис. 3: Задание начальных значений в блоках интегрирования

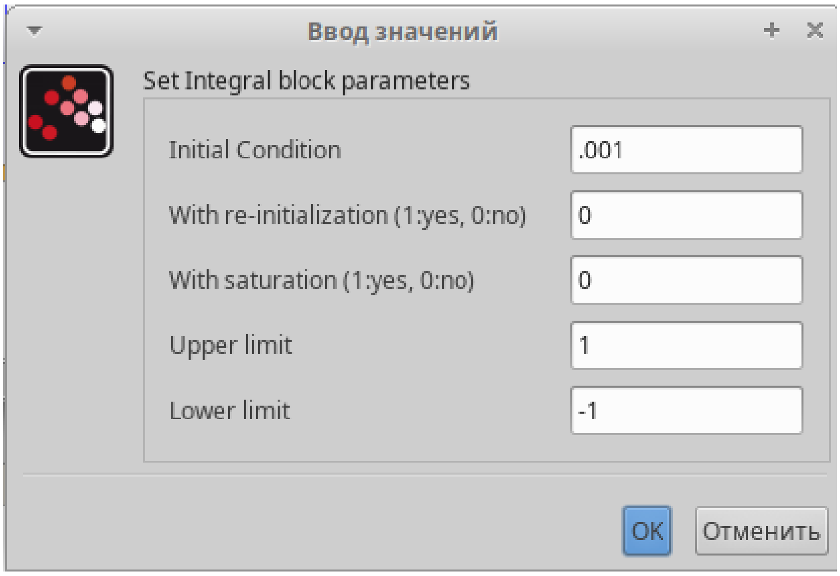

Рис. 4: Задание начальных значений в блоках интегрирования

В меню Моделирование, Установка зададим конечное время интегрирования, равным времени моделирования, в данном случае 30 (рис. [-@fig:005]).

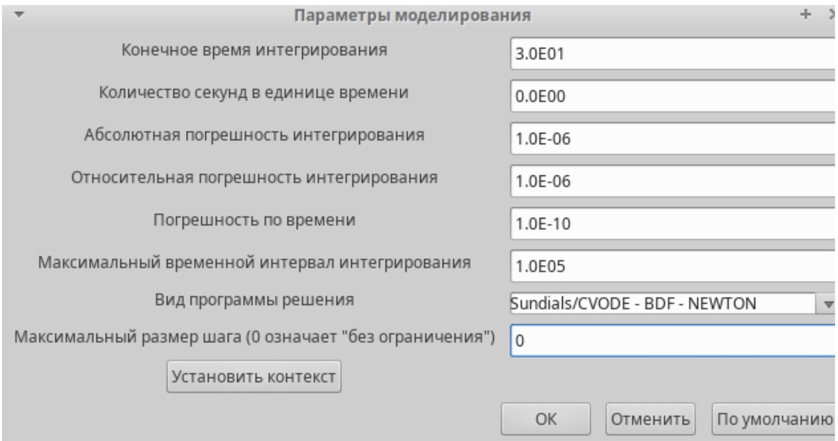

Рис. 5: Задание конечного времени интегрирования в xcos

Результат моделирования представлен на рис. [-@fig:006], где черной линией обозначен график $s(t)$ (динамика численности уязвимых к болезни особей), красная линия определяет $r(t)$ — динамику численности выздоровевших особей, наконец, зеленая линия определяет $i(t)$ — динамику численности заражённых особей. Пересечение трёх линий определяет порог эпидемии.

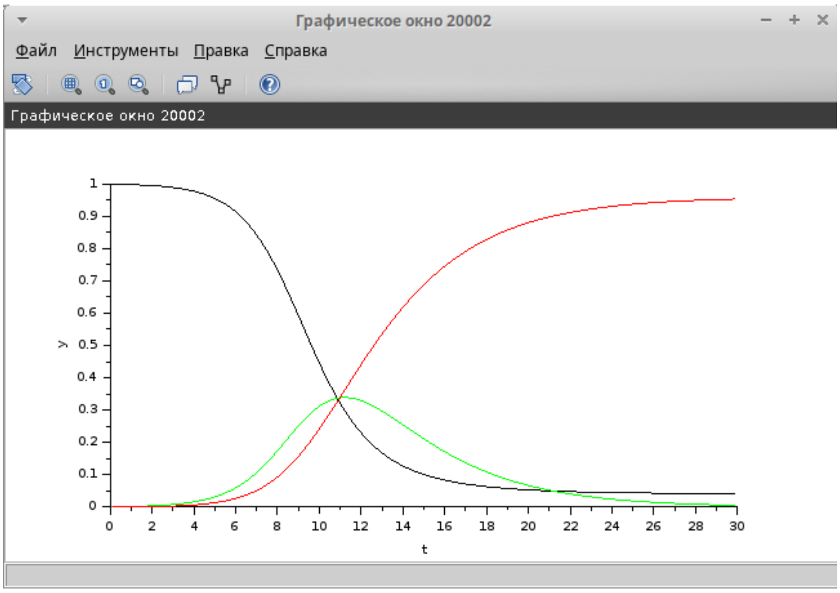

Рис. 6: Эпидемический порог модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Готовая модель SIR представлена на рис. [-@fig:007].

Для реализации модели SIR с помощью языка Modelica помимо блоков CLOCK_c, CSCOPE, TEXT_f и MUX требуются блоки CONST_m — задаёт константу; MBLOCK (Modelica generic) — блок реализации кода на языке Modelica. Задаём значения переменных β и ν (рис. [-@fig:001]).

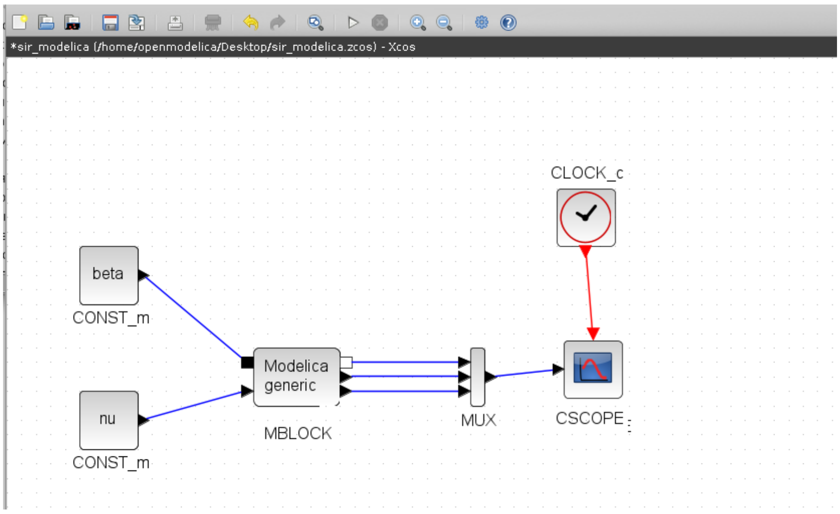

Рис. 7: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. [-@fig:008],[-@fig:009]. Переменные на входе (“beta”, “nu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).

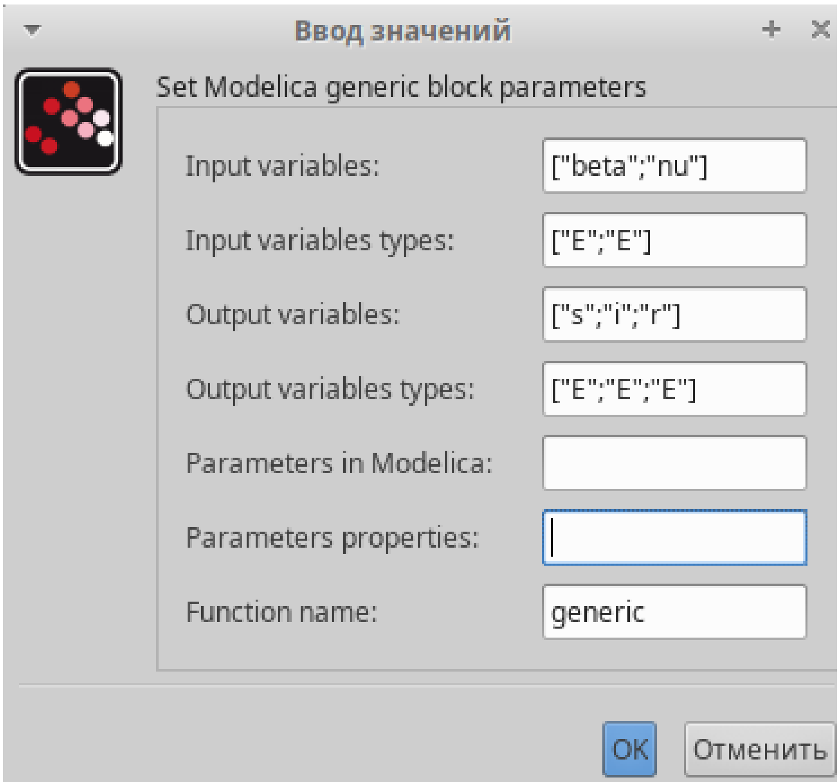

Рис. 8: Параметры блока Modelica для модели SIR

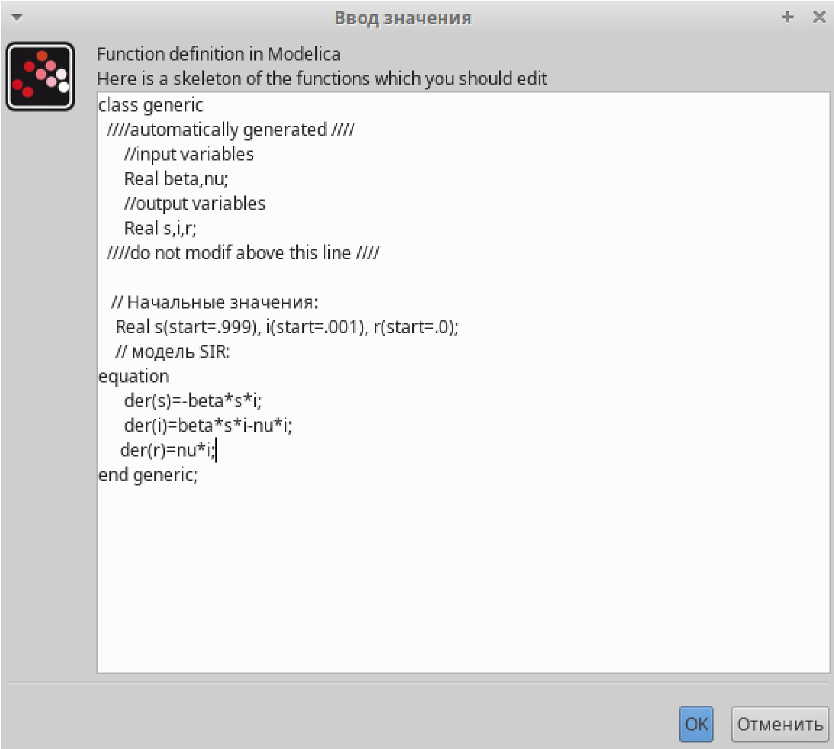

Рис. 9: Параметры блока Modelica для модели SIR

В результате получаем график (рис. [-@fig:010]), построенный с помощью блока Modelica идентичный графику (рис. [-@fig:006]), построенному без них.

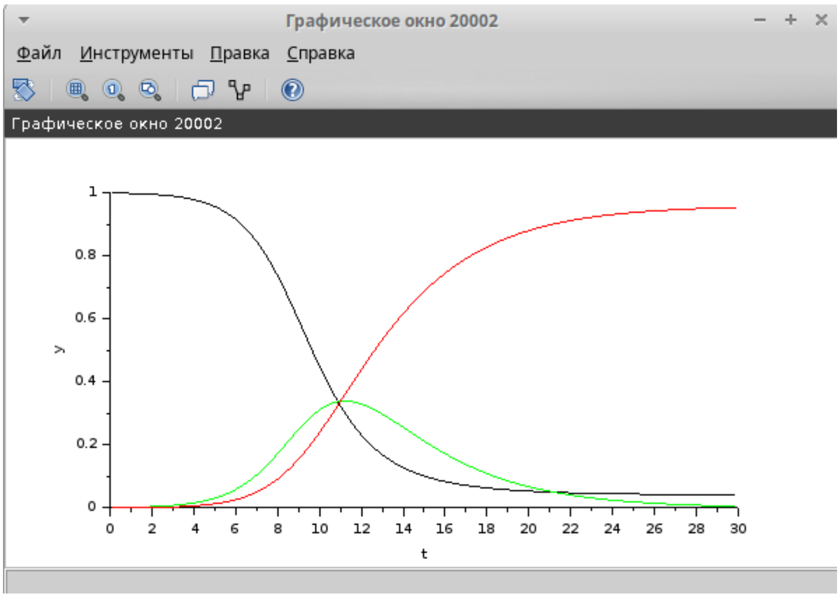

Рис. 10: Эпидемический порог модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

Упражнение

В качестве упражнения нам надо построить модель SIR на OpenModelica. Синтаксис почти такой же как и на Modelica. Нужно задать параметры, начальные значения и систему дифференциальных уравнений.

```
parameter Real I_0 = 0.001;
parameter Real R_0 = 0;
parameter Real S_0 = 0.999;
parameter Real beta = 1;
parameter Real nu = 0.3;
parameter Real mu = 0.5;

Real s(start=S_0);
Real i(start=I_0);
Real r(start=R_0);
```

```
equation
  der(s)=-beta*s*i;
  der(i)=beta*s*i-nu*i;
  der(r)=nu*i;
```

Теперь выполним симуляции, задав конечное время 30 с (рис. [-@fig:011]).

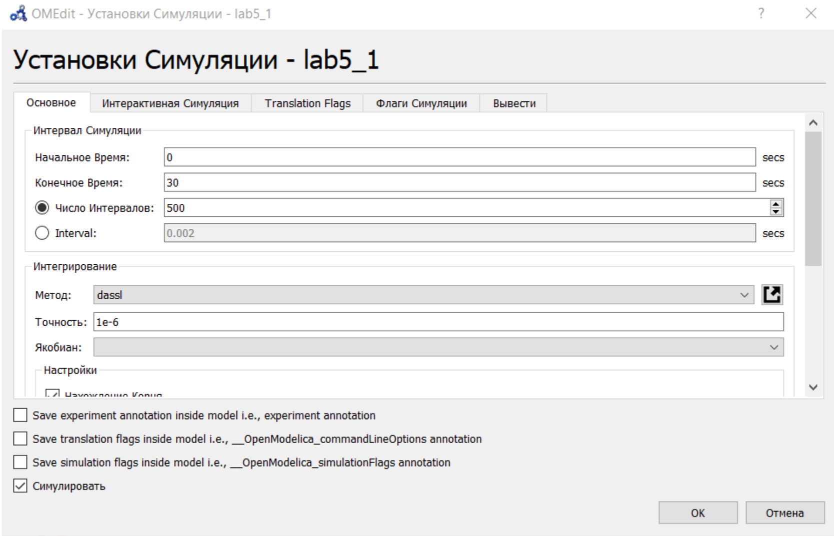

Рис. 11: Установка симуляции в OpenModelica

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:012]). Он идентичен предыдущим графикам выполненным в *xcos*.

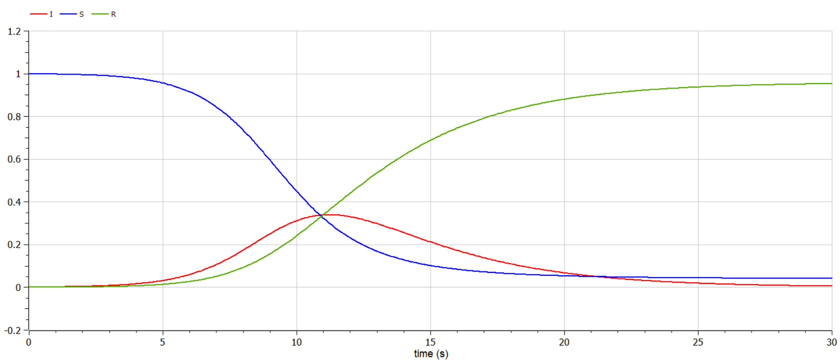

Рис. 12: Эпидемический порог модели SIR при $\beta = 1, \nu = 0.3$

Задание для самостоятельного выполнения

Предположим, что в модели SIR учитываются демографические процессы, в частности, что смертность в популяции полностью уравновешивает рождаемость, а все рожденные индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{s} = -\beta s(t)i(t) + \mu(N - s(t)); \\ \dot{i} = \beta s(t)i(t) - \nu i(t) - \mu i(t); \\ \dot{r} = \nu i(t) - \mu r(t), \end{cases}$$

где μ — константа, которая равна коэффициенту смертности и рождаемости.

Реализуем эту модель в *xcos*. Тут нам понадобятся три блока суммирования и 4 блока констант (добавляется константа ν).

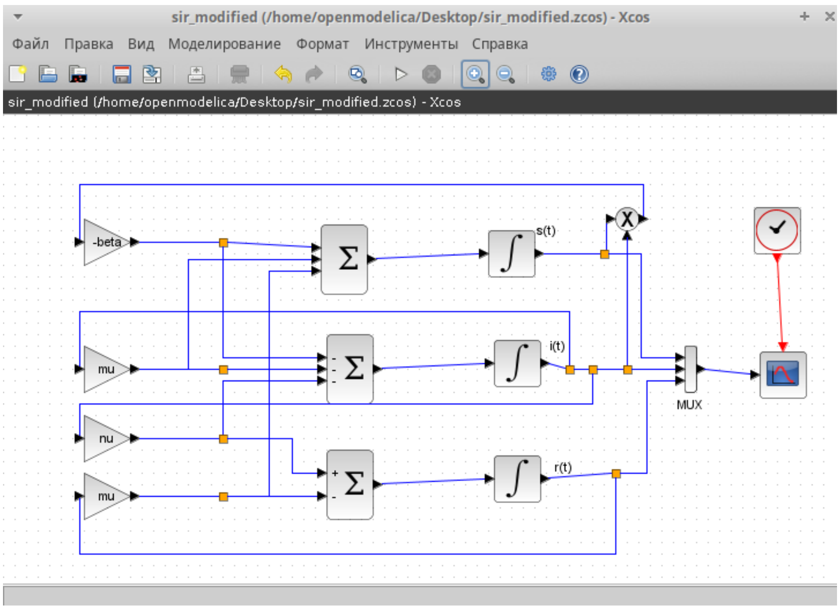

Рис. 13: Модель SIR с учетом демографических процессов в xcos

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:014]).

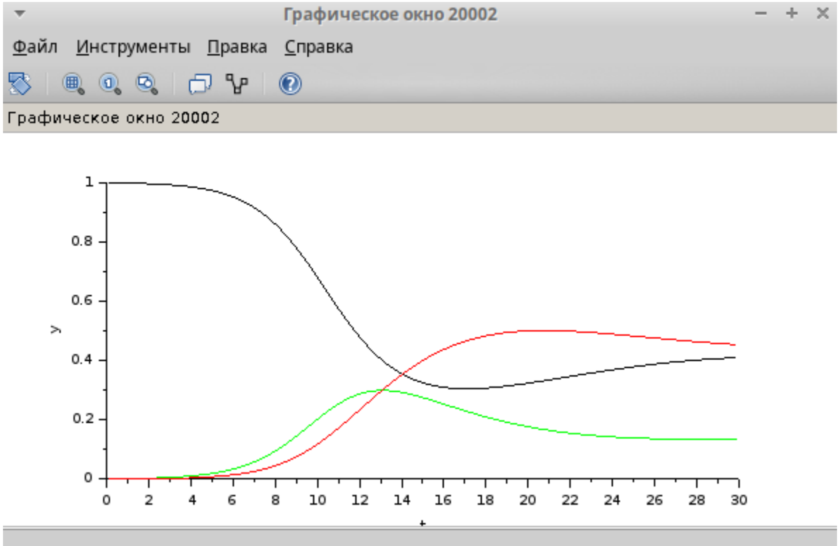

Рис. 14: График модели SIR с учетом демографических процессов

Теперь реализуем модель SIR с учетом демографических процессов в *xcos* с помощью блоков Modelica (рис. [-@fig:015]).

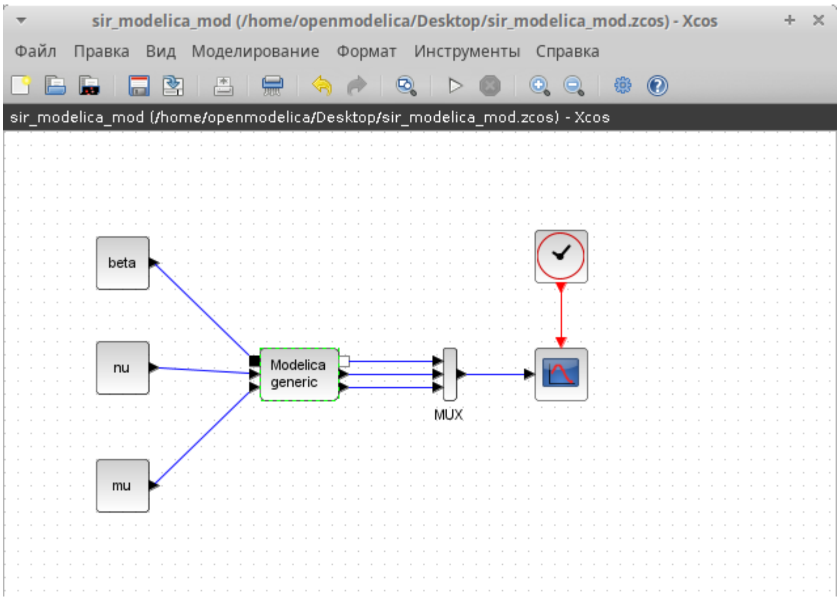

Рис. 15: Модель SIR с учетом демографических процессов в xcos с применением блока Modelica

Параметры блока Modelica представлены на рис. [-@fig:016],[-@fig:017]. Переменные на входе (“beta”, “nu”, “mu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).

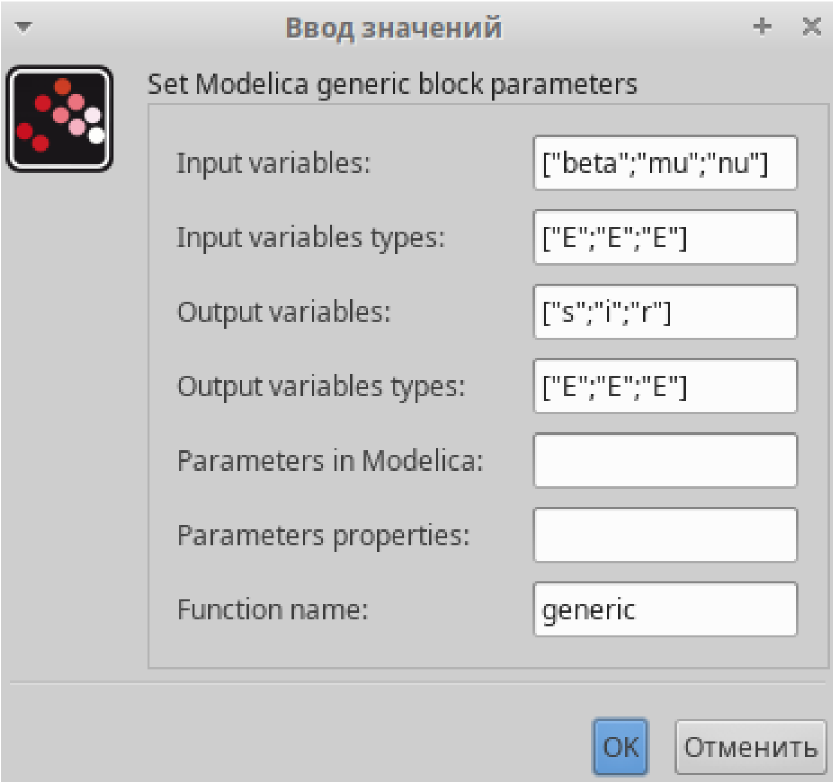

Рис. 16: Параметры блока Modelica для модели SIR с учетом демографических процессов

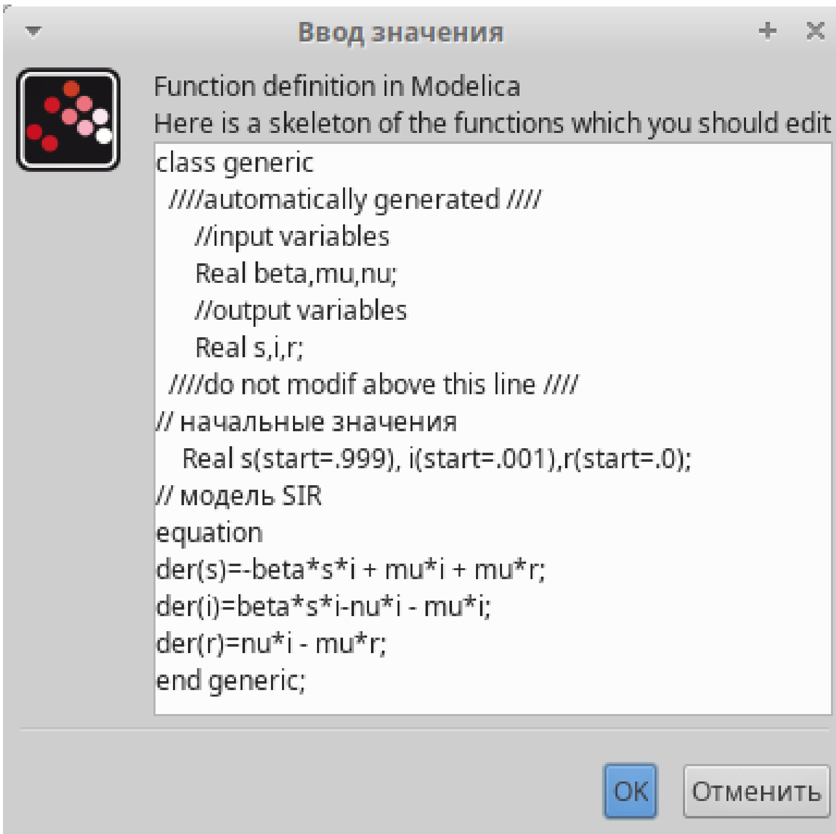

Рис. 17: Параметры блока Modelica для модели SIR с учетом демографических процессов

В результате получаем следующий график (рис. [-@fig:018]).

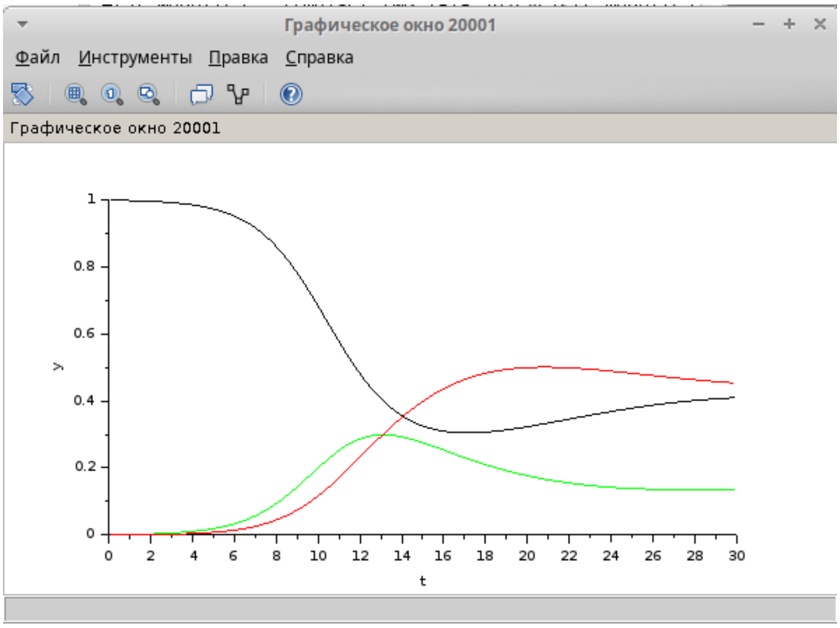

Рис. 18: График модели SIR с учетом демографических процессов

Реализуем модель SIR с учетом демографических процессов на OpenModelica.

```
parameter Real I_0 = 0.001;
parameter Real R_0 = 0;
parameter Real S_0 = 0.999;
parameter Real N = 1;
parameter Real beta = 1;
parameter Real nu = 0.3;
parameter Real mu = 0.5;

Real s(start=S_0);
Real i(start=I_0);
Real r(start=R_0);

equation
der(s)=-beta*s*i + mu*i + mu*r;
der(i)=beta*s*i-nu*i - mu*i;
```

```
der(r)=nu*i - mu*r;
```

Выполнив симуляцию, получим следующий график (рис. [-@fig:019]).

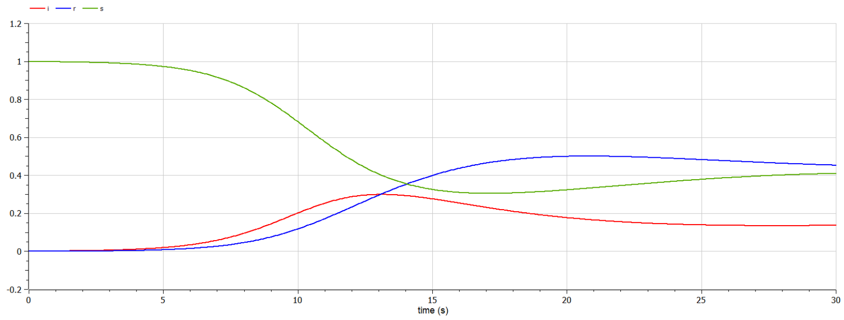

Рис. 19: График модели SIR с учетом демографических процессов

Теперь построим графики при разных значениях параметров.

1) $\beta = 1, \nu = 0.3$

- $\mu = 0.1$

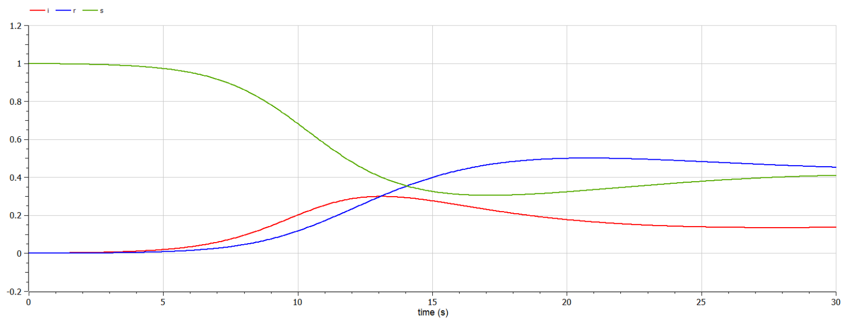

Рис. 20: График модели SIR с учетом демографических процессов

- $\mu = 0.3$

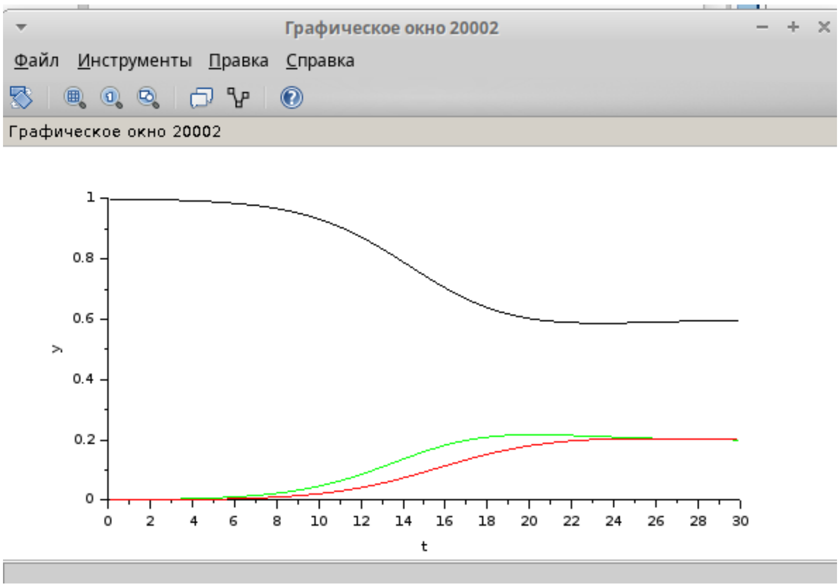

Рис. 21: График модели SIR с учетом демографических процессов

- $\mu = 0.9$

Рис. 22: График модели SIR с учетом демографических процессов

2) $\beta = 1, \nu = 0.1$

- $\mu = 0.1$

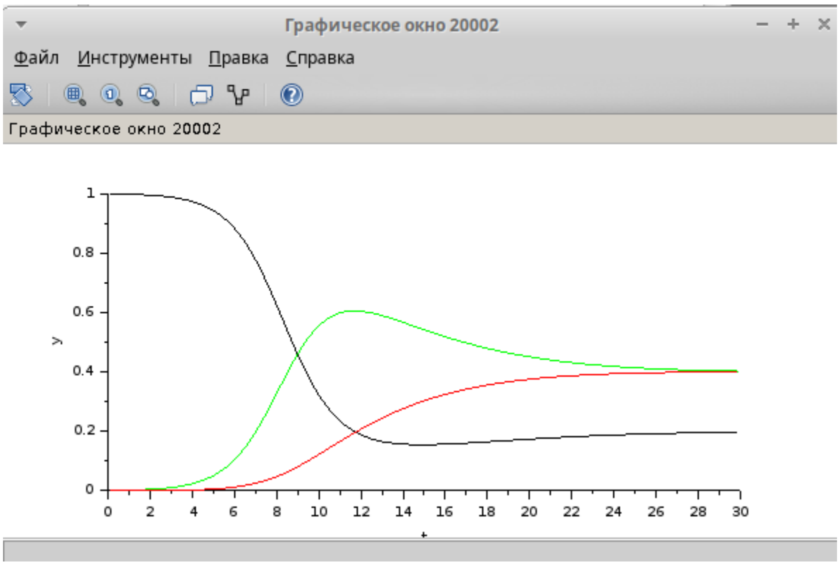

Рис. 23: График модели SIR с учетом демографических процессов

- $\mu = 0.9$

Рис. 24: График модели SIR с учетом демографических процессов

3) $\beta = 4, \nu = 0.3, \mu = 0.2$

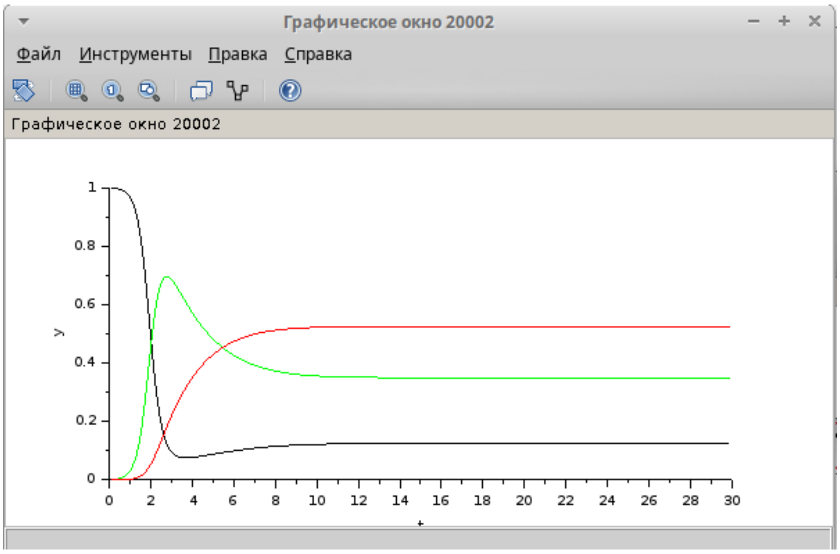

Рис. 25: График модели SIR с учетом демографических процессов

Исходя из анализа графиков, можно сделать вывод, что чем выше значение любого из параметров, тем быстрее система достигает стационарного состояния. При высоком коэффициенте заражения β система быстро проходит через пик развития эпидемии и достигает стационарного состояния.

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы была построена модель SIR в *xcos* и OpenModelica.

Список литературы

1. Королькова А.В., Кулябов Д.С. Руководство к лабораторной работе №5. Модель эпидемии (SIR). – Москва, 2025. – 67 с.

2. Жумартова Б.О., Ысмагул Р.С. Применение SIR модели в моделировании эпидемий // Костанайский региональный университет им. А. Байтурсынова.

3. Константинов И.С. Динамика модели SIR: взгляд на эпидемии и вакцинацию // Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

4. Разумов Т.Е. Модель эпидемии SIR с учетом пространственной неоднородности расположения индивидов // МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

5. Шабунин А.В. SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД, 2019, том 27, выпуск 2, с. 5–20. URL: https://www.mathnet.ru/ivp101 (дата обращения: 1 апреля 2025).