# Линейная алгебра. Практика

## Александр Сергеев

#### Пример

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_1 \end{array} \right. \text{- Система линейных неоднородных уравнений.}$$
 
$$\left( \begin{array}{l} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} x_1\\ x_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} b_1\\ b_2 \end{array} \right)$$
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \left( a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \right)x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2\\ \left( a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22} \right)x_2=b_1a_{21}-a_{11}b_2\\ \left( a_{12}a_{21}-a_{12}b_2 \right)x_1=b_1a_{21}-a_{11}b_2\\ x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\ x_2=\frac{b_1a_{21}-a_{11}b_2}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}} \end{array} \right.$$

 $\Delta_i$  - определитель матрицы, где i-ый столбец заменен на столбец свободных членов.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

#### Определение

$$\det A = \sum (-1)^{inv(\sigma)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$
, где  $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ , где  $inv(S)$  - количество пар  $(a, b) : a, b \in S, a > b$ 

### Теорема Крамера

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists !$$
 решение  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где

 $\Delta_i$  - определитель матрицы, где i-ый столбец заменен на столбец свободных членов.

#### Свойства:

1. 
$$|A| = |A^T|$$

2. Все свойства строк выполняются для столбцов

3. 
$$|\ldots,A_i+B_i,\ldots|=|\ldots,A_i,\ldots|+|\ldots,B_i,\ldots|$$
, где  $A_i,B_i$  - столбцы - свойство аддитивности по столбцам

$$4. \mid \ldots, k \cdot A_i, \ldots \mid = k \cdot \mid \ldots, A_i, \ldots \mid$$

5. Если в матрице есть нулевой столбец, то определитель = 0

6. 
$$|..., A_i, ..., A_j, ...| = -|..., A_j, ..., A_i, ...|$$

7. Отслюда 
$$|..., S, ..., S, ...| = 0$$

8.  $|\dots, A_i, \dots, A_j, \dots| = |\dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots|$  - линейное преобразование

9. 
$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$

где  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  - дополнение,

 $M_{ij}$  - минор(матрица, полученная вычеркиванием і строки и ј столбца).

#### Теорема

 $\Pi y$ чок плоскостей, проходящих через  $\alpha_1 \cap \alpha_2$  задается уравнением  $a(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + b(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ 

### Пересечение линейных пространств

Пусть  $L_1, L_2 \subset V$  - линейные подпространства линейного пространства  $L_1 = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_k), a_1, \ldots, a_k$  - базис  $L_2 = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_m), b_1, \ldots, b_k$  - базис

Рассмотрим  $u \in L_1 \cap L_2$ 

$$u = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i - \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = 0 - \text{СЛОУ}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & -b_1 & \dots & -b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$
 Решая систему в общем виде, можем найти

Решая систему в общем виде, можем найти все вектора пересечения Отсюда можно найти базис