***Баротропно – бароклинная декомпозиция уравнений динамики несжимаемой стратифицированной жидкости со свободной поверхностью в поле сил тяжести.***

*Исходные уравнения*

Рассмотрим двумерное течение в плоскости $(x,z)$ . Пусть $H(x,t)$ уровень свободной поверхности, $B(x)$- профиль дна. Система уравнений динамики несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial wu}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=0;\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial \rho w}{\partial x}+\frac{\partial ww}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z}=-\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)g;\\
&\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+\frac{\partial \delta\rho u}{\partial x}+\frac{\partial \delta\rho w}{\partial z}=0;
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Граничные условия на свободной поверхности

$$\begin{aligned}
&P\big|_H=0;\\
&\left.\left(\frac{\partial H}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial H}{\partial x}-w\right)\right|_H=0;
\end{aligned}\tag{1.2}$$

На нижней границе

$$\left(u\cdot n_x+w\cdot n_z\right)\big|_B=0;\Rightarrow\left.\left(\frac{\partial B}{\partial x}\cdot u-w\right)\right|_B=0;\tag{1.3}$$

*Трансформация переменных.*

Введем новые переменные, зависящие только от координаты x и времени t: $H_0(x,t), U_0(x,t), W_{0T}(x,t), W_{0B}(x,t)$ ,такие, что:

$$u(x,z,t)=U_0(x,t)+\delta u(x,z,t);\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
&w(x,z,t)=W_0(x,z,t)+\delta w(x,z,t);\\
&W_0(x,z,t)=W_{0T}(x,t)\cdot\left(\frac{z-B}{H_0-B}\right)-W_{0B}(x,t)\cdot\left(\frac{z-H_0}{H_0-B}\right);
\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$P(x,z,t)=\rho_0 g\left(H_0-z\right)+\delta P(x,z,t);\tag{1.6}$$

$$H(x,t)=H_0(x,t)+\delta H(x,t);\tag{1.7}$$

Первое уравнение системы (1.1) в новых обозначениях преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$\left\{\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{W_{0T}-W_{0B}}{h_0}\right\}+L_1\left(\delta u,\delta w,x,z,t\right)=0;\quad L_1\left(\delta u,\delta w,x,z,t\right)=\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial \delta w}{\partial z};\tag{1.8}$$

Выражение в фигурных скобках можно записать как

$$\left\{\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{W_{0T}-W_{0B}}{h_0}\right\}=\frac{\partial U_0}{\partial x}+\frac{\partial W_0}{\partial z};$$

Если приравнять его нулю, что в дальнейшем и будет сделано, то из (1.8) будет следовать, что

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial \delta w}{\partial z}=0;$$

Второе уравнение , с учетом первого, принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial wu}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial U_0}{\partial t}+\frac{\partial \delta u}{\partial t};\qquad \frac{\partial u^2}{\partial x}=\frac{\partial U_0{}^2}{\partial x}+2\frac{\partial U_0\delta u}{\partial x}+\frac{\partial \delta u^2}{\partial x};$$

$$\frac{\partial wu}{\partial z}=\frac{\partial\left(W_0+\delta w\right)\left(U_0+\delta u\right)}{\partial z}=U_0\frac{\partial W_0}{\partial z}+U_0\frac{\partial \delta w}{\partial z}+\delta u\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial \delta u}{\partial z}=$$

$$=U_0\frac{1}{h_0}\left(W_{0T}-W_{0B}\right)-\delta u\frac{\partial U_0}{\partial x}-u\frac{\partial \delta u}{\partial x}+w\frac{\partial \delta u}{\partial z};$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x}=g\frac{\partial H_0}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x};$$

$$\left\{\frac{\partial U_0}{\partial t}+2U_0\frac{\partial U_0}{\partial x}+g\frac{\partial H_0}{\partial x}+U_0\frac{1}{h_0}\left(W_{0T}-W_{0B}\right)\right\}+L_u\left(x,z,\delta u,\delta w,\delta p,\rho_0,U_0,W_0\right)=0;$$

$$L_u\left(x,z,\delta u,\delta w,\delta p,\rho_0,U_0,W_0\right)=$$

$$=\frac{\partial \delta u}{\partial t}+u\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\delta u\frac{\partial U_0}{\partial x}+w\frac{\partial \delta u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x};\tag{1.9}$$

Третье уравнение запишется как

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{\partial \delta P}{\partial z}=-\delta\rho g;\tag{1.10}$$

Последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \delta\rho}{\partial x}+w\frac{\partial \delta\rho}{\partial z}=0;\tag{1.11}$$

Граничное условие на свободной поверхности дает

$$
\left. \left( \frac{\partial\left(H_0+\delta H\right)}{\partial t} + \left(U_0+\delta u\right)\cdot\frac{\partial\left(H_0+\delta H\right)}{\partial x} - \left(W_{0H}+\delta w\right) \right) \right|_{H_0+\delta h} = 0;
$$

$$
W_0\left(x,z,t\right) = W_{0T}\left(x,t\right)\cdot\left(\frac{z-B}{H_0-B}\right) - W_{0B}\left(x,t\right)\cdot\left(\frac{z-H_0}{H_0-B}\right);
$$

$$
W_{0H} = W_{0T}\left(x,t\right)\cdot\left(1+\frac{\delta H}{H_0-B}\right) - W_{0B}\left(x,t\right)\cdot\left(\frac{\delta H}{H_0-B}\right) =
$$

$$
= W_{0T}\left(x,t\right) + \left[W_{0T}\left(x,t\right) - W_{0B}\left(x,t\right)\right]\frac{\delta H}{h_0}; \tag{1.12}
$$

$$
\left\{ \frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0\cdot\frac{\partial H_0}{\partial x} - W_{0T}\left(x,t\right) + \left[W_{0T}\left(x,t\right) - W_{0B}\left(x,t\right)\right]\frac{\delta H}{h_0} \right\} + \mathrm{L}_H = 0;
$$

$$
\mathrm{L}_H = \left. \left[ \frac{\partial\left(\delta H\right)}{\partial t} + \left(U_0+\delta u\right)\frac{\partial\left(\delta H\right)}{\partial x} + \delta u\frac{\partial\left(H_0\right)}{\partial x} - \delta w \right] \right|_{H_0+\delta h};
$$

Граничное условие на дне (1.3) приводит к соотношению

$$
\left\{ U_0\frac{\partial B}{\partial x} - W_{0B} \right\} + \delta u\frac{\partial B}{\partial x} - \delta w = 0; \tag{1.13}
$$

*Система баротропных уравнений.*

Уравнения (1.8), (1.9),(1.12),(1.13) содержат члены в фигурных скобках, зависящие только от двух переменных x и t, в то время как остальные члены зависят также и от переменной z. Такое возможно, если только фигурные скобки равны нулю. Это приводит к системе уравнений

$$
\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{W_{0T}-W_{0B}}{h_0} = 0; \Rightarrow W_{0T} - W_{0B} = -h_0\frac{\partial U_0}{\partial x}; \tag{1.14}
$$

$$
\frac{\partial U_0}{\partial t} + 2U_0\frac{\partial U_0}{\partial x} + g\frac{\partial H_0}{\partial x} + U_0\frac{1}{h_0}\left(W_{0T}-W_{0B}\right) = 0; \tag{1.15}
$$

$$
\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0\cdot\frac{\partial H_0}{\partial x} - W_{0T}\left(x,t\right) + \left[W_{0T}\left(x,t\right) - W_{0B}\left(x,t\right)\right]\frac{\delta H}{h_0} = 0; \tag{1.16}
$$

$$U_0 \frac{\partial B}{\partial x} - W_{0B} = 0; \tag{1.17}$$

Покажем, что эта система уравнений с точностью до члена, пропорционального $\delta H / h_0$ эквивалентна системе уравнений однослойной мелкой воды с учетом донного профиля .

Действительно, вычитая из (1.16) уравнение (1.17) получаем

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial (H_0 - B)}{\partial x} - (W_{0T} - W_{0B}) \cdot \left(1 + \frac{\delta H}{h_0}\right) = 0;$$

С учетом (1.14) это дает

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + U_0 \cdot \frac{\partial (H_0 - B)}{\partial x} + h_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}\left(1 + \frac{\delta H}{h_0}\right) = 0; \qquad \Rightarrow \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0}{\partial x} = 0;$$

Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0}{\partial x} + \delta H \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + g \frac{\partial H_0}{\partial x} = 0; \end{aligned} \tag{1.18}$$

Первое уравнение этой системы представляет собой модифицированный закон сохранения объема. Второе уравнение с учетом первого может быть преобразовано в уравнение сохранения импульса.

$$\begin{aligned} &U_0 \frac{\partial h_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h_0 U_0}{\partial x} + \delta H U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + h_0 \frac{\partial U_0}{\partial t} + h_0 U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial h_0 + B}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial h_0 U_0}{\partial t} + \frac{\partial U_0 U_0 h_0}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial h_0^2}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial B}{\partial x} + \delta H U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0; \end{aligned} \tag{1.19}$$

Таким образом, приходим к модифицированной системе уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 U_0}{\partial x} + \delta H \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial h_0 U_0}{\partial t} + \frac{\partial U_0^2 h_0}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial h_0^2}{\partial x} + h_0 g \frac{\partial B}{\partial x} + \delta H U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0; \end{aligned} \tag{1.20}$$

Простая форма этих уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_0}{\partial t} + (h_0 + \delta H) \frac{\partial U_0}{\partial x} + U_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} = 0; \\ &\frac{\partial U_0}{\partial t} + U_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} + g \frac{\partial h_0}{\partial x} + g \frac{\partial B}{\partial x} = 0; \end{aligned}$$

Скорость распространения звуковых возмущений в этой системе равна

$$c = \sqrt{gh} = \sqrt{g (H_0 + \delta H)} \tag{1.21}$$

и существенно превосходит характерные скорости бароклинных течений.

*Система бароклинных уравнений.*

Систему бароклинных уравнений можно получить, приравнивая нулю остаточные члены в выражениях (1.8) -(1.13):

$$
\begin{aligned}
&L_1\left(\delta u, \delta w, x, z, t\right) = 0;\\
&L_u\left(x, z, \delta u, \delta w, \delta p, \rho_0, U_0, W_0\right) = 0;\\
&L_u\left(x, z, \delta u, \delta w, \delta p, \rho_0, U_0, W_0\right) = 0;\\
&\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + u\frac{\partial \delta\rho}{\partial x} + w\frac{\partial \delta\rho}{\partial z} = 0;\\
&\mathrm{L}_H\left(\delta u, \delta w, x, z, t\right) = 0;\\
&\delta u\frac{\partial B}{\partial x} - \delta w = 0;
\end{aligned}
\qquad (1.22)
$$

Однако лучше записать их не относительно бароклинных переменных $\delta u, \delta w$, а использовать «полные» переменные $u = U_0 + \delta u,\ w = W_0 + \delta w$. Для этого достаточно подставить в исходную систему уравнений разложение на две составляющие выражения для давления (1.6). В результате получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x} = -g\frac{\partial H_0}{\partial x};\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial ww}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\frac{\delta\rho}{\rho_0}g;\\
&\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \frac{\partial \delta\rho u}{\partial x} + \frac{\partial \delta\rho w}{\partial z} = 0;
\end{aligned}
\qquad (1.23)
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&\delta P\big|_H = \rho_0\,\mathrm{g}\,\delta H; \qquad \delta H = H - H_0;\\
&\left.\left(\frac{\partial H}{\partial t} + u\cdot\frac{\partial H}{\partial x} - w\right)\right|_H = 0;
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

на верхней границе и

$$
\left.\frac{\partial \delta p}{\partial \vec{n}}\right|_B = 0; \quad \left.\left(\frac{\partial B}{\partial x}\cdot u - w\right)\right|_B = 0;
$$

- на нижней.

В системе (1.23) функция $H_0\left(x, t\right)$ считается известной, поэтому она не содержит описания быстрых процессов – гравитационных волн. Относительно приращения давления эта система является эллиптической и при ее численном решении приходится иметь дело с разностным аналогом уравнения Пуассона.

*Приближение слабой сжимаемости.*

Альтернативой является использование приближения слабой сжимаемости.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial\theta u}{\partial x}+\frac{\partial\theta w}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial\theta u}{\partial t}+\frac{\partial\theta u^2}{\partial x}+\frac{\partial\theta wu}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta p}{\partial x}=-g\frac{\partial H_0}{\partial x};\\
&\frac{\partial\theta w}{\partial t}+\frac{\partial\theta uw}{\partial x}+\frac{\partial\theta ww}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\delta p}{\partial z}=-\frac{\delta\rho}{\rho_0}g;\\
&\frac{\partial\theta\delta\rho}{\partial t}+\frac{\partial\theta\delta\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\theta\delta\rho w}{\partial z}=0;\\
&\delta\rho=\delta p=c^2\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;
\end{aligned}\tag{1.25}$$

Эта система является гиперболической и для ее численного решения, также как и для уравнений мелкой воды, можно использовать схему КАБАРЕ.

Характеристическую форму запишем относительно переменных $\delta u,\delta w,\delta\theta,\delta\rho$. Вначале приведем предыдущую систему к простой форме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\theta\frac{\partial w}{\partial z}=0;\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta p}{\partial x}=-\frac{g}{\theta}\frac{\partial H_0}{\partial x};\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta p}{\partial z}=-\frac{\delta\rho}{\rho_0\theta}g;\\
&\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\rho}{\partial z}=0;\\
&\delta\rho=\left(\rho-\rho_0\right);\quad \delta p=c^2\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;
\end{aligned}\tag{1.26}$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}+\theta\frac{\partial\delta w}{\partial z}=F_\theta=-\theta\frac{\partial U_0}{\partial x}-\theta\frac{\partial W_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta u}{\partial t}+u\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta u}{\partial z}+\frac{c^2}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta\theta}{\partial x}=F_u=-\frac{g}{\theta}\frac{\partial H_0}{\partial x}-\frac{\partial U_0}{\partial t}-u\frac{\partial U_0}{\partial x}-\left(w-\dot z\right)\frac{\partial U_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta w}{\partial t}+u\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta w}{\partial z}+\frac{c^2}{\rho_0\theta}\frac{\partial\delta\theta}{\partial z}=F_w=-\frac{\delta\rho}{\rho_0\theta}g-\frac{\partial W_0}{\partial t}-u\frac{\partial W_0}{\partial x}-\left(w-\dot z\right)\frac{\partial W_0}{\partial z};\\
&\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\delta\rho}{\partial x}+\left(w-\dot z\right)\frac{\partial\delta\rho}{\partial z}=0;\\
&\delta\rho=\left(\rho-\rho_0\right);\ \delta\theta=\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;
\end{aligned}\tag{1.27}$$

Матричная форма

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}+\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial x}+\mathbf{A}_{z}\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial z}=\vec{F};\quad \vec{\varphi}=\left(\delta\theta,\delta u,\delta w,\delta\rho\right)^{T}; \tag{1.28}$$

Где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} u & \theta & 0 & 0\\ \dfrac{c^2}{\rho_0\theta} & u & 0 & 0\\ 0 & 0 & u & 0\\ 0 & 0 & 0 & u\end{pmatrix};\qquad \mathbf{A}_{z}=\begin{pmatrix} (w-\dot{z}) & 0 & \theta & 0\\ 0 & (w-\dot{z}) & 0 & 0\\ \dfrac{c^2}{\rho_0\theta} & 0 & (w-\dot{z}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (w-\dot{z})\end{pmatrix}; \tag{1.29}$$

Собственные числа матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, ее левые собственные векторы и локальные римановы инварианты

$$\lambda_{1,2}^{x}=u\pm c\big/\sqrt{\rho_0};\qquad \lambda_{3,4}^{x}=u;$$

$$\vec{l}_1^{\,x}=\left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta},1,0,0\right);\vec{l}_2^{\,x}=\left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta},1,0,0\right);\vec{l}_3^{\,x}=\left(0,0,1,0\right);\vec{l}_4^{\,x}=\left(0,0,0,1\right); \tag{1.30}$$

$$\mathrm{I}_1^{x}=\delta u+\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta;\ \ \mathrm{I}_2^{x}=\delta u-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta;\ \ \mathrm{I}_3^{x}=\delta w;\ \ \mathrm{I}_4^{x}=\delta\rho;$$

Для матрицы $\mathbf{A}_{z}$ соответственно находим

$$\lambda_{1,2}^{z}=\left(w-\dot{z}\right)\pm c\big/\sqrt{\rho_0};\qquad \lambda_{3,4}^{z}=\left(w-\dot{z}\right);$$

$$\vec{l}_1^{\,z}=\left(\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta},0,1,0\right);\vec{l}_2^{\,z}=\left(-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta},0,1,0\right);\vec{l}_3^{\,z}=\left(0,1,0,0\right);\vec{l}_4^{\,z}=\left(0,0,0,1\right); \tag{1.31}$$

$$\mathrm{I}_1^{z}=\delta w+\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta;\ \ \mathrm{I}_2^{z}=\delta w-\frac{c}{\sqrt{\rho_0}\theta}\delta\theta;\ \ \mathrm{I}_3^{z}=\delta u;\ \ \mathrm{I}_4^{z}=\delta\rho;$$

Характеристические уравнения

$$\frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^{x}}{\partial t}+\lambda_k^{x}\cdot\frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^{x}}{\partial z}=G_k^{x};\qquad \frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^{z}}{\partial t}+\lambda_k^{z}\cdot\frac{\partial\delta\mathrm{I}_k^{z}}{\partial z}=G_k^{z};\qquad k=1,2,3,4 \tag{1.32}$$

относительно величин $\delta u,\delta w,\delta\theta,\delta\rho$ будут использоваться на фазе2.

В смешанных эйлерово – лагранжевых переменных система уравнений (1.25) приобретает вид

$$\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta}{\partial t}+\frac{\partial \theta u}{\partial x}+\frac{\partial \theta\left(w-\dot{z}\right)}{\partial z}=0;$$
$$\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta u}{\partial t}+\frac{\partial \theta u^2}{\partial x}+\frac{\partial \theta\left(w-\dot{z}\right)u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x}=-g\frac{\partial H_0}{\partial x};$$
$$\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta w}{\partial t}+\frac{\partial \theta uw}{\partial x}+\frac{\partial \theta\left(w-\dot{z}\right)w}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial z}=-\frac{\delta\rho}{\rho_0}g; \tag{1.33}$$
$$\frac{1}{J}\frac{\partial J\theta\delta\rho}{\partial t}+\frac{\partial \theta\delta\rho u}{\partial x}+\frac{\partial \theta\delta\rho\left(w-\dot{z}\right)}{\partial z}=0;$$
$$\delta p=c^2\left(\theta-\theta_0\right);\quad \theta_0=1;$$

Она будет использована на фазе1 и фазе3.

***Численный алгоритм***.

В модифицированных уравнениях мелкой воды пренебрежем членами, пропорциональными $\delta H/h_0$ ,т.е. представим их в стандартном виде

$$\frac{\partial h_0}{\partial t}+\frac{\partial h_0 U_0}{\partial x}=0;$$
$$\frac{\partial h_0 U_0}{\partial t}+\frac{\partial U_0 U_0 h_0}{\partial x}+\frac{g}{2}\frac{\partial h_0{}^2}{\partial x}+h_0 g\frac{\partial B}{\partial x}=0; \tag{1.34}$$

Будем использовать при решении баротропных и бароклинных уравнений одинаковый шаг по времени.

Фаза 1 для мелкой воды

$$\frac{\left(h_0\right)_c^{n+1/2}-\left(h_0\right)_c^n}{\tau/2}+\frac{\left(Uh_0\right)_R^n-\left(Uh_0\right)_L^n}{\Delta x}=0;$$
$$\frac{\left(h_0U\right)_c^{n+1/2}-\left(h_0U\right)_c^n}{\tau/2}+\frac{\left(h_0U^2\right)_R^n-\left(h_0U^2\right)_L^n}{\Delta x}+ \tag{1.35}$$
$$+\frac{g}{2}\frac{\left(h_0{}^2\right)_R^n-\left(h_0{}^2\right)_L^n}{\Delta x}+g\frac{\left(h_0\right)_R^n+\left(h_0\right)_L^n}{2}\frac{B_R-B_L}{\Delta x}=0;$$

Фаза 2 для мелкой воды (будет заполнена позже)

Фаза3

$$\frac{\left(h_0\right)_c^{n+1}-\left(h_0\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\frac{\left(Uh_0\right)_R^{n+1}-\left(Uh_0\right)_L^{n+1}}{\Delta x}=0;$$

$$\frac{\left(h_0U\right)_c^{n+1}-\left(h_0U\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\frac{\left(h_0U^2\right)_R^{n+1}-\left(h_0U^2\right)_L^{n+1}}{\Delta x}+ \tag{1.36}$$

$$+\frac{g}{2}\frac{\left(h_0{}^2\right)_R^{n+1}-\left(h_0{}^2\right)_L^{n+1}}{\Delta x}+g\frac{\left(h_0\right)_R^{n+1}+\left(h_0\right)_L^{n+1}}{2}\cdot\frac{B_R-B_L}{\Delta x}=0;$$

Уравнения мелкой воды не содержат вертикальных скоростей, в то время как в исходной системе баротропных уравнений (1.14) - (1.17) вертикальные скорости присутствуют. Восполнение недостающей информации осуществляется следующим образом.

Воспользуемся соотношениями (1.17),(1.14). Получаем

$$\left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2}=\frac{U_R^{n+1/2}+U_L^{n+1/2}}{2}\cdot\frac{B_R-B_L}{\Delta x};$$

$$\left(W_{0T}\right)_c^{n+1/2}=\left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2}-\frac{h_R^{n+1/2}+h_L^{n+1/2}}{2}\cdot\frac{\left(U_R^n+U_R^{n+1}\right)-\left(U_L^n+U_L^{n+1}\right)}{2\Delta x}; \tag{1.37}$$

Откуда находим

$$W_c^{n+1/2}\left(z\right)=\left(W_{0T}\right)_c^{n+1/2}\cdot\left(\frac{z-B_c}{H_c^{n+1/2}-B_c}\right)-\left(W_{0B}\right)_c^{n+1/2}\cdot\left(\frac{z-H_c^{n+1/2}}{H_c^{n+1/2}-B_c}\right); \tag{1.38}$$

Аналогично для целых временных слоев

$$W_c^n\left(z\right)=\left(W_{0T}\right)_c^n\cdot\left(\frac{z-B_c}{H_c^n-B_c}\right)-\left(W_{0B}\right)_c^n\cdot\left(\frac{z-H_c^n}{H_c^n-B_c}\right); \tag{1.39}$$

Кроме консервативных вертикальных скоростей нам понадобятся и их потоковые значения. По аналогии с консервативными переменными запишем

$$W_R^n\left(z\right)=\left(W_{0T}\right)_R^n\cdot\left(\frac{z-B_R}{H_R^n-B_R}\right)-\left(W_{0B}\right)_R^n\cdot\left(\frac{z-H_R^n}{H_R^n-B_R}\right);$$

$$W_L^n\left(z\right)=\left(W_{0T}\right)_L^n\cdot\left(\frac{z-B_L}{H_L^n-B_L}\right)-\left(W_{0B}\right)_L^n\cdot\left(\frac{z-H_L^n}{H_L^n-B_L}\right); \tag{1.40}$$

Где величины $\left(W_{0T}\right)_R^n,\left(W_{0B}\right)_R^n,\left(W_{0T}\right)_L^n,\left(W_{0B}\right)_L^n$ должны быть как то определены, например, посредством интерполяции по консервативным переменным.

Получим некоторые следствия из разностных уравнений для мелкой воды. Первое уравнение фазы3 представим в виде

$$\frac{\left(h_0\right)_c^{n+1}-\left(h_0\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left(\frac{U_R^{n+1}+U_L^{n+1}}{2}\right)\cdot\frac{\left(h_0\right)_R^{n+1}-\left(h_0\right)_L^{n+1}}{\Delta x}+\frac{\left(h_0\right)_R^{n+1}+\left(h_0\right)_L^{n+1}}{2}\cdot\frac{\left(U\right)_R^{n+1}-\left(U\right)_L^{n+1}}{\Delta x}=0; \tag{1.41}$$

Откуда следует, что имеет место соотношение

$$\frac{\left(h_0\right)_R^{n+1}+\left(h_0\right)_L^{n+1}}{2}\cdot\frac{\left(U\right)_R^{n+1}-\left(U\right)_L^{n+1}}{\Delta x}=-\left(W_{CT}^{n+1}-W_{CB}^{n+1}\right); \tag{1.42}$$

аппроксимирующее условие несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

Подставляя (1.42) в (1.41) получаем

$$\frac{\left(H_0\right)_c^{n+1}-\left(H_0\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left(\frac{U_R^{n+1}+U_L^{n+1}}{2}\right)\cdot\frac{\left(H_0\right)_R^{n+1}-\left(H_0\right)_L^{n+1}}{\Delta x}-\left(\frac{U_R^{n+1}+U_L^{n+1}}{2}\right)\cdot\frac{B_R-B_L}{\Delta x}-$$
$$-\left(W_{CT}^{n+1}-W_{CB}^{n+1}\right)=0;$$

Учитывая **(1.37)** находим

$$\frac{\left(H_0\right)_c^{n+1}-\left(H_0\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left(\frac{U_R^{n+1}+U_L^{n+1}}{2}\right)\cdot\frac{\left(H_0\right)_R^{n+1}-\left(H_0\right)_L^{n+1}}{\Delta x}-W_{CT}^{n+1}=0 \tag{1.43}$$

Аналогично выводится соотношение

$$\frac{\left(H_0\right)_c^{n+1/2}-\left(H_0\right)_c^{n+1}}{\tau/2}+\left(\frac{U_R^{n}+U_L^{n}}{2}\right)\cdot\frac{\left(H_0\right)_R^{n+1}-\left(H_0\right)_L^{n+1}}{\Delta x}-W_{CT}^{n+1}=0 \tag{1.44}$$

*<u>Численный алгоритм для решения бароклинных уравнений</u>*.

Алгоритмы для фазы1 и фазы3 при решении бароклинных уравнений строятся на основе интегральных уравнений для каждой расчетной ячейки

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial J\theta}{\partial t}+\frac{\partial J\theta u}{\partial x}+\frac{\partial\theta\left(w-\dot z\right)}{\partial\sigma}\right\}dxd\sigma=0;\\
&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial J\theta u}{\partial t}+\frac{\partial J\theta u^2}{\partial x}+\frac{\partial\theta\left(w-\dot z\right)u}{\partial\sigma}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial J\delta p}{\partial x}+g\frac{\partial JH_0}{\partial x}\right\}dxd\sigma=0;\\
&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial J\theta w}{\partial t}+\frac{\partial J\theta uw}{\partial x}+\frac{\partial\theta\left(w-\dot z\right)w}{\partial\sigma}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial J\delta p}{\partial z}+\frac{J\delta\rho}{\rho_0}g\right\}dxd\sigma=0;\\
&\iint_\Omega\left\{\frac{\partial J\theta\delta\rho}{\partial t}+\frac{\partial J\theta\delta\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\theta\delta\rho\left(w-\dot z\right)}{\partial\sigma}\right\}dxd\sigma=0;
\end{aligned} \tag{1.45}$$

и сведения интегралов по площади к контурным по границам расчетных ячеек.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}\theta dxdz+\int\limits_{\partial G}\theta udz-\int\limits_{\partial G}\theta\left(w-\dot{z}\right)dx=0;\\
&\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}\theta udxdz+\int\limits_{\partial G}\theta u^{2}dz-\int\limits_{\partial G}\theta\left(w-\dot{z}\right)udx+\frac{1}{\rho_{0}}\int\limits_{\partial G}\delta pdz+g\int\limits_{\partial G}H_{0}dz=0;\\
&\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}\theta wdxdz+\int\limits_{\partial G}\theta uwdz-\int\limits_{\partial G}\theta\left(w-\dot{z}\right)wdx-\frac{1}{\rho_{0}}\int\limits_{\partial G}\delta pdx+g\frac{1}{\rho_{0}}\iint\limits_{G}\delta\rho dxdz=0;\\
&\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{G}\theta\delta\rho dxdz+\int\limits_{\partial G}\theta\delta\rho udz-\int\limits_{\partial G}\theta\delta\rho\left(w-\dot{z}\right)dx=0;
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

Это приводит к дифференциальным по времени и разностным по пространству уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\theta\Delta z\right)_{c}}{\partial t}+L_{\theta}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)=0;\\
&L_{\theta}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)=\frac{\left(\theta u\Delta z\right)_{R}-\left(\theta u\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}-\left(\theta u\right)_{T}\frac{z_{RT}-z_{LT}}{\Delta x}+\left(\theta u\right)_{B}\frac{z_{RB}-z_{LB}}{\Delta x}+\\
&+\left[\theta\left(w-\dot{z}\right)\right]_{T}-\left[\theta\left(w-\dot{z}\right)\right]_{B}=0;
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta u\Delta z\right)_{c}=L_{\theta u}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right);\\
&L_{\theta u}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)=\frac{\left(\theta u^{2}\Delta z\right)_{R}-\left(\theta u^{2}\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}+\frac{1}{\rho_{0}}\frac{\left(\delta p\Delta z\right)_{R}-\left(\delta p\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}+\\
&+g\frac{\left(H_{0}\Delta z\right)_{R}-\left(H_{0}\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}-\left(\theta u^{2}+\frac{\delta p}{\rho_{0}}+gH_{0}\right)_{T}\frac{\left(z_{RT}-z_{LT}\right)}{\Delta x}+\\
&+\left(\theta u^{2}+\frac{\delta p}{\rho_{0}}+gH_{0}\right)_{B}\frac{\left(z_{RB}-z_{LB}\right)}{\Delta x}+\left[\theta\left(w-\dot{z}\right)u\right]_{T}-\left[\theta\left(w-\dot{z}\right)u\right]_{B}=0;
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta w\Delta z\right)_{c}=L_{\theta w}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right);\\
&L_{\theta w}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)=\frac{\left(\theta uw\Delta z\right)_{R}-\left(\theta uw\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}-\left(\theta uw\right)_{T}\frac{z_{RT}-z_{LT}}{\Delta x}+\left(\theta uw\right)_{B}\frac{z_{RB}-z_{LB}}{\Delta x}+\\
&+\frac{\left(\delta p\right)_{T}-\left(\delta p\right)_{B}}{\rho_{0}}+g\frac{1}{\rho_{0}}\left(\delta\rho\right)_{c}\Delta z=0;
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(\theta\delta\rho\Delta z\right)_{c}}{\partial t}=L_{\theta\delta\rho}\left(\theta,u,w,z,\dot{z},\delta\rho\right);\\
&L_{\theta\delta\rho}\left(\theta,u,w,z,\dot{z},\delta\rho\right)=\frac{\left(\theta\delta\rho u\Delta z\right)_{R}-\left(\theta\delta\rho u\Delta z\right)_{L}}{\Delta x}-\left(\theta\delta\rho u\right)_{T}\frac{z_{RT}-z_{LT}}{\Delta x}+\left(\delta\rho\theta u\right)_{B}\frac{z_{RB}-z_{LB}}{\Delta x}+\\
&+\left[\delta\rho\theta\left(w-\dot{z}\right)\right]_{T}-\left[\delta\rho\theta\left(w-\dot{z}\right)\right]_{B}=0;
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

С граничным условием на свободной границе

$$\dot{z}_{TT}+\frac{u_{TTR}+u_{TTL}}{2}\frac{\left(H_R-H_L\right)}{\Delta x}=w_{TTc};\qquad \dot{z}_{TT}=\frac{\partial H_c}{\partial t};\tag{1.51}$$

Фаза1 для этой системы будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\theta\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}-\left(\theta\cdot\Delta z\right)_c^n}{\tau/2}+\left[L_\theta\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)\right]^n=0;\\
&\frac{\left(\theta u\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}-\left(\theta u\cdot\Delta z\right)_c^n}{\tau/2}+\left[L_{\theta u}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)\right]^n=0;\\
&\frac{\left(\theta w\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}-\left(\theta w\cdot\Delta z\right)_c^n}{\tau/2}+\left[L_{\theta w}\left(\theta,u,w,z,\dot{z}\right)\right]^n=0;\\
&\frac{\left(\theta\delta\rho\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}-\left(\theta\delta\cdot\Delta z\right)_c^n}{\tau/2}+\left[L_\theta\left(\theta,u,w,z,\dot{z},\delta\rho\right)\right]^n=0;
\end{aligned}\tag{1.52}$$

Для того, чтобы однозначно определить консервативные переменные на промежуточном слое, необходимо знать величины $\Delta z_c^{n+1/2}$, которые находим из фазы1 для уравнения (1.51)

$$\frac{H_c^{n+1/2}-H_c^n}{\tau/2}+\left(\frac{u_{TTR}+u_{TTL}}{2}\right)^n\frac{\left(H_R-H_L\right)^n}{\Delta x}=\left(w_{cT}\right)^n;\tag{1.53}$$

По известным значениям $H_c^{n+1/2}$ и заданному закону относительного распределения толщин слоев определяются все $\Delta z_c^{n+1/2}$.

После фазы1 вычисляем величины

$$\begin{aligned}
&\delta u_c^n=u_c^n-U_c^n,\quad \delta u_R^n=u_R^n-U_R^n,\quad \delta u_L^n=u_L^n-U_L^n,\quad \delta u_c^{n+1/2}=u_c^{n+1/2}-U_c^{n+1/2};\\
&\delta w_c^n=w_c^n-W_c^n\left(z\right),\quad \delta w_R^n=w_R^n-W_R^n\left(z\right),\quad \delta w_L^n=w_L^n-W_L^n\left(z\right),\quad \delta w_c^{n+1/2}=w_c^{n+1/2}-W_c^{n+1/2}\left(z\right);\\
&\delta\theta_c^n=\theta_c^n-\theta_0,\quad \delta\theta_R^n=\theta_R^n-\theta_0,\quad \delta\theta_L^n=\theta_L^n-\theta_0,\quad \delta\theta_c^{n+1/2}=\theta_c^{n+1/2}-\theta_0;
\end{aligned}$$

и стандартным методом, через локальные инварианты Римана, находим значения

$$\delta u_R^{n+1},\quad \delta u_L^{n+1},\delta w_R^{n+1},\quad \delta w_L^{n+1},\delta\theta_R^{n+1},\quad \delta\theta_L^{n+1};$$

на новом временном слое. Затем восстанавливаем полные переменные скоростей и давления

$$\begin{aligned}
&u_R^{n+1}=U_R^{n+1}+\delta u_R^{n+1},\quad u_L^{n+1}=U_L^{n+1}+\delta u_L^{n+1},\ u_T^{n+1}=U_c^{n+1}+\delta u_T^{n+1},\ u_B^{n+1}=U_c^{n+1}+\delta u_B^{n+1},\\
&w_R^{n+1}=W_R^{n+1}+\delta w_R^{n+1},\quad w_L^{n+1}=W_L^{n+1}+\delta w_L^{n+1},\ w_T^{n+1}=W_c^{n+1}+\delta w_T^{n+1},\ w_B^{n+1}=W_c^{n+1}+\delta w_B^{n+1},\\
&\delta p_R^{n+1}=c^2\delta\theta_R^{n+1},\delta p_L^{n+1}=c^2\delta\theta_L^{n+1};
\end{aligned}$$

Переход от полных величин к их приращениям понадобился для того, чтобы решение баротропно – бароклинной системы в случае постоянной плотности совпадало с решением одной только баротропной системы – уравнениями мелкой воды.

Фаза2, реализованная для системы (1.47) - (1.50) в приращениях, т.е. в бароклинных переменных, определяет все потоковые переменные на новом временном слое, за исключением $H_i^{n+1}$. Последняя определяется из фазы2 для граничного условия (1.51)

$$
\begin{aligned}
&H_R^{n+1}=2H_c^{n+1/2}-H_L^n; \quad if \quad \left(u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}\right)\geq 0 \ \& \ \left(u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}\right)\geq 0;\\
&H_L^{n+1}=2H_c^{n+1/2}-H_R^n; \quad if \quad \left(u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}\right)\leq 0 \ \& \ \left(u_i^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}\right)\leq 0;\\
&else \quad H_i^{n+1}=0.5\left(H_{i-1/2}^{n+1/2}+H_{i+1/2}^{n+1}\right);
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

После этого определяются новые консервативные переменные $H_c^{n+1}$ как

$$
\frac{H_c^{n+1}-H_c^{n+1.2}}{\tau/2}+\left(\frac{u_{TTR}+u_{TTL}}{2}\right)^{n+1}\frac{\left(H_R-H_L\right)^{n+1}}{\Delta x}=\left(w_{cT}\right)^{n+1};
\tag{1.55}
$$

Откуда находятся $\Delta z_c^{n+1},\Delta z_i^{n+1}$, и новые консервативные переменные вычисляются из фазы3

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\theta\cdot\Delta z\right)_c^{n+1}-\left(\theta\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left[L_\theta\left(\theta,u,w,z,\dot z\right)\right]^{n+1}=0;\\
&\frac{\left(\theta u\cdot\Delta z\right)_c^{n+1}-\left(\theta u\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left[L_{\theta u}\left(\theta,u,w,z,\dot z\right)\right]^{n+1}=0;\\
&\frac{\left(\theta w\cdot\Delta z\right)_c^{n+1}-\left(\theta w\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left[L_{\theta w}\left(\theta,u,w,z,\dot z\right)\right]^{n+1}=0;\\
&\frac{\left(\theta\delta\rho\cdot\Delta z\right)_c^{n+1}-\left(\theta\delta\cdot\Delta z\right)_c^{n+1/2}}{\tau/2}+\left[L_\theta\left(\theta,u,w,z,\dot z,\delta\rho\right)\right]^{n+1}=0;
\end{aligned}
\tag{1.56}
$$

Теорема. В случае одного слоя и постоянной плотности, когда начальные значения бароклинных переменных равны нулю, они и дальше будут оставаться нулевыми при любых значениях скорости звука.

***Приближение «мягкой крышки».***

Баротропную составляющую течения в некоторых случаях можно исключить из рассмотрения, полагая $H_0=const$. В этом случае $U_0=W_0=0$ и бароклинная составляющая течения в приближении Бусинеска будет описываться системой уравнений

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{\partial \delta \rho \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta \rho \delta w}{\partial z} = 0;$$
$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial \delta u^2}{\partial x} + \frac{\partial \delta w \delta u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta P}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial \delta w}{\partial t} + \frac{\partial \delta u \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta w \delta w}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta P}{\partial z} = -\delta \rho g;$$

с граничным условием на давление на свободной поверхности

$$\frac{\partial(\delta H)}{\partial t} + u\frac{\partial(\delta H)}{\partial x} - \delta w = 0;$$
$$\delta P = \rho_0 g \delta H;$$

В отличие от модели жесткой крышки вертикальные скорости на свободной границе здесь не равны нулю.