

Математическая Логика. Теория

Александр Сергеев

1 Введение

Силлогизмы

Modus Ponendo Ponens: Если A и $A \rightarrow B$, то B

Парадокс Рассела

$X = \{x : x \notin x\}$

$(X \in X)?$

Определение

Номинализм – учение о том, что существуют лишь единичные вещи, а общие понятия – лишь имена

Реализм – учение о том, что общие понятия объективно существуют

Номинализм в вопросе решения парадокса Рассела: надо придумать понятие множества

Реализм в вопросе решения парадокса Рассела: необходимо понять, что такое множество на самом деле, докопаться до сути

Программа Гильберта – мы должны формализовать математику и избавиться от произвола, который может вносить сторонний исследователь
Формализация должна быть проверена, и ее непротиворечивость должна быть доказана

Программа Гильберта – реализм: мы верим, что мир устроен некоторым образом, а значит существует некоторая идеальная математика, удовлетворяющая этим свойствам. Нам нужно лишь прислушаться к миру и найти ее

2 Исчисление высказываний

Определение

Высказывание – строка, сформулированная по следующим правилам

Предметный язык – язык, который мы изучаем (язык математической логики)

Метаязык – соглашения о записи. Из метаязыка можно получить предметный язык некоторыми неформализованными действиями

A, B, \dots – Пропозиционная переменная

α, β, \dots – метапеременные (высказывания)

$\alpha \wedge \beta$ – Конъюнкция

$\alpha \vee \beta$ – Дизъюнкция

$\neg \alpha$ – Отрицание

$\alpha \rightarrow \beta$ – Импликация

X, Y, Z – метапеременные для пропозиционных переменных

Приоритет: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация

Дизъюнкция и конъюнкция – левоассоциативные, импликация – правоассоциативная

Выражение на предметном языке – пропозиционные переменные, 4 вида *связок* и полностью расставленные скобки. Все остальные формы записи – метаязык

Схема – строка, строящаяся по правилам предметного языка, где вместо пропозиционных переменных могут стоять маленькие греческие буквы (метапеременные)

Определение

Оценка высказывания $f : P \rightarrow V$, где $V = \{T, F\}$, P – множество пропозиционных переменных

$[[\alpha]] = T$ – оценка высказывания (значение α – истина)

$[[\alpha]]^{X_1:=v_1, \dots, X_n:=v_n}$ – оценка высказывания

Определение

Если $[[\alpha]] = T$ при любой оценке переменных, то она *общезначима* (тавтология): $\models \alpha$

Иначе *опровержима*

Если $[[\alpha]] = T$ при любой оценке переменных, при которой $[[\gamma_1]] = \dots = [[\gamma_n]] = T$, то α – следствие этих высказываний: $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$

Если $[[\alpha]] = T$ при некоторой оценке, то она *выполнима*, иначе *невыполнима*

Аксиомы исчисления высказываний

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

3. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
5. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
7. $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
8. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
9. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
10. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Определение

Доказательством назовем последовательность высказываний $\delta_1, \dots, \delta_n$, где каждое высказывание δ_i либо:

- является аксиомой (существует замена метаварiable для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить схему δ_i)
- получается из $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens: существуют такие $j, k < i$: $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$

Формула *выводима/доказуема*, если существует ее доказательство

Пример

$A \rightarrow (A \rightarrow A)$
 $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$
 $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$
 $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$
 $A \rightarrow A$

Определение

Вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — такая последовательность $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, что σ_i является (одним из следующих):

- аксиомой
- одной из гипотез γ_t
- получена по правилу Modus Ponens из предыдущих

Формула *выводима из гипотез*, если существует ее вывод

Обозначение: $\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$

Определение (корректность теории)

Теория *корректна*, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо

То есть, $\vdash \alpha$ влечет $\models \alpha$

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечет $\vdash \alpha$

Теорема (корректность вычисления высказываний)

Доказательство

Докажем, что любая строка доказательства является общезначимой

Докажем индукцией по количеству строк

База: $n = 1$ – аксиома. В ней нет правила Modus Ponens. Она общезначима

Переход: Пусть для любого доказательства длины n формула δ_n общезначима. Рассмотрим δ_{n+1}

1. Аксиома. Убедимся, что аксиома общезначима
2. Modus Ponens j, k – убедимся, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_k, \delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$, то $\models \delta_{n+1}$

Аксиому проверим через таблицу истинности

Докажем правило Modus Ponens

По индукционному предположению $\models \delta_j, \models \delta_k$

Зафиксируем произвольную оценку

Из общезначимости $[[\delta_j]] = T, [[\delta_k]] = T$

Тогда из таблицы истинности $[[\delta_j]] = [[\delta_k]] = T$ только при $[[\delta_{n+1}]] = T$

Отсюда $\models \delta_{n+1}$

Определение

Контекст – совокупность всех гипотез. Обозначается большой греческой буквой

Пример записи:

$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$

$\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$

$\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

Теорема о дедукции

$$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

Доказательство \Leftarrow

Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Т.е. существует вывод $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \underbrace{\alpha \rightarrow \beta}_{\delta_n}$

Дополним вывод: добавим туда α

По правилу Modus Ponens добавим туда β

Отсюда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Определение

Конечная последовательность – функция $\delta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{F}$

Конечная последовательность, индексированная дробными числами – функция $\zeta : I \rightarrow \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{Q}^+, |I| \in \mathbb{N}$

Доказательство \Rightarrow

Пусть $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Пусть дан некоторый вывод: $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \underbrace{\beta}_{\delta_n}$

Тогда рассмотрим последовательность: $\alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$

Заметим, что выводом эта формула не является, т.к. в ней нет аксиом

Докажем по индукции по длине вывода

Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ – вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то найдется ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, причем $\zeta_1 = \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \zeta_n = \alpha \rightarrow \delta_n$

1. $n = 1$ – ч.с. перехода без Modus Ponens

2. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ – исходный вывод

По индукционному предположению по $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$

Достроим его для δ_{n+1}

• δ_{n+1} – аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$:

$$\zeta_{n+1/3} = \delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$$

$$\zeta_{n+2/3} = \delta_{n+1}$$

$$\zeta_{n+1} = \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$$

• $\delta_{n+1} = \alpha$:

$$\zeta_{n+1/5} = a \rightarrow a \rightarrow a$$

$$\zeta_{n+2/5} = (a \rightarrow a \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow a)$$

$$\zeta_{n+3/5} = (a \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a) \rightarrow (a \rightarrow a)$$

$$\zeta_{n+4/5} = a \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a$$

$$\zeta_{n+1} = a \rightarrow a$$

- δ_{n+1} – Modus Ponens из δ_j и $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$:
 $\zeta_{n+1/5} = \alpha \rightarrow \delta_j$
 $\zeta_{n+2/5} = \alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$
 $\zeta_{n+3/5} = (\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$
 $\zeta_{n+4/5} = (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$
 $\zeta_{n+1} = \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$

Лемма (правило контрапозиции)

Каково бы ни были формулы α, β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Лемма (правило исключенного третьего)

Какова бы ни была формула α , справедливо, что $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

Лемма (правило исключенного допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$

Тогда $\Gamma \vdash \alpha$

Теорема

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Определение

Зададим некоторую оценку, что $[[\alpha]] = x$

Тогда *условным отрицанием* формулы α называется формула $(|\alpha|) =$

$$\begin{cases} \alpha, & x = T \\ \neg\alpha, & x = F \end{cases}$$

Если $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$, то $(|\Gamma|) = (|\gamma_1|), \dots, (|\gamma_n|)$

Пример: $(|A|), (|B|) \vdash (|A \rightarrow B|)$ позволяет записать таблицу истинности в одну строку, перебрав ее для всех оценок

Доказательство теоремы

Для каждой возможной связки \star докажем формулы $(|\phi|), (|\psi|) \vdash (|\phi \star \psi|)$

Теперь построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$(|\Xi|) \vdash (|\alpha|)$, Ξ – контекст (все переменные в таблице)

Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(|\Xi|) \vdash \alpha$. От гипотез можно избавиться индукционно по теореме об исключении допущения и получить требуемое $\vdash \alpha$

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозиционные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ – все переменные, которые используются в α

Пусть задана некоторая оценка переменных

Тогда $(|\Xi|) \vdash (|\alpha|)$

Доказательство

Докажем по индукции по длине формулы α

- База: формула атомарная, т.е. $\alpha = X_i$
Тогда при любом Ξ выполнено $(|\Xi|)^{X_i=T} \vdash X_i$ и $(|\Xi|)^{X_i=F} \vdash \neg X_i$
- Переход:
 $\alpha = \phi \star \psi$, $(|\Xi|) \vdash (|\phi|)$ и $(|\Xi|) \vdash (|\psi|)$
Тогда построим вывод
Сначала запишем доказательство $(|\phi|)$
Потом припишем доказательство $(|\psi|)$
Потом припишем доказательство леммы о связках

3 Интуиционистская логика

Примеры:

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Любое непрерывное отображение f шара \mathbb{R}^n на себя имеет неподвижную точку

Замечание

Заметим, что теорема (и доказательство) не говорит ничего о том, как эту точку найти

Теорема

$\exists a, b$ – иррациональные : a^b – рациональное

Доказательство

Пусть $a = b = \sqrt{2}$

- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – рациональное
- $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – иррациональное
Тогда $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ – рациональное

Замечание

Т.о. мы доказали теорему, не предоставив пример. Наше знание о рациональных и иррациональных числах от этого не увеличилось

Определение

Доказательство чистого существования – доказательство существования объекта без приведения реального примера/рецепта создания этого

объекта

(Неконструктивное доказательство существования объекта)

Замечание

Парадокс брадобрея – результат работы с чистым существованием. Мы предполагаем существование абстрактного объекта, не приводя рецепта для его создания

Может ли быть, что, работая с чистым существованием, мы сможем получить парадоксальные объекты и в других областях математики?

Давайте запретим доказательства чистого существования

Интуиционизм

- Математика не формальна
(не надо ограничивать математику формальностями)
- Математика независима от окружающего мира
- Математика не зависит от логики – это логика зависит от математики
(если мы сможем придумать более удобную логику для математики, мы можем ее использовать)

ВНК-интерпретация логических связок

(сокращение от: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров)

Пусть α, β – некоторая конструкция (что угодно – физическая конструкция, логическое построение, программа, доказательство)

- $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- \perp – конструкция, не имеющая построения
- $\neg \alpha$ – построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

$\alpha \vee \neg \alpha$ не может быть построено в общем виде, потому что мы не знаем, что именно было построено

Пример

Пусть α – это задача $P = NP$

Тогда $\alpha \vee \neg\alpha$ не может быть построено, т.к. мы не знаем, $P = NP$ или $P \neq NP$

Импликация

Пусть: A – сегодня в СПб идет дождь

B – сегодня в СПб светит солнце

C – сегодня я получил «отлично» по матлогу

Рассмотрим $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$

Заметим это выражение не может быть построено, в отличие от классической логики

Отсюда: импликацию можно понимать как «формальную» и «материальную»

Формализация

Заметим, что формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание – основное

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ заменена на $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$

4 Топология

Обозначение

$\mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств X

Определение

Топологическое пространство – упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, X – множество (носитель), $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ – *топология*, причем

1. $\emptyset, X \in \Omega$
2. если $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$ (конечное пересечение)
3. если $\{A_\alpha\}$ – семейство множеств из Ω , то $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \in \Omega$ (произвольное объединение)

Элементы Ω – *открытые множества*

Определение

\mathcal{B} – база топологического пространства $\langle X, \Omega \rangle$ ($\mathcal{B} \subseteq \Omega$), если всевозможные объединения элементов (в т.ч. пустые) из \mathcal{B} дают Ω

Определение

Дискретная топология – $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$

Топология стрелки – $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \rangle$

Примеры

$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ – база евклидовой топологии на \mathbb{R}

$\{\{x\} : x \in X\}$ – база дискретной топологии

Определение

Метрикой на X назовем множество, на котором определена функция расстрояния $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Определение

Открытым ε -шаром с центром в $x \in X$ назовем $\{t \in X : d(x, t) < \varepsilon\}$

Определение

Если X – некоторое множество и d – метрика на X , то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$ порождено метрикой d

Определение

Функция $f : X \rightarrow Y$ непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт

Определение

Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Определение

Пространство $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ – подпространство пространства $\langle X, \Omega \rangle$, если $X_1 \subseteq X$ и $\Omega_1 = \{A \cap X_1, A \in \Omega\}$

Определение

Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ связно, если нет $A, B \in \Omega$, что $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$ и $A, B \neq \emptyset$

Определение (топология на деревьях)

Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением \prec : $a \prec b \Leftrightarrow a$ – предок b

Тогда подмножество вершин $X \subseteq V$ назовем открытым, если из $a \in X, a \preceq b$ следует, что $b \in X$ (множество вершин и всех их потомков)

Теорема

Лес связан (как граф) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно

Доказательство \Rightarrow

Пусть лес связан, но топологически не связан. Тогда найдутся непустые A, B , что $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$

Пусть $v \in V$ – корень дерева V и $v \in A$

Тогда $A = \{x : v \preceq x\} = V, B = \emptyset$

Доказательство \Leftarrow

Пусть лес топологически связан, но есть несколько корней v_1, \dots, v_k

Возьмем $A_i = \{x : v_i \preceq x\}$. Тогда все A_i открыты, непусты и дизъюнкты
 $V = \bigcup_i A_i$

Определение

Линейная связность – любые точки соединены путем

Определение

Множество нижних границ (lwb_Ω) – ...

Множество верхних границ (uwb_Ω) – ...

Минимальный элемент ($m \in X$) – Нет элементов, что $x \prec m$

Максимальный элемент ($m \in X$) – ...

Наименьший элемент ($m \in X$) – При всех $y \in X$ выполнено $m \preceq y$

Наибольший элемент ($m \in X$) – ...

Инфинут – наибольшая нижняя граница

Супремум – наименьшая верхняя граница

Определение

Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ и возьмем \subseteq как отношение частичного порядка на $\mathcal{P}(X)$

Тогда $A^\circ := \inf_\Omega(\{A\})$ – внутренность множества

Теорема

A° определена для любого A

Доказательство

Пусть $V = \text{lwb}_\Omega\{A\} = \{Q \in \Omega : Q \subseteq A\}$

Тогда $\inf_\Omega\{A\} = \bigcup_{v \in V} v$

Напомним, что $\inf_{\mathcal{U}} T = \text{наиб}(\text{lwb}_{\mathcal{U}} T)$

1. Покажем принадлежность: $\bigcup_{v \in V} v \subseteq A, \in \Omega$

2. Покажем, что все из V меньше или равны: пусть $X \in V$. Тогда
$$X \subseteq \bigcup_{v \in V} v$$

Определение

Решеткой называется упорядоченная пара $\langle X, (\preceq) \rangle$, где X – некоторое множество, (\preceq) – частичный порядок на X , такой, что для любых $a, b \in X$ определены $a + b = \sup\{a, b\}, a \cdot b = \inf\{a, b\}$

То есть $a + b$ – наименьший элемент c , что $a, b \preceq c$

Определение

Псевдодополнение $a \rightarrow b$ – наибольший из $\{x : a \cdot x \preceq b\}$

Определение

Дистрибутивной решеткой называется такая, что $\forall a, b, c \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Импликативная решетка – такая, что для любых элементов есть псевдодополнение

Лемма

Любая импликативная решетка – дистрибутивна

Определение

0 – наименьший элемент решетки, 1 – наибольший элемент решетки

Лемма

В любой импликативной решетке $\langle X, (\preceq) \rangle$ есть 1

Доказательство

Рассмотрим $a \rightarrow a$, тогда $a \rightarrow a = \text{наиб}\{c : ac \preceq a\} = \text{наиб } X = 1$

Определение

Импликативная решетка с 0 – псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга)

В такой решетке определено $\sim a := a \rightarrow 0$

Определение

Булева алгебра – псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a \equiv 1$

Замечание

Известная нам булева «алгебра» – булева алгебра

Лемма

$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$ – булева алгебра

Лемма

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ – псевдобулева алгебра

Определение

Пусть некоторое вычисление высказываний оценивается значениями из некоторой решетки

Назовем оценку согласованной с исчислением, если

$$[[\alpha \& \beta]] = [[\alpha]] \cdot [[\beta]]$$

$$[[\alpha \vee \beta]] = [[\alpha]] + [[\beta]]$$

$$[[\alpha \rightarrow \beta]] = [[\alpha]] \rightarrow [[\beta]]$$

$$[[\neg \alpha]] = \sim [[\alpha]]$$

$$[[A \& \neg A]] = 0$$

$$[[A \rightarrow A]] = 1$$

Теорема

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $[[\alpha]] = 1$

Теорема

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, то $[[\alpha]] = 1$

5 Интуиционистское исчисление высказываний (+ алгебра Гейтинга)

Определение

Язык *разрешим*, если существует программа, позволяющая определить, относится ли слово к языку или нет

Язык исчислений разрешим, если для каждой формулы мы можем проверить, истинна она или ложна

Язык И.И.В. корректен (задание в д.з.) и непротиворечив (т.к. является упрощением К.И.В., которая непротиворечива)

Определение

Определим предпорядок на высказываниях $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$ – в интуиционистском исчислении высказываний

Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$

Определение

Пусть L – множество всех высказываний

Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L / \approx$

Теорема

\mathcal{L} – псевдобулева алгебра

Схема доказательства

$[\alpha]_{\mathcal{L}}$ – класс эквивалентности в алгебре Линденбаума

Надо показать, что \preceq – отношение порядка на \mathcal{L} , $[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$, $[\alpha \& \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$, что импликация есть псевдодополнение, $[A \& \neg A]_{\mathcal{L}} = 0$, $[\alpha]_{\mathcal{L}} \rightarrow 0 = [\neg \alpha]_{\mathcal{L}}$

Теорема

Пусть $[[\alpha]] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Такая оценка высказываний интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$

Доказательство

Возьмем в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума: $[[\alpha]] = [\alpha]_{\mathcal{L}}$

Пусть $\models \alpha$

Тогда $[[\alpha]] = 1$ во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и $[[\alpha]] = 1_{\mathcal{L}}$

То есть $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \rightarrow A]_{\mathcal{L}}$

То есть $A \rightarrow A \approx \alpha$

Значит в частности $A \rightarrow A \vdash \alpha$

Значит $\vdash \alpha$

Определение

Модель Крипке(Шкала) $\langle W, \preceq, \Vdash \rangle$:

Представим, что существует множество альтернативных миров, в которых верны или не верны различные утверждения

\mathcal{W} – множество миров

\preceq – нестрогий частичный порядок на \mathcal{W}

$(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ – отношения *вынужденности* между мирами и переменными, которые выполнены в этих мирах, причем если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$

Доопределим вынужденность:

$W \Vdash \alpha \& \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$

$W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$

$W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$

$W \Vdash \neg \alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех W

Будем говорить, что $\models \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке

Пример

$\not\models A \vee \neg A$

Доказательство

$W_1 \preceq W_2, W_3$

$W_2 \Vdash A$

$W_3 \Vdash \neg A$

Тогда $W_1 \not\models A, W_1 \not\models \neg A$

Отсюда $W_1 \not\models A \vee \neg A$

Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \preceq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle W, \preceq, \Vdash \rangle$ – некоторая модель Крипке

Тогда она корректная модель интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство

Докажем для всех древовидных \preceq

Обобщение на произвольный порядок несложное (так утверждается)

Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} : W \Vdash \alpha\}$ – открыто в топологии для дерева

Значит, положив $V = \{S : S \subset \mathcal{W} \text{ и } S \text{ – открыто}\}$ и $[[\alpha]] = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга

Определение

Пусть задано множество значений V , $T \in V$ – истина, функция $f_P : P \rightarrow V$,

функции $f_\&, f_\vee, f_\rightarrow : V \times V \rightarrow V$, функция $f_\neg : V \rightarrow V$

Тогда оценка $[[X]] = f_P(X)$, $[[\alpha \star \beta]] = f_\star([[\alpha]], [[\beta]])$, $[[\neg \alpha]] = f_\neg([[\alpha]])$ – табличная

Если $\vdash \alpha$ влечет $[[\alpha]] = T$ при всех оценках пропозиционных переменных f_P , то $\mathcal{M} := \langle V, T, f_\&, f_\vee, f_\rightarrow, f_\neg \rangle$ – табличная модель

Определение

Табличная модель конечна, если V – конечно

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство

Пусть существует полная конечная табличная модель $\mathcal{M}, V = \{v_1, \dots, v_n\}$

То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$

Рассмотрим $\alpha_n = \bigvee_{1 \leq p < q \leq n+1} A_p \rightarrow A_q$

Рассмотрим оценку $f_P : \{A_1, \dots, A_{n+1}\} \rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$

По принципу Дирихле существуют $p \neq q : [[A_p]] = [[A_q]]$

Значит $[[A_p \rightarrow A_q]] = f_{\rightarrow}([A_p], [A_q]) = f_{\rightarrow}(v, v)$

С другой стороны, $\vdash X \rightarrow X$ (из полноты) – поэтому $f_{\rightarrow}([X], [X]) = T$

Значит $[[A_p \rightarrow A_q]] = f_{\rightarrow}(v, v) = f_{\rightarrow}([X], [X]) = T$

Аналогично $\vdash \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau$

Отсюда $[[\alpha_n]] = [[\sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau]] = T$. Т.е. $\models \alpha_n$ в табличной модели

Однако, в такой модели $\not\models \alpha_n$

Пусть $W_R \preceq W_i, i = 1 \dots n$

$W_i \models A_i$

Если $q > 1$, то $W_1 \not\models A_q$ и $W_1 \not\models A_1 \rightarrow A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\models A_q$ и $W_2 \not\models A_2 \rightarrow A_q$

...

Если $q < p$, то $W_p \not\models A_q$ и $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$

Т.е. $W_R \not\models A_p \rightarrow A_q$

Отсюда $W_R \not\models \bigvee_{p < q} A_p \rightarrow A_q$

Т.е. $W_R \not\models \alpha_n$, потому $\not\models \alpha_n$, а значит $\not\models \alpha_n$

Отсюда если мы проверили формулу в некоторой конечной модели, то из этого не следует, что она истинная вообще

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α, β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

Определение

Решетка геделева, если $a + b = 1$ влечет $a = 1$ или $b = 1$

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

Определение

По определению

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, \preceq \rangle$ определим операцию геделевизации

$\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \rangle$

Где $\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}$ – минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \preceq b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$
- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$
- $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$

Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ – геделева алгебра

Доказательство

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$

(т.к. $\omega \in$ множество верхних граней $\{a, b\}$)

Теорема

Рассмотрим оценку $[[\alpha]]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [[\alpha]]_{\mathcal{A}}$

Тогда она является согласованной с ИИВ

Индукция по структуре формулы и перебор операций

Рассмотрим $\&$

Неформально: почти везде $[[\alpha]]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [[\beta]]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [[\alpha]]_{\mathcal{L}} \cdot [[\beta]]_{\mathcal{L}}$, поскольку $[[\sigma]]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq \omega$

Но нет ли случаев, когда $\omega = \text{наиб}\{x : x \preceq [[\alpha]]_{\Gamma(\mathcal{L})} \& x \preceq [[\beta]]_{\Gamma(\mathcal{L})}\}$

Чтобы убедиться, что всегда $[[\alpha \& \beta]]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [[\alpha]]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [[\beta]]_{\Gamma(\mathcal{L})}$, надо показать:

- $[\alpha \& \beta]$ – из множества нижних граней: $\alpha \& \beta \vdash \alpha$ и $\alpha \& \beta \vdash \beta$
 - $[\alpha \& \beta]$ – наибольшая нижняя грань: $x \preceq [\alpha]$ и $x \preceq [\beta]$ влечет $x \preceq [\alpha \& \beta]$
- Разбор случаев: $(x \in \mathcal{L}, x = \omega)$. $\omega \preceq [\alpha]$ и $\omega \preceq [\beta]$ влечет $[\alpha] = [\beta] = 1$, отсюда $[\alpha \& \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = 1$

Определение

\mathcal{A}, \mathcal{B} – алгебры Гейтинга

Тогда $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – гомоморфизм, если $\gamma(a \star b) = g(a) \star g(b), g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}, g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$

Определение

Будем говорить, что оценка $[[\cdot]]_{\mathcal{A}}$ согласована с $[[\cdot]]_{\mathcal{B}}$ и гомоморфизмом g , если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}, g([[\alpha]])_{\mathcal{A}} = [[\alpha]])_{\mathcal{B}}$

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма