FPP

UNIVERZA V LJUBLJANI

Fakulteta za pomorstvo in promet

Numerične metode v tehniki

Optimizacija

Aleksander GRM

aleksander.grm@fpp.uni-lj.si

Vsebina

$\boxed{\text{Poglavje – 1}}$

Uvod

Uvod

Poglavje optimizacija se spušča v področje matematike, kjer iščemo ekstrem določene funkcije, ki ima lahko različne oblike in podatke.

Tako ločimo optimizacijo v osnovi na dva problema

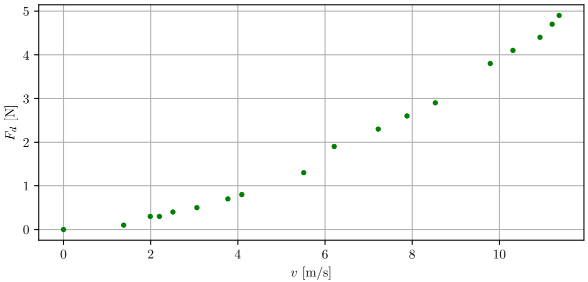
- **regresijske metode**: iščemo optimalno prilagojeno funkcijo na **merske podatke**, da bo napaka med matematičnim modelom in merskimi podatki najmanjša,
- **iskanje ekstrema**: imamo dan matematičen model, kjer pa si želimo poiskati ekstrem zadanega problema (minimum ali maksimum).

$\boxed{\textbf{Poglavje – 1}}$

Metoda najmanjših kvadratov – Linearni problem

Uvod

Imamo meritev sile upora med prostim padom



Naloga: Poišči koeficiente a_0, a_1 in a_2 za oba modela upora

$$F_d = a_0 + a_1\, v, \quad F_d = a_0 + a_2\, v^2,$$

tako, da se izmerjeni podatki najbolje prilegajo matematičnemu modelu upora. Kateri model je boljši?

Opis problema

Oba modela imata po dve neznanki, vendar imamo 18 meritev, kar pomeni

imamo **več** enačb kakor neznank $\rightarrow$ sistem je **predoločen**!

Kako se lotimo takega problema?

Vsak sistem enačb zapišemo lahko v matrični obliki

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Za naš primer meritev in modela velja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18\times 2}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ in $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{18}$.

Za izbrane koeficiente je mera **napake** določena kot

$$\|\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|.$$

Če za normo izberemo kvadratno normo $\|\ \|_2$, dobimo **linearni problem najmanjših kvadratov** (LPNK).

Izpeljava LPNK

Pri reševanju LPNK, je model lahko polinomskega tipa, ne more pa biti nelinearen. Če uspemo prevesti nelinearen problem na linearen ga je mogoče rešiti z uporabo LPNK!

Imamo pare meritvenih točk $\{(y_1, b_1), (y_2, b_2), \ldots, (y_m, b_m)\}$. Naša zahteva je poiskati optimalne koeficiente a_i, ki reši sistem enačb **najbolje** (za najmanjšo napako).

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 y_1 &= b_1 \\ a_0 + a_1 y_2 &= b_2 \\ a_0 + a_1 y_3 &= b_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_0 + a_1 y_m &= b_m \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Poišči takšen $\boldsymbol{x} = \{a_0, a_1\}$ tako da rešiš

$$\boxed{\min_{\boldsymbol{x}} \|\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2}$$

Normalni sistem

Rešitev predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kjer velja $m > n$, $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Vektorju $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, ki minimizira napako

$$\min_{\boldsymbol{x}} \|\mathbf{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2,$$

pravimo rešitev predoločenega sistema **po metodi najmanjših kvadratov**.

Tak $\boldsymbol{x}$ seveda obstaja in je določen enolično.

Če predoločen sistem množimo z leve z matriko $\mathbf{A}^\top$, dobimo **normalni sistem**

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{b}.$$

Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ polnega ranka. Matrika $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je neizrojena, sa je pozitivno definitna. Posledica je, da je rešitev $\boldsymbol{x}$ **enolična**.

Trditev

Normalni sistem ima **enolično rešitev**.

Normalni sistem

Izrek

Rešitev normalnega sistema je rešitev predoločenega sistema linearnih enačb po metodi najmanjših kvadratov.

Dokaz Imejmo skalarno polje f in ga razvijemo okoli točke $\boldsymbol{x}_0$ z uporabo **Taylor**jeve vrste

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^\top \nabla f(\boldsymbol{x}_0) + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^\top \mathbf{H} f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \cdots$$

Naj bo sedaj skalarno polje f **napaka**

$$f(\boldsymbol{x}) := \|\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2 = \big(\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\big)\big(\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\big),$$

Tedaj je

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} - 2\mathbf{A}^\top \boldsymbol{b}.$$

V ekstremni točki $\boldsymbol{x}$ mora biti $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$, tako hitro sledi

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{b}.$$

Hessian $\mathbf{H} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ je pozitivno definitna matrika, torej je $\boldsymbol{x}$ res **minimum**. ■

Reševanje normalnega sistema

Naj bo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$ polnega ranka. Poiščemo rešitev normalnega sistema

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{b}.$$

Ker je matrika $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ **s.p.d.** (simetrično pozitivno definitna), lahko za reševanje normalnega sistema uporabimo razcep **Cholesky**:

1. izračunaj $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ in $\boldsymbol{c} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{b}$
2. izračunaj razcep Cholekega $\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{V}^\top$
3. reši spodnje trikotni sistem $\mathbf{V}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$
4. reši zgornje trikotni sistem $\mathbf{V}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Normalni sistem je najpreprostejši način reševanja predoločenega sistema, ni pa najstabilnejši.

Poglej si metodo **QR razcepa**, kjer je $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$!

$\boxed{\text{Poglavje – 1}}$

Metoda najmanjših kvadratov – Nelinearni problem

Uvod

TODO

Uvod

TODO

Poglavje – 1

Linearno programiranje

Uvod

TODO

TODO