Дифференциальные уравнения. Теория

Александр Сергеев

1 Уравнения первого порядка

1.1 Дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

Определение
$F(x, y, y') = 0$ – обыкновенное д/у первого порядка
(F – функция от трех параметров)
Определение
ϕ – решение д/у на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$
(п. 1 необязательный, но нам будет удобнее работать только с такими функциями)
Определение
Интегральная кривая уравнения – график его решения
Определение
Общее решение – множество всех его решений
Определение
Общий интеграл уравнения – уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения при некоторых значениях C
Первый метод решения – подбор
Второй метод решения – интегрирование (для уравнений вида $y' = Cx$)

1.2 Уравнения в нормальной форме

Определение
$y' = f(x, y)$ – уравнение, выраженное относительно производной/уравнение в нормальной форме/нормальное уравнение
Определение

Область определения нормального уравнения – область определния f (множество точек, через которые могут проходить интегральные кривые)
Определение
Ломаная Эйлера – ломаная с вершинами $\{(x_k, y_k)\}$, где $x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$
Третий метод решения (метод Эйлера) – построение ломаной Эйлера. Метод приближенный

1.3 Уравнение в дифференциалах

Определение
$P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение в дифференциалах
Определение
Решением $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$
Также решениями будут функции $x = \psi(y)$ (аналогично)
Определение
Область определения уравнения в дифференциалах $= D_P \cap D_Q$
Определение
$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделенными переменными
Замечание
Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}\,x + \int Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$
Определение
Вектор-функция $(\phi, \psi) : \langle \alpha, , \rangle\beta \to \mathbb{R}^2$ – параметрическое решение у.д., если $\phi, \psi \in C^1\langle \alpha, \beta\rangle, (\phi', \psi') \neq (0, 0)$ (кривая гладкая)
и $P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$
Определение
Интегральная кривая уравнения в дифференциалах – годограф ее параметрического решения
Определение
$\gamma = \{r(t) | t \in \langle \alpha, \beta\rangle\}$ – годограф функции $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$
Утверждение
Если $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах, то $(t, \phi(t))$ – параметрическое решение
Если $(\phi(t), \psi(t))$ – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta\rangle$, то $\forall\, t_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle\ \exists\, U(t_0) :$

годограф функции (ϕ, ψ) – график некоторого решения $y = g(x)$ или $x = h(y)$

Геометрический смысл

Пусть (ϕ, ψ) – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда $P(\phi(t_0), \psi(t_0))\phi'(t_0) + Q(\phi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = 0$ при $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$\rightrightarrows F = \begin{vmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{vmatrix}, r(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix}$

$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$

$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \perp r'(t_0)$

$r'(t_0)$ – вектор касательной к интегральным кривым

Тогда F – поле перпендикуляров

Определение

Поле на плоскости – это отображение $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Определение

Дифференциальные уравнения называют эквивалентными/равносильными на множестве D, если на этом множестве они имеют одинаковое множество интегральных кривых

Утверждение

$y' = f(x, y)$ равносильно $\mathrm{d}\, y = f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$

Замечание

Уравнение в дифференциалах равносильно $y'_x = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ в областях, где $Q(x, y) \neq 0$

и $x'_y = -\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ в областях, где $P(x, y) \neq 0$

Определение

Если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то (x_0, y_0) – особая точка уравнения в дифференциалах

1.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение

$P(x) \,\mathrm{d}\, x + Q(y) \,\mathrm{d}\, y = 0$ – Уравнение с разделенными переменными

Определение

Функция $y = \phi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ при $x \in E$, если $F(x, \phi(x)) \equiv 0$ при $x \in E$

Теорема (общие решение уравнения с разделенными перемен-

ными)
Пусть $P \in C\langle a, b\rangle, Q \in C\langle c, d\rangle$
$P^{(-1)}, Q^{(-1)}$ – некоторые первообразные P, Q
Тогда $y = \phi(x)$ – решение уравнения на $\langle\alpha, \beta\rangle \Leftrightarrow$

- $\phi \in C^1\langle\alpha, \beta\rangle$
- $\exists\, C \in \mathbb{R} : y = \phi(x)$ неявно задана уравнением $P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(y) = C$

Доказательство $\Rightarrow$
Пусть $y = \phi(x)$ – решение на $\langle\alpha, \beta\rangle$
1 – по определению
Выберем $x_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle, y_0 = \phi(x_0)$
Заметим, что $\exists\, A:\ P^{(-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A$
$\exists\, A_2:\ Q^{(-1)}(y) = \int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2$
$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$
Сделаем замену $t \to \phi(t)$ справа
$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$
$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$
$\int_{x_0}^{x} \underbrace{(P(t) + Q(\phi(t))\phi'(t))}_{0 \text{ по определению решения}}\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$
Отсюда $C := A + A_2$
Т.о. 2 доказано
Доказательство $\Leftarrow$
Проверим $P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$ на $\langle\alpha, \beta\rangle$
$P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(\phi(x)) \equiv C$
Продифференцируем
$P(x) = Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$
Определение
$p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}\,x + p_2(x)q_2(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными

1.5 Задача Коши

Рассмотрим $y' = f(x, y)$

Определение

Задачей Коши (ЗК) для нормального уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$

Теорема Пиано (частный случай) – существование решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

Пусть $f \in C(G), G$ – область (открытое связное множество)

Возьмем $(x_0, y_0) \in G$

Тогда $\exists\, E = \langle a, b\rangle, x_0 \in E, \exists\, \phi : E \to \mathbb{R}$ – решение для задачи Коши

$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Теорема Пикара о единственности решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

$f, f'_y \in C(G), G$ – область, $(x_0, y_0) \in G$

Пусть ψ, ϕ – решения задачи Коши

Тогда $\phi = \psi$ на $D_\phi \cap D_\psi$

1.6 Линейное уравнение 1-ого порядка

Определение

$y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнение

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнение

Теорема (общее решение линейного уравнения первого порядка)

$E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$

Тогда $y = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$ – общее решение ЛУ

Доказательство

Пусть S – множество всех решений ЛУ

$F := \{\phi : \underbrace{\widetilde{E}}_{\text{промежуток}} \subset E \to \mathbb{R}\}, \phi = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}$

Докажем, что $F = S$

Возьмем $\phi \in S$

Тогда $\phi' \equiv p\phi + q$ на $\widetilde{E}$

$\phi'\mu = p\phi\kappa + q\mu$

$\phi'\mu - p\phi\mu = q\mu$

$\phi' e^{-\int p} - p\phi e^{-\int p} = (\phi e^{-\int p})' = (\phi\mu)'$
$(\phi\mu)' = q\mu$
$\phi\mu = \int q\mu + C$
$\phi = \dfrac{\int(\phi\mu) + C}{\mu}$
Отсюда $\phi \in F$
Возьмем $\phi \in F$
$\phi = \dfrac{C + \int(\mu q)}{\mu}$ на $\widetilde{E}$
$\phi \in C^1$
Подставим в уравнение
$\phi' = p\phi + q$
$\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{p(C + \int(\mu q))}{\mu} + q$
Л.ч.: $\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{\mu^2 q - (-\pi)\mu(C + \int(pq))}{\mu^2} = q + \dfrac{p}{\mu}(C + \displaystyle\int pq)$
П.ч. = Л.ч.
Ч.Т.Д.
Следствие (общее решение ЛОУ)
$p \in C^1(E), E = \langle a, b \rangle$
Тогда $y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$
Доказательство
$q = 0$
Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)

1. Для ЛУ $y' = p(x)y + q(x)$ запишем соответствующее ЛОУ
   $y_2' = p(x)y_2$
   $y_2 = Ce^{\int p}$

2. Заменим C на $C(x)$ и подставим в исходное уравнение
   $y = C(x)e^{\int p}$
   $p(x)(C(x)e^{\int p}) + q(x) = (C(x)e^{\int p})'$

3. Находим $C(x)$ из полученного уравнения

4. Запишем общее решение $y = C(x)e^{\int p}$

Доказательство
В общем виде мы получим ту же формулу, что и в предыдущем методе

1.7 Уравнение в полных дифференциалах

Определение

$p(x, y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y) \,\mathrm{d}\, y = 0, \exists\, u : u'_x = P, u'_y = Q$ – уравнение в дифференциалах

Его решение имеет вид $\mathrm{d}\, u = 0$

$\mathrm{d}\, u = u'_x \,\mathrm{d}\, x + u'_y \,\mathrm{d}\, y$

Тогда $u = \mathrm{const}$

Признак уравнения в полных дифференциалах: $P, Q \in C^1(G), G$ – область, $P'_y = Q'_x$