Теория вероятности. Теория

Александр Сергеев

1 Вероятностное пространство. Вероятность и ее свойство

Определение
Алгебра событий:
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – набор подмножеств Ω
$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A + B \in \mathcal{A}$

Элементы алегбры – *события*
Операции с событиями

1. $A \cup B = A + B$
2. $A \cap B = AB = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
4. $A \setminus B = A - B = A\overline{B}$

Определение
σ-алгебра
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра

1. $\mathcal{A}$ – алгебра

2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$

Определение
События A, B – *несовместные* $AB = \varnothing$
Набор несовместный, если события попарно несовместные
Определение(вероятностное пространство)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$

Определение(вероятностное пространство в широком смысле)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\bigcup^{\infty} A_i \Rightarrow P(\bigcup^{\infty} A_i) = \sum P(A_i)$

Теорема о продолжении меры
$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ – вероятностное пространство в широком смысле
Тогда $\exists! Q : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ – вероятность, $Q\Big|_{\mathcal{A}} = P$, где $\sigma(\mathcal{A})$ – сигма-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$
Определение
$\mathcal{A}$ – система интервалов на $\mathbb{R}$, замкнутая относительно конечного объединения и пересечения
$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ – борелевская сигма-алгебра
Примеры вероятностных пространств

1. Модель классической вероятности
   $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
   $\mathcal{A} = 2^\Omega$
   $P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$
   $\mathcal{A} = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \dfrac{M}{N}$

2. Ω – набор $\{0^i, 1\}, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
   $P(0^i 1) = q^i p$

3. Модель геометрической вероятности Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество
   $\mathcal{A}$ – измеримое по Лебегу подмножество Ω
   $P(A) = \dfrac{\lambda A}{\lambda \Omega}$

Теорема (свойство вероятности)

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5. $P(\varnothing) = 0$
6. $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Доказательство

1. $P(B) = P(A) + P(B - A)$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$
3. $A \sqcup \overline{A} = \Omega$
4. $B = AB \sqcup (B \setminus AB)$
5. $B_1 = A_1$ $B_2 = A_2 \setminus A_1$
   $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots A_{n-1}) \bigsqcup B_i = \bigcup A_i$
   $B_i \subset A_i$
   $P(\bigcup A_i) = P(\bigsqcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i)$

Теорема (формула включения/исключения)
$$P(A_1+\ldots+A_n)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\ldots(-1)^{n+1}\sum_{i_1<\ldots<i_n}P(A_{i_1}\ldots A_{i_n})$$
Доказательство
Доказательство по индукции
Теорема
$\mathcal{A}$ – алгебра(?) на Ω, p – мера
Тогда равносильны

1. p – счетно-аддитивно
2. p – конечно-аддитивно$+\forall\,(B_n)_{n=1}^{\infty}: B_{n+1}\subset B_n, B=\bigcap B_n \Rightarrow P(B_n)\to P(B)$ – непрерывность сверху
3. p – конечно-аддитивно$+\forall\,(A_n)_{n=1}^{\infty}: A_{n+1}\supset A_n, A=\bigcup A_n \Rightarrow P(A_n)\to P(A)$ – непрерывность снизу

Доказательство (непрерывность сверху) $\Leftrightarrow$ (непрерывность снизу)
$A(n): A_n\subset A_{n+1}; A=\bigcup A_n$
$B_n:=\overline{A}_n, B:=\overline{A}$
$B_n\supset B_{n+1}$
$B=\overline{A}=\overline{\bigcup A_n}=\cap\overline{A}_n=\cap B_n$
$p(B_n)=1-p(A_n)\to 1-p(A)=p(B)$
Доказательство $1\to 2$
$C_1=B_1\overline{B}_2$
$C_2=B_2\overline{B}_3$
$C_k=B_k\overline{B}_{k+1}$
$$B_k=B\sqcup\bigsqcup_{j=k}^{\infty}C_j$$
$$p(B_k)=p(B)+\underbrace{\sum_{j=k}^{\infty}p(C_j)}_{\to 0}$$
$p(B_k)\to p(B)$
Доказательство $2\to 1$
$$\sum_{k=1}^{\infty}p(C_k)=\lim_n\sum_{k=1}^{n}p(C_k)=\lim_n p(\bigsqcup_{k=1}^{n}C_k)=p(B)$$

2 Условная вероятность. Формуоа полной вероятности. Теорема Байеса

Определение (условная вероятность)
$(\Omega, \mathcal{A}, p)$ – вероятностное пространство
$B \in \mathcal{A} : p(B) > 0$
$p_B(A) = p(A|B) := \dfrac{p(AB)}{p(B)}$
Замечание
$p(AB) = p(A)p(B|A)$
Теорема (формула произведения вероятностей)
$p(A_1 \dots A_1) = p(A_1)p(A_2|A_1)\dots p(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$
Доказательство
Тривиально
Определение
$A_1, \dots, A_n$ – независимые, если $\forall\, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\ p(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \dots p(A_{i_k})$
Теорема (формула полной вероятности)
$A \subset \bigsqcup\limits_k B_k$ (как правило, $\bigsqcup B_k = \Omega$)
Тогда $p(A) = \sum\limits_k p(A|B_k)p(B_k)$
Доказательство
$p(A) = p(A \cap \bigsqcup B_k) = p(\bigsqcup AB_k) = \sum\limits_k p(AB_k) = \sum p(A|B_k)p(B_k)$
Теорема Байеса
Краткая форма:
$p(B|A) = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$
Полная:
$A \subset \bigsqcup B_k$

$$\underbrace{p(B_k|A)}_{\text{апостериорные; posterior}} = \frac{\underbrace{p(A|B_k)}_{\text{likelyhood}}\ \underbrace{p(B_k)}_{\text{априорные; prior}}}{\sum_j p(A|B_j)} p(B_j)$$

Доказательство краткой формы
$p(B|A) = \dfrac{p(AB)}{p(A)} = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$

3 Схема Бернулли. Полиноминальная схема. Предельные теоремы, связь со схемой Бернулли

Определение (независимые испытания)
$n \in \mathbb{N}$
$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1), \dots (\Omega_n, \mathcal{A}_n, p_n)$ – вероятностные пространтсва, описывающие виды экспериментов
$\Omega^{(n)} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$
$\mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$
$p^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \to \mathbb{R}$
$p^{(n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = p_1(A_1) \cdot \ldots \cdot p_n(A_n)$
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – описание n независимых испытаний
Замечание
$\mathcal{A}^{(n)}$ может не быть сигма-алгеброй
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – вероятностное пространство в широком смысле
$\sigma(\mathcal{A}^{(n)})$ – сигма-алгебра
Определение (схемы Бернулли)
$n \in \mathbb{N}$
$p \in (0, 1)$ – вероятность успеха
$q = 1 - p$ – вероятность неудачи
$\Omega = \{0, 1\}$
$\mathcal{A} = 2^\Omega$
$\Omega^{(n)} = \{0, 1\}^n$
$w \in \Omega^{(n)}$ – вектор из нуля и единиц
$p(w) = p^{\sum w_i} q^{n - \sum w_i}$
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – схема Бернулли

Теорема
S_n – количество успехов в n испытаниях
$p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
Теорема (о наиболее вероятном k_*)
$p_k := p(S_n = k)$
$\frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{(k+1)q}{(n-k)p} \vee 1$
$(k+1)(1-p) \vee (n-k)p$

$k+1-pk-p \vee np-pk$
$k \vee (n+1)p-1$

1. $p(n+1) \in \mathbb{N}$
   Тогда $\exists\, k_0 : k_0 = p(n+1)-1$
   Если $k < k_0$, то $p_k < p_{k_0+1}$
   Если $k = k_0$, то $p_{k_0} = p_{k_0+1}$
   Если $k > k_0$, то $p_k > p_{k_0+1}$
   Т.о. k_0, k_0+1 – наиболее вероятные

2. $p(n+1) \notin \mathbb{N}$
   Тогда $\exists\, k_1 : p_{k_1} < p_{k_1+1}, p_{k_1+1} > p_{k_1+2}$
   Т.о. k_1 – наиболее вероятные

Тогда $k_* = \begin{cases} \lceil p(n+1)-1 \rceil, & p(n+1) \notin \mathbb{N} \\ p(n+1)-1, p(n+1), & p(n+1) \in \mathbb{N} \end{cases}$

Утверждение
$p(S_n \geq 1) = 1-q^n$
Утверждение
$\alpha \in (0,1)$
$p \in (0,1)$
$n : p(S_n \geq 1) \geq \alpha$
Ответ: $n = \lceil \log_q(1-\alpha) \rceil$
Определение (полиноминальная схема)
n – количество испытаний
m – количество возможных исходов
$p = (p_1, \dots, p_m)$ – вектор вероятностей исходов
$\sum p = 1$
$\Omega = \{(i_1, \dots, i_m)^T \in \{0,1\}^m : \sum\limits_j i_j = 1\}$ – множество столбцов с одной единицей
$\Omega^{(n)} = \{A \in M_{m \times n} : A_{ij} \in \{0,1\}, \sum\limits_i A_{ij} = 1\}$
$p(A) = p_1^{\sum_j A_{1,j}} \cdot \ldots \cdot p_m^{\sum_j A_{m,j}}$
Теорема
$S_{n,j}$ – количество исходов типа j в n испытаниях
$p(S_{n,1} = k_1, \dots, S_{n,m} = k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}, \sum k_j = n$
Теорема (закон больших чисел в форме Бернулли)

$\forall \varepsilon \; p(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$

Теорема (теорема Пуассона)

$p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty$ – схема серий из n испытаний (вероятность успеха при n испытаниях)

Тогда $p(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Доказательство

$$p(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k (1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{n^k}(\lambda + o(\frac{1}{n}))^k \frac{(1-\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^n}{(1-\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Замечание (о погрешности)

$\lambda = np$

Тогда $|p(S_n = k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}| \le np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$

Лемма 1

$k \to \infty, (n \ge k \Rightarrow n \to \infty)$

$p_* = \frac{k}{n}$

$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$ – энтропия

$n - k \to \infty \Rightarrow p(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p_*(1-p_*)}}\exp(-nH(p_*))$

Доказательство

$$p(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}p^k(1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}\sqrt{2\pi(n-k)}(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}} =$$

$$\frac{n^k n^{n-k}(1-p)^{n-k}p^k}{\sqrt{2\pi p_* n(1-p_*)}k^k(n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp\ln\frac{n^k p^k}{k^k}\cdot\frac{n^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp k\ln\frac{p}{p_*} + (n-k)\ln\frac{n(1-p)}{n-k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp(-n\underbrace{(p_*\ln\frac{p}{p_*} + (1-p_*)\ln\frac{1-p_*}{1-p})}_{H(p_*)})$$

Лемма 2

$H(p_*) = \frac{1}{2p(1-p)}(p-p_*)^2 + O((p-p_*)^3)$

При $p_* \to p$

Доказательство

$H(p) = 0$

$H'(x) = \ln\dfrac{x}{p} - 1 - \ln\dfrac{1-x}{1-p} + 1; H'(p) = 0$

$H''(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x(1-x)}; H''(p) = \dfrac{1}{p(1-p)}$

Теорема (локальная предельная Муавра-Лапласа)

Требуем Лемму 1 + $(k - np = o(n^{\frac{2}{3}}))$

Тогда $p(S_n = k) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp(-\dfrac{(k-np)^2}{2np(1-p)})$

Доказательство

$p_* - p = o(n^{-\frac{1}{3}})$ – из $k - np = o(n^{\frac{2}{3}})$

Применим Л2

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}} \exp(-nH(p_*))}_{\text{из Л1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}} \exp -n(\frac{(p-p_*)^2}{2p(1-p)} + O((p-p_*)^3)) \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp(-\frac{n(\frac{k}{n}-p)^2}{2p(1-p)} + nO(o(n^{-1}))) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} + o(1))$$

Теорема(интегральная Муавра-Лапласа)

$F_n(x) = p(\dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le x)$

$\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi$

$\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Тогда $\displaystyle\sup_{-\infty \le x_1 \le x_2 \le +\infty} |F_n(x_2) - F_n(x_1) - \underbrace{(\Phi(x_2) - \Phi(x_1))}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание

$\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \le C\frac{p(1-p)^3 + (1-p)p^3}{(pq)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} = C\frac{(1-p)p((1-p)^2 + p^2)}{(pq)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} \le$

$C\dfrac{1}{\sqrt{pqn}}$

По последним оценкам $C < 1$

4 Случайные величины. Распределение случайной величины

Определение
Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство
$\mathcal{B}$ – борелевская сигма-алгебра (минимальная сигма-алгебра, содержащая все интервалы)
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина, если X – измеримо, т.е. $\forall\, B \in \mathcal{B}$ – борелевская сигма-алгебра $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
$P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ – распределение случайной величины, если $P_x(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ для всех $B \in \mathbb{B}$
Замечание (обозначеиня)
Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами из конца алфавита(X, Y, U, W) или маленькими греческими ξ, ν, η
Замечание
P_X удовлетворяет аксиомам вероятности
Определение
Функция распределенич $F_X(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega : X(\Omega) \leq t\}), t \in \mathbb{R}$
Теорема (свойства функции распределения)

1. F не убывает
2. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3. F – непрерывна справа

Доказательство

1. $t_1 < t_2$
   $F(t_2) = F(t_1) + P(\{\omega : t_1 < X(\Omega) \leq t_2\}) \geq F(t_1)$
2. Пусть t_n – монотонно возрастает к $+\infty$
   $(-\infty, t_n] \subset (-\infty, t_{n+1}]$
   $\bigcup(-\infty, t_n] = \mathbb{R}$
   Тогда $F(t_n) \to P(X \in \mathbb{R}) = 1$
   Пусть t_n – монотонно убывает к $-\infty$

$(-\infty, t_n] \supset (-\infty, t_{n+1}]$
$\bigcap(-\infty, t_n] = \varnothing$
Тогда $F(t_n) \to P(X \in \varnothing) = 0$

3. Пусть t_n – монотонно стремится к 0
$F(x_0 + t_n) \to F(x_0)$
$(-\infty, x_0 + t_{n+1}] \subset (-\infty, x_0 + t_n]$
$\bigcap(-\infty, x_0 + t_n] = (-\infty, x_0]$
$F(x_0 + t_n) = P(X \le x_0 + t_n) \to P(X \le x_0) = F(x_0)$

Замечание (непрерывность слева)
Пусть t_n – монотонно стремится к 0
$F(x_0) - F(x_0 - t_n) = P(X \le x_0) - P(X \le x_0 - t_n) = P(x_0 - t_n < X \le x_0)$
$(x_0 - t_n, x_0] \supset (x_0 - t_{n+1}, x_0]$
$\bigcap(x_0 - t_n, x_0] = \{x_0\}$
Т.о. $F(x_0) - F(x_0 - t_n) \to P(X = x_0)$ – иногда не 0
Т.о. нет непрерывности слева
Лемма
$\forall\,(B_n) : B_{n+1} \subset B_n, B = \bigcap B_n \; P(B_n) \to P(B)$
Равносильно $\forall\,(A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \varnothing \; P(A_n) \to 0$
Доказательство $\Leftarrow$
$A_n = B_n \setminus B$
$A_{n+1} \subset A_n$
$\bigcap A_n = \varnothing$
$\underbrace{P(A_n)}_{P(B_n) - P(B)} \to 0$
Теорема (о достаточности F для описания вероятностного распределения)
Пусть F не убывает, $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0, F$ – непрерывно справа
Тогда $\exists\,(\Omega, \mathcal{A}, P), X$ – случайная величина, такие что $F_X = F$
Доказательство
$\Omega := \mathbb{R}$
$\mathcal{A}$ – система интервалов вида $(a, b]$ (+все лучи и $\mathbb{R}$), замкнутая относительно конечного числа $\sqcup$, т.е. $\mathcal{A}$ – алгебра
$A := \bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k], P(A) := \sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k))$

$P(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$
Проверим счетную аддитивность
Пусть $(A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \varnothing$

$$A_n = \bigsqcup_{k=1}^{k_n} (a_{nk}, b_{nk}]$$

Пусть все $A_n \subset [-M, M]$
Тогда $\exists\, (B_n) : cl(B_n) \subset A_n$ и $P(A_n) - P(B_n) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}, cl(\bullet)$ – замыкание

$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^{k_n} (a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$$

$$cl(B_n) = \bigsqcup_{k=1}^{k_n} [a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$$

$$P(A_n) - P(B_n) = \sum_{k=1}^{k_n} F(b_{nk}) - F(a_{nk} - F(b_{nk}) + F(a_{nk} + \delta)) = \sum_{k=1}^{k_n} (F(a_{nk} + \delta) - F(a_{nk})) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$ – при правильном δ, k_n

$cl(B_n) \subset A_n$

$\bigcap cl(B_n) \subset \varnothing$

$\bigcap cl(B_n) = \varnothing$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} = \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$$

$cl(B_n)$ – открыто
$[-M, M]$ – компакт

Тогда $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$

Тогда $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} cl(B_n) = \varnothing$

$$\bigcap_{n=1}^{N} B_n = \varnothing$$

$$P(A_n) = P(A_N \setminus \bigcap_{n=1}^{N} B_n) + P(\bigcap_{n=1}^{N} B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{N} (A_N \setminus B_n)) \leq \sum_{n=1}^{N} P(A_N \setminus B_n) \leq$$

$\sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n \setminus B_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n) - P(B_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$
Тогда $P(A_n) \to 0$
Теперь пусть A_n – не ограниченные
$\varepsilon > 0$
$\exists\, [-M, M] : P(X \in \overline{[-M, M]}) < \varepsilon$
$N : F(N) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}, F(-N) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$F(N) = F(-N) + P((-N, N]) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$
$F(N) = 1 - P((N, +\infty))$
$P((N, +\infty)) < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$P(A_n) = P(A_n \cap [-M, M]) + P(A_n \cap \overline{[-M, M]}) \leq P(\overline{[-M, M]}) < \varepsilon$
Т.о. P – вероятность
$X(\omega) := \omega$
$F_X(t) = P((-\infty, t]) = F(t)$
Замечание

5 Дискретные случайные величины и распределения

Определение
X, P_x – дискретные, если существует не более чем счетное $E : P(X \in E) = 1$
$F(t) = P(X \leq t) = \sum\limits_{k} p(k)\mathbb{1}(t \geq x_k), \mathbb{1}(cond) = (int)(cond)$
Примеры

1. Вырожденное:
   $P(X = c) = 1$
   $X \sim I(c), I_c$

2. Дискретное равномерное на $\{x_1, \ldots, x_n\}$
   $P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$
   $DU(x_1, \ldots, x_n)$

3. Распределение Бернулли
   $Bern(p), p \in (0, 1)$
   $P(X = 0) = q = 1 - p, P(X = 1) = p$

4. Биномиальное; $Bin(n, p)$
   $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, \ldots, n\}$

5. Полиномиальное; $Poly(n, p)$
   $p = (p_1, \ldots, p_m)$ – вектор вероятностей
   $P(S_1 = k_1, \ldots, S_m = k_m) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$

6. Геометрическое; $Geom(p)$
   X – количество неудач до первого успеха
   $P(X = k) = q^k p, k \in \mathbb{N}_0$
   Альтернативная интерпретация геометрического распределения
   X – номер первого успеха
   $P(X = k) = q^{k-1} p, k \in \mathbb{N}$

7. Отрицательное биномиальное; $NB(r, p), p \in (0, 1), r > 0$

   - $r \in \mathbb{N}:$
     $X \sim NB(r, p) \Leftrightarrow X$ – номер r-ого успеха (начало отсчета в r)
     $P(X = k) = P($успех с номером r случился на шаге $k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r q^k$
   - Если $r \in \mathbb{R}$, то $P(X = k) = \frac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(r) k!} p^r q^k$

8. Распределение Пуассона: $Pois(\lambda), \lambda > 0$
   $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$

9. Гипергеометрическое
   $HG(M, N, K)$
   $M \in \mathbb{N}$ – количество деталей
   $N \in [1 : M]$ – количество «хороших» деталей
   $K \in [1 : M]$ – количество деталей, которые мы вытаскиваем (без

возвращения)
X – количество «хороших» деталей, которые мы вытащили
$P(X=j)=\frac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}, \max(K+N-M,0)\le j\le \min(N,K)$
Пусть $M\to\infty, \frac{N}{M}\to p$
$P(X=j)=\frac{N!(M-N)!K!(M-K)!}{j!(N-j)!(K-j)!(M-N-K+j)!M!}$
$=\binom{K}{j}\frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{M(M-1)\dots(M-N+1)}\frac{(M-K)\dots(M-N-K+j+1)}{}\to$
$\binom{K}{j}p^j(1-p)^{k-j}$

$$EX=\sum_{j=\max(0,N+K-M)}^{\min(N,K)} j\frac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}=$$
$$\sum_{j=\max(1,N+K-M)}^{\min(N,K)} j\frac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}=$$
$$N\sum_j\frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!}\frac{\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}=$$
$$\frac{NK}{M}\sum_j\frac{\binom{N-1}{j-1}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M-1}{K-1}}=$$
$$\frac{NK}{M}\underbrace{\sum_{i=\max(0,N+K-M-1)}^{\min(N-1,K-1)}\frac{\binom{N-1}{i}\binom{M-N}{K-i-1}}{\binom{M-1}{K-1}}}_{1}=\frac{NK}{M}$$

6 Абсолютно непрерывные распределения

Определение
X, P_X – абсолютно непрерывные, если $\exists\, p(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}, p(x)\ge 0, p(x)$ – интегрируемо по Лебегу на $\mathbb{R}$
$P(X\in B)=\int_B p(x)\,\mathrm{d}\,x, B\in\mathcal{B}$
p – плотность
Теорема

1. $P(X = c) = 0$, т.к. $P(X = c) = \int_{\varnothing} \ldots = 0$

2. (a) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} p(t) \,\mathrm{d}\, t$

   (b) $F(x)$ – непрерывна (равномерно непрерывная)

   (c) $F'(x) = p(x)$ почти везде

3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \,\mathrm{d}\, x = 1$

4. $P(X \in (x_0, x_0 + h)) = F(x_0 + h) - F(x_0) = p(x_0)h + o(h) \approx p(x_0)h$ при малых h

Определение (носитель)
E – носитель ($\operatorname{supp} P_X$) $\Leftrightarrow P(X \in E) = 1, E = \overline{E}, E$ наименьшее по включению
Замечание
λ – мера Лебега
ν – другая мера, заданная на $\mathcal{B}, \nu(\mathbb{R}) < +\infty$
ν – абсолютно непрерывна относительно $\lambda \Leftrightarrow \lambda(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$
$\nu \ll \lambda$
Теорема Радона-Никодима
$\nu \ll \lambda \Rightarrow \exists\, f(x) : \nu(B) = \int_{B} f(x) \lambda(\mathrm{d}\, x)$
Пример

1. $U[a, b]$: Равномерное на $[a, b]$
   $p(x) = \dfrac{1}{b-a} \mathbb{1}(x \in [a, b])$
   $F(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x) \,\mathrm{d}\, x = \begin{cases} 0, & t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b \\ 1, & t > b \end{cases}$
   $X \sim U[a, b]$
   $Y = cX + d, c > 0$
   $Y \sim U[ca + d, cb + d]$
   $F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(cX + d \leq t) = P(X \leq \dfrac{t-d}{c}) = F_X(\dfrac{t-d}{c})$

2. $N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$: Нормальное распределение
$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2})$
μ – высота графика, σ – ширина
$N(0,1)$ – стандартный нормальный закон
$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}$
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
Доказательство
$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{-x} \ldots + \int_{-x}^{x} \ldots = \int_{-\infty}^{-x} \ldots + 2\int_{0}^{x} \ldots = \int_{-\infty}^{-x} \ldots + 2(\int_{-\infty}^{x} \ldots - \int_{-\infty}^{0} \ldots) = \Phi(-x) + 2(\Phi(x) - \frac{1}{2})$
$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}\, t$ – функция Лапласа; $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$
$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$
$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} \,\mathrm{d}\, t$
$\Phi_0(x) = \frac{1}{2} \mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}})$
$y_{\text{изм}} = y_{\text{реал}} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$
$P(|y_{\text{изм}} - y_{\text{реал}}| > \delta) = P(|\varepsilon| > \delta)$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$Y = aX + b$
$F_Y(t) = P(aX + b \leq t) \underset{a>0}{=} P(X \leq \frac{t-b}{a}) = F_x(\frac{t-b}{a})$
$p_Y(t) = (F_X(\frac{t-b}{a}))'_t = p_X(\frac{t-b}{a})\frac{1}{a} = \ldots$
$Y \sim N(a\mu + b, \sigma^2 a^2)$
Для $a < 0$ аналогично
$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow U \sim N(0, 1)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
$P(|X - \mu| < k\sigma) = P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \in (-k, k)) =$

$\Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$

3. $\mathrm{Exp}(\lambda), \lambda > 0$: Экспоненциальнле/показательное
   $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}(x \geq 0)$
   $F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}(x \geq 0)$

4. $\Gamma(\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$: Гамма-распределение
   $p(x) = \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}(x \geq 0)$
   $\Gamma(1, \beta) = \mathrm{Exp}(\beta)$
   $\beta - rate$
   $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$ распределение Эрланга порядка k

5. $\mathrm{Cauchy}(x_0, \gamma)$: Распределение Коши
   $x_0 \in \mathbb{R}$ – сдвиг
   $\gamma > 0$ – scale
   $p(x) = \dfrac{1}{\pi\gamma} \dfrac{1}{1 + (\frac{x - x_0}{\gamma}^2)}$
   $F_X(t) = \dfrac{1}{\pi\gamma} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{1 + (\frac{x-x_0}{\gamma})^2} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x - x_0}{\gamma} = a \\ \mathrm{d}\,x = \gamma \,\mathrm{d}\,u \end{array} \right| = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{t-x_0}{\gamma}} \dfrac{\mathrm{d}\,u}{1 + u^2} =$
   $\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} u \Big|_{-\infty}^{\frac{t-x_0}{\gamma}} = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{t - x_0}{\gamma} + \dfrac{1}{2}$
   Пример
   $X \sim \mathrm{Cauchy}(0, 1)$
   $Y = \dfrac{1}{X}$
   $F_Y(t) = P(\dfrac{1}{X} \leq t) = P(\dfrac{1}{X} \leq t, X < 0) + P(\dfrac{1}{X} \leq t, X > 0)$
   $P(\dfrac{1}{X} \leq t, X < 0):$
   $t \geq 0 \Rightarrow P(\ldots) = P(X < 0) = \dfrac{1}{2}$
   $t < 0 \Rightarrow P(X \leq 1, X < 0) = P(X \geq \dfrac{1}{t}, X < 0) = F(0) - F(\dfrac{1}{t}) =$
   $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{t}$
   $P(\dfrac{1}{X} \leq t, X > 0):$
   $t \leq 0 \Rightarrow P(\ldots) = 0$

$$t>0 \Rightarrow P(X \geq \frac{1}{t}, X>0) = P(X \geq \frac{1}{t}) = 1 - F(\frac{1}{t}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}$$

$$\text{Т.о. } P(\frac{1}{X} \leq t, X>0) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ 1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{t}, & t>0 \end{cases}$$

Теорема
Пусть p_x – плотность с.в. X
$Y = g(X), g \in C^1$
g' строго монотонна
Тогда $p_Y(y) = p_x(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y))| = p_x(g^{-1}(y))\frac{1}{|g'_x(g^{-1}(y))}$
Доказательство
Пусть $g' \geq 0$
$F_Y(t) = P(g(X) \leq t) = P(X \leq g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t))$
$p_Y(t) = (F_Y(t))'_t = p_X(y^{-1}(t))\frac{\partial g^{-1}(t)}{\partial y}$
Пусть $g' < 0$
$F_Y(t) = 1 - F_X(g^{-1}(t))$
$p_Y(t) = -p_X(y^{-1}(t))\frac{\partial g^{-1}(t)}{\partial y}$

7 Сингулярное распределение

Определение
X, P_X – сингулярное $\Leftrightarrow \operatorname{supp} P_X = E \ \& \ \lambda E = 0$ и $\forall x \in E \ P(X \in E) = 0$
Замечание
Сингулярное $\Leftrightarrow \lambda\{x : F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0\} = 0 \ \forall \varepsilon$
Теорема Лебега о разложении F
F – функция распределения
Тогда $\exists c_1, c_2, c_3 \geq 0 : c_1 + c_2 + c_3 = 1, F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) + c_3F_3(x), F_1$ – функция распределения дискретной величины, F_2 – функция распределения, абсолютно непрерывная, F_3 – функция распределения сингулярного закона
Замечание
У F могут быть только скачки, не более чем счетное количество

8 Случайные векторы

Определение
$X = \{X_1, \dots, X_n\}$ – случайный вектор (многомерная случайная величина), если X_i – случайная величина
$P_X(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$ – распределение случайного вектора (совместное распределение случайных величин $X_1, \dots, X_n, B_i \in \mathcal{B}$)
$P_X : \sigma(\mathcal{B}^n) \to \mathbb{R}$
Определение
$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$ – совместная функция распределения
Свойства

1. $x_i \to -\infty$ для некоторого $i \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n) \to 0$
2. $x_i \to +\infty$ для всех $i \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n) \to 1$
3. F – непрерывна справа по каждой переменной
4. $\Delta_i F(x_1, \dots, x_i + \delta_i, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)$
   $\Delta_1, \dots, \Delta_n F \ge 0 \; \forall \, x_1, \dots, x_n \; \forall \, \delta_1, \dots \delta_n \ge 0$

Теорема
F – функция, для которой справедливы свойства $1 - 3$
Тогда существует вероятностное пространство и случайная величина с данной функцией распределения
Определение
X_i, P_X – дискретно, если $\operatorname{supp} P_X$ – не более чем счетный
Замечание
$\operatorname{supp} P_X \ne \times_{i=1}^n \operatorname{supp} P_x$
Одномерное распределение = *Маргинальное* распределение
Пример
Полиномиальное: $Poly(n, p)$
$n \in \mathbb{N}$
$p = (p_1, \dots, p_n), \sum p_j = 1$
$S_n = (S_{n,1}, \dots, S_{n,m})$
$P(S_{n,1} = k_1, \dots, S_{nm} = k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$
$\sum k_i = n, k_i \ge 0$

$S_{nj} \sim Bin(n, p_j)$

Определение

X, P_X – абсолютно непрерывная $\Leftrightarrow \exists\, p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ – плотность распределения

$P(X \in B) = \displaystyle\int_B p(x) \,\mathrm{d}\, x$

$F(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) \,\mathrm{d}\, t_1 \dots \mathrm{d}\, t_n$

$p(t_1, \dots, t_n) = \dfrac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

$P(G(X) \in B) = \displaystyle\int_{x: F(x) \in B} p(x) \,\mathrm{d}\, x, G$ – некая функция

Определение (равномерное распределение на подмножестве)

$U(E) : p(x) = \dfrac{1}{\mu E} \mathbb{1}(x \in E), \mu$ – мера

Определение (многомерное нормальное распределение/гауссовский вектор)

1. $X = (X_1, X_n)$ – стандартный гауссовский вектор, если $p_X = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp(-\dfrac{1}{2}\|x\|^2), \|x\|^2 = x^T x = \sum x_i^2$
   $X \sim N(0, E_n), 0 \in \mathbb{R}^n$
2. $X \sim N(0, E_n), Y = AX + b, A \in M_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Y \sim N(b, AA^T)$
3. $U \sim N(\mu, \Sigma)$, где $\mu \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in M_{n \times n}$
   $\Sigma = \Sigma^T, \Sigma > 0$
   $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i \geq 0$
   $\Lambda = L^T \Sigma L, L = (u_1, \dots, u_n)$ – ОНБ, $L^T L = E$
   $\Sigma = L \Lambda L^T = L = \underbrace{L\sqrt{\Lambda}L^T}_{\sqrt{\Sigma}} \underbrace{L\sqrt{\Lambda}L^T}_{\sqrt{\Sigma}}$
   $U = \sqrt{\Sigma} X + \mu, X \sim N(0, E)$
   $\Sigma > 0 \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det \Sigma}} \exp -\dfrac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$
   Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g$ – гладкая биекция
   Тогда $p_{g(U)}(t) = p_U(g^{-1}(t)) |\det(g^{-1})'(t)| = \dfrac{p_U(g^{-1}(t))}{|\det g'(g^{-1}(t))|}$
   $X = \sqrt{\Sigma}^{-1}(X - \mu)$

$Y' = (\sqrt{\Sigma})^{-1}$
$\det \Sigma = \det \sqrt{\Sigma}^2$
$|\det \sqrt{\Sigma}| = \sqrt{\det \Sigma}$
$p_U(t) = \frac{p_X(g^{-1}(t))}{|\det g'(g^{-1}(t))|} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{\Sigma})^{-1}(t-\mu)^T(\sqrt{\Sigma})^{-1}(t-$
$\mu))\frac{1}{|\det \sqrt{\Sigma}|}$
$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp(-\frac{1}{2}(t-\mu)^T\Sigma^{-1}(t-\mu))$

9 Независимые случайные величины

Определение
$X_1, \ldots, X_n$ – независимые, если $\forall\, B_1, \ldots, B_n$ $P(X_1 \subset B_1, \ldots, X_n \subset B_n) = P(X_1 \subset B_1) \ldots P(X_n \subset B_n)$
Последовательность независима, если любой ее префикс независимый
Теорема (общий критерий независимости)
Величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы $\Leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \ldots F_n(x_n)$
Доказательство $\Rightarrow$ очевидно
Доказательство $\Leftarrow$
Докажем для размерности 2
$P(X_1 \in (a_1, a_1 + \delta_1], X_2 \in (a2, a_2 + \delta_2]) =$
$\Delta_1\Delta_2 F(a_1, a_2) = \Delta_1[F(a_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1, a_2)] =$
$F(a_1 + \delta_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1 + \delta_1, a_2) + F(a_1, a_2) =$
$F_1(a_1+\delta_1)F_2(a_2+\delta_2) - F_1(a_1)F_2(a_2+\delta_2) - F_1(a_1+\delta_1)F_2(a_2) + F_1(a_1)F_2(a_2) =$
$(F_1(a_1 + \delta_1) - F_1(a_1))(F_2(a_2 + \delta_2) - F_2(a_2)) =$
$P(X_1 \in (a_1, a_1 + \delta_1])P(X_2 \in (a_2, a_2 + \delta_2])$
Теорема (критерий независимости дискретных величин)
Дискретные $X_1, \ldots, X_n$ – независимые $\Leftrightarrow P(X_1 \in \{x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}\}, \ldots, X_n \in \{x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}\}) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \in \{x_{j,1}, \ldots, x_{j,im_j}\})$
Доказательство $\Rightarrow$ очевидно
Доказательство $\Leftarrow$
$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} P(X_1 = x_{1,i_1}, \ldots, X_n = x_{n,i_n}) = \sum_j \prod_i P(X_j = x_{j,i}) = \prod_i \sum_j P(X_j = x_{j,i}) = \prod_i P(X_i \in B_i)$

Теорема (критерий независимости непрерывных величин)
Непрерывные $X_1, \ldots, X_n$ – независимые $\Leftrightarrow p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i p_i(x_i)$

Доказательство $\Rightarrow$
$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) = (\int_{-\infty}^{x_1} p_1(x)\,\mathrm{d}\,x)(\int_{-\infty}^{x_2} p_2(y)\,\mathrm{d}\,y) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p_1(x)p_2(y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

Доказательство $\Leftarrow$ очевидно (наверное)

Пример
$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2), \sigma_i > 0$
$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2}} \exp(-\frac{1}{2}x^T(\sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2)x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2})$

Лемма
X, Y – независимые целочисленные
Тогда $P(X + Y = K) = \sum_i P(X = i)P(Y = K - i) = \sum_i P(X = K - i)P(Y = i)$

Доказательство
$P(X + Y = K) = \sum_i P(X + Y = K | X = i)P(X = i) = \sum_i P(X = K - i)P(X = i)$

Пример

1. $S_n \sim Bin(n, p)$
   $X_n = X_1 + \ldots + X_n, X_i = Bern(p), X_i$ – независимые
   $P(S_{n+1} = k) = P(S_n = k)P(X_{n+1} = 0) + P(S_n = k - 1)P(X_{n+1} = 1) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k+1} + \binom{n}{k-1}p^k q^{n-k+1} = \binom{n+1}{k}p^k q^{n-k+1}$

2. $X \sim Pois(\lambda)$
   $Y = Pois(\mu)$
   $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$

3. $X \sim NB(r_1, p), Y \sim NB(r_2, p)$
   Тогда $X + Y \sim NB(r_1 + r_2, p)$
   $X_1 + \ldots + X_n \sim NB(n, p), X_i \sim NB(1, p) = Geom(p)$
   $P(X_1 + X_2 = K) = \binom{(K+2)-1}{1} q^k p^2$
   $P(S_n + X_{n+1} = K) = \binom{n+k}{n} q^k p^n$

Лемма
X, Y – независимые
Тогда $p_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} p_X(u) p_Y(t-u) \,\mathrm{d}\, u$
Доказательство
$F_{X+Y}(t) = P(X+Y \le t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) \int_{-\infty}^{t-u} p_Y(v) \,\mathrm{d}\, v$
Пример

1. $X + Y$ – независимые, $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
   Тогда $X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
   $X + Y = \sigma_X U_X + \mu_x + \sigma_Y U_Y + \mu_Y, U_X, U_Y \sim N(0,1)$
   $\sigma_Y^2 u^2 + \sigma_X^2 (t-u)^2 = (\underbrace{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}u - \frac{\sigma_X^2 t}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}}_{y})^2 + \frac{t^2\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$
   $$P_{\sigma_X U_X + \mu_x + \sigma_Y U_Y + \mu_Y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{\sigma_X^2} + \frac{(t-u)^2}{\sigma_Y^2})) \,\mathrm{d}\, u =$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \exp(-\frac{1}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}(y^2 + \frac{t^2\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2})) \,\mathrm{d}\, u =$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2})(\underbrace{\frac{1}{2\pi\sigma_X^2\sigma_Y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}) \,\mathrm{d}\, y)}_{1}$$
   $$p_{U+\mu_x+\mu_Y}(t) = p_U(t-\mu_x-\mu_y)|t'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2\sigma_Y^2}} \exp(-\frac{1}{2}\frac{(t-\mu_X-\mu_Y)^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2})$$

Утверждение
$X_1, \ldots, X_n$ – независимые
$X_i \sim Exp(\lambda)$
Тогда $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ – распределение Эранга порядка n
$P_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(t-x) \,\mathrm{d}\, x = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbb{1}(t \ge 0)$
$P_{S_n+X_{n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \mathbb{1}(x \ge 0) \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbb{1}(t-x \ge 0) \,\mathrm{d}\, x = \frac{\lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda t}}{n!} \mathbb{1}(t \ge 0)$

10 Симуляция (моделирование случайных величин)

Пусть есть $rand() : U[0, 1]$ – независимые

```
def Bern(p):
    return rand() <= p


def Bin(n, p):
    return sum(Bern(p) for _ in range(n))

def Geom(p):
    res = 0
    while(!Bern(p)):
        res += 1
    return res

def Discrete(p_1, p_2, ..., p_n, x_1, ..., x_n):
    v = rand()
    if p_1 + ... + p_{n-1} < v: return x_n
    if p_1 + ... + p_{n-2} < v: return x_{n-1}
    ...
    if p_1 < v: return x_2
    return x_1

def Poly(1, p): ... #аналогично

def Poly(n, p):
    return sum(Poly(1, p) for _ in range(n))

def U(a, b):
    return a + (b - a) * rand()

def Exp(lmbda):
    return -ln(rand())/lmbda

def Gamma(n, lmbda):
    return sum(Exp(lmbda) for _ in range(n))

# Случайная величина с распределением F
def Generic(F):
    G = reversed(F) #обратная функция
    return G(rand())
```

```
    def N(0, 1):
        # n -- какоето- большое, p -- любое
        return (Bin(n, p) - n*p) / sqrt(n * p * (1 - p))
```

Утверждение
$X_1, \dots, X_n \sim Exp(1)$ – независимые
$X = \max\{n : X_1 + \ldots + X_n < \lambda\}, \lambda \geq 0$
Тогда $X \sim Pois(\lambda)$
Доказательство

$$P(X \leq k) = P(\underbrace{X_1 + \ldots + X_{k+1}}_{\sim\Gamma(k+1,1)} \geq \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \, \mathrm{d}\, x = -\frac{x^k e^{-x}}{k!}\Bigg|_{\lambda}^{+\infty} + \int_{\lambda}^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} (k-1)! \, \mathrm{d}\, x = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \ldots + \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$$

11 Вероятностные интегралы

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \overset{X}{\mapsto} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P_X)$
$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$
$g \geq 0$ – *борелевская*, т.е. $\forall\, B \in \mathcal{B}\ g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$

$$\underbrace{\int_{\Omega} g(X(\omega)) P(\mathrm{d}\, \omega)}_{\lim_{\operatorname{diam} V(\omega_k) \to 0} \sum g(X(\omega_k)) P(V(\omega_k))} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(\mathrm{d}\, x)}_{\lim_{\operatorname{diam} V(x_k) \to 0} \sum g(x_k) P(X \in V(x_k))}$$
$, V(\cdot)$ – какая-то окрестность

Интеграл Стилтьеса

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{d}\, F(x) = \lim_{x_{k+1} - x_k \to 0, x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]} \sum g(x_k^*)(F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$$

$$= \begin{cases} \sum g(x_i) P(X = x_i), & \text{дискретный случай} \\ \int g(x) p(x) \, \mathrm{d}\, x, & \text{непрерывный случай} \end{cases}$$

$g \geq 0 \Rightarrow$ интеграл либо конечный, либо $+\infty$
$g = g_+ - g_i, I = \int_{\mathbb{R}^n} g_+(x) P(\mathrm{d}\, x) - \int_{\mathbb{R}^n} g_-(x) P(\mathrm{d}\, x)$

- $I_+, I_- < +\infty \Rightarrow I = I_+ - I_-$
- $I_+ = +\infty, I_i < +\infty \Rightarrow I = +\infty$

- $I_+ < +\infty, I_i = +\infty \Rightarrow I = -\infty$
- $I_+, I_i = +\infty \Rightarrow I$ не определено

Свойства

- $\int af + bg = a \int f + b \int g$
- $\int_{A \sqcup B} = \int_A + \int_B$
- $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

Теорема Фубини для независимых величин
X, Y– независимые $\Rightarrow g(x,y)P(\mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y) = \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} g(x,y) P_Y(\mathrm{d}\,y)) P_X(\mathrm{d}\,x)$
Пример (свертка распределений)
X, Y – независимые
$F_{X+Y}(t) = P(X + Y \leq t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}(X + y \leq t) P(\mathrm{d}\,x, \mathrm{d}\,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(x + y \leq t) P_X(\mathrm{d}\,x) P_Y(\mathrm{d}\,y) = \int_{\mathbb{R}} P(X \leq t - y) P_Y(\mathrm{d}\,y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(t - y)\,\mathrm{d}\,F_Y(y)$
Аналогично $F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(t - x)\,\mathrm{d}\,F_X(x)$

12 Математическое ожидание

Определение
$EX = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\,F(x) = \int x P_X(\mathrm{d}\,x)$
Дискретный случай: $EX = \sum x_k p_k$
Непрерывный случай: $EX = \int xp(x)\,\mathrm{d}\,x$
Свойства

1. $Ef(X_1, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) P(\mathrm{d}\,x_1, \ldots, \mathrm{d}\,x_n) = \int_{\mathbb{R}} y\,\mathrm{d}\,F_Y(y), y = f(x_1, \ldots, x_n)$
2. $E(aX) = aEx$

3. $E(X+Y) = EX + EY$

4. X, Y – независимые $\Rightarrow E(XY) = (EX)(EY)$

5. $\underbrace{X \geq 0}_{P(X \geq 0)=1} \Rightarrow EX \geq 0$

6. $\underbrace{X \geq Y}_{P(X \geq Y)=1} \Rightarrow EX \geq EY$

7. **Теорема (неравенство Маркова)**
   $X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq C) \leq \dfrac{EX}{c}$
   Доказательство
   $EX = \displaystyle\int_0^{+\infty} d \,\mathrm{d}\, F(x) = \int_0^c x \,\mathrm{d}\, F(x) + \int_{c+\infty} x \,\mathrm{d}\, F(x) \geq 0 + c \int_c^{+\infty} \mathrm{d}\, F(x) =$
   $cP(X \geq c)$

8. $X \geq 0, EX = 0 \Rightarrow \underbrace{X = 0}_{P(X=0)=1}$
   Доказательство
   $P(X \geq c) \leq \dfrac{0}{c} = 0 \Rightarrow P(X < c) = 1 \forall\, c \Rightarrow P(X = 0) = 1$

9. $\operatorname{supp} X = \mathbb{N} \Rightarrow EX = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$

10. $\operatorname{supp} X = [0, +\infty)$
    $EX = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X \geq r) \,\mathrm{d}\, r$
    Доказательство
    $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X \geq r) \,\mathrm{d}\, r = \int_0^{+\infty} (1 - F(r)) \,\mathrm{d}\, r = \underbrace{x(1 - F(x))\Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} xp(x) \,\mathrm{d}\, x$

Определение
$X, Y-$ некоррелированные $\Leftrightarrow E(XY) = (EX)(EY)$