$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta}{\partial t}+\frac{\partial \theta u}{\partial x}+\frac{\partial \theta(w-\dot z)}{\partial z}=0;\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\rho\theta}{\partial t}+\frac{\partial \rho\theta u}{\partial x}+\frac{\partial \rho\theta(w-\dot z)}{\partial z}=0;\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\rho\theta u}{\partial t}+\frac{\partial \rho\theta u^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho\theta(w-\dot z)u}{\partial z}+\frac{\partial \delta P}{\partial x}+\rho_0 g\frac{\partial H_0}{\partial x}=0; \quad (1.1)\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\rho\theta w}{\partial t}+\frac{\partial \rho\theta uw}{\partial x}+\frac{\partial \rho\theta w(w-\dot z)}{\partial z}+\frac{\partial \delta P}{\partial z}=-(\rho-\rho_0)g;\\
&\delta P=c^2\left(\theta-\theta_0\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{\partial h_0 U_0}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial \rho_0 h_0}{\partial t}+\frac{\partial \rho_0 h_0 U_0}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial \rho_0 h_0 U_0}{\partial t}+\frac{\partial \rho_0 {U_0}^2 h_0}{\partial x}+\frac{g}{2}\frac{\partial \rho_0 {h_0}^2}{\partial x}+\rho_0 h_0 g\frac{\partial B}{\partial x}=0; (1.2)
\end{aligned}
$$

Граничные условия сверху и снизу

$$
\begin{aligned}
&\delta P\big|_H=-\rho_0 g\left(H_0-H\right)\\
&\left.\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial H}{\partial x}-w\right)\right|_H=0 \quad (1.3)
\end{aligned}
$$

$$
\left.\left(\frac{\partial B}{\partial x}\cdot u-w\right)\right|_B=0 \quad (1.4)
$$

В приближении буссинеска система (1.1) будет иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta}{\partial t}+\frac{\partial \theta u}{\partial x}+\frac{\partial \theta(w-\dot z)}{\partial z}=0;\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\rho\theta}{\partial t}+\frac{\partial \rho\theta u}{\partial x}+\frac{\partial \rho\theta(w-\dot z)}{\partial z}=0;\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta u}{\partial t}+\frac{\partial \theta u^2}{\partial x}+\frac{\partial \theta(w-\dot z)u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta P}{\partial x}+g\frac{\partial H_0}{\partial x}=0; \quad (1.5)\\
&\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta w}{\partial t}+\frac{\partial \theta uw}{\partial x}+\frac{\partial \theta w(w-\dot z)}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta P}{\partial z}=-\frac{(\rho-\rho_0)}{\rho_0}g;\\
&\delta P=c^2\left(\theta-\theta_0\right);
\end{aligned}
$$

Характеристическую форму запишем относительно переменных $\delta u, \delta w, \delta\theta, \delta\rho$. Вначале приведем предыдущую систему к простой форме:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\theta\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta p}{\partial x}=-\frac{g}{\theta}\frac{\partial H_0}{\partial x};$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta p}{\partial z}=-\frac{\delta\rho}{\rho_0\theta}g;$$
$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\rho}{\partial z}=0;$$
$$\delta\rho=\left(\rho-\rho_0\right);\quad \delta p=c^2\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;$$

где

$$\begin{aligned}&\delta u=u-U_0\\&\delta w=w-W_0\\&\delta\theta=\theta-\theta_0\\&\delta\rho=\rho-\rho_0\end{aligned}\quad(1.6)$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\theta\frac{\partial\delta w}{\partial z}=F_\theta=-\theta\frac{\partial U_0}{\partial x}-\theta\frac{\partial W_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta u}{\partial t}+u\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta u}{\partial z}+\frac{c^2}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}=F_u=-\frac{g}{\theta}\frac{\partial H_0}{\partial x}-\frac{\partial U_0}{\partial t}-u\frac{\partial U_0}{\partial x}-\left(w-\dot z\right)\frac{\partial U_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta w}{\partial t}+u\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta w}{\partial z}+\frac{c^2}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}=F_w=-\frac{\delta\rho}{\rho_0\theta}g-\frac{\partial W_0}{\partial t}-u\frac{\partial W_0}{\partial x}-\left(w-\dot z\right)\frac{\partial W_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\rho}{\partial z}=0;\\
&\delta\rho=\left(\rho-\rho_0\right);\ \delta\theta=\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;\end{aligned}\qquad(1.7)$$

Матричная форма

$$\frac{\partial\vec\varphi}{\partial t}+\mathbf{A}_\mathbf{x}\frac{\partial\vec\varphi}{\partial x}+\mathbf{A}_z\frac{\partial\vec\varphi}{\partial z}=\vec F;\quad \vec\varphi=\left(\delta\theta,\delta u,\delta w,\delta\rho\right)^T;$$

(1.8)

Где

$$
\mathbf{A_x} = \begin{pmatrix} u & \theta & 0 & 0 \\ \dfrac{c^2}{\rho_0\theta} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} (w-\dot z) & 0 & \theta & 0 \\ 0 & (w-\dot z) & 0 & 0 \\ \dfrac{c^2}{\rho_0\theta} & 0 & (w-\dot z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (w-\dot z) \end{pmatrix}; \tag{1.9}
$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A_x}$, ее левые собственные векторы и локальные римановы инварианты

$$
\begin{gathered}
\lambda_{1,2}^x = u \pm c\big/\sqrt{\rho_0}; \qquad \lambda_{3,4}^x = u; \\
\vec{l}_1^{\,x} = \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}, 1, 0, 0\right); \vec{l}_2^{\,x} = \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}, 1, 0, 0\right); \vec{l}_3^{\,x} = (0,0,1,0); \vec{l}_4^{\,x} = (0,0,0,1); \\
\mathrm{I}_1^x = \delta u + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta; \;\; \mathrm{I}_2^x = \delta u - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta; \;\; \mathrm{I}_3^x = \delta w; \;\; \mathrm{I}_4^x = \delta\rho;
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

Для матрицы $\mathbf{A}_z$ соответственно находим

$$
\begin{gathered}
\lambda_{1,2}^z = (w-\dot z) \pm c\big/\sqrt{\rho_0}; \qquad \lambda_{3,4}^z = (w-\dot z); \\
\vec{l}_1^{\,z} = \left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}, 0, 1, 0\right); \vec{l}_2^{\,z} = \left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}, 0, 1, 0\right); \vec{l}_3^{\,z} = (0,1,0,0); \vec{l}_4^{\,z} = (0,0,0,1); \\
\mathrm{I}_1^z = \delta w + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta; \;\; \mathrm{I}_2^z = \delta w - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta; \;\; \mathrm{I}_3^z = \delta u; \;\; \mathrm{I}_4^z = \delta\rho;
\end{gathered} \tag{1.11}
$$

Характеристические уравнения

$$
\frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \cdot \frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^x}{\partial z} = G_k^x; \qquad \frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^z}{\partial t} + \lambda_k^z \cdot \frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^z}{\partial z} = G_k^z; \qquad k = 1,2,3,4 \tag{1.12}
$$

относительно величин $\delta u, \delta w, \delta\theta, \delta\rho$ будут использоваться на фазе2.

Уравнения мелкой воды не содержат вертикальных скоростей. Восполнение недостающей информации осуществляется следующим образом.

$$
\begin{aligned}
&\left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2} = \frac{U_R^{n+1/2} + U_L^{n+1/2}}{2} \cdot \frac{B_R - B_L}{\Delta x};\\
&\left(W_{0T}\right)_c^{n+1/2} = \left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2} - \frac{h_R^{n+1/2} + h_L^{n+1/2}}{2} \cdot \frac{\left(U_R^n + U_R^{n+1}\right) - \left(U_L^n + U_L^{n+1}\right)}{2\Delta x};
\end{aligned}
\qquad (1.13)
$$

Откуда находим

$$
W_c^{n+1/2}\left(z\right) = \left(W_{0T}\right)_c^{n+1/2} \cdot \left(\frac{z - B_c}{H_c^{n+1/2} - B_c}\right) - \left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2} \cdot \left(\frac{z - H_c^{n+1/2}}{H_c^{n+1/2} - B_c}\right);
$$

(1.14)

Аналогично для целых временных слоев

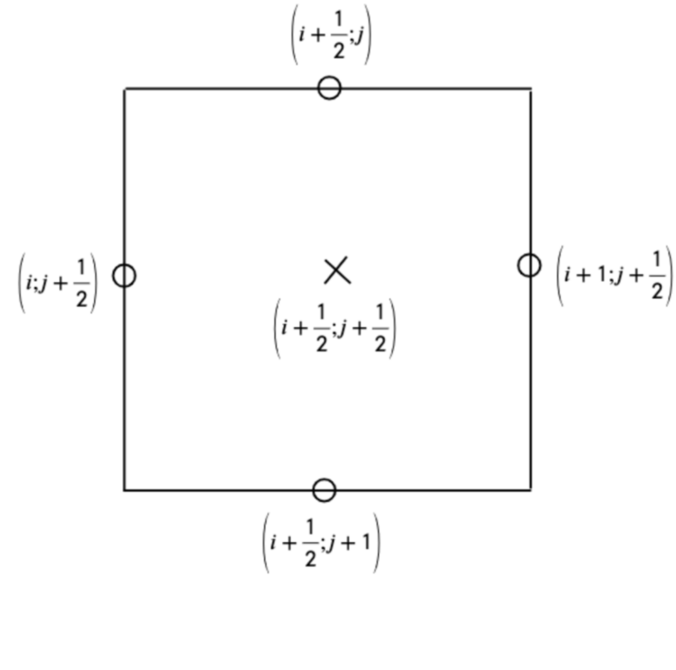
$$
W_c^n\left(z\right) = \left(W_{0T}\right)_c^n \cdot \left(\frac{z - B_c}{H_c^n - B_c}\right) - \left(W_{0B}\right)_c^n \cdot \left(\frac{z - H_c^n}{H_c^n - B_c}\right);
$$

(1.15)

Кроме консервативных вертикальных скоростей нам понадобятся и их потоковые значения. По аналогии с консервативными переменными запишем

$$
\begin{aligned}
&W_R^n\left(z\right) = \left(W_{0T}\right)_R^n \cdot \left(\frac{z - B_R}{H_R^n - B_R}\right) - \left(W_{0B}\right)_R^n \cdot \left(\frac{z - H_R^n}{H_R^n - B_R}\right);\\
&W_L^n\left(z\right) = \left(W_{0T}\right)_L^n \cdot \left(\frac{z - B_L}{H_L^n - B_L}\right) - \left(W_{0B}\right)_L^n \cdot \left(\frac{z - H_L^n}{H_L^n - B_L}\right);
\end{aligned}
$$

Используемые в алгоритме пространственные индексы:



Алгоритм решения уравнений:

0. Начальные данные:

$$\left(\dot{z}\right)^0_{i+1/2,1} = \mathrm{w}^0_{i+1/2,1} - \frac{\left(\mathrm{u}^0_{i+1,1}+\mathrm{u}^0_{i,1}\right)}{2}\frac{\left(\mathrm{z}^0_{i+1,1}-\mathrm{z}^0_{i,1}\right)}{\Delta x}$$

$$\mathrm{w}^0_{i+1/2,N_z} = \mathrm{u}^0_{i+1/2,N_z}\frac{\left(\mathrm{z}^0_{i+1,\mathrm{N}_z}-\mathrm{z}^0_{i,\mathrm{N}_z}\right)}{\Delta x}$$

Если используется сигма-сетка, то:

$$\dot{\mathrm{z}}_{i+1/2,k} = (\mathrm{N}_z-\mathrm{k})\,\dot{\mathrm{z}}_{i+1/2,1}/(\mathrm{N}_z-1),\ \mathrm{k} = \overline{2, N_z-1}$$

Для граничных условий, сохраняем значения инвариантов в мелкой воде:

$$(I_1^{sw})^0_L = \left(U_0\right)^0_1 + \frac{g}{\sqrt{g(h_0)^0_{1+1/2}}}\left(H_0\right)^0_1$$
$$(I_2^{sw})^0_R = \left(U_0\right)^0_{N_x} - \frac{g}{\sqrt{g(h_0)^0_{N_x-1/2}}}\left(H_0\right)^0_{N_x} \qquad (1.16)$$

И в негидростатике:

$$(I_1^x)^0_{L,k} = \delta u^0_{1,k} + \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta^0_{1,k}}\delta\theta^0_{1,k}$$
$$(I_2^x)^0_{R,k} = \delta u^0_{\mathrm{N}_x,k} - \frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta^0_{\mathrm{N}_x,k}}\delta\theta^0_{\mathrm{N}_x,k} \qquad (1.17)$$

И еще значения $c_L^0 = \sqrt{g\left(h_0\right)^0_1}, c_R^0 = \sqrt{g\left(h_0\right)^0_{N_x}}$

1. Фаза 1 по мелкой воде (1.2):

$$\frac{\left(h_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2} - \left(h_0\right)^n_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\left(h_0U_0\right)^n_{i+1} - \left(h_0U_0\right)^n_i}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\left(\rho_0h_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2} - \left(\rho_0h_0\right)^n_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\left(\rho_0h_0U_0\right)^n_{i+1} - \left(\rho_0h_0U_0\right)^n_i}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\left(\rho_0h_0U_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2} - \left(\rho_0h_0U_0\right)^n_{i+1/2}}{\tau/2} + \frac{\left(\rho_0h_0{U_0}^2\right)^n_{i+1} - \left(\rho_0h_0{U_0}^2\right)^n_i}{\Delta x} +$$
$$+ g\frac{\left(h_0\right)^n_{i+1} + \left(h_0\right)^n_i}{2}\frac{\left(\rho_0\right)^n_{i+1} + \left(\rho_0\right)^n_i}{2}\frac{\left(H_0\right)^n_{i+1} - \left(H_0\right)^n_i}{\Delta x} + \frac{g}{2}\frac{\left({h_0}^2\right)^n_{i+1} + \left({h_0}^2\right)^n_i}{2}\frac{\left(\rho_0\right)^n_{i+1} - \left(\rho_0\right)^n_i}{\Delta x} = 0$$

Находим $\left(h_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2}, \left(\rho_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2}, \left(U_0\right)^{n+1/2}_{i+1/2}$. (Во всех текущих тестах $\rho_0 = const$)

2. Находим положение сетки на полуцелом шаге по времени:

$$z_{i+1/2,\mathrm{k}}^{n+1/2} = z_{i+1/2,\mathrm{k}}^{n} + \frac{\tau}{2}\dot{z}_{i+1/2,k}^{n}$$

3. Фаза 1 для системы (1.1):

Введем следующие обозначения:

$$\Delta z_c = z_{i+1/2,k} - z_{i+1/2,k+1}$$

$$\Delta z_R = z_{i+1,k} - z_{i+1,k+1}$$

$$\Delta z_L = z_{i,k} - z_{i,k+1}$$

$$\Delta z_T = z_{i+1,k} - z_{i,k}$$

$$\Delta z_B = z_{i+1,k+1} - z_{i,k+1}$$

$$\Delta V = \Delta z_c \Delta x$$

$$\begin{aligned}\frac{(\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n}}{\tau/2} &+ \left((\theta u)_{i+1,k+1/2}^{n}\,\Delta z_R^n - (\theta u)_{i,k+1/2}^{n}\,\Delta z_L^n\right) - \\ &- \left((\theta u)_{i+1/2,k}^{n}\,\Delta z_T^n - (\theta u)_{i+1/2,k+1}^{n}\,\Delta z_B^n\right) + \\ &+ \left((\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n} - (\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n}\right)\Delta x = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\rho\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\rho\theta\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n}}{\tau/2} &+ \left((\rho\theta u)_{i+1,k+1/2}^{n}\,\Delta z_R^n - (\rho\theta u)_{i,k+1/2}^{n}\,\Delta z_L^n\right) - \\ &- \left((\rho\theta u)_{i+1/2,k}^{n}\,\Delta z_T^n - (\rho\theta u)_{i+1/2,k+1}^{n}\,\Delta z_B^n\right) + \\ &+ \left((\rho\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n} - (\rho\theta(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n}\right)\Delta x = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\theta u\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\theta u\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n}}{\tau/2} &+ \left((\theta u^2)_{i+1,k+1/2}^{n} + \frac{c^2}{\rho_0}\left(\theta_{i+1,k+1/2}^{n} - \theta_0\right) + g\left(H_0\right)_{i+1}^{n}\right)\Delta z_R^n - \\ &- \left((\theta u^2)_{i,k+1/2}^{n} + \frac{c^2}{\rho_0}\left(\theta_{i,k+1/2}^{n} - \theta_0\right) + g\left(H_0\right)_{i}^{n}\right)\Delta z_L^n - \\ &- \left((\theta u^2)_{i+1/2,k}^{n} + \frac{c^2}{\rho_0}\left(\theta_{i+1/2,k}^{n} - \theta_0\right) + g\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n}\right)\Delta z_T^n + \\ &+ \left((\theta u^2)_{i+1/2,k+1}^{n} + \frac{c^2}{\rho_0}\left(\theta_{i+1/2,k+1}^{n} - \theta_0\right) + g\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n}\right)\Delta z_B^n + \\ &+ \left((\theta u(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n} - (\theta u(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n}\right)\Delta x = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\theta w\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (\theta w\Delta V)_{i+1/2,k+1/2}^{n}}{\tau/2} &+ \left((\theta uw)_{i+1,k+1/2}^{n}\,\Delta z_R^n - (\theta uw)_{i,k+1/2}^{n}\,\Delta z_L^n\right) - \\ &- \left((\theta uw)_{i+1/2,k}^{n}\,\Delta z_T^n - (\theta u^2)_{i+1/2,k+1}^{n}\,\Delta z_B^n\right) + \\ &+ \left((\theta u(w-\dot{z}))_{i+1/2,k}^{n} - (\theta u(w-\dot{z}))_{i+1/2,k+1}^{n}\right)\Delta x = -\left(g\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right)\Delta V\right)_{i+1/2,k+1}^{n}\end{aligned}$$

Находим $\theta_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \mathrm{u}_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \mathrm{w}_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2}, \rho_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2}$

4. Фаза 2 по мелкой воде (1.2):

   Находим $\left(h_0\right)_i^{n+1}, \left(\rho_0\right)_i^{n+1}, \left(U_0\right)_i^{n+1}$

   Граничные условия:

   Дополняем пришедшие на границу инварианты условиями (1.16). Полученную систему разрешаем аналогично внутренним граням.

5. Вычисляем вертикальные скорости в мелкой воде согласно формулам (1.13)-(1.15):

$$\left(W_B\right)_{i+1/2}^{n} = \left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1/2}^{n} \frac{z_{i+1,N_z}^{n} - z_{i,N_z}^{n}}{\Delta x}$$

$$\left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{z_{i+1,N_z}^{n} - z_{i,N_z}^{n}}{\Delta x}$$

$$\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n} = \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n} - \frac{\left(h_0\right)_{i+1}^{n} + \left(h_0\right)_{i}^{n}}{2} \frac{\left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1}^{n} - \left(\mathrm{U}_0\right)_{i}^{n}}{\Delta x}$$

$$\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1/2} = \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1/2} - \frac{\left(h_0\right)_{i+1}^{n} + \left(h_0\right)_{i+1}^{n+1} + \left(h_0\right)_{i}^{n} + \left(h_0\right)_{i}^{n+1}}{4} \frac{\left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1}^{n} + \left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1}^{n+1} - \left(\mathrm{U}_0\right)_{i}^{n} - \left(\mathrm{U}_0\right)_{i}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$\left(W_B\right)_{i}^{*} = \frac{\left(W_B\right)_{i+1/2}^{*} + \left(W_B\right)_{i-1/2}^{*}}{2}$$

$$\left(W_T\right)_{i}^{*} = \frac{\left(W_T\right)_{i+1/2}^{*} + \left(W_T\right)_{i-1/2}^{*}}{2}$$

   И сами вертикальные скорости во всех слоях определяются по следующим формулам:

$$\left(W_0\right)_{\bullet,k+1/2}^{*} = \frac{\left(\left(W_T\right)_{\bullet}^{*}\left(\frac{z_{\bullet,k+1}^{*} + z_{\bullet,k}^{*}}{2} - z_{\bullet,\mathrm{N}_z}^{*}\right) + \left(W_B\right)_{\bullet}^{*}\left(\left(H_0\right)_{\bullet}^{*} - \frac{z_{\bullet,k+1}^{*} + z_{\bullet,k}^{*}}{2}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{\bullet}^{*}}$$

$$\left(W_0\right)_{\bullet,k}^{*} = \frac{\left(\left(W_T\right)_{\bullet}^{*}\left(z_{\bullet,k}^{*} - z_{\bullet,\mathrm{N}_z}^{*}\right) + \left(W_B\right)_{\bullet}^{*}\left(\left(H_0\right)_{\bullet}^{*} - z_{\bullet,k}^{*}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{\bullet}^{*}}$$

(1.18)

6. Вычисляем переносимые величины $\delta\theta, \delta u, \delta w, \delta\rho$ согласно определениям *в* (1.6).

7. Фаза 2 для системы (1.1) по направлению оси OX:

   Перенос инвариантов (1.10), для внутренних узлов будет полный набор инвариантов, из которых найдем $\delta\theta_{i,k+1/2}^{n+1}, \delta\,\mathrm{u}_{i,k+1/2}^{n+1}, \delta\,\mathrm{w}_{i,k+1/2}^{n+1}, \delta\rho_{i,k+1/2}^{n+1}$

   Граничные условия:

   Дополняем пришедшие на границу инварианты условиями (1.17), система уравнений на границе с данными условиями становится полной, разрешаем ее с учетом

   $\delta\theta\big|_{\Gamma} = 0$

8. Фаза 3 для (1.2):

   Аналогично фазе 1, находим $\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}, \left(U_0\right)_{i+1/2}^{n+1}, \left(\rho_0\right)_{i+1/2}^{n+1}$

$\left(H_0\right)_*^{n+1} = \left(h_0\right)_*^{n+1} + B_*^{n+1}$

9. Вычисляем вертикальные скорости в мелкой воде на новом временном слое, аналогично пункту (5) алгоритма. Вычислены $\left(W_0\right)_{*,*}^{n+1}$
10. Фаза 2 для системы (1.1) по направлению оси OZ:

Перенос инвариантов (1.11), для внутренних узлов будет полный набор инвариантов, из которых найдем $\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta\,\mathrm{u}_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta\,\mathrm{w}_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta\rho_{i+1/2,k}^{n+1}$

На нижней границе:

$\mathrm{u}_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1}, \rho_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1}$ - находятся из 2го и 4го инварианта соответственно.

Инвариант $\left(I_1^z\right)$ на нижнюю границу не приходит, вместо него используем условие (1.4):

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{i+1/2} \cdot u_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1} - w_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1} = 0$$

Зная $\delta\,\mathrm{u}_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1}, \left(U_0\right)_{i+1/2}^{n+1}$, находим

$$\delta w_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1} = \left(\delta u_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i+1/2}^{n+1}\right)\frac{z_{i+1,N_z}^{n+1} - z_{i,N_z}^{n+1}}{\Delta x} - \left(W_0\right)_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1}$$

Затем из $\left(I_2^z\right)_{i+1/2,N_z}^{n+1}$ находим

$$\delta\theta = \frac{\left(\left(I_2^z\right)_{i+1/2,N_z}^{n+1} - \delta w_{i+1/2,\mathrm{N}_z}^{n+1}\right)}{-\left(\dfrac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\right)_{i+1/2,\mathrm{N}_z-1/2}^{n+1/2}}$$

На верхней границе:

$\delta\,\mathrm{u}_{i+1/2,1}^{n+1}, \delta\rho_{i+1/2,1}^{n+1}$- находятся из 2го и 4го инварианта соответственно.

Уравнение на высоту из (1.3) - представляет собой уравнение переноса, ведем $\delta H = H - H_0$ и запишем условие (1.3) через δH :

$$\frac{\partial \delta H}{\partial t} + (\mathrm{U}_0 + \delta\,\mathrm{u}|_H)\cdot\frac{\partial \delta H}{\partial x} = w|_H - \frac{\partial H_0}{\partial t} + \mathrm{u}|_H \cdot \frac{\partial H_0}{\partial x}$$

Найдем потоковые величины δH_i^{n+1} по второй фазе схемы КАБАРЕ:

$$\delta H_i^{n+1} = \begin{cases} 2\delta H_{i+1/2}^{n+1/2} - \delta H_{i+1}^{n}, if(\delta\,\mathrm{u}_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1/2}^{n+1} + \delta\,\mathrm{u}_{i-1/2,1}^{n+1} + \left(\mathrm{U}_0\right)_{i-1/2}^{n+1}) < -\varepsilon \\ 2\delta H_{i-1/2}^{n+1/2} - \delta H_{i-1}^{n}, if(\delta\,\mathrm{u}_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\mathrm{U}_0\right)_{i+1/2}^{n+1} + \delta\,\mathrm{u}_{i-1/2,1}^{n+1} + \left(\mathrm{U}_0\right)_{i-1/2}^{n+1}) > \varepsilon \\ 0.5\cdot(\delta H_{i-1/2}^{n+1/2} + \delta H_{i+1/2}^{n+1/2}) \end{cases}$$

Со стандартной процедурой монотонизации.

Найдем потоковые высоты:

$$H_i^{n+1} = \left(\delta H\right)_i^{n+1} + \left(H_0\right)_i^{n+1}$$

Новые потоковые высоты находятся следующим образом (сигма сетка):

$$\mathrm{z}_{i,k}^{n+1} = \mathrm{z}_{i,\mathrm{N}_z}^{n+1} + (\mathrm{z}_{i,1}^{n+1} - \mathrm{z}_{i,\mathrm{N}_z}^{n+1}) * (\mathrm{N}_z - \mathrm{k}) / (\mathrm{N}_z - 1)$$

Зная $\delta u_{i+1/2,1}^{n+1}, \left(U_0\right)_{i+1/2}^{n+1}$, найдем потоковые высоты $z_{i,1}^{n+1}$ из условия непротекания через верхнюю границу (1.3), по стандартной второй фазе схемы КАБАРЕ.

Из условия на давление (1.3) получаем следующие разностные уравнения:

$$c^2 \delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\rho_0 g\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right)$$

$$\dot{z}_{i+1/2,1}^{n+1} + \frac{\left(\delta u_{i+1,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i+1}^{n+1}\right) + \left(\delta u_{i,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i}^{n+1}\right)}{2} \cdot \frac{\left(z_{i+1,1}^{n+1} - z_{i,1}^{n+1}\right)}{\Delta x} = \delta w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} \qquad (1.19)$$

На верхнюю границу приходит $\left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} = \delta w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0}\theta}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1}$ (1.20)

Учитывая, что $\dot{z}_{i+1/2,1}^{n+1} = \dfrac{z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1/2}}{\tau/2}$ и формулу (1.18),

получим следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных:

$\delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1}, z_{i+1/2,1}^{n+1}, \delta w_{i+1/2,1}^{n+1}, \left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1}$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} = \delta w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1} \\
c^2 \delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\rho_0 g\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right) \\
\dfrac{z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1/2}}{\tau/2} + \dfrac{\left(\delta u_{i+1,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i+1}^{n+1}\right) + \left(\delta u_{i,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i}^{n+1}\right)}{2} \cdot \dfrac{\left(z_{i+1,1}^{n+1} - z_{i,1}^{n+1}\right)}{\Delta x} = \delta w_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} \\
\left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} = \dfrac{\left(\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,N_z}^{n+1}\right) + \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right) \\
\delta w_{i+1/2,1}^{n+1} = \left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \left(\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right)\right) \\
\dfrac{z_{i+1/2,1}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1/2}}{\tau/2} + \dfrac{\left(\delta u_{i+1,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i+1}^{n+1}\right) + \left(\delta u_{i,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i}^{n+1}\right)}{2} \cdot \dfrac{\left(z_{i+1,1}^{n+1} - z_{i,1}^{n+1}\right)}{\Delta x} = \\
\qquad = \left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \left(\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right)\right) + \left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} \\
\left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} = \dfrac{\left(\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}} z_{i+1/2,1}^{n+1} + \dfrac{\left(\left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(z_{i+1/2,N_z}^{n+1}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
z_{i+1/2,1}^{n+1} = \left[z_{i+1/2,1}^{n+1/2} + \tau/2 \left(\left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \left(\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1}\right) + \right.\right. \\
\left. + \dfrac{\left(\left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(z_{i+1/2,N_z}^{n+1}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}} - \dfrac{\left(\delta u_{i+1,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i+1}^{n+1}\right) + \left(\delta u_{i,1+1/2}^{n+1} + \left(U_0\right)_{i}^{n+1}\right)}{2} \dfrac{\left(z_{i+1,1}^{n+1} - z_{i,1}^{n+1}\right)}{\Delta x} \right) \\
\qquad \Bigg/ \left(1 + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \dfrac{\tau \rho_0 g}{2c^2} - \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\left(\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}} \right) \\
\delta\theta_{i+1/2,1}^{n+1} = -\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right) \\
\delta w_{i+1/2,1}^{n+1} = \left(I_1^z\right)_{i+1/2,1}^{n+1} + \left(\dfrac{c_0}{\sqrt{\rho_0 \theta}}\right)_{i+1/2,1+1/2}^{n+1/2} \left(\dfrac{\rho_0 g}{c^2}\left(\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - z_{i+1/2,1}^{n+1}\right)\right) \\
\left(W_0\right)_{i+1/2,1}^{n+1} = \dfrac{\left(\left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}} z_{i+1/2,1}^{n+1} + \dfrac{\left(\left(W_B\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(H_0\right)_{i+1/2}^{n+1} - \left(W_T\right)_{i+1/2}^{n+1}\left(z_{i+1/2,N_z}^{n+1}\right)\right)}{\left(h_0\right)_{i+1/2}^{n+1}}
\end{array}
\right.
$$

Найдены все потоковые величины $\delta\theta_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta u_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta w_{i+1/2,k}^{n+1}, \delta\rho_{i+1/2,k}^{n+1}$

Затем найдем :

$$\dot{z}^{n+1}_{i+1/2,1} = \frac{z^{n+1}_{i+1/2,1} - z^{n+1/2}_{i+1/2,1}}{\tau / 2}$$

И согласно используемой сетке найдем $\dot{z}^{n+1}_{i+1/2,\mathrm{k}}, k = \overline{2..N_z}$

11. Находим положение сетки на n+1 шаге по времени:

$$z^{n+1}_{i+1/2,\mathrm{k}} = z^{n+1/2}_{i+1/2,\mathrm{k}} + \frac{\tau}{2}\dot{z}^{n+1}_{i+1/2,k}$$

12. Найдем полные потоковые переменные

$$u = \delta u + U_0$$
$$w = \delta w + W_0$$
$$\theta = \delta\theta + \theta_0$$
$$\rho = \delta\rho + \rho_0$$

13. Фаза 3 для системы (1.1):

Аналогично фазе 1, находим $\theta^{n+1}_{i+1/2,k+1/2}, \mathrm{u}^{n+1}_{i+1/2,k+1/2}, \mathrm{w}^{n+1}_{i+1/2,k+1/2}, \rho^{n+1}_{i+1/2,k+1/2}$

Шаг по времени выбирается по следующей формуле:

$$\tau_{sw}{}^{n} = CFL \cdot \min_{i=1..\mathrm{N}_x-1}\left(\frac{\Delta\,\mathrm{x}}{\left|(U_0)^n_{i+1/2}\right| + \sqrt{g\cdot(\mathrm{h}_0)^n_{i+1/2}}}\right)$$
$$\tau^n = \min\left(\tau_{sw}{}^{n}, CFL\cdot\min_{i=1..\mathrm{N}_x-1, j=1,\mathrm{N}_z-1}\left(\min\left(\frac{\Delta\,\mathrm{x}}{\left|u^n_{i+1/2,j+1/2}\right| + c/\rho_0}, \frac{z^n_{i+1/2,j} - z^n_{i+1/2,j+1}}{\left|w^n_{i+1/2,j+1/2}\right| + c/\rho_0}\right)\right)\right) \quad (1.21)$$

Тесты

1) Возмущение на поверхности.

Начальные данные:

$$\begin{cases} H(x,t=0) = \begin{cases} H_0, if\ |\,\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\,| \geq \mathrm{r} \\ H_0 + \dfrac{\alpha}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{|\,\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\,|}{r}\pi\right)\right), if\ |\,\mathrm{x}-\mathrm{x}_0\,| < \mathrm{r} \end{cases} \\ B(x) = 0 \\ u(x,z,t=0) = 0 \\ w(x,z,t=0) = 0 \\ \rho(x,z,t=0) = \rho_0 \\ \theta(x,z,t=0) = \theta_0 \end{cases}$$

В приведенных ниже расчетах использовались следующие общие параметры:

Длина расчетной области $L_x = 20$. Фоновая высота $H_0 = 1$, $B(x) = 0$

Радиус возмущения $r = 0.25\cdot L_x$, параметр отвечающий за высоту возмущения $\alpha = 0.01\cdot H_0$, $x_0 = 0.7\cdot L_x$.

Остальные параметры $\rho_0 = 1$, $\theta_0 = 1$, $g = 1$.

Сетка с количеством узлов $N_x \times N_z$.

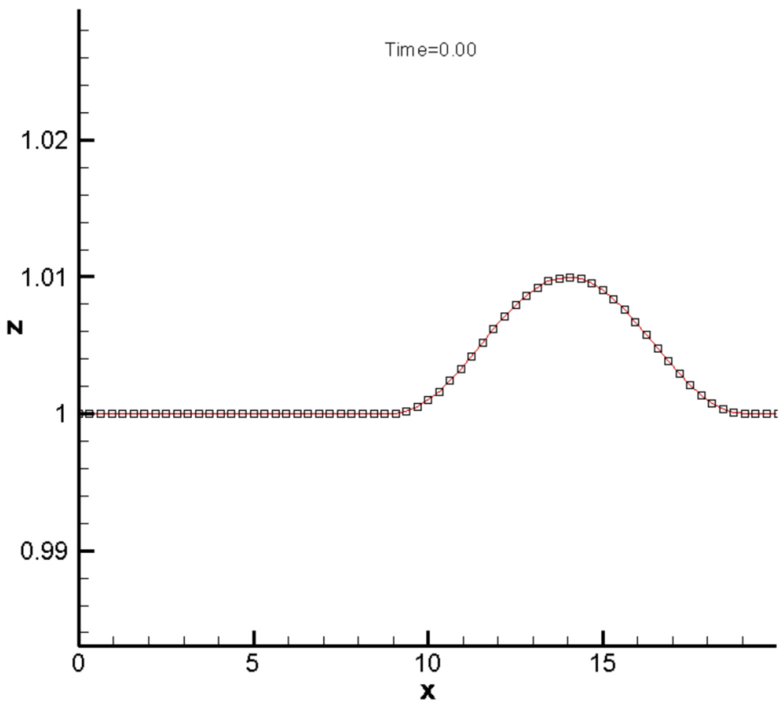
Периодические граничные условия $f(x,z,t) = f(x + L_x, z, t)$

На дальнейших примерах расчета: красным показана поверхность по мелкой воде, черными квадратами - поверхность негидростатической модели.

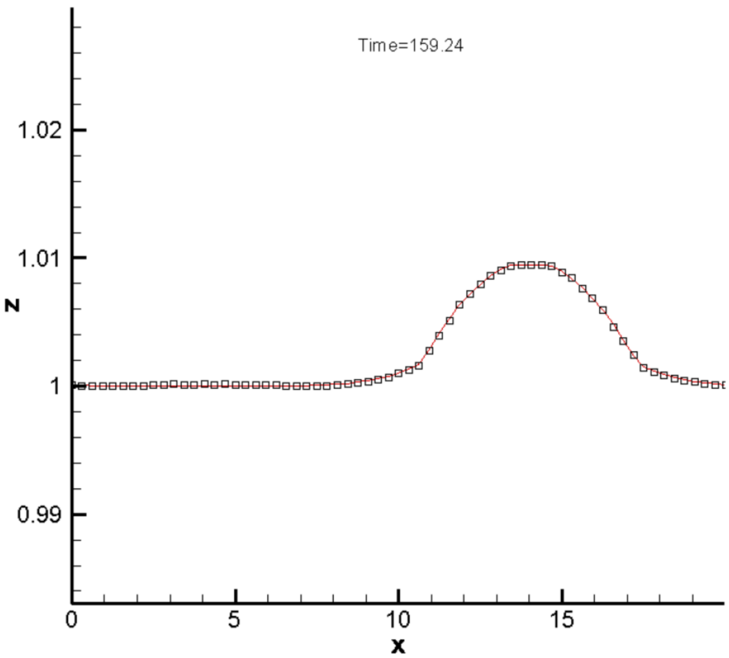
1.1. Начальный, базисный расчет со следующими параметрами:

$N_x = 65, N_z = 2, c = \sqrt{\rho_0 g H_0}$

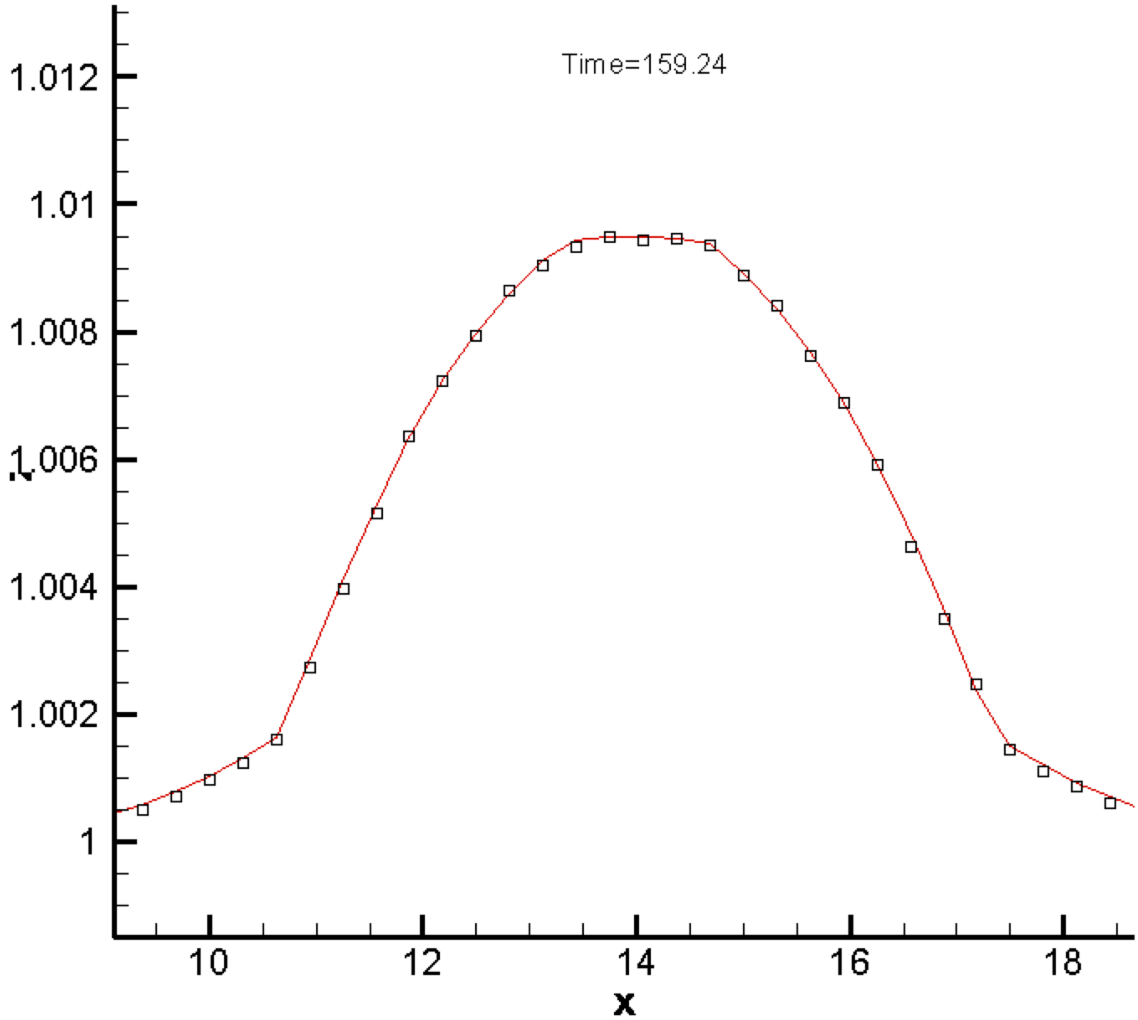
Начальное состояние:



После 10ти периодов колебаний, t = 159



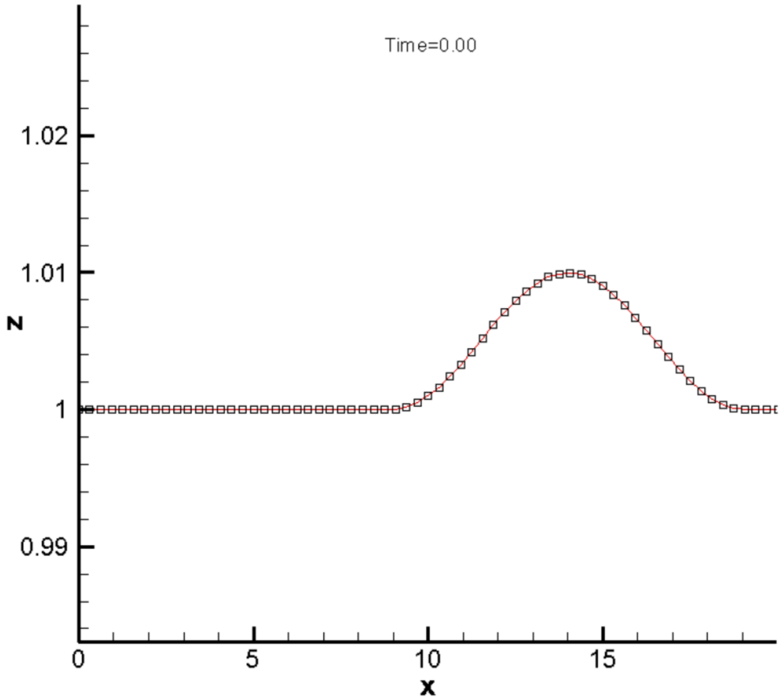
Верхняя поверхность отличается от поверхности мелкой воды(t = 159):



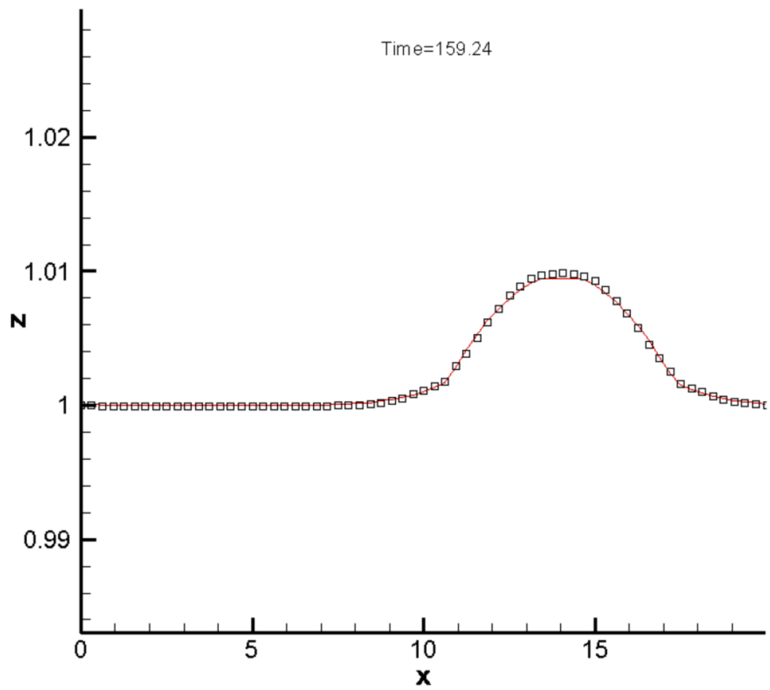
1.2. Посмотрим, как зависит решение от уменьшения параметра с в 10 раз:

$N_x = 65, N_z = 2, c = 0.1\sqrt{\rho_0 g H_0}$

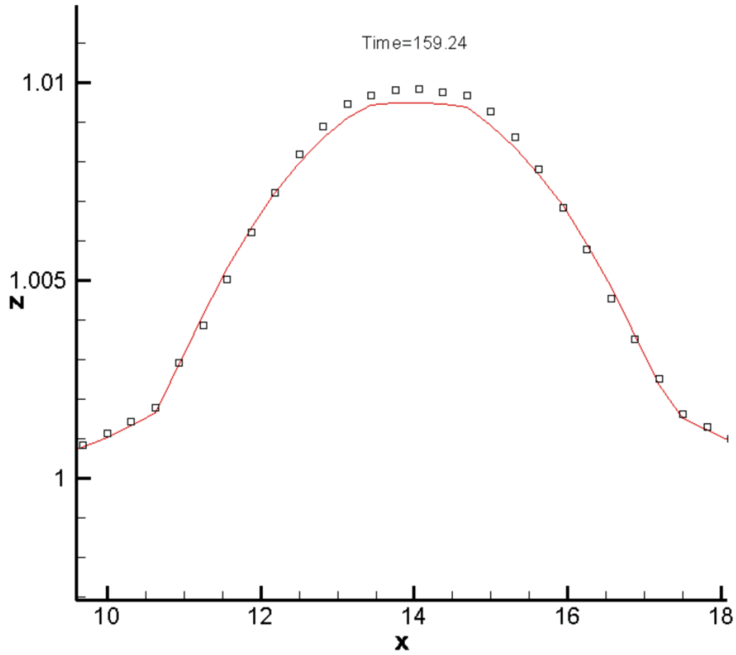
Начальное состояние:



После 10ти периодов колебаний, t = 159



Верхняя поверхность отличается от поверхности мелкой воды(t = 159):

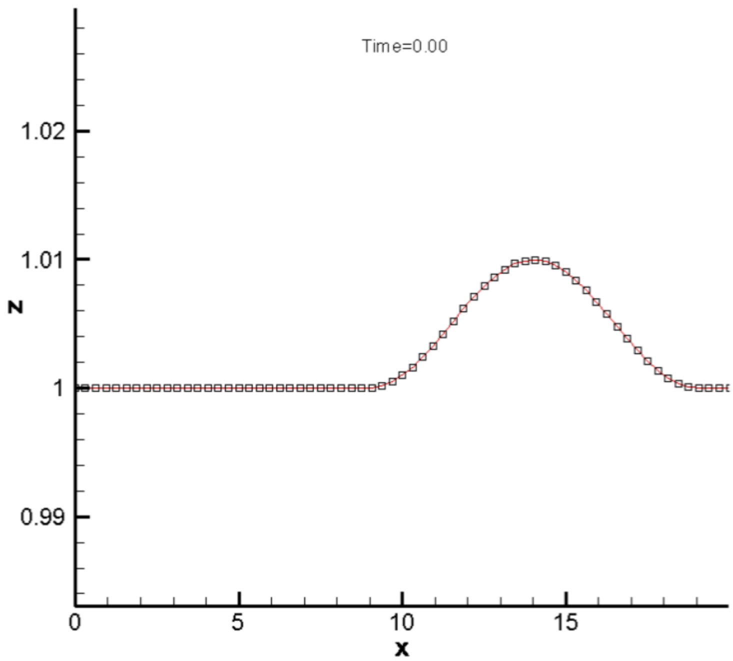


В отличии от первого теста со скоростью c сопоставимой со скоростью звука в мелкой воде, расхождение поверхностей больше, но даже при больших временах расчета поверхности ходят "синхронно".

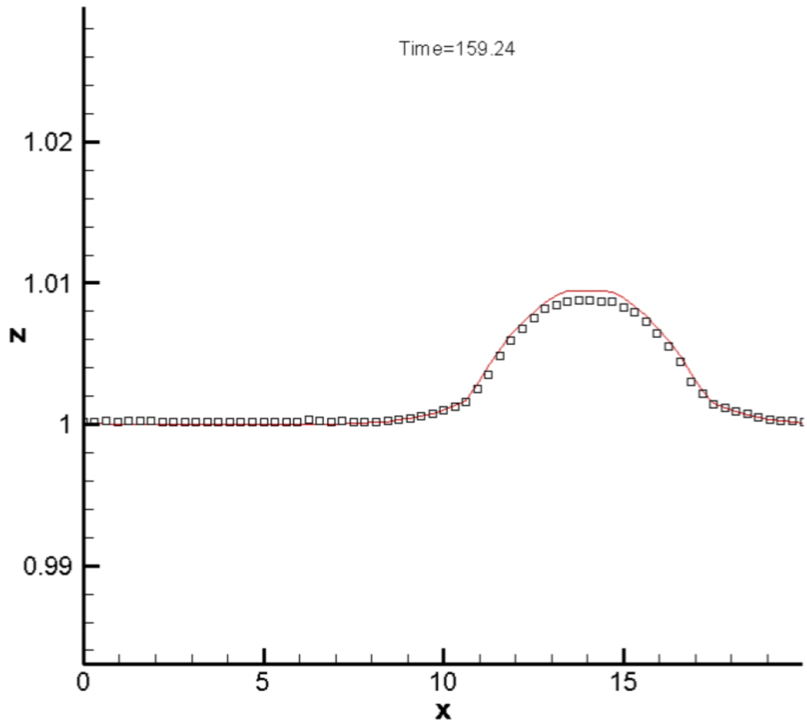
1.3. Расчет с увеличенным количеством слоев:

$N_x = 65, N_z = 9, c = 0.1\sqrt{g\rho_0 H_0}$

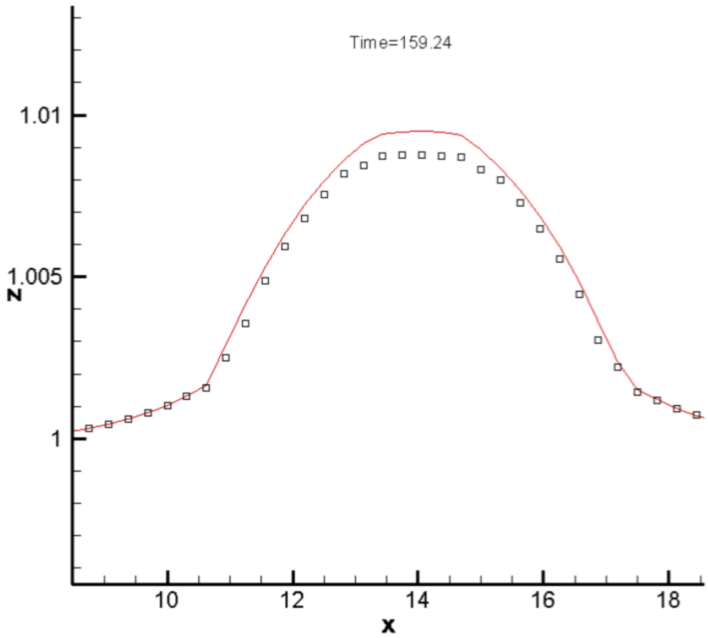
Начальное состояние:



После 10ти периодов колебаний, t = 159:



Верхняя поверхность отличается от поверхности мелкой воды(t = 159):



При увеличении количества слоев расхождение поверхностей мелкой воды и негибростатики увеличивается, но "синхронность" остается.

2. Проточный тест над неровным дном

Начальные данные:

$$
\begin{cases}
\mathrm{H}(x, \mathrm{t}=0) = H_0 \\
\mathrm{B}(x) = \begin{cases} 0, if\ |\mathrm{x}-\mathrm{x}_0| \ge \mathrm{r} \\ \dfrac{\alpha}{2}\left(1+\cos\left(\dfrac{|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|}{r}\pi\right)\right), if\ |\mathrm{x}-\mathrm{x}_0| < \mathrm{r} \end{cases} \\
u(x,z,t=0) = \dfrac{q_0}{H(x,0)-B(x)} \\
w(x,z,t=0) = 0 \\
\rho(x,z,t=0) = \rho_0 \\
\theta(x,z,t=0) = \theta_0
\end{cases}
$$

В приведенных ниже расчетах использовались следующие общие параметры:

Длина расчетной области $L_x = 20$. Координата поверхности $H_0 = 1$, $x_0 = 0.5 \cdot L_x$.

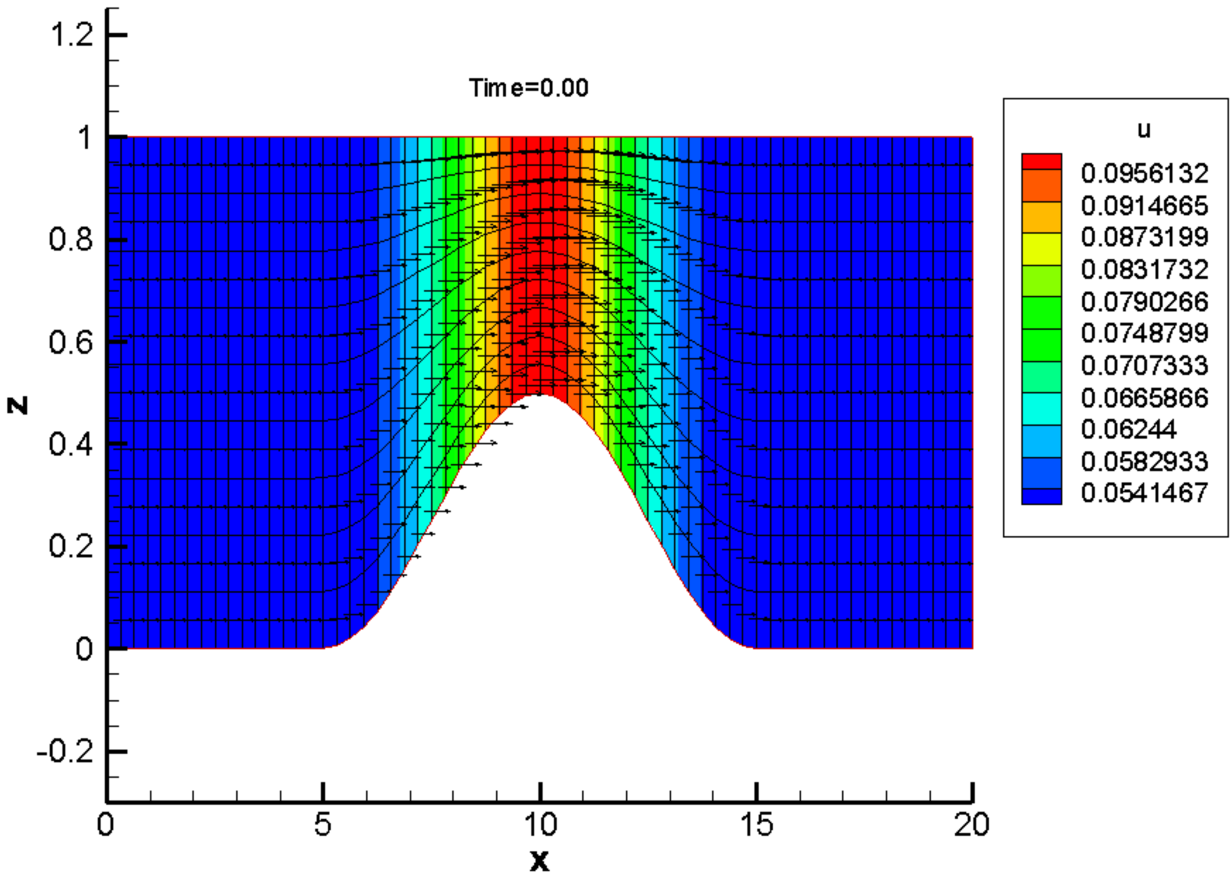
Радиус возмущения $r = 0.25 \cdot L_x$, параметр отвечающий за высоту возмущения дна $\alpha = 0.5 \cdot H_0$.

Остальные параметры $\rho_0 = 1$, $\theta_0 = 1$, $g = 1$, $q_0 = 0.1, CFL = 0.3.$

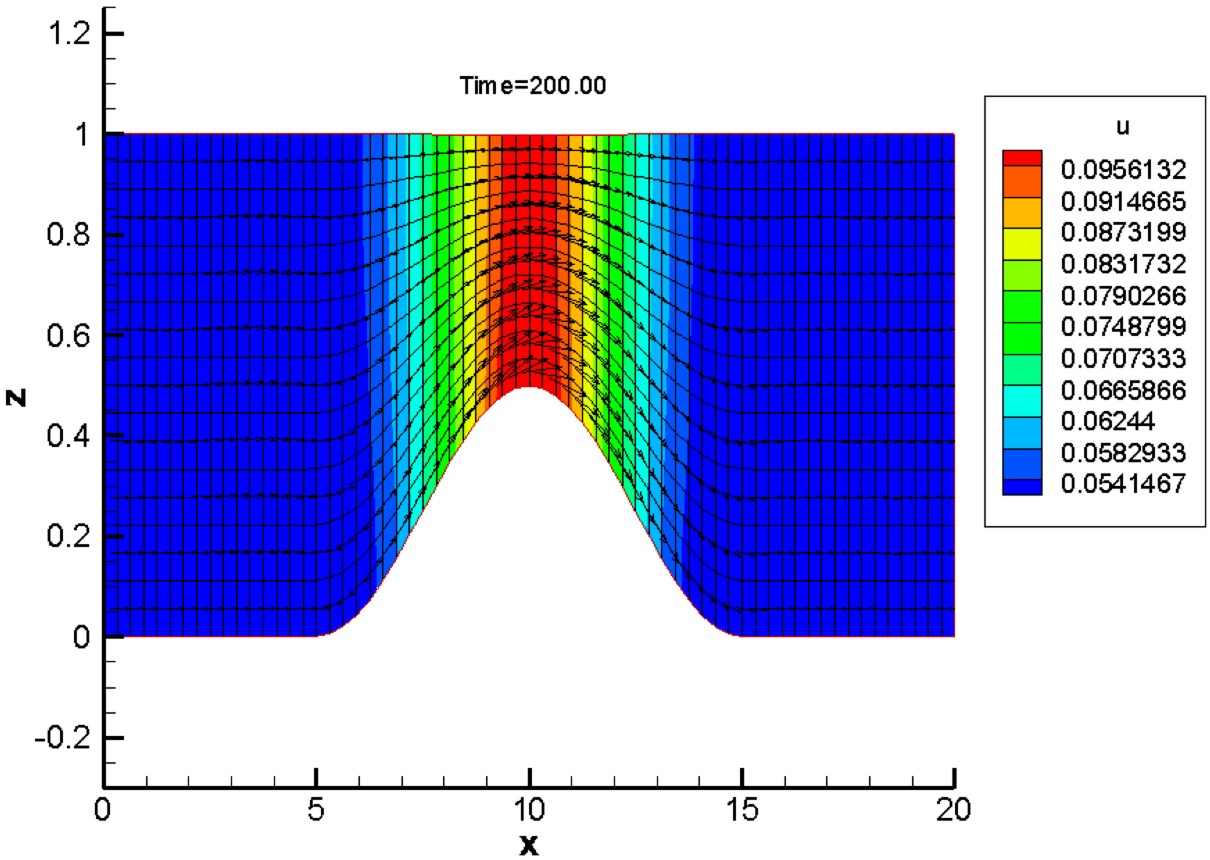
2.1. Базовый расчет

$N_x = 65, N_z = 10, c = \sqrt{\rho_0 g H_0}$

Начальные данные:



Состояние на момент времени $t = 200$ ($\sim 1.2 \cdot 10^4$ шагов):



Происходит выстраивание стационарного течения, стабилизируется верхняя поверхность:

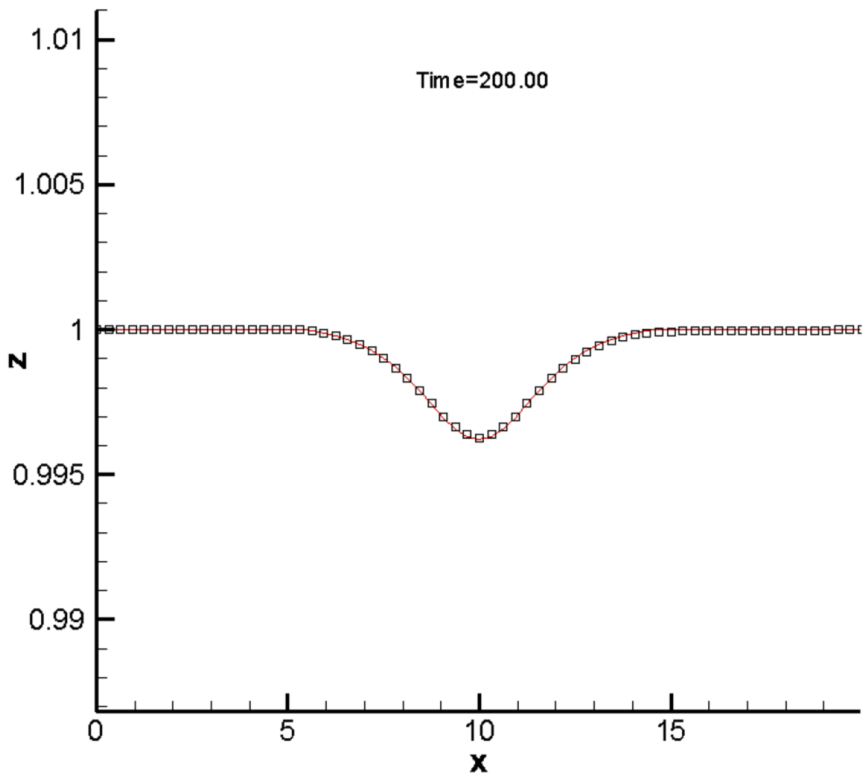
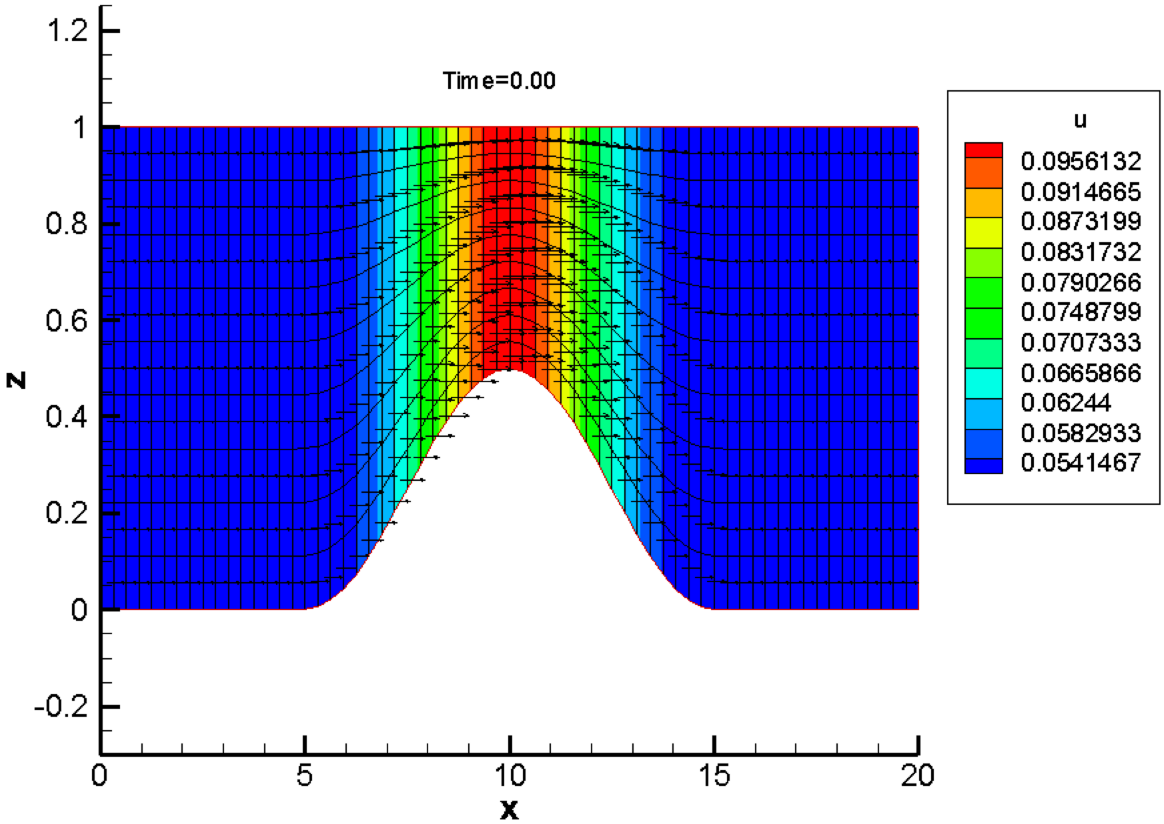


Рис.1 Положение поверхности:
красная линия - уровень по мелкой воде
черные квадраты - поверхность в негидростатике

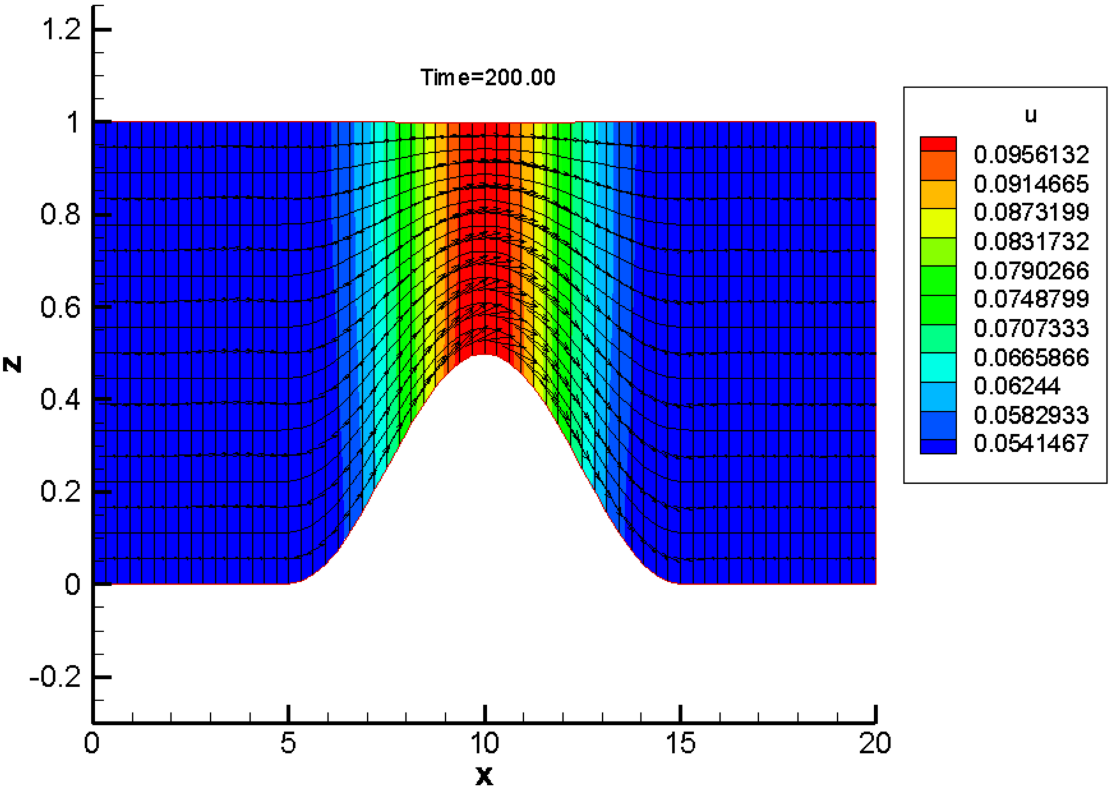
2.2. Уменьшим гидростатическую скорость звука в 5 раз:

$$N_x = 65, N_z = 10, c = 0.2 \cdot \sqrt{\rho_0 g H_0}$$

Начальные данные:



Состояние на момент времени $t = 200$ ($\sim 2.4 \cdot 10^3$ шагов):



Происходит выстраивание стационарного течения, верхняя поверхность еще не стабилизировалась:

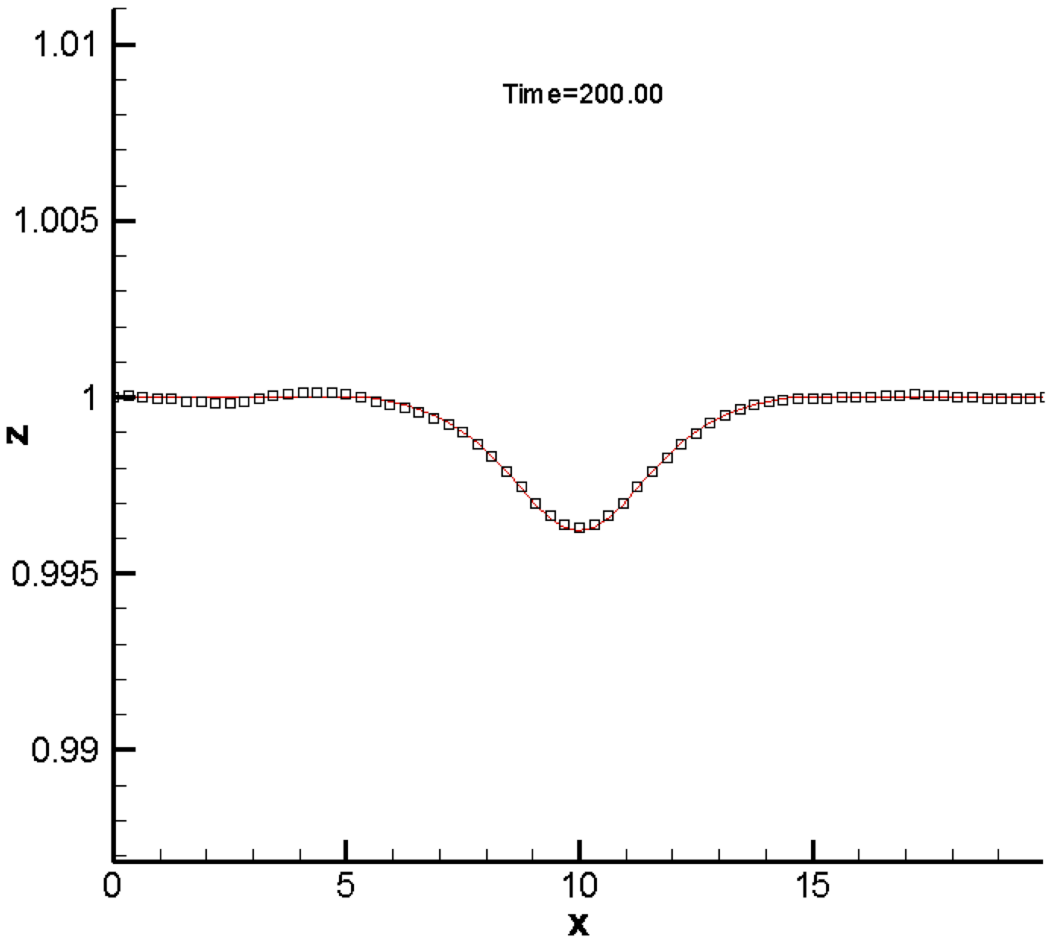


Рис.2 Положение поверхности:
красная линия - уровень по мелкой воде
черные квадраты - поверхность в негидростатике

В данном тесте шаг по времени ограничивается негидростатической системой, тесты показывают, что модель хорошо работает даже при повышении негидростатического числа маха $M = \dfrac{\max|u|}{c/\sqrt{\rho_0}}$ в 5 раз от $M_1 \approx 0.1$ до $M_2 \approx 0.5$ и соответствующем увеличении шага по времени в 5 раз.

3. Сравнение с аналитическим решением построенным по статье [1].

Рассматривается следующие начальные данные:

$$\begin{cases} h(x,t=0) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{N\left(x-\frac{1}{3}L_x\right)}{L_x}\right)\right) \\ B(x) = b_0 - h(x,0) - \dfrac{(\alpha\beta)^2}{2g\sin^2(\beta\cdot h(x,0))} \\ u(x,z,t=0) = \dfrac{\alpha\beta}{\sin(\beta\cdot h(x,0))}\cos(\beta(z-B(x))) \\ w(x,z,t=0) = \alpha\beta\left(\dfrac{\partial B}{\partial x}\cdot\dfrac{\cos(\beta(z-B(x)))}{\sin(\beta\cdot h(x,0))} + \dfrac{\partial h(x,0)}{\partial x}\cdot\dfrac{\sin(\beta(z-B(x)))\cos(\beta\cdot h(x,0))}{\sin^2(\beta\cdot h(x,0))}\right) \\ \rho(x,z,t=0) = \rho_0 = 1 \\ \theta(x,z,t=0) = \theta_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Во всех тестах $\theta_0 = 1, g = 9.8, N = 50, \beta = 1, b_0 = 0, L_x = 20.$

Согласно статье [1] начальные данные (1.22) удовлетворяют стационарной системе уравнений Эйлера.

Сами тесты будут вставлены позже, когда будет удовлетворительный результат

Список литературы:

1. Boulanger, Anne-Céline & Sainte-Marie, Jacques. (2013). Analytical solutions for the free surface hydrostatic Euler equations. Communications in Mathematical Sciences. 11. 10.4310/CMS.2013.v11.n4.a5.