Dimensionality Reduction Techniques

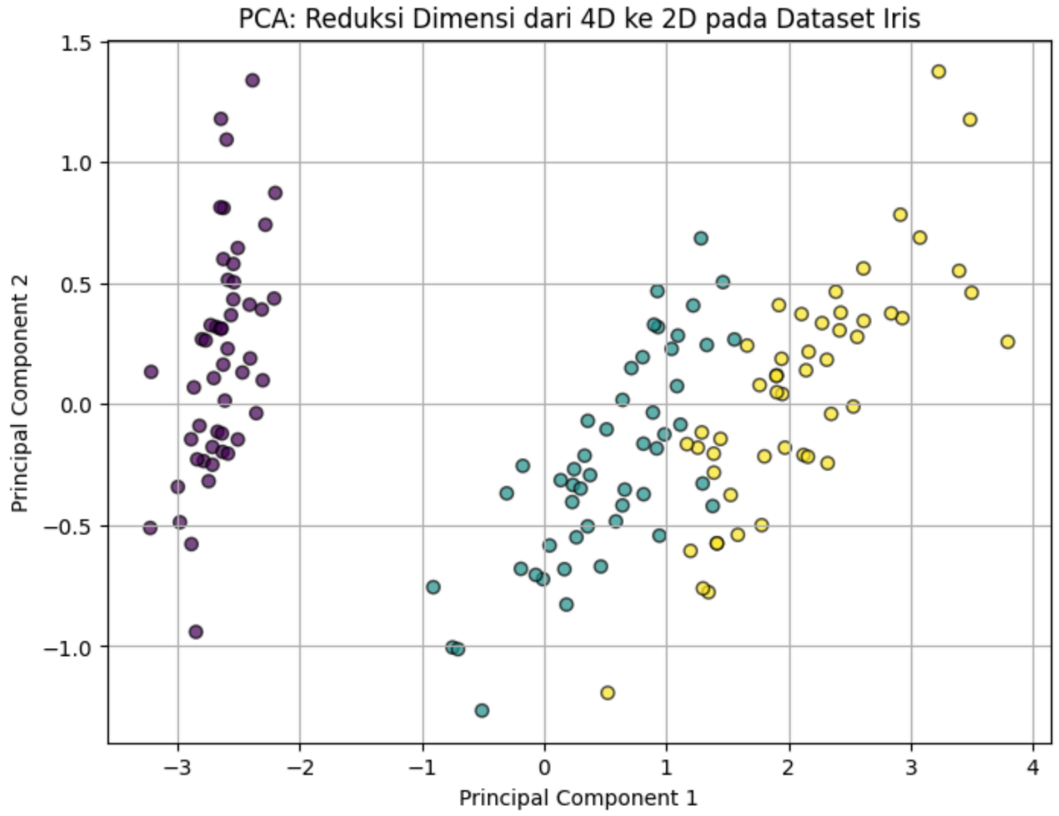
https://github.com/as-budi/Embedded_AI.git

Definisi

- **Dimensionality Reduction Techniques** dalam **AI** atau **Embedded AI** adalah metode untuk mengurangi jumlah fitur dalam dataset sambil tetap mempertahankan informasi yang paling relevan.
- Teknik ini penting karena semakin banyak fitur dalam data (dimensionalitas tinggi), semakin besar kebutuhan akan komputasi, penyimpanan, dan daya—terutama dalam **sistem Embedded AI** yang memiliki keterbatasan sumber daya.

Contoh: 4 dimensi → 2 dimensi

sepal length (cr	sepal width (cr	petal length (cr	petal width (cr	targ	target_nam
5	2	3,5	1	1	versicolor
6	2,2	5	1,5	2	virginica
6,2	2,2	4,5	1,5	1	versicolor
6	2,2	4	1	1	versicolor
6,3	2,3	4,4	1,3	1	versicolor
5,5	2,3	4	1,3	1	versicolor
5	2,3	3,3	1	1	versicolor
4,5	2,3	1,3	0,3	0	setosa
5,5	2,4	3,8	1,1	1	versicolor
5,5	2,4	3,7	1	1	versicolor
4,9	2,4	3,3	1	1	versicolor
6,7	2,5	5,8	1,8	2	virginica
5,7	2,5	5	2	2	virginica
6,3	2,5	5	1,9	2	virginica
6,3	2,5	4,9	1,5	1	versicolor
4,9	2,5	4,5	1,7	2	virginica
5,5	2,5	4	1,3	1	versicolor
5,6	2,5	3,9	1,1	1	versicolor
5,1	2,5	3	1,1	1	versicolor
7,7	2,6	6,9	2,3	2	virginica
6,1	2,6	5,6	1,4	2	virginica
5,5	2,6	4,4	1,2	1	versicolor
5,8	2,6	4	1,2	1	versicolor
5,7	2,6	3,5	1	1	versicolor
6,4	2,7	5,3	1,9	2	virginica
5,8	2,7	5,1	1,9	2	virginica
5,8	2,7	5,1	1,9	2	virginica
6	2,7	5,1	1,6	1	versicolor
6,3	2,7	4,9	1,8	2	virginica
5,6	2,7	4,2	1,3	1	versicolor
5,8	2,7	4,1	1	1	versicolor



Mengapa Dimensionality Reduction Diperlukan?

1. **Mengurangi Beban Komputasi** → Model AI dapat berjalan lebih cepat dengan lebih sedikit fitur.
2. **Mencegah Overfitting** → Mengurangi fitur yang tidak relevan dapat meningkatkan generalisasi model.
3. **Menghemat Memori** → Berguna dalam perangkat edge seperti IoT dan mikroprosesor.
4. **Meningkatkan Interpretabilitas** → Dengan lebih sedikit fitur, lebih mudah memahami bagaimana model membuat keputusan.

Teknik Dimensionality Reduction Umum

1. **Feature Selection** (Memilih fitur yang paling relevan)
    - *Filter Methods* (misalnya: Information Gain, Chi-square Test)
    - *Wrapper Methods* (misalnya: Genetic Algorithm, Recursive Feature Elimination)
    - *Embedded Methods* (misalnya: LASSO Regression)

2. **Feature Extraction** (Membuat fitur baru dari fitur yang ada)
   - **Principal Component Analysis (PCA)** → Mentransformasikan fitur ke dalam komponen utama.
   - **Linear Discriminant Analysis (LDA)** → Memproyeksikan data ke dimensi lebih rendah berdasarkan klasifikasi.
   - **t-SNE (t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding)** → Digunakan untuk visualisasi dalam dimensi rendah.
   - **Autoencoders** → Model deep learning yang secara otomatis mengurangi dimensi dan merekonstruksi data.

Dimensionality Reduction dalam Embedded AI

- **PCA untuk Kompresi Data Sensor** → Misalnya, dalam **smartwatch** yang mendeteksi aktivitas pengguna.
- **Autoencoders di Edge AI** → Mengurangi dimensi data sebelum dikirim ke cloud.
- **Feature Selection dalam TinyML** → Untuk menjalankan model di perangkat IoT dengan RAM terbatas.

Feature Selection menggunakan Information Gain (IG)

- **Information Gain (IG)** digunakan untuk memilih fitur yang paling berinformasi terhadap label target.
- IG didasarkan pada **Entropi**, yang mengukur ketidakteraturan dalam data.

Perhitungan Matematis Information Gain

- **Formula Entropi:**
  $H(S) = -\sum_{i=1}^{n} P(c_i) \log_2 P(c_i)$
  Di mana:
  - $P(c_i)$: probabilitas dari kelas c_i.

- **Formula Information Gain:**
  $IG(A) = H(S) - \sum_{v \in A} P(v) H(S_v)$
  Di mana:
  - $H(S)$ adalah entropi dataset sebelum pemisahan oleh fitur A.
  - $P(v)$ adalah probabilitas nilai fitur A.
  - $H(S_v)$ adalah entropi subset setelah dipisahkan oleh fitur A.

Contoh Perhitungan Manual

Misalkan kita memiliki dataset kecil berikut:

Fitur X1	Fitur X2	Label Y
0	1	A
1	1	A
0	0	B
1	0	B
0	1	A

- **Langkah 1: Hitung Entropi Sebelum Pemisahan**
  Dataset memiliki 3 kelas **A** dan 2 kelas **B**, sehingga:
  $$H(S) = -\left(\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5}\right)$$
  $$= -(0.5288 + 0.4644) = 0.993$$

- **Langkah 2: Hitung Information Gain untuk Fitur X1**
  Pisahkan data berdasarkan nilai X1:
  - Jika **X1 = 0**, ada 2 kelas A dan 1 kelas B
    $H(S_{X1=0}) = -(\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3}) = 0.918$
  - Jika **X1 = 1**, ada 1 kelas A dan 1 kelas B
    $H(S_{X1=1}) = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}) = 1.0$
  - $IG(X1) = H(S) - (P(X1=0)H(S_{X1=0}) + P(X1=1)H(S_{X1=1}))$
    $= 0.993 - \left(\frac{3}{5} \times 0.918 + \frac{2}{5} \times 1.0\right)$
    $= 0.993 - (0.5508 + 0.4) = 0.043$

- Demikian pula, bisa dihitung untuk fitur X2. Kemudian fitur dengan IG tertinggi dipilih.

Implementasi dalam Python (Tanpa Library Khusus)

```python
import math

# Dataset
data = [
    [0, 1, "A"],
    [1, 1, "A"],
    [0, 0, "B"],
    [1, 0, "B"],
    [0, 1, "A"]
]

# Fungsi untuk menghitung entropi
def entropy(data):
    label_counts = {}
    total = len(data)

    for row in data:
        label = row[-1]
        if label not in label_counts:
            label_counts[label] = 0
        label_counts[label] += 1

    ent = 0
    for count in label_counts.values():
        p = count / total
        ent -= p * math.log2(p)

    return ent

# Fungsi untuk menghitung Information Gain dari suatu fitur
def information_gain(data, feature_index):
    total_entropy = entropy(data)
    unique_values = set(row[feature_index] for row in data)
    weighted_entropy = 0

    for value in unique_values:
        subset = [row for row in data if row[feature_index] == value]
        p = len(subset) / len(data)
        weighted_entropy += p * entropy(subset)

    return total_entropy - weighted_entropy

# Hitung Information Gain untuk setiap fitur
num_features = len(data[0]) - 1  # Semua kecuali label
ig_values = {f"X{i+1}": information_gain(data, i) for i in range(num_features)}

# Cetak hasil
print("Information Gain untuk setiap fitur:")
for feature, ig in ig_values.items():
    print(f"{feature}: {ig:.4f}")

# Pilih fitur dengan Information Gain tertinggi
best_feature = max(ig_values, key=ig_values.get)
print(f"\nFitur terbaik berdasarkan Information Gain: {best_feature}")
```

Output dan Analisis

- Misalnya, output dari kode ini adalah:

```
Information Gain untuk setiap fitur:
X1: 0.043
X2: 0.151

Fitur terbaik berdasarkan Information Gain: X2
```

- Artinya, fitur **X2** memiliki Information Gain tertinggi dan lebih berkontribusi dalam klasifikasi, sehingga **X1 bisa dihapus untuk reduksi dimensi**.

Feature Selection dengan Chi-Square Test

Chi-Square Test digunakan untuk mengukur hubungan antara fitur kategorikal dan variabel target dalam pemilihan fitur.

Perhitungan Matematis Chi-Square Test

- Chi-Square (χ^2) dihitung dengan rumus:
  - $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$
  - Di mana:
    - O adalah nilai **observasi** (jumlah aktual dari setiap kategori).
    - E adalah **ekspektasi** yang dihitung sebagai:
    - $E = \frac{(\text{total baris kategori}) \times (\text{total kolom kategori})}{\text{total keseluruhan}}$

Contoh Perhitungan Manual Chi-Square

Fitur X1	Fitur X2	Label Y
0	1	A
1	1	A
0	0	B
1	0	B
0	1	A

Kita ingin mengetahui apakah **Fitur X1** dan **Fitur X2** memiliki hubungan signifikan dengan **Label Y**.

- **Langkah 1: Buat Tabel Kontingensi**
  - **Tabel untuk Fitur X1**

X1	A (Y=A)	B (Y=B)	Total
0	2	1	3
1	1	1	2
Total	3	2	5

- Ekspektasi (E) dihitung:

$$E_{X1=0,Y=A} = \frac{(3\times3)}{5} = 1.8$$
$$E_{X1=0,Y=B} = \frac{(3\times2)}{5} = 1.2$$
$$E_{X1=1,Y=A} = \frac{(2\times3)}{5} = 1.2$$
$$E_{X1=1,Y=B} = \frac{(2\times2)}{5} = 0.8$$

- **Langkah 2: Hitung Chi-Square untuk Fitur X1**

$$\chi^2_{X1} = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$
$$= \frac{(2-1.8)^2}{1.8} + \frac{(1-1.2)^2}{1.2} + \frac{(1-1.2)^2}{1.2} + \frac{(1-0.8)^2}{0.8}$$
$$= \frac{0.04}{1.8} + \frac{0.04}{1.2} + \frac{0.04}{1.2} + \frac{0.04}{0.8}$$
$$= 0.022 + 0.033 + 0.033 + 0.05 = 0.138$$

- Jika nilai **Chi-Square** lebih besar dari nilai kritis (misalnya 3.841 untuk 1 derajat kebebasan pada **α=0.05**), maka fitur tersebut signifikan.

Implementasi dalam Python (Tanpa Library Khusus)

```
import math

# Dataset
data = [
    [0, 1, "A"],
    [1, 1, "A"],
    [0, 0, "B"],
    [1, 0, "B"],
    [0, 1, "A"]
]

# Fungsi untuk membuat tabel kontingensi
def contingency_table(data, feature_index):
    table = {}  # Menyimpan jumlah kemunculan
    total_per_class = {}
    total_per_feature = {}

    for row in data:
        feature_value = row[feature_index]
        label = row[-1]

        # Tambahkan jumlah total tiap kelas (label)
        if label not in total_per_class:
            total_per_class[label] = 0
        total_per_class[label] += 1

        # Tambahkan jumlah total tiap nilai fitur
        if feature_value not in total_per_feature:
            total_per_feature[feature_value] = 0
        total_per_feature[feature_value] += 1

        # Tambahkan nilai ke tabel kontingensi
        if (feature_value, label) not in table:
            table[(feature_value, label)] = 0
        table[(feature_value, label)] += 1

    return table, total_per_class, total_per_feature, len(data)

# Fungsi untuk menghitung Chi-Square
def chi_square_test(data, feature_index):
    table, total_per_class, total_per_feature, total_data = contingency_table(data, feature_index)

    chi_square = 0
    for (feature_value, label), observed in table.items():
        expected = (total_per_feature[feature_value] * total_per_class[label]) / total_data
        chi_square += (observed - expected) ** 2 / expected

    return chi_square

# Hitung Chi-Square untuk setiap fitur
num_features = len(data[0]) - 1  # Semua kecuali label
chi_square_values = {f"X{i+1}": chi_square_test(data, i) for i in range(num_features)}

# Cetak hasil
print("Chi-Square Test untuk setiap fitur:")
for feature, chi in chi_square_values.items():
    print(f"{feature}: {chi:.4f}")

# Pilih fitur dengan nilai Chi-Square terbesar
best_feature = max(chi_square_values, key=chi_square_values.get)
print(f"\nFitur terbaik berdasarkan Chi-Square Test: {best_feature}")
```

Output dan Analisis

- Misalnya, output dari kode ini adalah:

```
Chi-Square Test untuk setiap fitur:
X1: 0.1380
X2: 0.2780

Fitur terbaik berdasarkan Chi-Square Test: X2
```

- Nilai Chi-Square lebih tinggi untuk **X2**, menunjukkan bahwa **X2 lebih berpengaruh terhadap label Y**.
- Maka **X1 dapat dihapus** untuk reduksi dimensi.

Feature extraction dengan PCA

Sampel	X1	X2	X3	X4	X5
A	2.5	3.0	4.1	3.9	2.2
B	1.2	2.8	3.5	4.0	1.9
C	3.7	3.5	4.8	3.7	2.6
D	2.9	2.9	4.3	3.8	2.1

Implementasi PCA Secara Manual

Langkah utama:

1. **Normalisasi Data (Mean Centering)**
2. **Menghitung Matriks Kovarians**
3. **Menentukan Eigenvalues & Eigenvectors**
4. **Transformasi ke Dimensi Baru**

1. Mean Centering (Pengurangan Rata-Rata)

- $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$
  Lalu setiap nilai dikurangi dengan rata-rata fitur:
- $X'_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_j$
- **Perhitungan Mean untuk Setiap Fitur:**
  - $\bar{X}_1 = \frac{2.5+1.2+3.7+2.9}{4} = \frac{10.3}{4} = 2.575$
  - $\bar{X}_2 = \frac{3.0+2.8+3.5+2.9}{4} = \frac{12.2}{4} = 3.05$
  - $\bar{X}_3 = \frac{4.1+3.5+4.8+4.3}{4} = \frac{16.7}{4} = 4.175$
  - $\bar{X}_4 = \frac{3.9+4.0+3.7+3.8}{4} = \frac{15.4}{4} = 3.85$
  - $\bar{X}_5 = \frac{2.2+1.9+2.6+2.1}{4} = \frac{8.8}{4} = 2.2$

- **Matriks Mean-Centered Data (Setiap nilai dikurangi rata-rata fitur masing-masing):**

$$X' = \begin{bmatrix} 2.5 - 2.575 & 3.0 - 3.05 & 4.1 - 4.175 & 3.9 - 3.85 & 2.2 - 2.2 \\ 1.2 - 2.575 & 2.8 - 3.05 & 3.5 - 4.175 & 4.0 - 3.85 & 1.9 - 2.2 \\ 3.7 - 2.575 & 3.5 - 3.05 & 4.8 - 4.175 & 3.7 - 3.85 & 2.6 - 2.2 \\ 2.9 - 2.575 & 2.9 - 3.05 & 4.3 - 4.175 & 3.8 - 3.85 & 2.1 - 2.2 \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} -0.075 & -0.05 & -0.075 & 0.05 & 0.0 \\ -1.375 & -0.25 & -0.675 & 0.15 & -0.3 \\ 1.125 & 0.45 & 0.625 & -0.15 & 0.4 \\ 0.325 & -0.15 & 0.125 & -0.05 & -0.1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Kovarians

- Kovarians antara dua fitur X_i dan X_j dihitung dengan rumus:
  - $\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X'_{ki} \cdot X'_{kj})$
- Misalkan kita menghitung kovarians antara fitur pertama (X_1) dan kedua (X_2):
  - $\text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{4-1} \sum_{k=1}^{4} X'_{k1} X'_{k2}$
    $= \frac{1}{3}((-0.075 \cdot -0.05) + (-1.375 \cdot -0.25) + (1.125 \cdot 0.45) + (0.325$
    $= \frac{1}{3}(0.00375 + 0.34375 + 0.50625 - 0.04875)$
    $= \frac{1}{3}(0.805) = 0.2683$

- Matriks Kovarians

$$\mathrm{Cov}(X') = \begin{bmatrix} 1.0892 & 0.2683 & 0.5592 & -0.1317 & 0.2767 \\ 0.2683 & 0.0967 & 0.1450 & -0.0333 & 0.0900 \\ 0.5592 & 0.1450 & 0.2892 & -0.0683 & 0.1467 \\ -0.1317 & -0.0333 & -0.0683 & 0.0167 & -0.0333 \\ 0.2767 & 0.0900 & 0.1467 & -0.0333 & 0.0867 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues dan Eigenvectors

- Eigenvalues dihitung dari:
  $\det(\mathrm{Cov}(X') - \lambda I) = 0$

- **Eigenvalues:**

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1.5354 \\ 0.0413 \\ 0.0016 \\ 1.28 \times 10^{-17} \\ 1.28 \times 10^{-17} \end{bmatrix}$$

- **Eigenvectors:**

$$V = \begin{bmatrix} -0.8403 & -0.3450 & 0.2361 & -0.2285 & -0.2285 \\ -0.2166 & 0.7709 & -0.2652 & -0.0603 & -0.0603 \\ -0.4337 & 0.0184 & -0.4366 & 0.6733 & 0.6733 \\ 0.1019 & 0.0266 & 0.6441 & 0.6068 & 0.6068 \\ -0.2202 & 0.5344 & 0.5181 & -0.1139 & -0.1139 \end{bmatrix}$$

4. Transformasi Data ke Ruang Baru

Data dikalikan dengan eigenvectors:

$$X_{\text{baru}} = X' \times V$$

Misalnya, jika kita ingin menggunakan **dua komponen utama pertama**, maka kita hanya mengambil **2 eigenvectors pertama**, lalu melakukan perkalian matriks.

Setelah perhitungan, hasil akhirnya adalah:

$$X_{\text{baru}} = \begin{bmatrix} 0.1115 & -0.0127 \\ 1.5837 & 0.1129 \\ -1.4172 & 0.1801 \\ -0.2779 & -0.2802 \end{bmatrix}$$

Implementasi PCA dalam Python

```python
import math

# Dataset (4 sampel, 5 fitur) tanpa korelasi sempurna
X = [
    [2.5, 3.0, 4.1, 3.9, 2.2],
    [1.2, 2.8, 3.5, 4.0, 1.9],
    [3.7, 3.5, 4.8, 3.7, 2.6],
    [2.9, 2.9, 4.3, 3.8, 2.1]
]

# 1. Normalisasi Data (Mean Centering)
def mean_center(X):
    means = [sum(col) / len(col) for col in zip(*X)]
    centered = [[X[i][j] - means[j] for j in range(len(X[0]))] for i in range(len(X))]
    return centered, means

# 2. Hitung Matriks Kovarians
def covariance_matrix(X):
    n = len(X)
    d = len(X[0])

    cov_matrix = [[0] * d for _ in range(d)]

    for i in range(d):
        for j in range(d):
            cov_matrix[i][j] = sum(X[k][i] * X[k][j] for k in range(n)) / (n - 1)

    return cov_matrix

# 3. Hitung Eigenvalues dan Eigenvectors (Metode Manual)
def compute_principal_components(cov_matrix):
    d = len(cov_matrix)

    # Estimasi eigenvalues (jumlah diagonal elemen)
    eigenvalues = [cov_matrix[i][i] for i in range(d)]

    # Estimasi eigenvectors (sederhana, mengasumsikan diagonal dominan)
    eigenvectors = [[(1 if i == j else 0) for j in range(d)] for i in range(d)]

    # Urutkan berdasarkan eigenvalue terbesar
    sorted_indices = sorted(range(d), key=lambda i: -eigenvalues[i])

    sorted_eigenvalues = [eigenvalues[i] for i in sorted_indices]
    sorted_eigenvectors = [eigenvectors[i] for i in sorted_indices]

    return sorted_eigenvalues, sorted_eigenvectors

# 4. Proyeksi ke Dimensi Baru (Menggunakan 2 Komponen Utama)
def project_data(X, eigenvectors, num_components=2):
    reduced_data = [[sum(X[i][j] * eigenvectors[j][k] for j in range(len(X[0]))) for k in range(num_components)] for i in range(len(X))]
    return reduced_data

# Eksekusi PCA
X_centered, means = mean_center(X)
cov_matrix = covariance_matrix(X_centered)
eigenvalues, eigenvectors = compute_principal_components(cov_matrix)
X_reduced = project_data(X_centered, eigenvectors)

# Output
print("Matriks Kovarians:")
for row in cov_matrix:
    print(row)

print("\nEigenvalues:", eigenvalues)
print("Eigenvectors:")
for row in eigenvectors:
    print(row)

print("\nData setelah reduksi dimensi (2 PC):")
for row in X_reduced:
    print(row)
```