Optimasi Klasik (Analitik dan Numerik)

📧 agungsetiabudi@ub.ac.id

Optimasi Analitik

- Optimasi klasik secara analitik menggunakan turunan adalah pendekatan matematis untuk menemukan nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi secara eksak.
- Metode ini sangat berguna dalam berbagai bidang, seperti ekonomi, teknik, dan kecerdasan buatan.

Konsep Dasar

Misalkan kita memiliki fungsi tujuan $f(x)$ yang ingin kita optimalkan (maksimum atau minimum). Langkah utama dalam optimasi analitik menggunakan turunan adalah:

1. **Menentukan Turunan Pertama ($f'(x)$)**
   Titik ekstrem terjadi ketika turunan pertama fungsi sama dengan nol:
   $f'(x) = 0$
   Titik-titik ini disebut **titik kritis**.

2. **Menentukan Jenis Ekstremum**

   Setelah mendapatkan titik kritis, kita menganalisisnya dengan menggunakan:

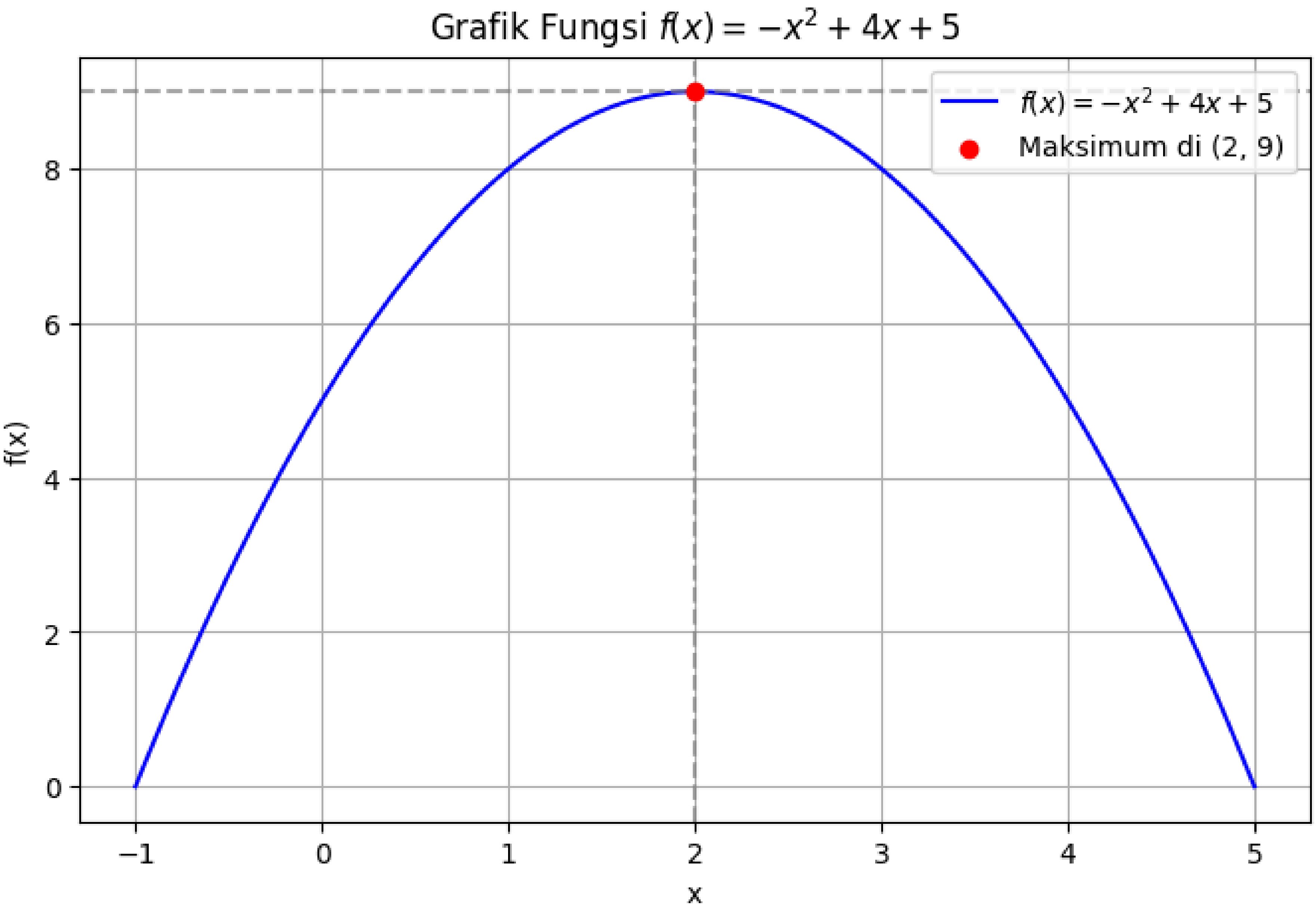
   - **Turunan Kedua ($f''(x)$):**
     - Jika $f''(x) > 0$ di titik kritis, maka titik tersebut adalah **minimum lokal**.
     - Jika $f''(x) < 0$ di titik kritis, maka titik tersebut adalah **maksimum lokal**.
   - Alternatif lain adalah menggunakan **Uji Derivatif Pertama**, yaitu mengevaluasi tanda dari $f'(x)$ sebelum dan sesudah titik kritis.

Contoh 1: Memaksimalkan Fungsi Kuadratik

Hitunglah nilai optimum dari: $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

- **Langkah 1: Hitung Turunan Pertama**
  - $f'(x) = -2x + 4$
  - Set $f'(x) = 0$ untuk mencari titik kritis:
  - $-2x + 4 = 0$
  - $x = 2$

- **Langkah 2: Gunakan Turunan Kedua untuk Klasifikasi**
  - $f''(x) = -2$
  - Karena $f''(x) < 0$, maka titik $x = 2$ adalah **maksimum lokal**.
- **Langkah 3: Menentukan Nilai Maksimum**
  - Substitusi $x = 2$ ke dalam fungsi:
  - $f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 5 = -4 + 8 + 5 = 9$
  - Jadi, **maksimum lokal terjadi di $x = 2$ dengan nilai maksimum $f(2) = 9$.**


Grafik Fungsi $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$
Maksimum di (2, 9)
f(x)
x
0
2
4
6
8
−1
0
1
2
3
4
5

Optimasi dengan Metode Lagrange

- Metode Lagrange digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan **kendala**.
- Dalam banyak kasus, kita ingin memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi $f(x, y, \ldots)$ dengan kendala berupa persamaan $g(x, y, \ldots) = 0$.

Konsep Dasar

- Diberikan fungsi tujuan:
  $f(x, y)$
- dengan kendala:
  $g(x, y) = 0$
- kita memperkenalkan **fungsi Lagrange**:
  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
- di mana λ disebut sebagai **multiplikator Lagrange**.

Langkah-langkah optimasi dengan Lagrange:

1. Hitung turunan parsial dari $\mathcal{L}$ terhadap setiap variabel dan set sama dengan nol:
   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$
2. Selesaikan sistem persamaan untuk x, y, λ.
3. Tentukan nilai optimal dari $f(x, y)$.

Contoh: Memaksimalkan Fungsi dengan Kendala

- Misalkan kita ingin memaksimalkan:
  $f(x, y) = xy$
- dengan kendala:
  $x + y = 10$

Langkah 1: Buat Fungsi Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(10 - x - y)$$

Langkah 2: Hitung Turunan Parsial

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y - \lambda = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x - \lambda = 0$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10 - x - y = 0$

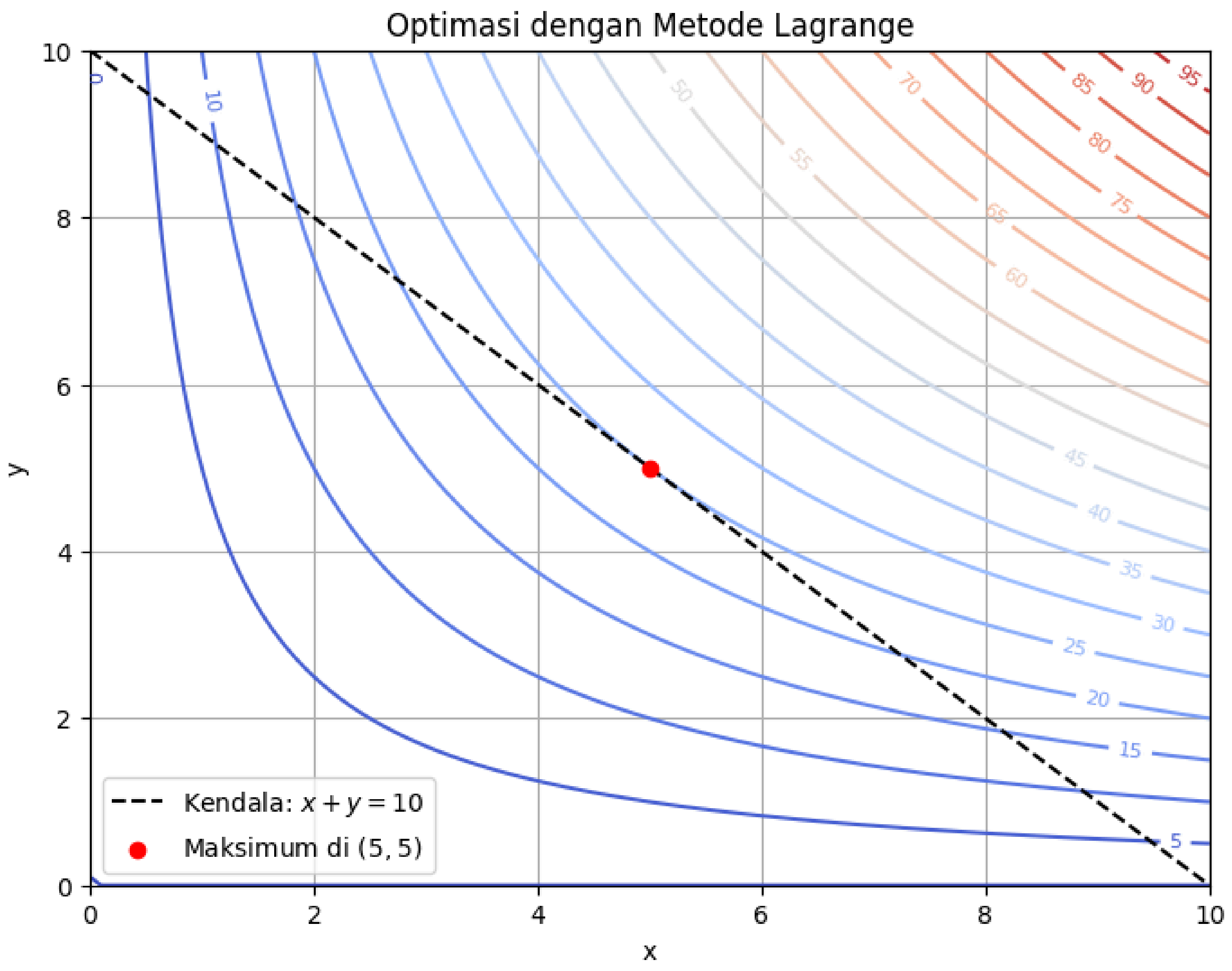
Langkah 3: Selesaikan Sistem Persamaan

- Dari $y - \lambda = 0$ dan $x - \lambda = 0$, kita peroleh:
  $$y = \lambda, \quad x = \lambda$$

- Substitusi ke kendala:
  $x + y = 10 \Rightarrow \lambda + \lambda = 10 \Rightarrow 2\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 5$
- Sehingga:
  $x = 5, \quad y = 5$

Langkah 4: Hitung Nilai Maksimum

- $f(5, 5) = 5 \times 5 = 25$


Optimasi dengan Metode Lagrange
Kendala: $x + y = 10$
Maksimum di $(5, 5)$
x
y
0
2
4
6
8
10
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95

Optimasi Numerik: Gradient Descent

- Gradient Descent adalah metode optimasi numerik yang digunakan untuk menemukan minimum suatu fungsi dengan mengupdate parameter secara iteratif berdasarkan gradiennya.
- Metode ini sangat populer dalam **machine learning** dan **deep learning** untuk meminimalkan fungsi loss.

Konsep Dasar Gradient Descent

- Diberikan fungsi yang ingin diminimalkan:
  $f(x)$
- Gradient Descent menggunakan aturan update sebagai berikut:
  $x_{t+1} = x_t - \alpha \nabla f(x_t)$
- di mana:
  - x_t adalah nilai parameter pada iterasi ke-t,
  - α adalah **learning rate**, yang menentukan seberapa besar langkah perpindahan,
  - $\nabla f(x_t)$ adalah **gradien** dari fungsi terhadap x, yang menunjukkan arah perubahan tercepat.

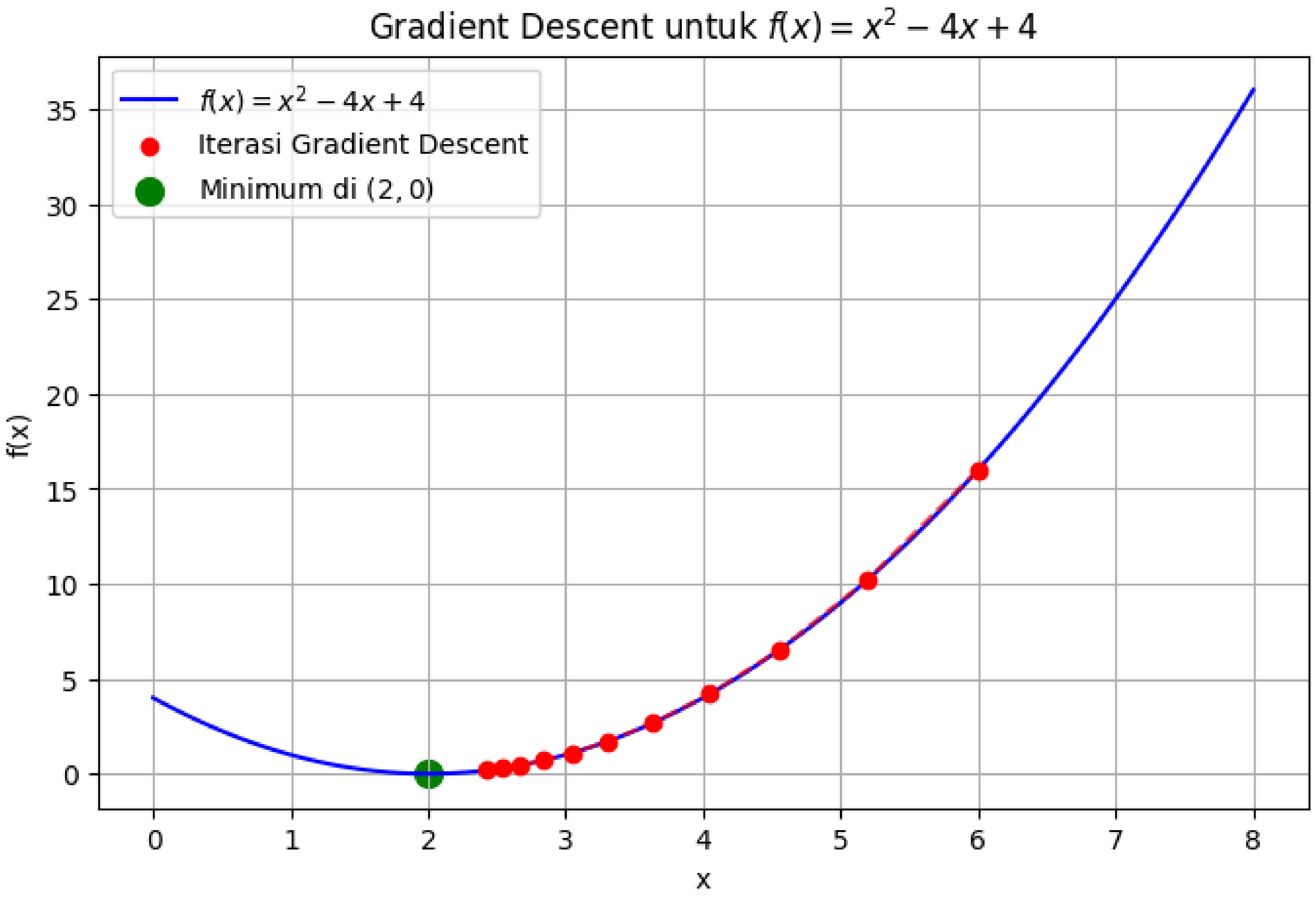
Variasi Gradient Descent

1. **Batch Gradient Descent** – Menggunakan seluruh dataset untuk menghitung gradien setiap iterasi.
2. **Stochastic Gradient Descent (SGD)** – Menggunakan satu contoh data secara acak untuk setiap iterasi.
3. **Mini-Batch Gradient Descent** – Kombinasi antara batch dan stochastic, menggunakan subset kecil dari dataset.

Contoh dan Penyelesaian

- Misalkan kita ingin meminimalkan fungsi:
  $f(x) = x^2 - 4x + 4$
- **Langkah 1: Hitung Gradien**
  Gradien dari fungsi ini adalah:
  $\nabla f(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 4) = 2x - 4$
- **Langkah 2: Inisialisasi Parameter**
  Misalkan kita mulai dari $x_0 = 6$ dan memilih **learning rate** $\alpha = 0.1$.

- **Langkah 3: Iterasi Update**
  Gunakan rumus Gradient Descent:
  $x_{t+1} = x_t - \alpha(2x_t - 4)$
  Lakukan iterasi hingga nilai x konvergen.



Gradient Descent untuk $f(x) = x^2 - 4x + 4$
$f(x) = x^2 - 4x + 4$
Iterasi Gradient Descent
Minimum di (2, 0)
f(x)
x
0
5
10
15
20
25
30
35
0
1
2
3
4
5
6
7
8

- Grafik di atas menunjukkan jalur iterasi Gradient Descent menuju titik minimum di $x = 2$.
- Titik awal di $x = 6$ secara bertahap bergerak turun mengikuti gradien hingga mencapai nilai minimum global $(2, 0)$.

Metode Newton

- Metode ini menggunakan pendekatan **kuadratik** untuk mempercepat konvergensi dibandingkan dengan Gradient Descent. Aturannya adalah:
- $x_{t+1} = x_t - \frac{f'(x_t)}{f''(x_t)}$
- di mana:
  - x_t adalah nilai pada iterasi ke-t,
  - $f'(x_t)$ adalah **turunan pertama** dari fungsi (gradien),
  - $f''(x_t)$ adalah **turunan kedua** dari fungsi (Hessian jika multi-variabel).

Contoh dan Penyelesaian

Misalkan kita ingin menemukan minimum dari:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

Langkah 1: Hitung Turunan

- Turunan pertama:
  $f'(x) = 2x - 4$
- Turunan kedua:
  $f''(x) = 2$

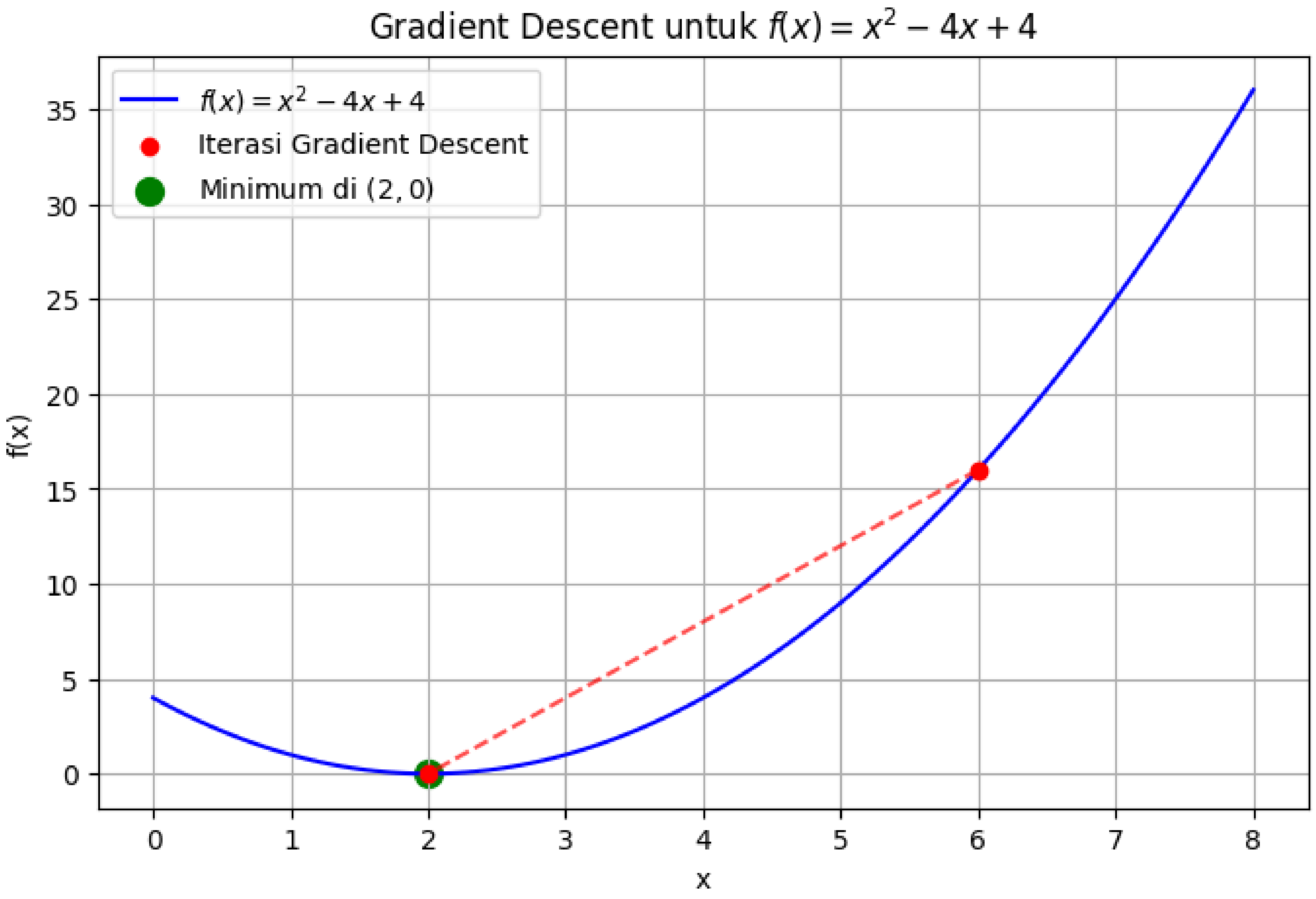
Langkah 2: Gunakan Metode Newton

- Gunakan formula:
  $x_{t+1} = x_t - \frac{2x_t - 4}{2}$

Langkah 3: Iterasi

- Misalkan kita mulai dari $x_0 = 6$, iterasi pertama:
  $x_1 = 6 - \frac{2(6)-4}{2} = 6 - \frac{12-4}{2} = 6 - 4 = 2$

Karena dalam satu iterasi sudah mencapai minimum, ini menunjukkan **konvergensi sangat cepat**, dibandingkan Gradient Descent yang memerlukan beberapa iterasi.



Gradient Descent untuk $f(x) = x^2 - 4x + 4$
$f(x) = x^2 - 4x + 4$
Iterasi Gradient Descent
Minimum di (2, 0)
f(x)
x
0
5
10
15
20
25
30
35
0
1
2
3
4
5
6
7
8

- Grafik di atas menunjukkan iterasi metode Newton, yang langsung mencapai minimum di $x = 2$ hanya dalam satu langkah.
- Ini membuktikan bahwa metode Newton memiliki **konvergensi sangat cepat**, terutama untuk fungsi dengan turunan kedua yang tidak berubah (konstan).

Optimasi dalam Regresi Linear

- Regresi linear adalah teknik yang digunakan untuk memodelkan hubungan antara variabel independen X dan variabel dependen y. Modelnya memiliki bentuk:
- $y = wX + b$
- di mana:
  - w adalah **koefisien regresi** (slope),
  - b adalah **intercept** (bias),
  - X adalah data input.

- Untuk mendapatkan w dan b, kita meminimalkan fungsi **Mean Squared Error (MSE)**:
- $J(w,b) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - (wx_i + b))^2$

Optimasi Parameter: Gradient Descent vs Newton's Method

- Kita akan membahas **dua metode optimasi numerik** untuk menemukan nilai w dan b yang optimal:
- **Gradient Descent**: Melakukan update bertahap berdasarkan gradien fungsi loss.

Optimasi dengan Gradient Descent

- **Turunan Fungsi Loss**
  Untuk melakukan optimasi dengan **Gradient Descent**, kita perlu menghitung turunan parsial dari fungsi MSE terhadap w dan b:
- $\frac{\partial J}{\partial w} = -2 \sum_{i=1}^{m} x_i(y_i - (wx_i + b))$
- $\frac{\partial J}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - (wx_i + b))$

Aturan Update

Update parameter dilakukan dengan:

- $w_{t+1} = w_t - \alpha \frac{\partial J}{\partial w}$
- $b_{t+1} = b_t - \alpha \frac{\partial J}{\partial b}$
- di mana α adalah **learning rate**.