Univerza v *Ljubljani*
Fakulteta za *pomorstvo in promet*

Numerične Metode v Tehniki

Diferencialne enačbe

Robni problem

Aleksander GRM
aleksander.grm@fpp.uni-lj.si

Vsebina

$\boxed{\text{Poglavje – 1}}$

Uvod

Uvod

Vsebina tega poglavja se bo vrtela okoli numeričnega reševanja **robnega problema**, oziroma

- **DE 2. reda**

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b],$$

  ki ima pogoje podane na robu $y(a) = \alpha$ in $y(b) = \beta$.

Za razliko od **začetnega problema**, ki ima pogoje podane v začetni točki x_0, imamo pri **robnem problemu** pogoje podane na robovih računskega intervala $[a, b]$, to je $y(a) = \alpha$ in $y(b) = \beta$.

Robni problem spada med tako imenovane **slabo pogojene probleme**, saj ima lahko več rešitev in ne samo ene, kakor je pri dobro pogojenih problemih.

Primer

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(2\pi) = 0.$$

ima rešitev

$$y(x) = \sin(\lambda x)$$

$\boxed{\textbf{Poglavje – 2}}$

Robni problem 2. reda

Linearni robni problem

Matematičen model

Linearni robni problem 2. reda je določen kot

$$y'' = py' + qy + r,$$

$$y(a) = \alpha,$$
$$y(b) = \beta,$$

kjer so p, q in r poljubne funkcije spremenljivke x.

Rešitev lahko poiščemo na dva načina

- Kombinacija dveh začetnih problemov,
- Diferenčna metoda.

Kombinacija dveh začetnih problemov

Pri tej metodi rešujemo hkrati dva različna začetna problema

IVP 1	**IVP 2**
$y_1'' = py_1' + qy_1 + r,$	$y_2'' = py_2' + qy_2 + r,$
$y_1(a) = \alpha,$	$y_2(a) = \alpha,$
$y_1'(a) = \xi_1,$	$y_2'(a) = \xi_2,$

Rešitev originalnega problema je tudi linearna kombinacija $y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ ($\lambda \in [0,1]$), ki zadosti pogoju $y(a) = \alpha$. Prosti parameter λ lahko določimo iz pogoja

$$\lambda y_1(b) + (1-\lambda) y_2(b) = \beta \quad \rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}}$$

Pomembno

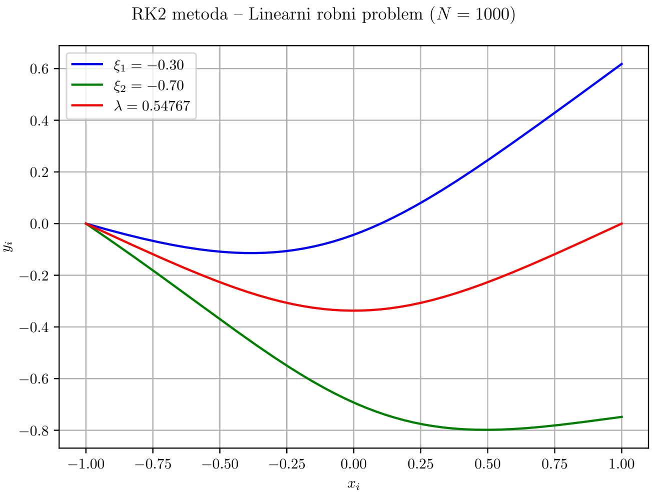
Rešitvi vedno iščemo kot povezan sistem (v istih mrežnih točkah).

Primer

Reši linearni robni problem 2. reda s kombinacijo dveh začetnih problemov

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)y'' + 2xy' - x^2 y &= 1,\\
y(-1) &= 0,\\
y(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Začetni problem rešuj z RK2 metodo.



Diferenčna metoda

Diferenčna metoda aproksimira odvode z uporabo **simetričnih diferenc**.

Postopek poteka na sledeči način

1. Interval $[a, b]$ razdelimo na $N + 1$ delov, kjer so točke med seboj ekvidistantne

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_0 = a, \; x_{N+1} = b.$$

2. Odvode aproksimiramo

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),$$

3. Tvorimo sistem linearnih enačb

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + q_i y_i + r_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

pri čemer je $y_0 = \alpha$ in $y_{N+1} = \beta$. (Sistem je tri diagonalen)

Izdelaj matrik koeficientov **A** in desnega vektorja $\boldsymbol{b}$, kjer so neznanke $\boldsymbol{x} = (y_1, \ldots, y_N)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix}$$

kjer ne smemo pozabit $y_0 = \alpha$ in $y_{N+1} = \beta$.

Imamo enačbo, z urejenimi koeficienti za y_i vrednosti neznank

$$y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2}\right) + y_i\left(-\frac{2}{h^2} + \frac{p_i}{2h} - q_i\right) + y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right) = r_i$$

ki služi kot podlaga za določitev koeficientov matrike **A** in vektorja $\boldsymbol{b}$.

Koeficienti za matriko $\mathbf{A}$ in vektor $\boldsymbol{b}$ so določeni kot

$$a_{11} = -\frac{2}{h^2} + \frac{p_1}{2h} - q_1$$
$$a_{12} = \frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}$$
$$b_1 = r_1 - \frac{y_0}{h^2}$$
$$p_1 = p(x_1)$$
$$r_1 = r(x_1)$$

$$a_{i,i-1} = \frac{1}{h^2}$$
$$a_{i,i} = -\frac{2}{h^2} + \frac{p_i}{2h} - q_i$$
$$a_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}$$
$$b_i = r_i$$
$$p_i = p(x_i)$$
$$r_i = r(x_i)$$
$$i = 2, \ldots, N-1$$

$$a_{N,N-1} = \frac{1}{h^2}$$
$$a_{N,N} = -\frac{2}{h^2} + \frac{p_N}{2h} - q_N$$
$$b_N = r_N - y_{N+1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_N}{2h}\right)$$
$$p_N = p(x_N)$$
$$r_N = r(x_N)$$

pri tem sta vrednosti $y_0 = y(a) = \alpha$ in $y_{N+1} = y(b) = \beta$. Rešitev v vmesnih točkah je dobljena kot rešitev linearnega sistema

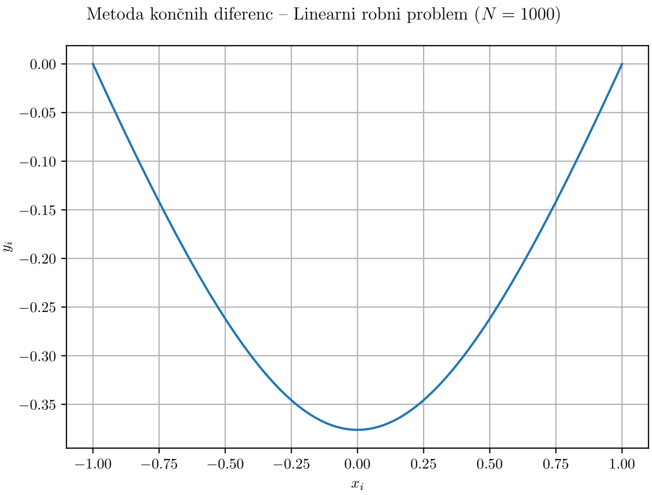
$$\boldsymbol{y} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Primer

Reši linearni robni problem 2. reda s kombinacijo dveh začetnih problemov

$$
\begin{aligned}
(1+x^2)y'' + 2xy' - x^2 y &= 1,\\
y(-1) &= 0,\\
y(1) &= 0,
\end{aligned}
$$

Začetni problem rešuj z RK2 metodo.



Ne-Linearni robni problem

Ne-Linearni problem 2.reda

Do sedaj smo reševali robni problem, ki je bil **linearnega tipa**. Sedaj si poglejmo še metode načina reševanja nelinearnega problema

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha,$$
$$y(b) = \beta.$$

Ne-Linearni problem bomo reševali z dvema metodama

- **Metodo končnih diferenc**

  Kakor v prejšnjem primeru, bomo tudi tukaj reševali sistem enačb, ki pa so **nelinearne**.

- **Metodo streljanja (shooting)**

  metoda streljanja rešuje IVP, kjer odvod v x_0 uganemo. S pomočjo napake

  $$e(\xi) := y(b, \xi) - \beta$$

  lahko nato iščemo optimalen ξ, kjer spet rešujemo sistem dveh nelinearnih enačb.

MKD ne-linearni problem 2.reda

Enako kakor pri linearnem problemu, aproksimiramo dovode s simetričnimi končnimi diferencami

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2),$$
$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

$\rightarrow$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{2h}\right)$$
$$y(a) = \alpha$$
$$y(b) = \beta$$

Tako je potrebno sedaj rešiti sistem nelinearnih enačb (SNLE). Za reševanje SNLE bomo uporabili že implementirano funkcijo iz modula *SciPy*® in sicer scipy.optimize.fsolve

Najtežji del je izdelati funkcijo, ki jo bomo reševali. Kar potrebujemo, je implementacija vhodne funkcije

$$\boxed{\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{2h}\right) = 0}$$

Vprašanje: Kakšna je natančnost metode?

Primer

Poglejmo si primer robnega nelinearnega problema, ki je tipa

$$-(p(x)\, y'(x))' + q(x)\, y(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$y(a) = \alpha$$
$$y(b) = \beta.$$

Eksistenčni izreki za takšen tip enačbe garantirajo rešitev, ki je edina, pod pogojem

- da so $y(x)$, $p(x)$, $q(x)$ in $f(x)$ Lipschitz zvezne,
- da je $\Delta = b - a$ zadosti majhen, oziroma na tem intervalu so zgornje funkcije Lipschitz zvezne.

Primer

S pomočjo metode končnih diferenc reši naslednjo nelinearno navadno NDE 2. reda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1+x^2)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\sin x\,y^2=x^2,\qquad x\in[-1,1],$$

kjer imamo zadane robne pogoje $y(-1)=-1$ in $y(1)=1$.

Najprej je potrebno zgornjo enačbo odvajati in nadomestiti prvi in drugi odvod s končnimi diferencami

$$2xy'+(1+x^2)y''+\sin x\,y^2=x^3\quad\to\quad 2x_i\frac{y_{i+1}-y_i}{2h}+(1+x_i^2)\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\sin x_i\,y_i^2=x_i^2$$

Rešujemo sistem nelinearnih enačb $F(x_i,y_{i-1},y_i,y_{i+1})=0$ $(i=1,\ldots,N)$, s funkcijo

$$F(x_i,y_{i-1},y_i,y_{i+1})=2x_i\frac{y_{i+1}-y_i}{2h}+(1+x_i^2)\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+\sin x_i\,y_i^2-x_i^2,$$

kjer je upoštevan robni pogoj $y(-1)=y_0=1$ in $y(1)=y_{N+1}=-1$.

Za reševanje SNLE uporabi že implementirano funkcijo iz modula *SciPy*® in sicer scipy.optimize.fsolve
Za začetni približek lahko vedno uporabiš vrednosti

$$y_i=y_0+\frac{y_{N+1}-y_0}{b-a}(i\,h),\qquad i=1,\ldots,N.$$