Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

1 Интеграл

1.1 Неопределенный интеграл

Определение
$f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
F – *первообразная* функции f, если F дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ и $\forall\ x \in \langle a, b\rangle\ F'(x) = f(x)$
Теорема 1
Если f непрерывна на $\langle a, b\rangle$, то первообразная существует
Теорема 2
Пусть F - первообразная f на $\langle a, b\rangle$
Тогда

1. $\forall\, c \in \mathbb{R}\ F + c$ - тоже первообразная
2. Если G - первообразная, то $G - F = \mathrm{const}$

Определение
Неопределенный интеграл на $\langle a, b\rangle$ – множество всех первообразных
$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = \{F : F' = f\}$
Таблица первообразных
$\int x^P\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{x^{P+1}}{P+1} + C, P \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x| + C$
$\int e^x\,\mathrm{d}\,x = e^x + C$
$\int a^x\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{a^x}{\ln a}$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}\, x = -\cos x + C$$
$$\int \cos x \,\mathrm{d}\, x = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}\, x = \operatorname{tg} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}\, x = -\operatorname{ctg} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}| + C = \operatorname{arcth} x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C = \operatorname{arcsh} x + C - \text{"длинный логарифм"}$$

Гиперболические функции

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ - из ряда Тейлора

$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g - имеют первообразные на $\langle a, b\rangle$

Тогда

1. $\displaystyle\int f + g = \int f + \int g$

   $\displaystyle\int af = a\int f$

2. Пусть $\phi : \langle p, q\rangle \to \langle a, b\rangle$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x|_{x:=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C$$

Замечание

Пусть ϕ обратима

Тогда $F(x) = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t|_{t:=\phi^{-1}(x)}$

3. $\forall\,\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$
   $$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$$

4. f, g – дифференцируемы и $f'g$ имеет первообразную
   Тогда fg' имеет первообразную
   $$\int fg' = fg - \int f'g$$

Определение

Дифференциал $\mathrm{d}\,\phi(x) = \phi'(x)\,\mathrm{d}\,x$

1.2 Правило Лопиталя

Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$ - предельная точка D

Пусть $\exists\, U(a) :\ f, g \neq 0$ в $\overset{\bullet}{U}(a)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

$$\text{Тогда } \forall\, x_k : \begin{array}{l} x_k \to a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{array} \exists\, y_k : \begin{array}{c} y_k \to a \\ y_k \in D \\ y_k \neq a \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \end{array}$$

Доказательство

Выберем y_k как подпоследовательность x_k

$\forall\, k \dfrac{f(x_l)}{f(x_k)}, \dfrac{f(x_l)}{g(x_k)} \xrightarrow[l\to\infty]{}$

Тогда $\exists\, l_0 : |\dfrac{f(x_{l_0})}{f(x_k)}|, |\dfrac{f(x_{l_0})}{g(x_k)}| < \dfrac{1}{k}$

Отсюда $y_k := x_{l_0}$

Правило Лопиталя
$f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – дифференцируемы на $(a, b), a \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ - неопределенность
Пусть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$
Доказательство
По Гейне
Возьмем $x_k : \begin{array}{l} x_k \to a \\ x_k \in (a, b) \\ x_k \neq a \end{array}$
Из леммы берем $y_k : \begin{array}{l} y_k \to a \\ y_k \in (a, b) \\ y_k \neq a \end{array}$
По т. Коши $\dfrac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}, \xi$ – между x_k и y_k (т.е. $\xi_k \to a$)
$\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)} = \dfrac{f(y_k)}{g(x_k)} + \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}(1 - \dfrac{g(y_k)}{g(x_k)})$
$\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} = A$
Замечание
<u>Работает только на неопределенностях</u>
Следствие
$\dfrac{x}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
$\dfrac{x^a}{e^x} = (\dfrac{x}{e^{\frac{x}{n}}})^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Теорема Штольца
$x_n, y_n \to 0, y_n$ – строго монотонная
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$
Тогда $\dfrac{x_n}{y_n} \to a$
Замечание
При $a = 0$ требуем монотонность x_n

Замечание
При $x_n, y_n \to \infty$ теорема тоже верна
Доказательство

1. $a > 0, a \in \mathbb{R}$
   Утверждение
   $p < \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} < q \Rightarrow p < \dfrac{a+c}{b+d} < q$
   $\forall\, 0 < \varepsilon < a \;\exists\, N_1 \;\forall\, n > N \geq N_1 \; a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$
   $\forall\, 0 < \varepsilon < a \;\exists\, N_1 \;\forall\, n > N \geq N_1 \; a - \varepsilon < \dfrac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$
   $\vdots$
   $\forall\, 0 < \varepsilon < a \;\exists\, N_1 \;\forall\, n > N \geq N_1 \; a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$
   Отсюда $\forall\, 0 < \varepsilon < a \;\exists\, N_1 \;\forall\, n > N \geq N_1 \; a - \varepsilon < \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$
   Устремим n к ∞
   Тогда $a - \varepsilon < \dfrac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$, т.е. $\dfrac{x_N}{y_N} \to a$

2. $a < 0$ – аналогично

3. $a = \pm\infty$
   Аналогично $\dfrac{x_N}{y_N} \to a$

4. $a = 0$ (потребуем монотонность x_n)
   Пусть $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to +\infty$
   Перевернем дробь. Через доказанное выше

Упражнение
Посчитаем $1^k + 2^k + \ldots + n^k$
Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$
$x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x) = x + 2x^2 + \ldots + nx^n$
$(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^2 f(x) = x + 2^2x^2 + \ldots + n^2x^n$
$(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^k f(x) = x + 2^kx^2 + \ldots + n^kx^n$

Отсюда $1^k + 2^k + \ldots + n^k = ((x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^k f)(1)$
Заметим, что в результате дифференцирования мы получим дробь, знаменатель которой при подстановке 1 обращается в 0
Но данный дефект возникает лишь из-за формы записи. На самом деле функция непрерывна, поэтому можно взять ее предел в 1
$1^k + 2^k + \ldots + n^k = \lim\limits_{x\to 1}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^k f$
Применим правило Лопиталя
$1^k + 2^k + \ldots + n^k = (\frac{1}{(k+1)!}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^k(x-1)^{k+1}(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x})^k\frac{x^{n+1}-1}{x-1})(1)$

1.3 Определенный интеграл

Определение
Пусть ε - множество ограниченных плоских фигур
$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ - *площадь*, если

1. Аддитивность – $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$, где $\sqcup$ – дизъюнктное объединение (объединение непересекающихся фигур)

2. Нормировка – $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$

Замечание

1. $A \subset B \in \varepsilon \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$
   Доказательство
   $B = A \sqcup (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$

2. A - вертикальный отрезок $\Rightarrow \sigma(A) = 0$
   Доказательство
   Впишем отрезок в прямоугольник с шириной ε
   Для любого ε это возможно. Отсюда площадь стремится к 0

3. Мы не доказываем, что такая функция существует

Определение
$\sigma : \varepsilon \to [0, +\infty)$ - *ослабленная площадь*, если

1. Монотонность:
   $E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$

2. Нормировка

3. Ослабленная аддитивность:
Если $A = A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \subset$ вертикальный отрезок, A_1, A_2 лежат в разных полуплоскостях, то $\sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$
UPD
Позже предыдущее утверждение было заменено на следующее:
Если вертикальная прямая l делит фигуру на A на части A_r и A_r(части могут иметь общие точки на l), то $\sigma A = \sigma A_l + \sigma A_r$

Примеры

1. $\sigma A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{n} S(P_k) : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k\}$, где P_k - прямоугольник

2. $\sigma A := \inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} S(P_k) : A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k\}$, где P_k - прямоугольник
Эти площади разные
К примеру, рассмотрим $C = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
$\sigma_1(C) = 1$
$\sigma_2(C) = 0$

Определение
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$
Положительная срезка $f^+ = \max(f, 0)$
Отрицательная срезка $f^- = \max(-f, 0)$
$f = f^+ - f^-$
$|f| = f^+ + f^-$
Подграфик $(F, E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \le y \le f(x)\}$
Определенный интеграл
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная
Тогда *определенный интеграл* f по $[a, b]$ - $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}\, x = \sigma(\Pi\Gamma(f^+, [a, b])) - \sigma(\Pi\Gamma(f^-, [a, b]))$, где σ – ослабленная площадь
Замечания

1. $f \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f \ge 0$

2. $f \equiv C \Rightarrow \int_a^b f = C(b-a)$

3. $\int_a^b -f = -\int_a^b f$

4. Можно считать, что $\int_a^a f = 0$

Свойства

1. Аддитивность по промежутку
   $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

2. Монотонность
   $f \underset{[a,b]}{\leq} g[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

3. $(b-a)\min\limits_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a)\max\limits_{[a,b]} f$

4. $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$

Теорема о среднем
Пусть $f \in C[a,b]$
Тогда $\exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$
Доказательство
Если $a = b$ – тривиально
Иначе по утверждению 3: $\min f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \max f$
Т.к. f принимает все значения между минимумом и максимумом, то $\exists\, c : f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$

Определение
Пусть $f \in C[a,b]$
$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_a^x f$ – интеграл с переменным верхним пределом

$\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}, \Psi(x) = \displaystyle\int_x^b f$ – интеграл с переменным нижним пределом

Теорема Барроу

$f \in C[a, b], \Phi$ – интеграл с переменным верхним пределом

Тогда Φ дифференцируема на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

Пусть $x \in (a, b), y > x$

$\Phi'_+ = \lim\limits_{y \to x+0} \dfrac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim\limits_{y \to x+0} \dfrac{\int_x^y f}{y - x} = \lim\limits_{y \to x+0} f(c), c \in [x, y] = f(x)$

Аналогично $\Phi'_- = f(x)$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Замечание

$\Psi'(x) = -f(x)$

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть F – первообразная f на $[a, b], f \in C[a, b]$

Тогда $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

По т. Барроу Φ – первообразная

Тогда $F = \Phi + C$

$\displaystyle\int_a^b f = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Замечание

Теорема Барроу – это теорема о существовании первообразной у непрерывной функции

Также площадь под графиком непрерывной функции не зависит от σ

Соглашение

При $c > d$ $\displaystyle\int_c^d f := -\int_d^c f$

Свойства

1. Линейность
   $f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b$
   Пример (неравенство Чебышева)
   $f, g \in C[a, b]$ – монотонно возрастающие/убывающие
   $I_f := \dfrac{1}{b - a} \displaystyle\int_a^b f$ – *среднее значение функции*

Тогда $I_f I_g \le I_{fg}$
Доказательство
$x, y \in [a,b]$
Тогда $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \ge 0$ – из монотонности
$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \ge 0$
Проинтегрируем по x по $[a,b]$:
$$\int_a^b f(x)g(x) - f(y)\int_a^b g(x) - f(y)g(y)(b-a) \ge 0$$
Поделим на $b-a$:
$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \ge 0$
Проинтегрируем по y по $[a,b]$ и поделим на $b-a$:
$I_{fg} - I_f I_g - I_f I_g + I_{fg} \ge 0$
$I_{fg} \ge I_f I_g$

2. Интегрирование по частям
   $f, g \in C^1[a,b]$
   $$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b gf'$$
   Пример
   $H_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \,\mathrm{d}\, x = F_n(\pi^2)$ – какой-то многочлен степени n
   Пример – полный треш. Если вам надо, смотрите видео:
   `https://www.youtube.com/live/7ZQr_OKhuq4?feature=share&t=7020`
   Таймкод: 1:57:00

3. Замена переменных в интеграле
   $f \in C\langle a,b\rangle$
   $\phi : \langle a,b\rangle \to \langle a,b\rangle, \phi \in C^1$
   $[p,q] \in \langle a,b\rangle$
   Тогда $\displaystyle\int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\, t = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)\,\mathrm{d}\, x$
   Доказательство
   F – первообразная f
   $F(\phi(t))$ – первообразная $f(\phi(t))\phi'(t)$
   $$\int_p^q f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\, t = F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x)\,\mathrm{d}\, x$$
   Замечание

(a) Может оказаться, что $\phi(p) > \phi(q)$

(b) $\phi[p,q]$ может быть крупнее $[\phi(p), \phi(q)]$

Пример (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)
$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b, f \in C^{n+1}\langle a, b\rangle, x, x_0 \in \langle a, b\rangle$
Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$
Доказательство
Индукция по n:

(a) $n = 0$:
$f(x) = f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}\,t$

(b) Интегрирование по частям
Пусть доказано для n
$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{bmatrix} f = f^{(n+1)} & g' = (x-t)^n \\ f' = f^{(n+2)} & g = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\end{bmatrix} =$
$-\frac{1}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t =$
$\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}\,t$

Замечание
Формулу Тейлора можно интегрировать
F – первообразная f
Проинтегрируем слагаемое:
$\int_{x_0}^{x}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}\Big|_{x=x_0}^{x=x} = \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} =$
$\frac{F^{(k+1)}(x_0)(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$
Пример
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$
Тогда $\arctan x = F(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + o(x^{2n+1})$

Утверждение
π – иррациональное (даже π^2 – иррациональное)
Доказательство
Пусть $\pi^2 = \dfrac{k}{m}$
Тогда $m^n F(\dfrac{k}{m})$ – целое число, где F – из примера к интегрированию по частям
Отсюда $m^n F(\dfrac{k}{m}) = \dfrac{m^n}{n!} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\dfrac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \,\mathrm{d}\, x$ – положительное целое число
Отсюда выражение ≥ 1
$|\dfrac{m^n}{n!} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\dfrac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \,\mathrm{d}\, x| \leq \dfrac{m^n}{n!} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |(\dfrac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x| \,\mathrm{d}\, x \leq \dfrac{m^n 3^n \pi}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

1.4 Продолжение свойств интеграла

Определение

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – кусочно непрерывная, если функция непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, где у нее разрыв 1 рода

2. f – кусочно непрерывная функция
   $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ – точки разрыва (a, b могут и не быть разрывными)
   $\displaystyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x := \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$

3. Пусть f – кусочно непрерывная на $[a, b]$
   $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ – *почти первообразная* функции f, если

   (a) F – непрерывна на $[a, b]$

   (b) $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a, b]$, кроме конечного числа точек

   Если F_i – первообразная f на $[x_{i-1}, x_i]$

$$\text{Тогда } F(x) = \left[\begin{array}{ll} F_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ F_2(x) + c_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ F_n(x) + c_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{array}\right. ,$$

где $c_i = F_i(x_i) - F_{i+1}(x_i)$

Утверждение

Если f – кусочно непрерывная на $[a, b]$

F – первообразная

Тогда $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Доказательство

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x := \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - F_i(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(b) - F(a)$

Пример

Пусть $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

Тогда $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} \le \frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n}$ – неравенство Чебышева (ч.с.)

Доказательство

Определим функции как $F_a(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} a_i, F_b(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} b_i$

Тогда неравенство выполняется по неравенству Чебышева

Замечание

Утверждается, что все доказанные свойства интеграла выполняются и для кусочно-непрерывных функций

1.5 Приложение определенного интеграла

Общая схема

Пусть фиксирован $\langle a, b \rangle$

Обозначения: $\mathrm{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$

Определение

Отображение $\Phi : \mathrm{Segm}\langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ – функция промежутка

Φ – *Аддитивная функция промежутка*, если $\forall\, c \in (p, q)\ \Phi[p, q] = \Phi[p, c] + \Phi[c, q]$

Определение
$\Phi : \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – аддитивная функция промежутка
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – плотность а.ф.п. Φ, если $\forall\,\delta \in \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle \ |\delta| \cdot \inf\limits_{\delta} f \leq \Phi(\delta) \leq |\delta| \cdot \sup\limits_{\delta} f$
Основной пример
$\Phi[p, q] := \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$
Тогда f – плотность
Теорема 1 (о вычислении а.ф.п. по плотности)
$\Phi : \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – а.ф.п
$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ – плотность Φ, непрерывна
Тогда $\forall\,[p, q] \in \mathrm{Segm}\langle a, b\rangle\ \Phi[p, q] = \displaystyle\int_p^q f$
Доказательство
Пусть $F(x) = \left[\begin{array}{ll} 0, & x = p \\ \Phi[p, x] & p < x \leq q \end{array}\right.$
Докажем, что F – первообразная f
$F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{\Phi[p, x+h] - \Phi[p, c]}{h} = \lim\limits_{h\to 0+0} \dfrac{\Phi[x, x+h]}{h}$
$\inf\limits_{[p,q]} \leq \dfrac{1}{q-p}\Phi[p, q] \leq \sum\limits_{[p,q]} f$
Отсюда $F'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0+0} f(x + \theta h), \theta \in [0, 1] = f(x)$
Аналогично $F'_-(x) = f(x)$
$\Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \displaystyle\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}\,x$
Пример
Пусть $r = f(\phi)$ – функция в полярных координатах
$\phi \in \langle \phi_0, \phi\rangle$
Пусть $\Phi : \mathrm{Segm}\langle \phi_0, \phi\rangle \to \mathbb{R}$ – площадь сектора $(f, \langle \phi_0, \phi\rangle)$
Т.е. Φ – Отображение $[\alpha, \beta] \mapsto \sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta\rangle))$
Это аддитивная функция промежутка
Теорема
$f : \langle \phi_0, \phi_1\rangle \to \mathbb{R}_+$ – непрерывна, $\langle \phi_0, \phi_1\rangle \subset [0, 2\pi]$
Тогда $\sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta\rangle)) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi$
$([\alpha, \beta] \in \langle \phi_0, \phi_1\rangle)$
Доказательство

Проверим, что $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi$ – плотность а.ф.п. Φ

Т.е. проверим неравенство $\forall\,[\alpha,\beta]$ $\min\limits_{\phi\in[\alpha,\beta]}(\dfrac{1}{2}f^2(\phi))(\beta-\alpha) \le \Phi([\alpha,\beta]) \le \max\limits_{\phi\in[\alpha,\beta]}(\dfrac{1}{2}f^2(\phi))(\beta-\alpha)$

Рассмотрим произвольный сектор

Круговой сектор $(\min f,[\alpha,\beta]) \subset$ Сектор$(f,[\alpha,\beta]) \subset$ Круговой сектор $(\max f,[\alpha,\beta])$ из геометрических соображений

Отсюда $\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)(\min f)^2 \le \Phi([\alpha,\beta]) \le \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)(\max f)^2$

Пример

$x = r(t-\sin t)$

$y = r(1+\cos t$ – циклоида (координата точки на поверхности катящегося колеса)

Найдем площадь арки(периода) циклоиды

Происходят геометрические рассуждения, которые плохо конвертируются в конспект, поэтому оставляю ссылку: `https://www.youtube.com/live/CaG68GvecLw?feature=share&t=6813`

Посчитаем площадь через интеграл

$S = \displaystyle\int_0^{2\pi r} y(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\,\mathrm{d}(r(t-\sin t)) = \int_0^{2\pi} r(1-\cos t)r(1-\cos t)\,\mathrm{d}\,t = r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,\mathrm{d}\,t = 2\pi r^2 + r^2\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi r^2+\pi r^2 = 3\pi r^2$

Пример 2

Пусть задана кривая $(x(t),y(t))$ – путь

Научимся считать площадь сектора $[t_0,t_1]$

Перейдем в полярные координаты (считая, что $\phi_0 \le \phi_1$):

$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi = \begin{bmatrix} \phi = \arctan\dfrac{y(t)}{x(t)} \\ r = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^2+y^2)\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{x'y-xy'}{x^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x^2+y^2)\frac{x'y-xy'}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x'y-xy')\,\mathrm{d}\,t$

Пример 3 (Изопериметрическое неравенство)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая, ограниченная, выпуклая фигура

Пусть $\mathrm{diam}(G) \le 1$, где $\mathrm{diam}(G) = \sup(\rho(x,y) : x,y \in G)$

(Из компактности G, а значит $\mathrm{diam}(G) = \max(\rho(x,y) : x,y \in G)$)

Тогда $\sigma(G) \le \frac{\pi}{4}$
Доказательство
Зададим фигуру в полярных координатах
Граница фигуры – выпуклая функция
Выберем на поверхности точку A, где функция дифференцируема(точек недифференцируемости не более чем счетное множество). Проведем в этой точке касательную и повернем фигуру, чтобы касательная стала вертикальной, а фигура была расположена в правой полуплоскости
Зададим функцию $f(\phi), \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ следующим образом:
Проведем из точки A прямую под углом ϕ
Она пересечет границу в точке B
Тогда $f(\phi) = |AB|$
$\sigma G = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi)\,\mathrm{d}\,\phi +$
$\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi - \frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}))\,\mathrm{d}\,\phi$
$(f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}))$ – квадрат длины некоторой хорды в G
Отсюда $\sigma G = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}))\,\mathrm{d}\,\phi \le \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}\,\phi = \frac{\pi}{4}$

1.6 Интегральные суммы

Определение
Пусть $[a, b]$ – отрезок суммирования
Разделим отрезок конечным набором точек $x_0, \ldots, x_n$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
i-ый отрезок – $[x_{i-1}, x_i]$
$\max |x_i - x_{i-1}|$ = ранг дробления = мелкость
Оснащение – $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – набор точек таких, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Тогда $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ – Риманова сумма
Теорема об интеграле как пределе Римановых сумм
$f \in C[a, b]$
Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, \delta > 0 \forall$ дроблений $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, у которых

ранг $< \delta | \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$

Доказательство

Зафиксируем ε

Для этого ε $\exists\,\delta > 0 \forall\, x_1, x_2 \in [a,b] : |x_2 - x_1| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ – по т. Кантора

Отсюда $|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^n (\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x - f(x_i)(x_i - x_{i-1}))| = |\sum_{i=1}^n (\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\,\mathrm{d}\,x)| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))\,\mathrm{d}\,x| \leq \sum_{i=1}^n |\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))\,\mathrm{d}\,x| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\,x < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \dfrac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \dfrac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}\,x = \varepsilon$

Пример

$\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x$

Разобъем отрезок $[0,1]$ на отрезки по $\dfrac{1}{n}$

Т.е. $\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n}\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$

Замечание

Пусть $|f'(x)| \leq M$ на $[a,b]$

Разделим отрезок на части $\dfrac{b-a}{n}$

$x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i$

Тогда $|\int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(a + \dfrac{b-a}{n} i)\dfrac{b-a}{n}| <$ по т. Лагранжа $< \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\overline{x}_i)|(x_i - x)\,\mathrm{d}\,x \leq \sum_{i=1}^n M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=1}^n M \dfrac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \dfrac{M}{2}(\dfrac{b-a}{n})^2 n$

Обобщенная теорема о плотности

Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ – непрерывная

$\Phi : \mathrm{Segm}\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

$\forall\,\Delta \in \mathrm{Segm}\langle a,b\rangle$ заданы m_Δ, M_Δ – неточные минимум и максимум:

1. $m_\Delta \cdot |\Delta| \le \Phi(\Delta) \le M_\Delta \cdot |\Delta|$
2. $\forall\, x \in \Delta\ m_\Delta \le f(t) \le M_\Delta$
3. $\forall\, x \in \langle a, b\rangle\ \forall\, \Delta \ni x : |\Delta| \to 0\ M_\Delta - m_\Delta \to 0$

Тогда $\forall\, [p, q] \in \operatorname{Segm}\langle a, b\rangle\ \Phi[p, q] = \int_p^q f$

Доказательство

$F(x) = \begin{matrix} \Phi[p, x], & p < x \le q \\ 0, & x = p \end{matrix}$

$\Delta := [x, x + h]$

$m_\Delta \le \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \le M_\delta$

$m_\Delta \le f(x) \le M_\Delta$

Тогда $|\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)| \le M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Т.е. $F'_+(x) = f(x)$

Аналогично $F'_-(x) = f(x)$

Т.о. $\Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$

Пример

Пусть $a > 0$

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}, f \ge 0$

$\Phi_x, \Phi_y : \operatorname{Segm}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Пусть $\Phi_x[p, q] = V_{\Omega^x}$

$\Phi_y[p, q] = V_{\Omega^y}$

$\Omega^x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [p, q], \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\}$ – фигура вращения вокруг OX

$\Omega^y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : p \le \sqrt{x^2 + z^2} \le q, 0 \le y \le f(\sqrt{x^2 + y^2})\}$ – фигура вращения вокруг OY

Φ_x, Φ_y – а.ф.п.

Теорема

$f \in C[p, q], f \ge 0$

Тогда $\Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x)\, \mathrm{d}\, x$

$\Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x)\, \mathrm{d}\, x$

Доказательство
Для Φ_x – очевидно (из 1 теоремы о плотности)
Для Φ_y:
Проверим, что $2\pi x f(x)$ – плотность Φ_y
Из геометрических соображений:
$V(\Omega^y[\alpha,\beta]) \le \pi(\beta^2 - \alpha^2)\max\limits_{[\alpha,\beta]} f = (\beta-\alpha)\pi(\beta+\alpha)\max\limits_{[\alpha,\beta]} f \le (\beta-\alpha)\pi\max\limits_{[\alpha,\beta]} 2x \max\limits_{[\alpha,\beta]} f$
$V(\Omega^y[\alpha,\beta]) \ge \pi(\beta^2 - \alpha^2)\min\limits_{[\alpha,\beta]} f = (\beta-\alpha)\pi(\beta+\alpha)\min\limits_{[\alpha,\beta]} f \ge (\beta-\alpha)\pi\min\limits_{[\alpha,\beta]} 2x \min\limits_{[\alpha,\beta]} f$
Отсюда $M_\Delta := \pi\max\limits_\Delta 2x \max\limits_\Delta f(x)$
$m_\Delta := \pi\min\limits_\Delta 2x \min\limits_\Delta f(x)$
Т.о. условие 1 выполнено
$m_\Delta \le 2\pi x f(x) \le M_\Delta$ – условие 2 выполнено
$max_\Delta 2x \max\limits_\Delta f(x) - \min\limits_\Delta 2x \min\limits_\Delta f(x) \to 0$ по непрерывности f и $2x$ – условие 3 выполнено
Пример
Найдем объем тора с радиусом сечения r и радиусом кольца R
Формула прямой – $y = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$
Отсюда $V = 4\pi\displaystyle\int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,\mathrm{d}\,x = 4\pi\int_{R-r}^{R+r}(x-R)\sqrt{r^2-(x-R)^2}\,\mathrm{d}\,x +$
$4\pi R\displaystyle\int_{R-r}^{R+r}\sqrt{r^2-(R-x)^2}\,\mathrm{d}\,x = 0(\text{из симметричности относительно } R) + 4\pi R\frac{1}{2}\pi r^2 =$
$2\pi R\pi r^2$

1.6.1 Длина пути

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, непрерывная – путь
$\gamma(a)$ – начало пути, $\gamma(b)$ – конец пути
$t \mapsto \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_m(t)\end{pmatrix}$, где $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ – i-ая координатная функция пути
Путь *гладкий*, если $\forall\, i\ \gamma_i \in C^1$
$v(t) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots \\ \gamma_m'(t)\end{pmatrix}$ – вектор скорости пути в точке t

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}=v(t)$ – считается покоординатно
Носитель пути – $\gamma([a,b])$

Определение

l – функция на множестве гладких путей называется длиной пути, если

1. $l \geq 0$
2. l – аддитивна:
   $\forall\, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m\ \forall\, c \in [a,b] l(\gamma) = l(\gamma|_{[a,c]}) + l(\gamma|_{[c,b]})$
3. $\gamma, \overline{\gamma}$ – два пути в $\mathbb{R}^m, C_\gamma, C_{\overline{\gamma}}$ – их носители
   Пусть $\exists\, T : C_\gamma \to C_{\overline{\gamma}}$ – сжатие:
   $\forall\, x, y \rho(T(x), T(y)) \leq \rho(x,y)$
   Тогда $l(\overline{\gamma}) \leq l(\gamma)$
4. $\gamma(t) = \overrightarrow{A} + t \cdot \overrightarrow{v} \Rightarrow l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b)$ – длина прямолинейного пути

Замечание 1

1. Длина дуги $\geq$ длина хорды
   (по свойству 3: ортогонально проецируем дугу на хорду)
2. При "расширении"длина дуги растет
3. При движении пространства (изометрии) длина пути не меняется

Теорема о длине гладкого пути

Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m, \gamma \in C^1$
$l(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}\, t$

Доказательство

Пусть γ – инъекция. Т.е. путь не проходит через одну точку два раза. Если это не так, разобъем путь на несколько и посчитаем их длины отдельно
Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ – плотность а.ф.п. $\underbrace{[p,q]}_{\subset[a,b]} \mapsto l(\gamma|_{[p,q]})$

$m_i(\Delta) = \min\limits_{t\in\Delta} \gamma_i'(t)$
$M_i(\Delta) = \max\limits_{t\in\Delta} \gamma_i'(t)$

$m_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} m_i^2(\Delta)}$
$M_\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} M_i^2(\Delta)}$
Тогда свойства 2 ($m_\Delta \le \|\gamma'(t)\| \le M_\Delta$)) и 3 ($M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow[|\Delta|\to 0]{} 0$) очевидны,
т.к. $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i'(t))^2}$
Докажем, что $m_\Delta |\Delta| \le l(\gamma|_\Delta) \le M_\Delta |\Delta|$
Зафиксируем $\Delta = [t_0, t_1]$
$\exists \vec{M} = (M_1(\Delta), \ldots, M_m(\Delta))$
$\widetilde{\gamma}(t) : \Delta \to \mathbb{R}^m$
$\widetilde{\gamma}(t) := \vec{M} t$
Проверим $T : C_\gamma \to C_{\widetilde{\gamma}} : \gamma(t) \mapsto \widetilde{\gamma}(t)$ – растяжение
Пусть $p < q$
$\rho(\gamma(p), \widetilde{\gamma}(q)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i(p) - \widetilde{\gamma}_i(q))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\gamma_i'(\overline{p})(p-q))^2} \le |p-q| \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (M_i[p,q])^2} =$
$\|\vec{M}[p,q]\| |p-q| = l(\widetilde{\gamma}|_{[p,q]}) = \rho(\widetilde{\gamma}(p), \widetilde{\gamma}(q))$
Т.е. $l(\gamma|_{[p,q]}) \le l(\widetilde{\gamma}|_{[p,q]}) = \|\vec{M}_{[p,q]}\| |p-q| = \|\vec{M}_\Delta\| |\Delta|$
Аналогично $\|\vec{m}_\Delta\| |\Delta| \le l(\gamma|_\Delta)$
$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}\, t$, ч.т.д.
Пример
Посчитаем длину дуги эллипса
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Пусть $a > b$
Параметризуем его: $(x, y) = (a \sin t, b \cos t)$
$\gamma' = (a \cos t, -b \sin t)$
$\|\gamma'\| = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = a^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t), t = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
Тогда $L[0, T] = a \int_0^T \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}\, t$ – не берется(
Формула – Эллиптический интеграл II рода

Следствие
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \in C^1$
Тогда $l(\Gamma(f, [a, b])) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}\, x$
Доказательство
$\Gamma(f, [a, b])$ – носитель пути $x \mapsto (x, f(x))$
$\gamma(x) = (x, f(x)), \gamma' = (1, f'), \|\gamma'\| = \sqrt{1 + f'^2}$
Следствие 2
$r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, r \in C^1$ – функция в полярных координатах
$\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)$
Тогда $l(\phi) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} \, \mathrm{d}\, \phi$
Определение (способ определения длины пути)
Разобъем кривую на n частей "точками"$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$
Тогда $l(\gamma) = \sup\limits_{n, (t_i)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$
Определение
$f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$
Тогда *вариация* f на $[a, b]$ $\operatorname{Var}_a^b f = \sup\limits_{n, (t_i)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$
Если $f \in C^1, \operatorname{Var}_a^b f =$ длина пути $= \displaystyle\int_a^b |f'|$
Лемма
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \operatorname{Var}_a^b f$ – ограничена
Тогда $\exists\, p, q : [a, b] \to \mathbb{R}$ – монотонные такие, что $f \equiv p - q$
Доказательство
$f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$, где
$2p(x) = \operatorname{Var}_a^x f(x) + (f(x) - f(a))$
$2q(x) = \operatorname{Var}_a^x f(x) - (f(x) - f(a))$
Докажем, что p, q – возрастяют
$|f(y) - f(x)| \le \operatorname{Var}_x^y f$
Отображение $\Delta \mapsto \operatorname{Var}_\Delta f$ – а.ф.п.
Для $x < y$ $2(p(y) - p(x)) = \operatorname{Var}_x^y f + f(y) - f(x) \ge 0$
Т.е. $p(y) \ge p(x)$, ч.т.д.
Кстати, $p(x) + q(x) = \operatorname{Var}_a^x f$

1.7 Конечные ε-сети

Упражнение
Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$ – компактно $\Leftrightarrow K$ – секвенциально компактно
Определение
Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $D \subset X, \varepsilon > 0$
Множество $N \subset X$ – ε-сеть множества D, если $\forall\, x \in D\; \exists\, y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$
Если N – конечное, то N – конечная ε-сеть
Определение
D – сверхограниченное, если в X, если $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists$ конечная ε-сеть $N \subset X$
Лемма 1
D – сверхограниченно в $X \Leftrightarrow D$ – сверхограниченно в D (в себе)
Доказательство $\Leftarrow$ – тривиально
Доказательство $\Rightarrow$
Возьмем $\varepsilon > 0$
Берем $\frac{\varepsilon}{2}$ в $X : N = \{x_1, \ldots, x_n\}$
$\forall\, i B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ выберем какую-нибудь $y_i \in D$ (если такая есть)
Тогда $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – ε-сеть D
Лемма 2
$f : D \to Y, D$ – сверхограниченное
f – равномерно непрерывно
Тогда $f(D)$ – сверхограниченно
Доказательство
Равномерная непрерывность $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta\; \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$
Зафиксируем ε
Возьмем конечную δ-сеть в $D =: N$
$f(N)$ – конечная ε-сеть в Y
Лемма 3
D – сверхограниченно $\Leftrightarrow$ любая последовательность в D содержит фундаментальную подпоследовательность
Доказательство $\Rightarrow$
Возьмем последовательность (x_n)
$\exists$ конечная 1-сеть $\{y_1, \ldots, y_k\}$
Тогда $\exists\, i : B(y_i, 1)$ содержит бесконечно много членов последовательно-

сти
Пусть $x_k \in B(y_i, 1)$
Тогда $n_1 := k$
$\exists$ конечная $\dfrac{1}{2}$-сеть D, а значит конечная $\dfrac{1}{2}$-сеть $D \cap B(y_i, 1)$
Повторим действия
Получившаяся последовательность y_i фундаментальна
Доказательство $\Leftarrow$
Докажем от противного
Пусть $\exists\, \varepsilon > 0 :$ не существует конечной ε-сети
Возьмем x_1
Т.к. сети не существует, то $\exists\, x_2 \in D \setminus B(x_1, \varepsilon)$
$\exists\, x_3 \in D \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{2} B(x_i, \varepsilon)$
И т.д.
Построена последовательность $x_n \in D : \forall\, k, l\ \rho(x_k, x_l) \geq \varepsilon$ – не фундаментальная
Отсюда противоречие
Теорема
D – метрическое пространство
Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. D – компактно

2. D – сверхограниченное и полное

Доказательство $1 \Rightarrow 2$
D – компактно
Если D – неполное, то $\exists\, (x_n) \in D$ – фундаментальная, но не имеющая предела
Тогда $\forall\, (n_k)$ x_{n_k} – не имеет предела
(Т.к. фундаментальная последовательность сходится, если ее подпоследовательность сходится)
Это противоречит секвенциальной компактности
Если D – не сверхограниченное
Тогда $\exists\, (x_n)$, не содержащей фундаментальную
Но тогда нет и сходящейся, что противоречит секвенциальной компактности
Доказательство $2 \Rightarrow 1$

D – сверхограниченное и полное
Тогда любая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность (в силу полноты – сходящуюся)
Это секвенциальная компактность
Следствие
X – полное метрическое пространство $D \subset X$
Тогда эквивалентны следующие утверждения

1. D – компактно
2. D – сверхограниченное и замкнутое

Теорема о формулах центральных прямоугольников и трапеций
Пусть $f \in C^2[a,b], a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \delta = \max\limits_i(x_i - x_{i-1})$
$t = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$
Тогда выполняются две формулы

1. $|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}\,x$
2. $|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x - \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})| < \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}\,x$

При равномерном дроблении $\delta = \dfrac{b-a}{n}$:
$M := \max|f''(x)|, \dfrac{\delta^2}{8}\displaystyle\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}\,x \le \frac{M(b-a)^3}{n^2}$
Доказательство (только 2)
Пусть $\mathrm{d}\,g := g'(x)\,\mathrm{d}\,x$
$\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}(x - t_i) = f(x)(x-t_i)\Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x - t_i)\,\mathrm{d}\,x = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\,\mathrm{d}\,\psi$, где $\psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x), x \in [x_{i-1}, x_i]$
$\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \underbrace{\frac{1}{2}f'\psi\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}}_{0} - \frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi\,\mathrm{d}\,x$

Тогда $|\int_a^b \ldots - \sum_{i=1}^n \ldots| = |\sum_{i=1}^n (\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}))| =$
$|\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f''\psi| = \frac{1}{2}\int_a^b |f''|\underbrace{\psi}_{\le\frac{\delta^2}{4}}\mathrm{d}\,x \le \frac{\delta^2}{8}\int_a^b |f''|$

Подсказка: для прямоугольников $\psi = \begin{cases} (x-x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, t_i] \\ (x-x_i)^2, & x \in [t_i, x_i] \end{cases}$

Формула Эйлера-Маклорена

Пусть $f \in C^2[m,n], m,n \in \mathbb{Z}$

Тогда $\int_m^n f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{i=m}^{n}{}^{*} f(i) - \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\{x\}(1-\{x\})\,\mathrm{d}\,x$

$*$ – два крайних слагаемых – с коэффициентом $\frac{1}{2}$

Т.е. $\sum_{i=m}^{n}{}^{*} f(i) = \frac{1}{2}f(m) + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2}f(n)$

Доказательство

Из доказательства формулы для трапеции, где $\psi = (x-k)(k+1-x) = \{x\}(1-\{x\})$

Пример

$p > -1, f(x) = x^p$

Тогда $1^p + \ldots + n^p = \int_1^n x^p\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2}\int_1^n x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\,\mathrm{d}\,x =$
$\frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1}))$

Пояснение:

$0 \le \int_1^n x^{p-2}\{x\}(1-\{x\})\,\mathrm{d}\,x \le \int_1^n x^{p-2}\,\mathrm{d}\,x = \left.\frac{x^{p-1}}{p-1}\right|_1^n = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}$

При $p < 1$ $\frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(1)$

При $p > 1$ $\frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$

Замечание: при $p < -1$ слагаемые будут ограниченными, т.е. вся сумма будет $O(1)$

Пример 2

$f(x) = \frac{1}{x}$

$$1+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\underbrace{\int_1^n\frac{1}{x^3}\{x\}(1-\{x\})\,\mathrm{d}\,x}_{=:y_n,\text{возрастающая последовательность}}$$

y_n – возрастает

y_n – ограниченная

$$y_n\leq\frac{1}{4}\int_1^n\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{8}(-\frac{1}{x^2})\Big|_1^n=\frac{1}{8}-\frac{1}{8n^2}<\frac{1}{8}$$

Тогда $1+\ldots+\dfrac{1}{n}=\ln n+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+y_n}_{\text{имеет предел}\gamma\in[\frac{1}{2},\frac{5}{8}]}=\ln n+\gamma+o(1)$

$\gamma\approx 0.57\ldots$ – постоянная Эйлера

Пример 3

$f(x)=\ln x$

$$\ln 1+\ldots+\ln n=\int_1^n\ln x\,\mathrm{d}\,x+\frac{\ln n}{2}\underbrace{-\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x^2}\{x\}(1-\{x\})\,\mathrm{d}\,x}_{x_n}=n\ln n-$$

$$n+\frac{\ln n}{2}+x_n$$

x_n монотонная и ограниченная

Тогда $x_n\to C$

Отсюда $n!=n^ne^{-n}\sqrt{n}e^{C+o(1)}\to C_1n^ne^{-n}\sqrt{n},C_1=e^C$

Найдем C_1

Формула Валлиса

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\sin x\,\mathrm{d}\,x=\underbrace{-\sin^{n-1}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-$$

$$\sin^2 x)\,\mathrm{d}\,x=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

$$I_0=\frac{\pi}{2},I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}\,x=1$$

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n-\text{ четное}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n-\text{ нечетное}\end{cases}$$

Рассмотрим на $[0,\dfrac{\pi}{2}]:\ \sin^{2k+1}x\leq\sin^{2k}x\leq\sin^{2k-1}x$

Проинтегрируем: $\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$

$\underbrace{(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2 \frac{1}{2k+1}}_{\alpha_k} \leq \frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2k}(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2}_{\beta_k}$

$\beta_k - \alpha_k = (\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}) = \underbrace{(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2 \cdot \frac{1}{2k+1}}_{\leq \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2k} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{}$
0

Тогда $\lim\limits_{k\to+\infty} (\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$

Замечание

$2b_k := (4k+3)(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!})^2$

$2c_k := \frac{4}{4k+1}(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!})^2$

Тогда $\alpha_k < \frac{b_k}{2} < \frac{c_k}{2} < \beta_k$

При этом $b_k \uparrow, c_k \downarrow$

$c_k - b_k = c_k \frac{1}{4(2k+1)^2}$

$\pi = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty}(1 + \frac{1}{4k^2-1})}{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}}$

По формуле Валлиса $\sqrt{\pi} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$
$\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k^k e^{-k}\sqrt{k})^2 C_1^2}{(2k)^{2k} e^{-2k}\sqrt{2k}C_1} = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$

Отсюда $C_1 = \sqrt{2\pi}$

Тогда $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n} e^{2\pi}$ – формула Стирлинга

2 Выпуклость

Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется выпуклым, если

$\forall\, x, y \in A\ [x, y] \subset A$,

где $[x, y] = \{x + t(y - x), y \in [0, 1]\} = \{\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}$ – отрезок прямой, содержащей x, y

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Если $\forall\, x, y \in \langle a, b\rangle\ \forall\, \alpha \in [0, 1]\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, то f – выпуклая (выпуклая вниз) на $\langle a, b\rangle$

Если $\forall\, x, y \in \langle a, b\rangle\ \forall\, \alpha \in [0, 1]\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, то f – вогнутая (выпуклая вверх) на $\langle a, b\rangle$

Примеры

e^x – выпуклая

x^2 – выпуклая

Замечание

f – выпуклая $\Leftrightarrow$ любая хорда(отрезок, соединяющий две точки графика) расположена нестрого выше графика $\Leftrightarrow$ надграфик выпуклый

Надграфиком f на $\langle a, b\rangle$ называется $\{(x, y) : x \in \langle a, b\rangle, y \ge f(x)\}$

Определение

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Если $\forall\, x, y \in \langle a, b\rangle\ \forall\, \alpha \in (0, 1)\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \lesseqgtr \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$, то f – строго выпуклая/вогнутая на $\langle a, b\rangle$

Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

Тогда эквивалентны:

1. f выпуклая на $\langle a, b\rangle$
2. $\forall\, x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b\rangle\ \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

Доказательство $\Rightarrow$

Докажем первое неравенство

$x_2 = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}x_3$

Тогда неравенство 1 $\Leftrightarrow f(x_2) \le f(x_1)\dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + f(x_3)\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$

При $\alpha = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, 1 - \alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ получаем знакомое неравенство

Второе неравенство аналогично

Доказательство $\Leftarrow$

Очевидно из предыдущего доказательства

Следствие

f строго выпукла $\Leftrightarrow$ строгое неравенство в теореме

Замечание

Если f, g – выпуклые на $\langle a, b\rangle$, то $f + g$ – выпуклая

f – выпуклая, то $-f$ – вогнутая

Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f – выпуклая на $\langle a, b\rangle$

Тогда $\forall\, x \in (a, b)\ \exists\, f'_+(x), f'_-(x)$ – конечные

и $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \le x_2\ f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) < \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2)$

Доказательство

Сделать предельный переход в лемме о 3 хордах

$g(\xi) := \dfrac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1}, \xi \in (a, b) \setminus \{x_1\}$

$g(\xi) \uparrow$ по лемме о 3 хордах

При $\xi \in (x_1, x_2)$

Т.к. функция монотонна, $\exists \lim\limits_{\xi \to x_1 + 0} g(\xi)$

Возьмем $\xi_0 \le \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \xi_3 < x_2 < \xi_4 \le \xi_5$

Из лемм о трех хордах(средние неравенства) и монотонности(крайние неравенства):

$$\frac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1} \le \frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1} \le \frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(\xi_3) - f(x_2)}{\xi_3 - x_2} \le \frac{f(\xi_4) - f(x_2)}{\xi_4 - x_2} \le \frac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$$

Пусть $\xi_1 \to x_1 - 0, \xi_2 \to x_1 + 0, \xi_3 \to x_2 - 0, \xi_4 \to x_2 + 0$

Отсюда $C_0 \le f'_-(x_1) \le f'_+(x_1) \le \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'_-(x_2) \le f'_+(x_2) \le C_5$,

где $C_0 = \dfrac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1}, C_5 = \dfrac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$

Отсюда производные конечные(ограничены C_0 и C_5)

Воспоминания о прошлом семе

Если $\exists\, f'_+(x_0)$, то f – непрерывна справа в x_0

Следствие

f – выпуклая на $\langle a, b\rangle$

Тогда она непрерывна на (a, b)

(т.к. у нее есть левосторонние и правосторонние производные, то она непрерывна слева и справа, т.е. непрерывна)

Контр-пример для $[a, b]$

$f(1) = 2$
$f(-1) = 2$
$f(x) = x^2, x \in (a, b)$
Функция выпукла, но не непрерывна на $[a, b]$
Теорема
f – дифференцируема на $\langle a, b \rangle$
Тогда f – выпуклая вниз на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$ график расположен не ниже любой касательной, т.е. $\forall\, x_0, x \in \langle a, b \rangle f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Доказательство $\Rightarrow$
Требуемое неравенство есть в предыдущей теореме
Доказательство $\Leftarrow$
Возьмем $x_1 < x_0 < x_2$
Тогда $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$
По лемме о трех хордах f – выпуклая
Определение
Пусть имеется выпуклая фигура $A \subset \mathbb{R}^2$
$b \in A$ - граничная точка
Прямая $l : b \in l$ – опорная прямая, если A полностью содержится в одной из полуплоскостей, образованных прямой
Утверждение
f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$
Тогда $\forall\, x \in \langle a, b \rangle$ через $(x, f(x))$ можно провести опорную прямую к надграфику f
(для $x \in (a, b)$ есть односторонняя дифференцируемость, можем провести одностороннюю касательную)
(для $x = a$ и $x = b$ можем провести вертикальные прямые или касательные, если односторонние производные есть и конечны)
Утверждение 2
Если $A \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая и ограниченная выпуклая фигура, то через каждую граничную точку можно провести опорную прямую
Доказательство
Возьмем точку b
Докажем, что для нее можно провести опорную прямую
Для этого выберем оси X, Y так, чтобы проекция b на X была внутренней точкой проекции фигуры на X
Теперь определим функцию $f(x) := \inf(y : (x, y) \in A)$ – нижнюю часть границы фигуры

Данная функция выпуклая, а значит в точке b к ней можно провести опорную прямую

Замечание

f – выпуклая на $\langle a, b\rangle$

Тогда f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$ всюду, кроме не более чем счетного множества точек (возможно, пустого)

Доказательство

Пусть E – множество точек, где не существует производной

Но существуют $f'_-(x) < f'_+(x)$

Тогда $\forall\, x_1 < x_2 \in E$ $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \le f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$

Тогда для $x \in E$ построим отображение $q(x) \in (f'_-(x), f'_+(x)) \cap \mathbb{Q}$

$q : E \to \mathbb{Q}$ – инъекция

Отсюда E не более чем счетно

Теорема (дифференциальный критерий выпуклости)

1. f – непрерывна на $\langle a, b\rangle$, дифференцируема на (a, b)
   Тогда f – выпукла (строго выпукла) $\Leftrightarrow$ f' возрастает (строго возрастает)
   Доказательство $\Rightarrow$
   По теореме об односторонней дифференцируемости $f'_-(x_1) \le f'_-(x_2)$ при $x_1 < x_2$
   ($f'_- = f'$ из дифференцируемости)
   Знак строгий, если f строго выпукла(смотри доказательство теоремы)
   Доказательство $\Leftarrow$
   Проверим лемму о трех хордах
   $x_1 < x_2 < x_3$
   Тогда $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi_1), x_1 < \xi_1 < x_2$ – по т. Лагранжа
   $\dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(\xi_2), x_2 < \xi_2 < x_3$
   Из возрастания $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ (при строгом возрастании знак $<$)

2. f – непрерывна на $\langle a, b\rangle$, дважды дифференцируема на (a, b)
   Тогда f – выпукла $\Leftrightarrow$ $f'' \ge 0$
   Доказательство
   f' - возрастает $\Leftrightarrow$ $f'' \ge 0$

Пример 1

При $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$
При $x = 0 \vee x = \dfrac{\pi}{2}$ достигается равенство
Доказательство
$(\sin x)' = \cos x$ – строго убывает на промежутке
Тогда функция строго вогнутая на промежутке
Отсюда значение функции строго выше хорды, соединяющей $(0, 0)$ и $(\dfrac{\pi}{2}, 1)$ (ее уравнение $y = \dfrac{2}{\pi} x$)

3 Верхний и нижний предел

Определение
Частичный предел последовательности = предел вдоль подпоследовательности
Пример
$x_n = (-1)^n$
$-1, 1$ – частичные пределы x_n
Пример
$\forall\, a \in [-1, 1]\ \exists\, n_k : \sin n_k \to a$
Определение 2
x_n – вещественная последовательность
$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$ – верхняя огибающая
$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$ – нижняя огибающая
Верхний предел $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
Нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$
Замечание

1. $y_n \geq y_{n+1} \geq \dots, z_n \leq z_{n+1} \leq \dots$
2. $\forall\, n\ z_n \leq x_n \leq y_n$
3. При изменении конечного числа x_n изменяется конечное число y_n, z_n

Пример

1. $x_n = (-1)^n$
   $\varlimsup x_n = 1, \varliminf x_n = -1$

2. $x_n = (1 + (-1)^n)n$
   $\overline{\lim}\, x_n = +\infty, \underline{\lim}\, x_n = 0$

Свойства

1. $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$

2. $x_n \le \widetilde{x}_n$
   Тогда $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, \widetilde{x}_n$
   $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, \widetilde{x}_n$

3. $\forall\, \lambda \ge 0$ $(0 \cdot \infty =: 0)$
   $\overline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda\, \overline{\lim}\, x_n$
   $\underline{\lim}\, \lambda x_n = \lambda\, \underline{\lim}\, x_n$

4. $\forall\, \lambda < 0$
   $\overline{\lim}\, \lambda x_n = -\lambda\, \underline{\lim}\, x_n$
   $\underline{\lim}\, \lambda x_n = -\lambda\, \overline{\lim}\, x_n$

5. $\overline{\lim}(x_n + \widetilde{x}_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, \widetilde{x}_n$
   $\underline{\lim}(x_n + \widetilde{x}_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, \widetilde{x}_n$
   (если сумма в правой части имеет смысл)

6. $t_n \to l \in \mathbb{R}$
   Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim}\, x_n + l$
   Доказательство
   $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_0\ \forall\, k > N_0\ x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
   Возьмем $\sup\limits_{k \ge N}$ для некого $N > N_0$
   $y_N + l - \varepsilon < \sup\limits_{k \ge N}(x_k + t_k) < y_n + l + \varepsilon$
   Возьмем предел $N \to +\infty$
   $\overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon \le \overline{\lim}(x_k + t_k) \le \overline{\lim}\, x_n + l - \varepsilon$

7. $t_n \to l > 0, l \in \mathbb{R}$
   Тогда $\overline{\lim}\, t_n x_n = l\, \overline{\lim}\, x_n$

Техническое описание верхнего предела

1. $\overline{\lim}\, x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ – не ограничено сверху

2. $\overline{\lim}\, x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \to -\infty$

3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A + B$
   $A : \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall n > N \; x_n < l + \varepsilon$
   $B : \forall \varepsilon > 0 \; \forall N \; \exists n > N : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство 1
Очевидно в обе стороны
Доказательство 2 $\Rightarrow$
$x_n \le y_n \to -\infty \Rightarrow x_n \to -\infty$
Доказательство 2 $\Leftarrow$
$x \to -\infty \Leftrightarrow \forall A \; \exists N : \; \forall n > N \; x_n < A$ (а значит $y_n \le A$)
Отсюда $y_n \to -\infty$
Доказательство 3 $\Rightarrow$
$y_n \downarrow, l = \lim y_n = \inf y_n$
Возьмем $\varepsilon > 0$
Тогда $\exists N : y_N < l + \varepsilon \Rightarrow \forall n > N x_n < l + \varepsilon$
Отсюда A – доказано
$\forall N \; y_n > l - \varepsilon \Rightarrow \exists n > N : l - \varepsilon < x_n \le y_N$
Доказательство 3 $\Leftarrow$
$A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \ge N \; y_n \le l + \varepsilon$
$B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n \ge N \; l - \varepsilon \le y_n$
Отсюда $y_n \to l$
Теорема
$(x_n) \in \mathbb{R}$
Тогда $\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n (= \lim x_n)$
Доказательство $\Rightarrow$

1. $\lim x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \le \overline{\lim} x_n$
2. $\lim x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \ge \underline{\lim} x_n$
3. $\lim x_n = l \in \mathbb{R}$
   Тогда из A и B $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$

Доказательство $\Leftarrow$
$z_n \le x_n \le y_n$
Тогда $\underline{\lim} x_n \le \lim x_n \le \overline{\lim} x_n$
Теорема о характеризации частичных пределов
$(x_n) \in \mathbb{R}$

1. Если l – частичный предел x_n (существует по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса), то $\underline{\lim} x_n \le l \le \overline{\lim} x_n$

Доказательство
$z_{n_k} \le x_{n_k} \le y_{n_k}, k \to +\infty$
$\underline{\lim}\, x_n \le l \le \overline{\lim}\, x_n$

2. $\exists\, x_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n, \exists\, x_{m_k} \to \underline{\lim}\, x_n$
Доказательство для $\overline{\lim}\, x_n$
Если $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, то x_n не ограничена сверху
Если $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$, то $\lim x_n = -\infty$
Если $\overline{\lim}\, x_n = l$, то по A, B:
$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_k : l - \dfrac{1}{k} < x_{n_k} < l + \dfrac{1}{k}$
Будем выбирать $n_{k+1} > n_k$
Тогда $x_{k_k} \to l$

Пример
$\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$
$\forall\, l \in (-1, 1)\ \exists\, n_k : \sin n_k \to l$
Замечание
И множество $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$ плотно на $[-1, 1]$
Доказательство
$\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m \ne n\ \ \sin n \ne \sin m$
Т.е. невозможно $n = m + 2\pi k, \pi - m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
Будем двигаться по окружности с шагом $l_1 = 1$
Движение с шагом $6l_1$ равносильно движению с шагом $l_2 := |6l_1 - 2\pi|$ в противоположную сторону
Т.о. мы научились двигаться с шагом l_2
Будем по индукции уменьшать l_i
Пусть $|ml_i| < 2\pi, |(m+1)l_i| > 2\pi, m \in \mathbb{N}$
Тогда $l_{i+1} := \min(2\pi - ml_i, (m+1)l_i - 2\pi)$
Заметим, что т.к. $2\pi \in (ml_i, (m+1)l_i)$, то $l_{i+1} \le \dfrac{l_i}{2}$
Рассмотрим отрезок в $[-1, 1]$
Ему соответствует отрезок $[a, b], a, b \in [0, 2\pi)$ на окружности
Пусть $l = b - a$
Подберем $l_k < l$
Тогда для некоторого $q \in \mathbb{N}\ ql_k \in [a, b]$
Т.о. $\sin ql_k$ будет лежать в нашем отрезке. Отсюда $\sin n$ плотно в $[-1, 1]$
Докажем, что $\forall\, \alpha \in [-1, 1]\ \exists\, q_i : \lim q_i \to \alpha$
Возьмем некоторую окрестность α

Будем генерировать последовательность, лежащую в этой окрестности, и сдвигать границу

4 Несобственный интеграл

Определение

1. $f : [a, b) \to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ – допустимая, если $\forall\, A \in (a, b)$ $f\Big|_{[a,A]}$ – кусочно непрерывная
2. $\Phi(A) = \displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}\,x$
   Если $\exists \lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то он называется несобственным интегралом f на $[a, b)$
   Отозначение: $\displaystyle\int_a^{\to b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$

Если $\nexists \lim \Phi(A)$ – несобственный интеграл не существует
Если $\lim\limits_{A \to b-0} \Phi(A)$ – конечный, то интеграл сходится
Если $\lim\limits_{A \to b-0} = \infty$ – интеграл расходится
Аналогично определяем $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty} f$$

Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty$$

Пример

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{A \to +0} \ln A = +\infty$$

$f : (a, b) \to \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq +\infty$
$x_1 < \ldots < x_n \in (a, b), n$ – нечетное
Пусть f допустимо на каждом из промежутков $(a, x_1], [x_1, x_2), (x_2, x_3], [x_3, x_4), \ldots, [x_n, b)$
Тогда $\displaystyle\int_a^b f = \int_{\to a}^{x_1} f + \int_{x_1}^{\to x_2} f + \int_{\to x_2}^{x_3} f + \ldots + \int_{x_n}^{\to b} f$

Если хотя бы один интеграл не существует или сумма некорректная (есть $+\infty$ и $-\infty$), то интеграл расходится

Пример

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x = \underbrace{\int_{-1}^{\to 0} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x}_{-\infty} + \underbrace{\int_{\to 0}^{1} f}_{+\infty}$$

Данный интеграл расходится

Свойства

1. Критерий Больцано-Коши о сходимости несобственного интеграла
   f – допустимая на $[a, b)$ $-\infty < a < b \leq +\infty$
   Тогда $\displaystyle\int_{a}^{\to b} f$ – сходится $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta \in (a, b) :\ \forall\, A, B \in (\delta, b) \mid \int_{A}^{B} f \mid < \varepsilon$
   Доказательство
   $\exists \lim\limits_{R \to b-0} \Phi(R) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (a, b)\ \forall\, A, B \in (\delta, b)\ |\Phi(A) - \Phi(B)| < \varepsilon$ – критерий Больцано-Коши
   $\displaystyle\int f$ – расходится $\Rightarrow \exists\, A_n, B_n \to b - 0 : \displaystyle\int_{A_n}^{B_n} f \not\to 0$
   Пример
   $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x, A_n = n, B_n = 2n$
   Тогда $\displaystyle\int_{n}^{2n} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x \geq \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$ – расходится
   Пример
   $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x, A_n = \frac{1}{2n}, B_n = \frac{1}{n}$
   $\displaystyle\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}\, x \geq 2n \frac{1}{2n} = 1$

2. Аддитивность по промежутку
   f – допустима $[a, b), c \in (a, b)$
   Тогда $\displaystyle\int_{a}^{\to b} f, \int_{c}^{\to b} f$ сходятся/расходятся одновременно
   И в случае сходимости $\displaystyle\int_{a}^{\to b} f = \int_{a}^{c} f + \int_{c}^{\to b} f$
   Следствие

Если $\int_a^{\to b} f$ – сходится, то $\int_A^{\to b} f \xrightarrow[A\to b-0]{} 0$

3. f, g – допустимы на $[a, b)$, $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ – сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$

   Тогда $\lambda f, f \pm g$ – допустимы $\int_a^{\to b} \lambda f = \lambda \int_a^{\to b}, \int_a^{\to b} (f+g) = \int_a^{\to b} f + \int_a^{\to b} g$

4. $\int_a^{\to b} f, \int_a^{\to b} g$ – существуют в $\overline{\mathbb{R}}, f \leq g$

   Тогда $\int_a^{\to b} f \leq \int_a^{\to b} g$

5. f, g – дифференцируемые на $[a, b)$
   f', g' – допустимые на $[a, b)$
   Тогда* $\int_a^{\to b} fg' = fg\Big|_a^{\to b} - \int_a^{\to b} f'g$, где $fg\Big|_a^{\to b} = (\lim\limits_{B\to b-0} fg(b)) - f(a)$
   * – если здесь существуют два предела из трех, то существует и третье и равенство выполняется

6. $\phi : [\alpha, \beta) \to \langle A, B\rangle, \phi \in C^1$
   Пусть $\exists\, \phi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$
   $f \in C\langle A, B\rangle$
   Тогда* $\int_\alpha^\beta (f \circ \phi)\phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\to\phi(\beta-0)} f$
   * – если существует один интеграл, то существует и другой
   Замечание
   Это означает, что мы можем начать вычислять интеграл, не зная, существует ли он. Тогда если посчитать его удалось, то он существует

Т.к. свойства собственных и несобственных интегралов одинаковые, то с этого момента стрелочку писать не будем

Лемма об интегрировании асимптотических равенств

$f, g \in C[a, b), g \geq 0, \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,x = +\infty$

$F(x) := \int_a^x f, G(x) := \int_a^x g, x \in [a,b)$
Тогда при $x \to b-0$ из $f = O(g)/f = o(g)/f \sim g$
Следует $F = O(G)/F = o(G)/F \sim G$
Доказательство

1. $f = O(g)$
   $\exists\, M\ \exists\, x_0 : \forall\, x \in [x_0, b)\ |f(x)| \le M|g(x)|$
   Пусть $\int_a^{x_0} |f| = C_1$
   Выберем $x_1 \in (x_0, b)$ такую, что $\int_{x_0}^{x_1} |g| = \alpha > 0$
   При $x > x_1$ $|F(x)| = |\int_a^x |f|| = \int_a^{x_0} |f| + \int_{x_0}^{x_1} |f| \le C_1 + M \int_{x_0}^x g \le \frac{C_1}{\alpha} \int_{x_0}^{x_1} g + M \int_{x_0}^x g \le (\frac{C_1}{\alpha} + M) \int_a^x g = (\frac{C_1}{\alpha} + M) G(x)$
2. Аналогично
3. Из эквивалентности $F(x) \to +\infty$
   Тогда $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{F}{G} = \lim\limits_{x \to b-0} \frac{f}{g} = 1$

Лемма
Пусть ϕ_n – шкала асимптотического разложения при $x \to b-0$ на $[a,b)$
$\phi_n \in C[a,b), \phi_n \ge 0$
$\Phi_n := \int_x^b \phi_n(x)$ (считаем, что $\forall\, n$ – сходится)
Тогда

1. Φ_n – шкала
2. $f \in C[a,b), F(x) = \int_x^b f$ – сходится
   $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x) + o(\phi_n)$
   Тогда $F = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_k + o(\Phi_n)$

Доказательство

1. По правилу Лопиталя
   $\forall\, n \Phi_n(x) \xrightarrow[x\to b-0]{} 0$
   $\lim \dfrac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = [\dfrac{0}{0}] = \lim \dfrac{\Phi'_{n+1}}{\Phi'_n} = \lim \dfrac{-\phi_{n+1}}{-\phi_n} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{F(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_k}{\Phi_n(x)} = [\dfrac{0}{0}] = \lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k}{\phi_n(x)} = 0$

4.1 Признаки сходимости несобственного интеграла

Теорема
$f \geq 0$

1. f – допустима на $[a,b), f \geq 0, \Phi(A) = \displaystyle\int_a^A f$
   Тогда $\displaystyle\int_a^b f$ – сходится $\Leftrightarrow \Phi$ – ограничена на $[a,b)$
   Доказательство
   $\lim\limits_{A\to b-0} \Phi(A) = [\Phi\uparrow] = \sup \Phi(A)$
2. *Признак сравнения*
   f, g – допустимы на $[a,b), f, g \geq 0$
   (a) Пусть $f \leq q$
   Тогда если $\displaystyle\int_a^b g$ – сходится, то и $\displaystyle\int_a^b f$ – сходится
   Если $\displaystyle\int_a^b f$ – расходится, то и $\displaystyle\int_a^b g$ – расходится
   (b) Пусть $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f}{g} = l < +\infty$
   Тогда если $\displaystyle\int_a^b g$ – сходится, то и $\displaystyle\int_a^b f$ – сходится
   (c) Пусть $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f}{g} = m > 0$ (вероятно $m = +\infty$)
   Тогда если $\displaystyle\int_a^b f$ – сходится, то и $\displaystyle\int_a^b g$ – сходится

Замечание
Если $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f}{g} \in (0, \infty)$, то интегралы f, g сходятся одновременно
Доказательство

(a) $\Phi(A) = \displaystyle\int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$
$f \leq g \Rightarrow \Phi(A) \leq \Psi(A)$, обе $\uparrow$
$\displaystyle\int_a^b g$ – сходится $\Rightarrow \Psi$ – ограничена $\Rightarrow \Phi$ ограничена $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f$ – сходится
$\displaystyle\int_a^b f$ – расходится $\Rightarrow \Phi$ – не ограничена $\Rightarrow \Psi$ не ограничена $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g$ – расходится

(b) $\dfrac{f}{g} \to l < L < +\infty$
Тогда $\exists\, c \in [a, b): \ f \leq Lg$ на $[c, b)$
Т.е. $\displaystyle\int_a^b g$ – сходится $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b Lg$ – сходится $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f$ – сходится

(c) Аналогично

Пример
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}\,x$ – при $p > 1$ сходится, иначе расходится
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}\,x$ – при $p < 1$ сходится, иначе расходится
(Чтобы не путаться, можно посмотреть, что происходит в $p = 1$)
Метод "удавить логарифм"
Пусть есть интеграл $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$
(Нижняя граница не важна)
Определим, сходится ли он

1. $\alpha > 1, \alpha = 1 + 2a, a > 0$
   Тогда $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{1+a}} \dfrac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$
   Утверждается, что $x^a (\ln x)^\beta \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (упражнение на правило Лопиталя)

Тогда $\exists\, x_0 : \forall\, x > x_0\ x^a (\ln x)^\beta > 1$
А значит с некоторого места $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \le \dfrac{1}{x^{1+a}}$
Тогда выражение сходится по признаку сходимости

2. $\alpha < 1, \alpha = 1 - 2a, a > 0$
Тогда $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{1-a}} \dfrac{1}{x^{-a} (\ln x)^\beta} > \dfrac{1}{x^{1-a}}$
$x^{-a} (\ln x)^\beta \to +0$
$\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} > \dfrac{1}{x^{1-a}}$
Тогда выражение расходится по признаку сходимости

3. $\alpha = 1$
$\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, x}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\, y}{y^\beta}$
При $b > 1$ – сходится
При $b \le 1$ – расходится

Определение

Гамма-функция Эйлера $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}\, x, t > 0$
$\sqsupset\ g(t, x) = x^{t-1} e^{-x}$

1. Определим сходимость $g(t, x)$ в $x \to +0$
$x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1}$ при $x \to +0$ – сходится при $t > 0$
Определим сходимость $g(t, x)$ в $x \to +\infty$
$x^{t-1} e^{-x} = \underbrace{x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} e^{-\frac{x}{2}} \le e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

2. $\Gamma(t)$ выпукла на $(0, +\infty)$:
$\forall\, x > 0\ g(t, x)$ – выпуклая
$g(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2, x) \le \alpha g(t_1, x) + (1-\alpha) g(t_2, x)$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} g(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2, x) \le \alpha \int_0^{+\infty} g(t_1, x) + (1-\alpha) \int_0^{+\infty} g(t_2, x)$
Отсюда $\Gamma(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) \le \alpha \Gamma(t_1) + (1-\alpha) \Gamma(t_2)$
Следствие – Γ дифференцируема на $(0, +\infty)$
$\Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} \,\mathrm{d}\, x = -x^t e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}\, x$

3. $\Gamma(1) = 1$
   Тогда $\Gamma(n+1) = n!$
   Следствие
   $\Gamma(t) = \dfrac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t\to+0}{\sim} \dfrac{1}{t}$

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \,\mathrm{d}\, x \underset{x=y^2}{=} 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \,\mathrm{d}\, y}_{\text{интеграл Эйлера-Пуассона}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sqrt{\pi}$

   Лемма
   $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \,\mathrm{d}\, x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
   Доказательство
   $1 - y^2 \le e^{-y^2} \le \dfrac{1}{1+y^2}$ – переписанное $e^t \ge 1 + t$
   $\int_0^1 (1-y^2)^n \,\mathrm{d}\, y \le \int_0^1 e^{-ny^2} \,\mathrm{d}\, y \le \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} \,\mathrm{d}\, y \le \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}\, y}{(1+y^2)^n}$
   $\int_0^1 (1-y^2)^n \,\mathrm{d}\, y \underset{y=\cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} \,\mathrm{d}\, t =: w_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$
   $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}\, y}{(1+y^2)^n} \underset{y=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2} \,\mathrm{d}\, t = w_{2n-2} = \dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \dfrac{\pi}{2}$
   $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} \le \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} \,\mathrm{d}\, y \le \dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \dfrac{\pi}{2} \sqrt{n}$
   По формуле Валлиса $\dfrac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to \sqrt{\pi}$
   $\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
   $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \dfrac{\pi}{2} \sqrt{n} = \dfrac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
   $\sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} \,\mathrm{d}\, y \underset{z=\sqrt{n}y}{=} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \,\mathrm{d}\, z \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

//todo continue `https://www.youtube.com/live/tYOFdAXEMx4?feature=share&t=4738`

5 Несколько классических неравенств

Неравенство Йенсена
f – выпуклая на $\langle a,b\rangle$
Тогда $\forall\, a_1,\dots,a_n \in \langle a,b\rangle\ \forall\, \alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0 : \sum\limits_i \alpha_i = 1\ f(\sum\limits_i \alpha_i x_i) \leq \sum\limits_i \alpha_i f(x_i)$
Доказательство
$x^* := \sum\limits_i \alpha_i x_i$
Тогда $x^* \leq \sum\limits_i \alpha_i (\max\limits_i x_i) = \max\limits_i x_i$
Аналогично $x^* \geq \min\limits_i x_i$
Тогда $x^* \in \langle a,b\rangle$
Проведем в x^* опорную прямую $y = kx + b$
$f(x^*) = kx^* + b = k\sum\limits_i \alpha_i x_i + b\sum\limits_i \alpha_i = \sum\limits_i \alpha_i(kx_i + b) \leq \sum\limits_i \alpha_i f(x_i)$ – из выпуклости
Заметим, что в a, b последний переход может не выполняться, если опорная прямая вертикальная. Но тогда $x^* = \max\limits_i x_i = \min\limits_i x_i \Rightarrow \forall\, x_i : \alpha_i = 0 \vee x^* = x_i$, что доказывается тривиально
Пример
Неравенство Коши
$\forall\, a_1,\dots,a_n > 0\ \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$
Доказательство
$\ln(\frac{1}{n}a_1 + \ldots + \frac{1}{n}a_n) \geq \frac{1}{n}(\ln a_1 + \ldots + \ln a_n)$
Применим неравенство для вогнутых функций
Интегральное неравенство Йенсена
f – выпуклая на $\langle A,B\rangle$
$\phi : [a,b] \to \langle A,B\rangle$ – непрерывная
$\lambda : [a,b] \to [0,\infty), \int_a^b \lambda(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$ – непрерывная
Тогда $f(\int_a^b \lambda(x)\phi(x)\,\mathrm{d}\,x) \leq \int_a^b \lambda(x) f(\phi(x))$
Доказательство
Докажем для случая $\lambda > 0$ в силу сложности доказательства в общем

случае

$x^* = \int_a^b \lambda(x)\phi(x)\,\mathrm{d}\,x \le \max\phi\int_a^b \lambda(x)\,\mathrm{d}\,x, \ge \min\phi\int_a^b \lambda(x)\,\mathrm{d}\,x$

Рассмотрим $y = kx + l$ – опорную прямую в x^*

$f(x^*) = kx^* + l = \int_a^b \lambda(k\phi + l) \le \int_a^b \lambda(x)f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,x$

Тут существует проблема, аналогичная предыдущей теореме. Но выкинуть все точки, где $\lambda = 0$ мы не можем, т.к. получившееся множество будет сложным

Пример (Продолжение)

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ – среднее арифметическое f на $[a, b]$

Тогда среднее геометрическое – это $\exp(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}\,x)$

Теорема

$\phi \in C[a, b], \phi > 0$

Тогда $\ln(\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}\,x) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\phi(x)\,\mathrm{d}\,x$

Доказательство

$f(t) = \ln t$ – вогнутая

Применим неравенство Йенсена: ϕ – это ϕ

$\lambda(x) = \frac{1}{b-a}$

Неравенство Гельдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

Заметим, что $\forall\, p > 1\ \exists\, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q$ – *сопряженный*

$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le (\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_i b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство

$f(x) = x^p, p > 1$ – выпуклая при $x > 0$

По неравенству Йенсена $(\sum_i \alpha_i x_i)^p \le \sum_i \alpha_i x_i^p$

$\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j^q}$. Тогда $\alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1$

$x_i := a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}}(\sum_j b_j^q)$

$(\sum_i \alpha_i x_i)^p = (\sum_i a_i b_i^{q-\frac{1}{p-1}})^p = (\sum_i a_i b_i)^p$

$\sum_i \alpha_i x_i^p = \sum_i \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} (\sum_j b_j)^p = \sum_i (a_i^p (\sum_j b_j^q)^{p-1}) = (\sum_i a_i^p)(\sum_j b_j^q)^{p-1}$

$(\sum_i a_i b_i)^p \leq (\sum_i a_i^p)(\sum_j b_j^q)^{p-1}$

Возведем в степень $\frac{1}{p}$

$\sum_i a_i b_i \leq (\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_j b_j^q)^{\frac{1}{q}}$

Замечание

В неравенстве Йенсена равенство достигается при $x_1 = \ldots = x_n$

Отсюда в неравенстве Гельдера $=$ достигается при $\forall\, i, j\ x_i = x_j \Leftrightarrow x_i^p = x_j^p = \lambda \Leftrightarrow a_i^p b_i^{-q} = a_j^p b_j^{-q} = \lambda \Leftrightarrow a_i^p = \lambda b_i^q$

Т.е. вектора $(\vec{a_i^p})_i \| (\vec{b_j^q})_j$

Замечание

$|\sum_i a_i b_i| \leq \sum_i |a_i b_i| \leq (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ – общий вид неравенства Гельдера

$a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

Равенство при $(\vec{a_i^p})_i \| (\vec{b_j^q})_j$

Интегральное неравенство Гельдера

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1, f, g \in C[a, b]$

Тогда $\int_a^b |fg| \leq (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство

$x_k := a + k\frac{b-a}{n}, k = 0 \ldots n$

$a_k := f(x_k)(\frac{b-a}{n})^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k)(\frac{b-a}{n})^{\frac{1}{q}}$

$\sum_k a_k b_k = \sum_k |f(x_k) g(x_k)| \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b |fg|$

$(\sum a_k^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_k |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n})^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

$(\sum_k b_k^q)^{\frac{1}{q}} \to (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

Замечание
При $p = 2$ неравенство Гельдера = КБШ
Неравенство Минковского
$p \geq 1, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$
Тогда $(\sum\limits_i |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum\limits_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_i |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
Это утверждение о том, что $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (\sum\limits_i |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ – норма в $\mathbb{R}^n$

Доказательство
Если $p = 1$, очевидно
Если $p > 1$:
Пусть $a_i, b_i > 0$
Тогда $\sum\limits_i a_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum\limits_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$
$\sum\limits_i b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum\limits_i b_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$
Тогда $(\sum\limits_i (a_i + b_i)^p)^1 \leq ((\sum\limits_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_i b_i^p)^{\frac{1}{p}})(\sum\limits_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$
$(\sum\limits_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum\limits_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_i b_i^p)^{\frac{1}{p}}$
Для произвольных a_i, b_i заметим, что $(\sum\limits_i |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum\limits_i (|a_i| + |b_i|)^p)^{\frac{1}{p}}$
Неравенство Минковского – интегральный вид
$f, g \in C[a, b], p \geq 1$
Тогда $(\int_a^b |f + g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g|^p)^{\frac{1}{p}}$
Доказательство: самостоятельно