

Математический анализ. Практика

Александр Сергеев

1 Урок 05.09.2022

Пусть есть функция $f(x)$

Определение

$f(x)$ - Инъекция, если $\forall x_0 \overline{\exists x : f(x) = f(x_0)}$

Определение

$f(x)$ - Сюръекция, если $\forall y_0 \exists x : f(x) = y_0$

Определение

$f(x)$ - Биекция, если $\forall y_0 \exists! x : f(x) = y_0$
(Сюръекция+Инъекция)

Биекция из A в $B \Leftrightarrow |A| = |B|$

Сравним мощности групп чисел:

1) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Доказательство

Получим биекцию, сопоставив значениям $2k$ из \mathbb{N} значения k из \mathbb{Z} , а значениям $2k + 1$ из \mathbb{N} значения $-(1 + k)$ из \mathbb{Z} . Ч.т.д.

2) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Доказательство

Представим числа из \mathbb{Q} как $\frac{p}{q}$, где p - целое, q - положительное. Составим таблицу, отложив по горизонтали p , а по вертикали q :

	0	1	-1	2	-2	3
1	1	2	3	5	8	11
2	.	4	6	.	.	
3	.	7	9			
4	.	10				
5	.					

Мы получили бесконечную таблицу всех значений \mathbb{Q} . Пронумеруем ее по диагонали в направлении сверху вниз справа налево, пропуская повторяющиеся значения. Мы получили биекцию из \mathbb{N} в \mathbb{Q} . Отсюда два множества равномощны, ч.т.д.

3) $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$

Доказательство

Выберем $X = [0; 1)$, где все числа $x \in X$ содержат в своей записи только 0 и 1.

Пусть $|X| = |\mathbb{N}|$.

Сопоставим каждому числу из \mathbb{N} число из X .

Мы получили биекцию:

$$\begin{array}{c|l} 1 & 0, r_{11} \ r_{12} \ r_{13} \ r_{14} \ \dots \\ 2 & 0, r_{21} \ r_{22} \ r_{23} \ r_{24} \ \dots \\ 3 & 0, r_{31} \ r_{32} \ r_{33} \ r_{34} \ \dots \\ 4 & 0, r_{41} \ r_{42} \ r_{43} \ r_{44} \ \dots \end{array}$$

Возьмем число $0, \overline{r_{11}} \ \overline{r_{22}} \ \overline{r_{33}} \ \overline{r_{44}} \ \dots$, где $\overline{x} = 1 - x$. Это число отличается как минимум одной цифрой от каждого числа в таблице. При этом в нем нет (9), что гарантирует, что каждое число в X может быть представлено единственным способом. Тогда мы получили число, не содержащееся в таблице. Отсюда $|X| > |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, ч.т.д.

Свойства мощности:

1. $|A| = \infty \Rightarrow |A^2| = |A|$
2. $|2^A| > |A|$, где 2^A - булеан - множество всех подмножеств A .
3. $\left. \begin{array}{l} \text{Существует инъекция из } A \text{ в } B \\ \text{Существует инъекция из } B \text{ в } A \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = |B|$

2 Урок 12.09.2022

Последовательности

Методы нахождения пределов:

1. Теорема о двух городских

2. Линейность:

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha A + \beta B$$

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B \Rightarrow x_n y_n \rightarrow AB$$

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0 \wedge \exists N : \forall n > N \ y_n \neq 0$$

3. Доказательство существования предела:

Пусть x_n монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу). Тогда x_n сходится.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

3 Урок 19.09.2022

Частичный предел

Определение

$$x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

x_n, y_n - эквивалентные последовательности

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ - первый замечательный предел}$$

Правило Лопиталя:

$$f(x), g(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Определение

Подпоследовательность - упорядоченное подмножество с индуцированным порядком (т.е. если в последовательности элемента стояли в определенном порядке, то те элементы, которые попали в подпоследовательность, стоят в ней в том же порядке)

Определение

Пусть x_{n_k} - подпоследовательность x_n . Тогда $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} a$ - *частичный предел* x_n

Определение

$\sup A$ - наименьшая верхняя граница A

$\inf A$ - наибольшая нижняя граница A

$\sup A, \inf A \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\sup A, \inf A$ всегда существуют.

$\sup\{\text{частичные пределы } x_n\}$ - верхний предел

$\inf\{\text{частичные пределы } x_n\}$ - нижний предел

4 Урок 17.10.2022

Предел функции

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x : 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$

$f(x)$ - непрерывна в a , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Для непрерывной $f(x) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x : \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$ (в том числе при $x = a$)

Если F непрерывна, то $\lim_{x \rightarrow a} F(f(x)) = F(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Определение

Пусть $a : a$ - предельная в D_f и не содержится там

Тогда a - *особая точка*

a - *устраняемая*, если существует предел в точке a . Тогда определим

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases} \quad \text{- устранение особенностей}$$

$$f'(x) = \lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + g(h), \text{ где } g(h) = f(x + h) - f(x) - hf'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow g(h) = o(h) \text{ (на самом деле } g(h) \in o(h), \text{ но так не пишут)}$$

Тогда $\exists f'(x) \rightarrow f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$

Отсюда $e^{x+h} = e^x + he^x + o(h)$

$$e^h = 1 + h + o(h)$$

$$\sin h = \sin(0+h) = \sin 0 + h \sin' 0 + o(h) = h + o(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$$

5 Урок 24.10.2022

1. $o(x) + o(x) = o(x)$
2. $o(o(x)) = o(x)$
3. $x o(x) = o(x^2)$
4. $o(1) = \{f : f \rightarrow 0\}$
5. $o(x^3) = o(x)$, но не наоборот
6. $\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$
7. $o(x) + o(x^2) = o(x)$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Если функция дифференцируема:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \text{ где } o(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

6 Урок 14.11.2022

Определение

Функция f называется *дифференцируемой* в точке x , если $f(x + \delta x) - f(x) = A\delta x + o(\delta x)$, где A - константа

Если f дифференцируема, то $A = f'(x)$

$A\delta x$ - *дифференциал* в точке x

Свойства дифференциала dx

1. $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$

2. $d(fg) = f dg + g df$ - Формула Лейбница

3. $d1 = d1 \cdot 1 = 1 d1 + 1 d1$
 $d1 = 0$

4. $d(dx) = 0$

$$d(df) = d^2 f = d(f'(x) dx) = (dx) df'(x) + f'(x) d(dx) = f''(x)(dx)^2$$

Определение

f - *гладкая*, если она дифференцируема до бесконечности (на практике - дифференцируема столько, сколько нужно)

7 Урок 5.12.2022

Функция *возрастает* в x_* , если в некоторой выколотой окрестности x_*

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \geq 0$$

Тогда $f'(x_*) \geq 0$

Если $f'(x_*) > 0$, то функция возрастает