Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Графы

1.1 Неориентированные графы

Определение

Неориентированный граф – множество вершин V и множество ребер $E \subset (V \times V \setminus \{(u,u)\})/_\sim$ (факторизованное отношением эквивалентности $\sim$: $(u,v) \sim (v,u)$)

Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро

$k := |P|$ или $k := \text{len}(P)$ – *длина пути*

Простой путь – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

Реберно-простой путь – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\exists P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$
  $\exists Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$
  $\exists R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$
  $P \sim R, P \sim Q$ – равны с точностью до отражения и циклического сдвига

- Пусть если в циклическом пути $\forall\, i\ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$, то циклический путь называется *корректным*

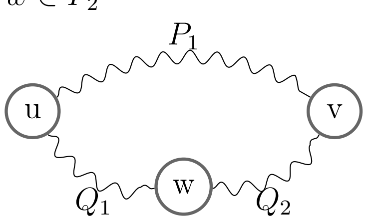
Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности $\sim$

Ациклический граф – граф без циклов

Определение
Пусть $\exists\, P : u_0 = u, u_k = v$. Тогда $u \rightsquigarrow v$ (отношение связанности путем)
Пусть $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$. Тогда $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$ – конкатенация пути
Теорема
Отношение $\rightsquigarrow$ в неориентированном графе – отношение эквивалентности
Определение
Класс эквивалентности по отношению $\rightsquigarrow$ – *компонента связности*
Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*
Определение
u, v – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из u в v
Теорема
Реберная двусвязность – отношение эквивалентности
Доказательство
Путь u (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность
Симметричность очевидна
Докажем транзитивность
Рассмотрим u, v, w, пары $(u, v), (v, w)$ реберно двусвязные
P_1, P_2 – пути между u, w
Рассмотрим случаи:

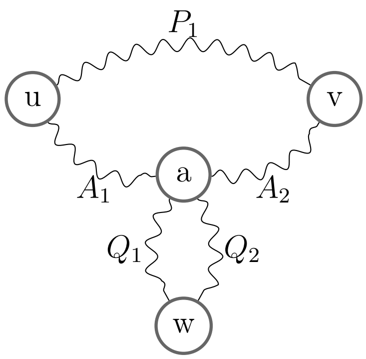
- $w = v \vee w = u$ – очевидно

- $w \in P_2$

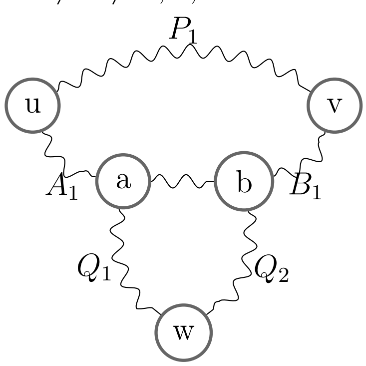
  Тогда $Q_2, P_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq v, u, w :$



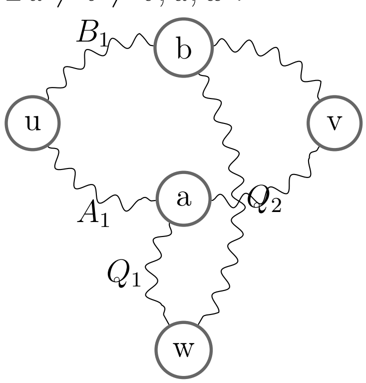
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w :$



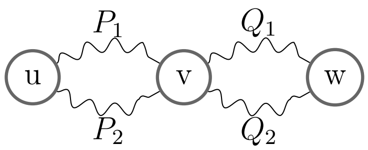
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w :$



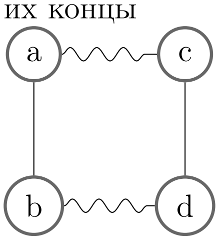
Тогда $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$ реберно не пересекаются

-

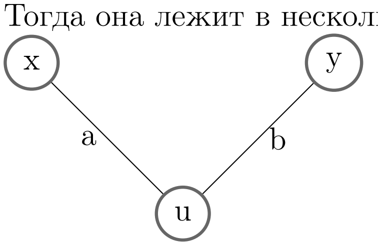


Тогда $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

Определение
Ребра ab, cd(не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы

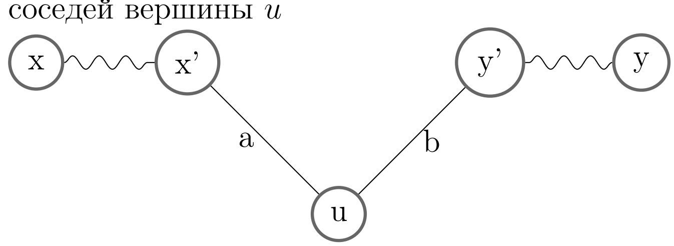


Теорема
Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности
Доказательство аналогично предыдущей теореме
Определение
Рассмотрим $A = \{a, b : ab$ – вершинно двусвязные$\}$ – *компоненту вершинной двусвязности (блок)*
Точка v – *точка сочленения*, если она лежит в нескольких блоках
Теорема
Вершина является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ Ее удаление увеличивает количество компонент связности
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть u – точка сочленения
Тогда она лежит в нескольких блоках:



a, b – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках
Тогда не существует пути $x \rightsquigarrow y$, не проходящего через u
Отсюда при удалении u x и y окажутся в разных компонентах
Доказательство $\Leftarrow$

Пусть при удалении u количество компонент увеличилось
Возьмем x и y такие, что до удаления u они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных
Тогда любой путь из x в y проходил через u
Выберем какой-то путь из x в y и возьмем на нем вершины x' и y' – соседей вершины u



Тогда ребра a и b вершинно не двусвязные
Определение
Мост – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности
Мост – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

1.2 Ориентированные графы

Определение
Ориентированный граф – множество вершин V и ребер $E \subset V \times V$ (разрешаем петли)
В ребре $w = uv$ $\operatorname{beg} w = u, \operatorname{end} w = v$
Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \ldots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро
Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$
Цикл – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига
Теорема
Если G – ациклический ориентированный граф, то $\exists\, \phi : V \to \{1, \ldots, n\}$: $uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$
(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)
Лемма

G – ациклический ориентированный граф
Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро
Доказательство теоремы
Докажем по индукции
Возьмем вершину, из которой не выходит ребро
Присвоим ей номер n
Удалим ее
Пронумеруем оставшиеся вершины
Определение
Симметризация G – граф $\overline{G}$ такой, что $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$
(Т.е. восприятие G как неориентированного графа (возможно, с петлями))
Компонента слабой связности – компонента связности в $\overline{G}$
Компонента сильной связности – компоненты, где существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$
Сильная связность – отношение эквивалентности

1.3 Деревья

Определение
Дерево – связный неориентированный граф без циклов
Теорема
G – граф, содержащий n вершин
Рассмотрим утверждения:

1. В нем $n-1$ ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связен

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево
Лемма
Пусть G – дерево, содержащее ≥ 2 вершины
Тогда $\exists$ вершина степени 1
(На самом деле их хотя бы две)
Доказательство
Возьмем вершину u_1. Если у нее степень 1, ч.т.д.
Иначе пойдем в ее соседа u_2. Если у него степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в соседа u_3, которого мы еще не посещали
Через не более n шагов мы придем в вершину u_i, все соседи которой уже посещены
Если u_i имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда u_i будет иметь степень 1

Доказательство 2

Рассмотрим самый длинный путь в графе
Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1
Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл
Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

Доказательство теоремы

$2 + 3 \Rightarrow 1$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$: Возьмем вершину степени 1
Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе $n - 2$ ребра

$1 + 2 \Rightarrow 3$

Пусть в графе k компонент связности
Если в i компоненте n_i вершин, то в ней $n_i - 1$ ребро
Тогда всего ребер в графе $\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = n - 1$
Отсюда $k = 1$

$1 + 3 \Rightarrow 2$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$ и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ацикличен
Если $n > 1$ и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше $\frac{2 * n}{2} = n$ – противоречие

Лемма о рукопожатии

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \lor e = vu] = \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \lor e = vu]}_{2} = 2|E|$$

Теорема
G – дерево $\Leftrightarrow \forall\, u, v\ \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$
Доказательство $\Rightarrow$
Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой $l_1 + l_2$ минимально
Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)
Тогда эти два пути образуют цикл
Доказательство $\Leftarrow$
Граф связен
Граф ацикличен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути
Отсюда это дерево
Теорема
G – связен $\Leftrightarrow$ G связен и любое ребро – мост
Определение
G – граф
H – получен удалением из G вершин и/или ребер
H – *подграф* G
Определение
G – граф
H – получен из G удалением вершин (и ребер, выходящих из них)
H – *индуцированный* подграф G
Определение G – граф
H – получен из G удалением ребер с сохранением связности
H – *остовный* подграф G
Теорема
У любого связного графа есть остовное дерево
Доказательство 1
Обойдем граф bfs-ом и получим дерево
Доказательство 2
Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер
Утверждается, что он будет деревом
Доказательство 3 (жадный алгоритм)
Будем удалять ребра, пока граф связен
Мы получим ацикличный связный граф

Научимся считать количество остовных деревьев

Рассмотрим матрицу $n \times n$:
На диагонали напишем степень вершины
В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0
Определение
Матрица Кирхгофа – матрица $n \times n$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$
Теорема
Пусть G – связный граф
Тогда количество остовных деревьев $G = \widehat{A_i j}$ $\forall i, j$ – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы A
Лемма 1
Рассмотрим *матрицу инцидентности* I_G
Это матрица $n \times m, m = |E|$
В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец
$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$
$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$
Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1
$(\overrightarrow{I_G})_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$
$(\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$
$\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T =$ матрица Кирхгофа

Лемма 2
Рассмотрим $\overrightarrow{I_G}$
Выберем $n - 1$ ребро
Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам
Удалим строку, соответствующую вершине u (u любая)

Мы получили матрицу $n-1 \times n-1$
Обозначим ее как B
Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $|B| = \pm 1$, иначе $|B| = 0$
Доказательство
Рассмотрим граф T, образованный всеми вершинами и выбранными ребрами
Докажем, что если T не дерево, то $|B| = 0$
Т.к. это не дерево и в нем $n-1$ ребро, то граф не связен
Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u
Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты
Утверждается, что сумма $= \mathbb{0}$
Отсюда матрица вырожденная
Докажем, что если T – дерево, то $|B| = \pm 1$
По лемме у дерева есть два листа
Тогда есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_1
Переставим строчку, соответствующую v, на первое место
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Т.к. v_1 – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Рассмотрим дерево T_2, полученное удалением v_1 из T
В нем есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_2
Переставим строчку, соответствующую v_2, на второе место
Т.к. v_2 – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место
Повторим действия
В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой ± 1
Отсюда определитель будет ± 1
Лемма 3 (Формула Коши-Бине)
Пусть даны матрицы $r \times s$ и $s \times r, r \le s$
$\det AB = \sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le s} \det A^{i_1 \ldots i_r} \det B_{i_1 \ldots i_r}, A^{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только столбцы $i_1 \ldots i_r, B_{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только строки $i_1 \ldots i_r$

Лемма 4
$\widehat{A_i i} = \det(\overrightarrow{I}_{G\text{без i строки}} \overrightarrow{I}^T_{G\text{без i столбца}})$

Т.к. $m = |E| \geq n-1$, применим лемму 3:
$\widehat{A_i j} = \det(\overrightarrow{I}_{G\text{без i строки}} \overrightarrow{I}_G^{T\text{без i столбца}}) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \overrightarrow{I}_{G\text{без i строки}}^{i_1 \ldots i_{n-1}} \det \overrightarrow{I}_{G i_1 \ldots i_{n-1}}^{T \text{ без i столбца}}}_{\text{1, если образует ост.д, иначе 0}}$

Отсюда $\widehat{A_i j}$ = кол-во остовных деревьев

1.4 Ориентированные деревья

Определение
Пусть G – ориентированный граф
Подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень
Обратное подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину
Теорема Тутта
Лапласиан графа G – матрица $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$ – позволяет искать исходящиие остовные корневые деревья
(Для входящих $\deg^+$ и $ji \in E$)
Количество остовных корневых деревьев с корнем i равно $\widehat{L(G)}_{ii}$

Определение
Пусть $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
Функциональный граф – граф $G : (i, f(i)) \in E$
В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья
Всего существует n^n функциональных графов
Число функциональных подграфов $= \prod\limits_{u \in v} \deg^- u$

1.5 Обход графа

Определение
Эйлеров путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз
Гамильтонов путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз

Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)

Теорема

G – Эйлеров $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и $\forall\, v\;\ \deg v$ – четное

Доказательство $\Rightarrow$

Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли

Остюда степени четные и компонента связности одна

Доказательство $\Leftarrow$

Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности

Докажем индукцией по числу ребер

Если ребер 0, доказано

Пусть ребер > 0

$//$todo

Теорема

G содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени

Доказательство

Если она одна, то начнем обход в ней

Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\forall\, v\;\ \deg^-(v) = \deg^+(v)$

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\deg^-(v) = \deg^+(v)$ для не более чем двух вершин a, b, а $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$ и $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$

Задача

Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\displaystyle\sum_{C\text{ – к. св. с ребрами}G} \max(\frac{\operatorname{odd}(C)}{2}, 1), \operatorname{odd}(C)$ – кол-во вершин нечетной степени в C

Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\displaystyle\sum_{C \text{ – к. св. с ребрами} G} \max(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1)$

BEST-Теорема

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов
$E = A \displaystyle\prod_{u \in V} (\deg^- u - 1)!$

1.6 Укладки графов

Утверждение

Компактные многообразия эквивалентны сфере «с ручками»
Пример: сфера с одной ручкой – тор, с двумя – «крендель»

Определение

Ориентируемое многообразие – поверхность с ручками
Задается числом – количество ручек

Определение

Укладка графа на поверхность A – инъективное отображение точек графа в точки на поверхности и ребер – в непересекающиеся кривые
$V : V_G \to A$ – инъекция
$e : E_G \to C_A$
$\phi \in C_A$ – путь
$\phi : [0, 1] \to A, \phi(0) = \text{beg}(e), \phi(1) = \text{end}(e)$
$\forall\, \phi_1, \phi_2\ \phi_1[0, 1] \cap \phi_2[0, 1] = 0$

Теорема

Любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$

Доказательство

Вложим граф как-то с пересечениями
Для каждого пересечения искривим одно из ребер, чтобы убрать пересечение

Доказательство 2

Воспользуемся вероятностным методом: случайно расположим точки, после чего проведем ребра-отрезки
Вероятность их пересечения равна 0

Определение

Два графа гомеоморфны, если можно превратить G_1 в G_2 следующими операциями
(кратные ребра разрешены)

1. Удаляем ребро uv, добавляем вершину x и ребра ux, xv
2. Берем вершину x степени 2 с соседями u, v
   Удалим вершину x и добавим ребро uv

Лемма 1
G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ можно уложить на сфере
Доказательство
Нарисуем плоскость
Положим на нее сферу
Точка соприкосновения сферы и плоскости $=:$ южный полюс S
Противоположная сторона сферы $=:$ северный полюс N
Возьмем точку x на плоскости
Построим отрезок xN
Точка пересечения отрезка со сферой x' – существует и единственная
Т.о. мы построили непрерывную биекцию между сферой $\setminus\{N\}$ и плоскостью
Теперь положим сферу на плоскость так, чтобы северный полюс не лежал на ребре и не был вершиной
Тогда биекция ребра переводит в кривые-ребра, а вершины – в точки-вершины
Определение
Грани – области, полученные разрезанием поверхности по ребрам
Теорема (Формула Эйлера)
В связном графе на плоскости $V + F - E = 2$
V – число вершин
E – число ребер
F – число граней
Доказательство
Будем рисовать наш граф постепенно
При добавлении ребра количество ребер увеличивается на $1 (E+ = 1)$ и число граней увеличивается на $1 (F+ = 1)$
При добавлении вершины число ребер увеличивается на $1 (E+ = 1)$ и число вершин увеличивается на $1 (V+ = 1)$
Тогда $V + F - E = 2$
Теорема
K_5 нельзя уложить на плоскости
Доказательство
$V = 5$
$E = 10$

Отсюда $F = 7$
С точки зрения теории графов грань – это цикл
Цикл имеет длину хотя бы 3
Пройдем по каждому циклу, соответствующему грани
Тогда суммарно мы пройдем хотя бы по 21 ребру
С другой стороны, ребро лежит на границе двух граней
Значит по каждому ребру мы должны пройти по 2 раза
Т.е. мы должны пройти суммарно по 20 ребрам
Теорема 2
$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскости
Доказательство
В двудольном графе цикл имеет длину хотя бы 4
Применяем тот же трюк
Теорема
В произвольном графе G $3V - 6 \geq E$
В произвольном двудольном графе G $2V - 4 \geq E$
Лемма
G_1, G_2 гомеоморфны
G_1 можно уложить $\Leftrightarrow$ G_2 можно уложить
Лемма
G – подграф H
H можно уложить $\Rightarrow$ G можно уложить
Лемма
G можно уложить на плоскости и u – вершина G, то G можно уложить так, чтобы u была инцидентна(смежна) внешней грани
Доказательство
Переложим граф на плоскости
Переложим его на сферу
Повернем сферу так, чтобы грань, инцидентная u, содержала северный полюс
Переложим граф на плоскость
Лемма
G можно уложить на плоскости и uv – ребро G, то G можно уложить так, чтобы u было инцидентно(смежна) внешней грани
Определение
G – планарный, если его можно уложить на плоскость
Лемма
Если все компоненты реберной двусвязности G планарны, то G планарен

Доказательство
Докажем по индукции
База ($n = 1$) – очевидно
Переход: Удалим мост uv
Тогда в каждой компоненте связности $\leq n - 1$ компонента реберной двусвязности
Уложим их так, чтобы u и v оказались инцидентны внейшней грани
Проведем ребро uv
Лемма
Если все компоненты вершинной двусвязности G планарны, то G планарен
Доказательство
Докажем по индукции
База ($n = 1$) – очевидно
Переход: Разобьем граф по какой-либо точке сочленения v на два графа
В каждой будет своя копия вершины v – v_i Уложим их так, чтобы v_i лежали во внешней грани
Теперь удалим все v_i, кроме v_1 и «притянем» все ребра из v_i к v_1
Теорема
G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$
Доказательство $\Leftarrow$
Очевидно
Доказательство $\Rightarrow$
слишком сложно описать доказательство, просто поверьте

1.7 Раскраска

Определение
$c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ – раскраска
Раскраска *правильная*, если $\forall\, uv\ c(u) \neq c(v)$
По умолчанию будем говорить о правильный раскрасках
Определение
G раскрашиваемый в k цветов, если существует правильная раскраска в k цветов
$k = 1$ – граф изолированный
$k = 2$ – граф двудольный
Теорема

Граф двудольный $\Leftrightarrow$ любой цикл четный

Определение

Пусть есть граф G

Хроматическая функция $p_G(t)$ – число способов раскрасить G в t цветов (можно использовать не все цвета)

$p_{K_n}(t) = t(t-1)\dots(t-n+1) = t^{\underline{n}} = \dfrac{t!}{(t-n)!}$

Определение

G/uv – стягивание графа по uv

Стягивание означает, что мы заменяем вершины u и v одной вершиной

Если цвета u и v равны, то стягивание не влияет на раскраски

Лемма

Пусть uv – ребро в G

$p_G(t) = p_{G\setminus\{uv\}}(t) - p_{G/uv}(t)$

Теорема о хроматическом многочлене

Пусть G – неориентированный граф с n вершинами, m ребрами, k компонентами связности

Тогда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$ (коэффициенты знакочередуются)

Доказательство

Индукция по числу вершин и ребер

Если $n = n, m = 0$, то $p_G(t) = t^n$

Если $m > 0$

Рассмотрим ребро uv

$p_G(t) = p_{G\setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$

Если uv – не мост

$p_{G\setminus uv}(t) = t^n - (m-1)t^{n-1} + q_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm q_k t^k$

$-p_{G/uv}(t) = -t^{n-1} + r_{n-2}t^{n-2} + \dots \pm r_k t^k$

Отсюда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$

Если u_v – мост, то $q_k = 0$, но это ничего не меняет

Теорема

G – дерево $\Leftrightarrow p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$

Доказательство $\Leftarrow$

$p_G(t) = t^n - (n-1)t^{n-1} + \dots + t$

Отсюда $n = n, m = n-1, k = 1$ – дерево

Доказательство $\Rightarrow$

Возьмем в графе лист a и удалим его

$p_{\{v\}} = t$

$p_{G\setminus a}(t) = t(t-1)^{n-2}$
$p_G(t) = (t-1)p_{G\setminus a}(t)$
Лемма
В планарном графе $\exists\, u : \deg u \leq 5$
Доказательство
$E \leq 3v - 6$
Пусть это не так
Тогда $6V \leq 2E \leq 6V - 12$
Теорема (super light)
Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов
Доказательство
Рассмотрим вершину степени не более 5
Удалим ее из графа
Планарность не сломается
Остаток раскрасим в 6 цветов
Потом добавим вершину обратно вершину
Для нее всегда можно выбрать какой-то цвет
Теорема Хивуда (medium)
Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов
Доказательство
Рассмотрим вершину степени не более 5
Если степень меньше 5, применим трюк из прошлого доказательства
Если степень ровно 5, удалим ее
Раскрасим граф в 5 цветов
Вернем ее
Если есть 2 соседа одного цвета, то мы победили
Пусть все соседи разных цветов
Пусть по часовой стрелке расположены соседи цветов 1, 2, 3, 4, 5
Возьмем соседа цвета 1, запустим DFS по вершинам цвета 1 и 3
Если мы не дошли до соседа цвета 3, то в дереве DFS'а поменяем всета 1 и 3 местами
Тогда нашу вершину покрасим в цвет 1
Пусть мы дошли до соседа цвета 3 (т.е. нашли цикл)
Тогда повторим аналогичные действия с вершинами цвета 2 и 4
Из планарности цикл в обходе невозможен
Теорема (hard)
Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета
Доказательство слишком сложное

Определение
Регулярный граф – граф, где все степени одинаковые
$\deg G = d$
Лемма
Пусть G – граф, $\deg v \le d, \exists\, u : \deg u < d$
Тогда его можно раскрасить в d цветов
Доказательство
Запустим из u DFS
Построим остовное дерево с корнем в u
Будем раскрашивать вершины с листьев к корню
Вершину будем красить, если все ее дети уже покрашены
У каждой вершины всегда есть один непокрашенный сосед – ее родитель
Тогда мы сможем покрасить дерево
Теорема (Брукс)
Пусть G – связный граф
$\deg v \le d$
$G \ne K_n$
$G \ne C_{2n+1}$ (цикл)
Тогда $\exists$ раскраска G в d цветов
Доказательство
Какая-то глина

1.8 Паросочетания в произвольных графах

Определение
$I \subset V : \forall\, u, v \in I\ uv \notin E$ – *независимое множество(антиклика)*
$\alpha(G)$ – максимальный размер независимого множества в графе
Определение
$C \subset V : \forall\, uv \in E\ u \in C \vee v \in C$ – *вершинное покрытие*
$\beta(G)$ – минимальный размер вершинного покрытия
Теорема
$\alpha(G) + \beta(G) = n$
Лемма
A – вершинное покрытие $\Leftrightarrow V \setminus A$ – независимое множество
Доказательство
Для каждого ребра верно, что один его конец лежит в A
Тогда не существует такого ребра uv, что $u, v \notin A$
Тогда $V \setminus A$ для каждого ребра содержит не более одного его конца

Определение
Паросочетание – $M \subset E : \forall\, e, f \in M\;\; e, f$ не имеют общих концов
$\alpha'(G)$ – размер максимального паросочетания в G
Определение
Реберное покрытие – $F \subset E : \forall\, u \exists\, e \in F : e = uv$
$\beta'(G)$ – размер минимального реберного покрытия
Теорема
$\alpha'(G) + \beta(G) = n$
Определение
Будем рассматривать связные графы
Рассмотрим паросочетание размера $\alpha'(G)$
Для каждой изолированной вершины добавим свое ребро
Мы получим реберное покрытие
$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G)$
$\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$
Теперь возьмем минимальное реберное покрытие
Теперь выберем в этом графе максимальное паросочетание (пусть его размер – k)
$k \leq \alpha'(G)$
Заметим, что для любого ребра в покрытии паросочетанием покрыта ровно один его конец:
Если оба конца покрыты, то это ребро не может лежать в минимальном покрытии
Если ни один конец не покрыт, то паросочетание не максимальное
Тога $\beta'(G) = n - 2k + k$
$n \leq \alpha'(G) + \beta'(G)$
Определение
Доминирующее множество $D \subset V : \forall\, u\;\; u \in D \vee \exists\, v \in D : uv \in E$
$\gamma(G)$ – размер минимального доминирующего множества
Определение
Клика – $C \subset V : \forall\, u, v \in C : uv \in E$
$\omega(G)$ – максимальная клика
Определение
Паросочетание *совершенное*, если оно покрывает все вершины
Определение
Пусть зафиксировано множество ребер M
Путь *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из M и не из M
Цикл *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из M и не из M

Чередующийся путь *дополняющий*, если его крайние ребра не в M
Чередующийся путь *сбалансированный*, если ровно одно его крайнее ребро не в M
Чередующийся путь *антидополняющий*, если его крайние ребра в M

Определение

M – максимальное $\Leftrightarrow$ не существует дополняющих путей
$|M| = \alpha'(G)$

Доказательство

$M_1 \oplus M_2$ – множество ребер, которые входят ровно в одно паросочетание
Компоненты связности в получившемся графе – циклы и пути, дополняющие для M_1, M_2 или сбалансированные
Докажем $\Rightarrow$
Пусть M – максимальный
Возьмем $M \oplus M_2$
В этом графе нет дополняющих путей: если бы они были, то M был бы не максимальным
Докажем $\Leftarrow$
Пусть не существует дополняющих путей
Возьмем M_{max}
$|M_{max}| \geq |M|$
Т.к. нет дополняющих путей, то в $M \oplus M_{max}$ есть только циклы, сбалансированные и антидополняющие пути
В каждом цикле/пути ребер из M не меньше, чем из $|M_{max}|$
Тогда $|M| \geq |M_{max}|$
Тогда $|M| = |M_{max}|$
Отсюда $|M_{max}| = |M|$

Определение

$T \subset V$ – множество Татта, если $\text{odd}(G \setminus T) > |T|$, где odd – количество компонент нечетного размера

Теорема Татта

G содержит совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \forall S \subset V \ \ \text{odd}(G \setminus S) \leq |S|$
(граф содержит множество Татта)

Доказательство $\Rightarrow$

Пусть это не так
Пусть в графе содержится множество Татта T, и есть совершенное паросочетание
Удалим его из графа
Тогда у нас получился $\text{odd}(G \setminus T)$ компонент с нечетным количеством вершин

Внутри них нет совершенного паросочетания
Тогда в каждой компоненте существует вершина, которая в совершенном паросочетании связана с вершиной из T
Но таких вершин больше, чем $|T|$
Отсюда множества Татта быть не может
Лемма
Рассмотрим $uv \notin E$
$\operatorname{odd}(G \cup \{uv\}) \leq \operatorname{odd}(G)$
Лемма 2
G – не содержит множество Татта, $uv \notin E$
Тогда $G \cup \{uv\}$ не содержит множество Татта
Доказательство
Рассмотрим $S \in V$
$\operatorname{odd}((G \cup \{uv\}) \setminus S) = \operatorname{odd}(\left[\begin{array}{l} G \setminus S \\ G \setminus S \cup \{uv\} \end{array} \right.) \leq \operatorname{odd}(G \setminus S)$
Доказательство $\Leftarrow$
Пусть в графе G не содержится множество Татта и не содержится совершенного паросочетания
Среди всех таких графов выберем G с минимальным числом ребер, а затем с максимальным числом вершин
G содержит четное число вершин – иначе $\varnothing$ – множество Татта
Тогда $G \neq K_n$ (иначе бы в нем содержалось совершенное паросочетание)
$U := \{v : \deg v = n - 1\}, U \neq V$
Лемма 3
Компоненты связности $G \setminus U$ – полные графы

Рассмотрим эти компоненты
В четных компонентах выберем паросочетания
В нечетных выберем паросочетания, оставив одну вершину
Т.к. множества Татта нет, то $|U| \geq \operatorname{odd}(G \setminus U)$
Но вершины U связаны со всеми
Соединим вершины U с оставшимися вершинами из компонент в паросочетание
Возможно, в U остались изолированные вершины
Соединим из в паросочетание (это возможно, т.к. в графе четное число вершин)
Т.о. мы построили совершенное паросочетание – противоречие
Доказательство леммы 3
В графе $G \setminus U$ каждая вершина хотя бы с какой-то не связана

Предположим, что в какой-то компоненте $G \setminus U$ есть компонента, не являющаяся полным графом
Тогда в ней хотя бы два ребра
Выберем эти ребра $xy, xz : zy \notin E$
Возьмем $w : xw \notin E$
Вспомним, что G – граф с максимальным числом ребер
Тогда при добавлении ребра в G должно появиться множество Татта(невозможно по леммам) или идеальное паросочетание
Тогда при добавлении yz в графе должно появиться идеальное паросочетание
Назовем это паросочетание M_1 $(yz \in M_1)$
Уберем yz и добавим xw
Назовем это паросочетание M_2 $(xw \in M_2)$
$M_1 \oplus M_2$
$yz, xw \in M_1 \oplus M_2$
Заметим, что в $M_1 \oplus M_2$ нет путей: если есть путь, то его конец лежит только в одном паросочетании, но покрыты все вершины
Тогда компоненты связности – циклы

1. yz, xw – в разных компонентах
   Тогда возьмем из компоненты yz ребра M_2, а из компоненты xw – ребра M_1
   Из других компонент возьмем или ребра M_1, или ребра M_2
   Мы получили совершенное паросочетание – противоречие

2. yz, xw – в одной компоненте
   Утвержается, что можно взять в этой компоненте ребра так, что при добавлении ребра xz или xy возникает паросочетание – противоречие

Определение
$\operatorname{def} G = n - 2\alpha'(G)$ – дефицит G – количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием
Теорема (Формула Бержа)
$\operatorname{def} G = \max\limits_{S \subset V}(\operatorname{odd}(G \setminus S) - |S|)$
Замечание
$\operatorname{def} G \geq \operatorname{odd}(G) - |\varnothing| \geq 0$
//todo 1:22

1.9 Паросочетания №2

Определение

G – фактор-критический, если $\forall\, u\; G \backslash u$ содержит совершенное паросочетание

$\operatorname{def} G = 1$

$\alpha'(G) = \dfrac{n-1}{2}$

$\forall\, u \in V\;\; \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$

Лемма Татта

$\forall\, u \in V\;\; \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G) \Rightarrow G$ – фактор-критический

Лемма

Пусть $\forall\, u \in V\;\; \alpha'(S \setminus u)$

$S \neq \varnothing \Rightarrow S$ – не множество Татта

Доказательство

Рассмотрим $v \in S$

$G' = G \setminus v$

$S' = S \setminus v$

$\operatorname{def} G' \geq \operatorname{odd}(G' \setminus S') - |S'| = \operatorname{odd}(G \setminus S) - |S| + 1 = \operatorname{def} G + 1$

Но дефицит не может увеличиться

Отсюда $S = \varnothing$

Отсюда $\operatorname{def} = 1$

Отсюда G – фактор-критический

Декомпозиция Эдмондса-Галлаи

$D = \{v : \exists\, M$ – максимальное паросочетание, M – не покрывает $v\}$

A – соседи D

$C = V \setminus (A \cup D)$

Теорема

Пусть M – совершенное паросочетание в V

Тогда M покрывает все вершины C, причем вершины из C находятся в паросочетании с вершинами C

В каждой компоненте связности D покрыты все вершины, кроме одной (которая единственная может быть связана с вершиной из A)

M покрывает все вершины из множества A

Компоненты в D – фактор-критические

A – множество Татта

Лемма

$a \in A$

Удалим ее

$D(G \setminus a) = D(G)$

$A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$
$C(G \setminus a) = C(G)$
$\alpha(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1$
Доказательство
//todo

1.10 Факторизация

Определение
Регулярный остов степени k – k-фактор графа
0-фактор – изолированные вершины
1-фактор – совершенное паросочетание
2-фактор – разбиение на циклы
Определение
f-фактор, где f-вектор длины n
Остов, где $\deg i = f_i$
Алгоритм
Заменим i-ую вершину на $\deg i$ вершин
Теперь соединим эти вершины, чтобы при конденсации получился исходный граф (степени каждой вершины должны быть 1)
Найдем в полученном графе паросочетания
Далее для каждой вершины создадим $\deg i - d_i$ вершин и соединим каждую из них со всеми вершинами i из предыдущего шага
Теперь найдем совершенное паросочетание
Удалим вершины из предыдущего шага и выполним конденсацию

2 Матроиды

Определение
Пусть есть множество X – носитель
Рассмотрим подмножества X
Пусть «хорошие» подмножества – независимые
«плохие» – зависимые
Множество хороших подмножеств $I \subset 2^X$
I должно удовлетворять следующим свойствам:

1. $\varnothing \in I$ – аксиома нетривиальности

2. $A \in I, B \subset A \Rightarrow B \in I$

Такая система называется предматроидом или Inheritance system
Но в такой системе не будет работать жадный алгоритм

Добавим еще одну аксиому:
$A \in I, B \in I, |A| > |B|$
Тогда $\exists x \in A \setminus B : B \cup x \in I$ – аксиома замены
Пример 1 (матричный матроид)
F^m, F – поле
I – множества линейно независимых векторов
Пример 2 (графовый матроид)
Рассмотрим G – неориентированный граф $\langle V, E \rangle$
$X = E, I$ – ациклическое множество
Докажем аксиому замены
$|V| = n, |E| = m$ Пусть есть множества A и $B, |A| > |B|$
Рассмотрим компоненты связности в графе G_A и G_B
Количество компонент связности $C_A = n - |A|, C_B = n - |B|$
$C_A < C_B$
Значит в A существует компонента связности, содержащая вершины из двух компонент в B
Тогда в A есть ребро, соединяющее разные компоненты из B
Утверждение
Рассмотрим $X_1, I_1 \subset 2^{X_1}$
$X_2, I_2 \subset 2^{X_2}$
Существует биекция $\phi : X_1 \to X_2$
$A \in I_1 \Leftrightarrow \phi(A) \in I_2$
Тогда пусть M – матроид X_1, I_1
N – система подмножеств X_2, I_2 и существует изоморфизм N и M
Тогда N – матроид
Лемма
Графовый матроид изоморфен матричному матроиду
Доказательство
Рассмотрим матрицу инцидентности
Представим ее как множество векторов из 0 и 1 (сложение по модулю 2)
Докажем, что подграф ациклический $\Leftrightarrow$ множество векторов линейно независимое
Если A содержит цикл, то сложение(xor) векторов дает 0

Если A не содержит цикл, то это лес. Там есть лист. Тогда xor не даст 0
Пример 3 (матроид паросочетаний) Рассмотрим G – двудольный граф
X, Y – вершины двух долей
E – множество ребер
Пусть X – носитель
I – подмножество X, которое может быть покрыто одним паросочетанием
Докажем свойство 3
Пусть A покрывается паросочетанием M_A
B – паросочетанием M_B
Рассмотрим $M_A \oplus M_B$
В таком графе пути будут иметь вид $ab...aba(b)$, где a – ребро из A, b – ребро из B
Т.к. $|M_A| > |M_B|$, то найдется путь, начинающийся и заканчивающийся на a
Назовем его P
В $M_B \oplus P$ найдется изолированная вершина
Добавим ее в B
Пример 4 (универсальный матроид)
$U_{n,k}$
$X = \{1, \ldots, n\}$
I – подмножества X не более k
Пример 5 (разноцветный матроид)
X – множество пар $\langle i, c_i \rangle, i$ – предмет, c_i – цвет
$c_i \in C$
I – множества предметов различных цветов
Определение
$A \subset X$
$\text{base}(A) = B : B \in I, B \subset A, |B|$ – максимально
В матричном матроиде: базис
В графовом матроиде: остовный лес
$\text{base}(X)$ – база матроида
Лемма
$A \subset X$
B – максимальное по включению подмножество $A, B \in I$
Тогда B – база A
Доказательство
Пусть есть B' – база A

Если $|D| > |B|$, то по аксиоме 3 $\exists\, x : x \in D \backslash B, B \cup x \in I$ – что невозможно
Из данной леммы следует, что мы можем применять жадные алгоритмы
Определение
Взвешенный матроид – пара из матроида и $w : X \to \mathbb{R}$ – весовая функция
$w(A) = \sum\limits_{x \in A} w(X)$
Как найти базу минимального веса?
Алгоритм (Жадный, Радо-Эдмондса)

```
    sort X
    for x in X
        if (B | {x}) in I:
            B.insert(x)
```

Лемма
Пусть A_k – независимое множество минимального веса мощности k
y – элемент минимального веса такой, что $A_k \cup y \in I, y \notin A_k$
Тогда $A_{k+1} := A_k \cup y$
Доказательство
Рассмотрим A_k и A_{k+1}
По аксиоме замены $z = A_{k+1} \setminus A_k$
Если $w(y) < w(z)$, то $w(A_k \cup y) < w(A_{k+1})$
Тогда A_{k+1} – не минимального веса
Доказательство корректности алгоритма
По индукции

2.1 Аксиоматизация матроида

Определение
Ранговая функция: $r : 2^X \to \mathbb{Z}_+$
$r(A) = \max\{|B| : B \subset A, B \in I\}$
$r(M) = r(X)$
В матричном матроиде: ранг – классический
В графовом матроиде:
цикл – классический
$\mathrm{rg} = n - k$ – количество вершин - количчество компонент связности
В циклическом матроиде: $\mathrm{rg}(A) = \min(k, |A|)$
цикл – множество мощности $k + 1$
Теорема (О базах)
B – базы M

1. $B_1, B_2 \in B, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$

2. $B_1, B_2 \in B$
   Тогда $\forall\, x \in B_1 \setminus B_2\ \exists\, y \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus x \cup y \in B$

Теорема (аксиоматизация базами)
$X, B \subset 2^X, B \neq \varnothing$
Если для B выполнена предыдущая теорема, то B – база некоторого матроида
Теорема (о рангах)
$r : 2^X \to \mathbb{Z}_+$ для матроида M

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$

2. $A \subset B \Rightarrow \mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$

3. $\mathrm{rg}(A \cup B) + \mathrm{rg}(A \cap B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$

Лемма
Пусть $A \in I$
Тогда $\exists$ база $B : A \subset B$
Теорема (аксиоматизация рангами)
Если $r : 2^X \to \mathbb{Z}_+$ и выполнены аксиомы из предыдущей теоремы, то r – ранговая функция некоторого матроида
Теорема о циклах
Cyc – множество циклов матроида M

1. $C_1, C_2 \in Cyc, C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$

2. $C_1, C_2 \in Cyc, C_1 \neq C_2$
   $\forall\, p \in C_1 \cap C_2\ \exists\, C_3 \in Cyc : C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p$
   Доказательство
   $r((C_1 \cup C_2) \setminus p) \leq r(C_1 \cup C_2) \leq r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus p|$

Лемма
$A \notin I \Rightarrow \exists\, C \in Cyc : C \subset A$
Лемма
B – база матроида M
$p \in X \setminus B$
Тогда $\exists!C \subset B \cup p, C \in Cyc$

Доказательство
Существование очевидно
Пусть $C_1, C_2 \subset B \cup p$
$p \in C_1 \cap C_2$
Тогда $\exists\, C : C \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p \subset B$ – противоречие
Теорема о базах усиленная
Пусть B – базы матроида M
$B_1, B_2 \in B$
Тогда $\forall\, y \in B_2 \setminus B_1\ \exists\, x \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \cup y \setminus x \in B$
Доказательство
Возьмем y и добавим в B_2
$B_1 \cup y$ содержит единственный цикл C
$\exists\, x \in (B_1 \setminus B_2) \cap C$
Тогда $B_1 \cup y \setminus x$ не содержит циклов $\Rightarrow$ база
Определение
$\langle A \rangle = A \cup \{p : \mathrm{rg}(A \cup p) = \mathrm{rg}(A)\}$ // Доказательства конспектировать лень