N 6

$N = 200$; $m_1 = 10$ A_1 – не болел

$L = 0,05$; $m_2 = 181$ A_2 – болел 1 раз

$n = 2$ $m_3 = 9$ A_3 – болел 2 раза

$H_0 : P(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_2^m p^m (1-p)^{2-m}$

$H_1 : \overline{H_0}$

$P(A_1) = C_2^0 \cdot p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 = p_1$

$P(A_2) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot (1-p)^1 = 2p(1-p) = p_2$

$P(A_3) = C_2^2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^0 = p^2 = p_3$

$L(\vec{\Theta}) = p_1^{10} \cdot p_2^{181} \cdot p_3^9 = 2^{181} \cdot p^{199} (1-p)^{201}$

$L \to max$:

$\ln L \to max : 181 \ln 2 + 199 \ln p + 201 \ln (1-p)$

$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{199}{p} - \frac{201}{1-p} = 0 \Rightarrow p = \frac{199}{400}$

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{199}{p^2} - \frac{201}{(1-p)^2} < 0 \Rightarrow max$

$N \geq 50$; $Np_i \geq 5 \to \hat{\Delta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(Np_i - m_i)^2}{Np_i} = \dots (\approx)$

$(\approx)$ $32,48 + 65,62 + 33,14 = 131,24$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \hat{\Delta} \mid H_0) = \int_{131,24}^{\infty} p\chi^2(3-1-1)\, dx < 10^{-5} << 0,05$

$\Rightarrow$ гипотеза H_0 отвергается.

N 7

$n_1 = 100$ $\quad H_0$: независ. размера от N партии

$n_2 = 100$ $\quad H_1$: $\overline{H_0}$ (есть зависимость)

	здоров.	почк.	зависим.
I	25	50	25
II	52	41	7
Всего	77	91	32

$p_1 = \frac{77}{200}$

$p_2 = \frac{91}{200}$

$p_3 = \frac{32}{200}$

$n_j p_i$:

I	38,5	45,5	16
II	38,5	45,5	16

$n_j \geq 50$; $n_j p_i \geq 5 \Rightarrow$:

$$\hat{\Delta} = \Delta_1 + \Delta_2 = \left(\frac{(38,5-25)^2}{38,5} + \frac{(45,5-50)^2}{45,5} + \frac{(16-25)^2}{16} \right) +$$

$$+ \left(\frac{(38,5-52)^2}{38,5} + \frac{(45,5-41)^2}{45,5} + \frac{(16-7)^2}{16} \right) \approx$$

$$\approx 4,73 + 0,45 + 5,06 + 4,73 + 0,45 + 5,06 = 20,48$$

$\Delta \sim \chi^2((k-1)(m-1)) = \chi^2((3-1)(2-1)) = \chi^2(2)$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \hat{\Delta} \mid H_0) = \int_{20,48}^{\infty} p_{\chi^2(2)}(x)\,dx \approx 0,00036 < \alpha$

$\Rightarrow$ <u>альтернатива H_0</u>

№ 8

$n_1 = 300$; $n_2 = 300$; $\alpha = 0{,}05$

H_0 : потоки однородны

H_1 : $\overline{H_0}$

$p_1 = \frac{72}{600}$

$p_2 = \frac{78}{600}$

$p_3 = \frac{152}{600}$

$p_4 = \frac{298}{600}$

	2	3	4	5
I	33	43	80	144
II	39	35	72	154
Всего	72	78	152	298

$n_j p_i$:

	2	3	4	5
I	36	39	76	149
II	36	39	76	149

$n_j \geq 50$; $n_j p_i \geq 5$ $\Rightarrow$ $\hat{\Delta} = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{(36-33)^2}{36} + \dots + \frac{(149-154)^2}{149} = 2{,}08$

$\Delta \sim \chi^2((k-1)(m-1)) = \chi^2(3)$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \hat{\Delta} \mid H_0) = \int_{2{,}08}^{\infty} p_{\chi^2(3)}\, dx = 0{,}556$

$p\text{-value} > \alpha$ $\Rightarrow$ нет основ. отвергн. H_0

N 9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

$n = 100$; $\alpha = 0,05$

а) H_0: $\xi \sim R(0,9)$; H_1: $\overline{H_0}$

$p = 0,1$

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{10} \Delta_i = \sum_{i=0}^{9} \frac{(100 \cdot \frac{1}{10} - m_i)^2}{10} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(10 - m_i)^2}{10} = \dots =$$

$= 16,4$

$\Delta \sim \chi^2(10-1) = \chi^2(9)$ по теореме

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{16,4}^{\infty} p\chi^2(9)\,dx = 0,058986 > \alpha$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергн. H_0

Критерий Колмогорова

$\tilde{\Delta} = \sqrt{n} \max | \hat{F}(x) - F(x) | \sim K(x)$

$K(x) = P(\tilde{\Delta} < x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}$ $(0; +\infty)$

$\tilde{\Delta} = \sqrt{n} \max_{i=1..n} \left(\max \left(|\hat{F}(x_i - 0) - F(x_i)|, |\hat{F}(x_i + 0) - F(x_i)| \right) \right)$

$\tilde{\Delta} \approx 1,43$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 1 - P(\tilde{\Delta} < x) =$

$= 1 - \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2x^2}\right) \approx 0,03 < 0,05 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ отвергаем H_0

б) $H_0: y \sim N(\mu, \sigma^2)$ – сложная

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \mu, \sigma) \to max \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = 4,77 \\ \sigma = 2,7 \end{cases}$$ Смотрели task9_ms.ipynb

$$\hat{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 9,3$$

$$\Delta \sim \chi^2(m-1-S) = \chi^2(10-1-2) = \chi^2(7)$$

$$p\text{-value} = p(\Delta \geq \hat{\Delta} \mid H_0) = \int_{9,3}^{\infty} p\chi^2(7)\,dx = 0,11 > \alpha \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нет осн. отверг. H_0

Крит. Колм. и bootstrap Смотрели task9_ms.ipynb

$N = 10'000$; $D = 0,6$; $K = 952$; $p\text{-value} = 0,9043 > \alpha$

$\Rightarrow$ нет осн. отверг. H_0