Дифференциальные уравнения. Теория

Александр Сергеев

1 Уравнения первого порядка

1.1 Дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

Определение
$F(x, y, y') = 0$ – обыкновенное д/у первого порядка
(F – функция от трех параметров)
Определение
ϕ – решение д/у на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$
(п. 1 необязательный, но нам будет удобнее работать только с такими функциями)
Определение
Интегральная кривая уравнения – график его решения
Определение
Общее решение – множество всех его решений
Определение
Общий интеграл уравнения – уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения при некоторых значениях C
Первый метод решения – подбор
Второй метод решения – интегрирование (для уравнений вида $y' = Cx$)

1.2 Уравнения в нормальной форме

Определение
$y' = f(x, y)$ – уравнение, выраженное относительно производной/уравнение в нормальной форме/нормальное уравнение
Определение

Область определения нормального уравнения – область определния f (множество точек, через которые могут проходить интегральные кривые)

Определение

Ломаная Эйлера – ломаная с вершинами $\{(x_k, y_k)\}$, где $x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$

Третий метод решения (метод Эйлера) – построение ломаной Эйлера. Метод приближенный

1.3 Уравнение в дифференциалах

Определение

$P(x, y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение в дифференциалах

Определение

Решением $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$

Также решениями будут функции $x = \psi(y)$ (аналогично)

Определение

Область определения уравнения в дифференциалах $= D_P \cap D_Q$

Определение

$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделенными переменными

Замечание

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}\,x + \int Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$

Определение

Вектор-функция $(\phi, \psi) : \langle \alpha, , \rangle\beta \to \mathbb{R}^2$ – параметрическое решение у.д., если $\phi, \psi \in C^1\langle \alpha, \beta\rangle, (\phi', \psi') \neq (0, 0)$ (кривая гладкая)
и $P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$

Определение

Интегральная кривая уравнения в дифференциалах – годограф ее параметрического решения

Определение

$\gamma = \{r(t) | t \in \langle \alpha, \beta\rangle\}$ – годограф функции $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$

Утверждение

Если $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах, то $(t, \phi(t))$ – параметрическое решение

Если $(\phi(t), \psi(t))$ – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta\rangle$, то $\forall\, t_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle\ \exists\, U(t_0) :$

годограф функции (ϕ, ψ) – график некоторого решения $y = g(x)$ или $x = h(y)$

Геометрический смысл

Пусть (ϕ, ψ) – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда $P(\phi(t_0), \psi(t_0))\phi'(t_0) + Q(\phi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = 0$ при $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$\rceil F = \begin{vmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{vmatrix}, r(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix}$

$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$

$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \perp r'(t_0)$

$r'(t_0)$ – вектор касательной к интегральным кривым

Тогда F – поле перпендикуляров

Определение

Поле на плоскости – это отображение $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Определение

Дифференциальные уравнения называют эквивалентными/равносильными на множестве D, если на этом множестве они имеют одинаковое множество интегральных кривых

Утверждение

$y' = f(x, y)$ равносильно $\mathrm{d}\, y = f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$

Замечание

Уравнение в дифференциалах равносильно $y'_x = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ в областях, где $Q(x, y) \neq 0$

и $x'_y = -\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ в областях, где $P(x, y) \neq 0$

Определение

Если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то (x_0, y_0) – особая точка уравнения в дифференциалах

1.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение

$P(x) \,\mathrm{d}\, x + Q(y) \,\mathrm{d}\, y = 0$ – Уравнение с разделенными переменными

Определение

Функция $y = \phi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ при $x \in E$, если $F(x, \phi(x)) \equiv 0$ при $x \in E$

Теорема (общие решение уравнения с разделенными перемен-

ными)

Пусть $P \in C\langle a, b\rangle, Q \in C\langle c, d\rangle$

$P^{(-1)}, Q^{(-1)}$ – некоторые первообразные P, Q

Тогда $y = \phi(x)$ – решение уравнения на $\langle \alpha, \beta\rangle \Leftrightarrow$

- $\phi \in C^1\langle \alpha, \beta\rangle$
- $\exists\, C \in \mathbb{R} : y = \phi(x)$ неявно задана уравнением $P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(y) = C$

Доказательство $\Rightarrow$

Пусть $y = \phi(x)$ – решение на $\langle \alpha, \beta\rangle$

1 – по определению

Выберем $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle, y_0 = \phi(x_0)$

Заметим, что $\exists\, A : \ P^{(-1)}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A$

$\exists\, A_2 : \ Q^{(-1)}(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$

Сделаем замену $t \to \phi(t)$ справа

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \underbrace{(P(t) + Q(\phi(t))\phi'(t))}_{0 \text{ по определению решения}}\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$

Отсюда $C := A + A_2$

Т.о. 2 доказано

Доказательство $\Leftarrow$

Проверим $P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$

$P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(\phi(x)) \equiv C$

Продифференцируем

$P(x) = Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$

Определение

$p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}\,x + p_2(x)q_2(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными

1.5 Задача Коши

Рассмотрим $y' = f(x, y)$

Определение

Задачей Коши (ЗК) для нормального уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$

Теорема Пиано (частный случай) – существование решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

Пусть $f \in C(G), G$ – область (открытое связное множество)

Возьмем $(x_0, y_0) \in G$

Тогда $\exists\, E = \langle a, b\rangle, x_0 \in E, \exists\, \phi : E \to \mathbb{R}$ – решение для задачи Коши

$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Теорема Пикара о единственности решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

$f, f'_y \in C(G), G$ – область, $(x_0, y_0) \in G$

Пусть ψ, ϕ – решения задачи Коши

Тогда $\phi = \psi$ на $D_\phi \cap D_\psi$

1.6 Линейное уравнение 1-ого порядка

Определение

$y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнение

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнение

Теорема (общее решение линейного уравнения первого порядка)

$E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$

Тогда $y = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$ – общее решение ЛУ

Доказательство

Пусть S – множество всех решений ЛУ

$F := \{\phi : \underbrace{\widetilde{E}}_{\text{промежуток}} \subset E \to \mathbb{R}\}, \phi = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}$

Докажем, что $F = S$

Возьмем $\phi \in S$

Тогда $\phi' \equiv p\phi + q$ на $\widetilde{E}$

$\phi'\mu = p\phi\kappa + q\mu$

$\phi'\mu - p\phi\mu = q\mu$

$\phi' e^{-\int p} - p\phi e^{-\int p} = (\phi e^{-\int p})' = (\phi\mu)'$
$(\phi\mu)' = q\mu$
$\phi\mu = \displaystyle\int q\mu + C$
$\phi = \dfrac{\int(\phi\mu) + C}{\mu}$
Отсюда $\phi \in F$
Возьмем $\phi \in F$
$\phi = \dfrac{C + \int(\mu q)}{\mu}$ на $\widetilde{E}$
$\phi \in C^1$
Подставим в уравнение
$\phi' = p\phi + q$
$\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{p(C + \int(\mu q))}{\mu} + q$
Л.ч.: $\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{\mu^2 q - (-\pi)\mu(C + \int(pq))}{\mu^2} = q + \dfrac{p}{\mu}(C + \displaystyle\int pq)$
П.ч. = Л.ч.
Ч.Т.Д.
Следствие (общее решение ЛОУ)
$p \in C^1(E), E = \langle a, b\rangle$
Тогда $y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$
Доказательство
$q = 0$
Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)

1. Для ЛУ $y' = p(x)y + q(x)$ запишем соответствующее ЛОУ
   $y_2' = p(x)y_2$
   $y_2 = Ce^{\int p}$
2. Заменим C на $C(x)$ и подставим в исходное уравнение
   $y = C(x)e^{\int p}$
   $p(x)(C(x)e^{\int p}) + q(x) = (C(x)e^{\int p})'$
3. Находим $C(x)$ из полученного уравнения
4. Запишем общее решение $y = C(x)e^{\int p}$

Доказательство
В общем виде мы получим ту же формулу, что и в предыдущем методе

Определение
$P \, \mathrm{d}\, x + Q \, \mathrm{d}\, y = 0$ – однородное уравнение, если
P, Q – однородные функции одинаковой степени
Определение
$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y) \Rightarrow P$ – однородная функция степени α

1.7 Уравнение в полных дифференциалах

Определение (УПД)
$P(x, y) \, \mathrm{d}\, x + Q(x, y) \, \mathrm{d}\, y = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, если
$\exists\, u : u'_x = P, u'_y = Q$
$u' = (P, Q) = (u'_x, u'_y)$ – матрица Якоби – градиент
Его решение имеет вид $\mathrm{d}\, u = 0$
$\mathrm{d}\, u = u'_x \, \mathrm{d}\, x + u'_y \, \mathrm{d}\, y$
Определение
u – *потенциал* уравнения
Тогда $u = \mathrm{const}$
Теорема (общее решение УПД)
Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, $P, Q \in C(G)$
$u' = (P, Q)$
Тогда функция $y = \phi(x), x \in E, E = \langle a, b \rangle$ – решение уравнения $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \phi \in C^1(E), \exists\, C \in \mathbb{R} : \phi$ – неявно задана уравнением $u(x, y) = C$ на E
Напоминание
$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x), g : A \subset \mathbb{R}^n \to b \subset \mathbb{R}^m, f : B \to \mathbb{R}^k$
Доказательство $\Rightarrow$
По определению $\phi \in C^1(E)$
По определению решения: $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} E$
$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} 0$
$(u(x, \phi(x)))' \underset{E}{\equiv} 0$
Значит $\exists\, C : u(x, \phi(x)) \underset{E}{\equiv} C$
Доказательство $\Leftarrow$
Имеем $\phi \in C'(E)$
$u(x, \phi(x)) \underset{E}{\equiv} C$
$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} 0$
$P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} E$
По определению ϕ – решение

Пример
$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$
$P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$
$u(x,y) = \displaystyle\int P + \int Q$ – потенциал
Тогда $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}\,x + \int Q(y)\,\mathrm{d}\,y = C$ – неявно задает все решения
Теорема (признак УПД (достаточное условие))
$P, Q \in C^1(G), G$ – область в $\mathbb{R}^2$
$P'_y = Q'_x$
Тогда $\exists\, u : (P,Q) = u'$ в области G
$u(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P(\widetilde{x},\widetilde{y})\,\mathrm{d}\,\widetilde{x} + Q(\widetilde{x},\widetilde{y})\,\mathrm{d}\,\widetilde{y}) + C,$
где $(x_0,y_0) \in G, C \in \mathbb{R}$
$(x_0,y_0), (x,y)$ – концы кусочно-гладкой привой, лежащей в G
Пояснение
$P'_y = (u'_x)'_y$
$Q'_x = (u'_y)'_x$
Тогда $P'_y = Q'_x$ – это необходимое решение для существования u
Доказательство жди на матане
Определение
$\forall\, x, y\ \mu(x,y) \neq 0$
$\mu P\,\mathrm{d}\,x + \mu Q\,\mathrm{d}\,y = 0$ – УПД
Тогда μ – интегрирующий множитель для $P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y$
Замечание
Если $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$
$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_y$
Пример
$y' = p(x)y + q(x)$
$(p(x)y + q(x))\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,y = 0$ – не уравнение в полных дифференциалах
Найдем μ
$\mu'_y(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = \mu'_x(-1) + 0$
Попробуем найти $\mu : \mu'_y = 0$
$\mu = \mu(x)$
$\mu' = -\mu p(x)$
$\mu = Ce^{-\int p}$
Выберем $C = 1$
$\mu = e^{-\int p}$

1.8 Замена переменных

Пример

$y' = \dfrac{y^3 - x^3}{xy^2} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}, x > 0$

Пусть $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$y'_x = v - 1\dfrac{1}{v^2}$

$y(x) = v(x)x \Rightarrow y' = v'x + v$

$v'x + v = v - \dfrac{1}{v^2}$

$v'x = -\dfrac{1}{x^2}$

$v^2 \,\mathrm{d}\, v = -\dfrac{\mathrm{d}\, x}{x}$

$\dfrac{v^3}{3} = -\ln x + C$

$\dfrac{1}{3}(\dfrac{y}{x})^3 = -\ln x + C$

Определение

Векторным полем уравнения $P(x, y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y) \,\mathrm{d}\, y = 0$ назовем $F : D \to \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$

$D = D_P \cap D_Q$

$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

Интегральная кривая векторного поля – интегральная кривая уравнения

Теорема (замена переменной в уравнении)

$D \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ – область

(внизу указаны координатные оси)

$\Phi : D \to \Omega$ – диффеоморфизм (такая биекция, что $\Phi \in C^1(D), \Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$)

$F(x, y)$ – векторное поле исходного уравнения

$G : \Omega \to \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$

$G(u, v) := F(\Phi^{-1}(u, v))(\Phi^{-1})'(u, v)$

Значит Φ биективно отображает интегральные кривые уравнения (1) $F\begin{pmatrix}\mathrm{d}\, x\\ \mathrm{d}\, y\end{pmatrix} = 0$ на интегральные кривые уравнения (2) $G\begin{pmatrix}\mathrm{d}\, u\\ \mathrm{d}\, v\end{pmatrix} = 0$

Доказательство

Докажем, что Φ отображает интегральные кривые в интегральные кривые

Возьмем Γ – инегральную кривую уравнения(1)

Ей соответствует некоторое параметрическое решение γ на $E = \langle a, b\rangle$

$\Gamma = \gamma(E)$

$\gamma \in C^1(E \to \mathbb{R}^2)$

$\gamma'(t) = 0$ при $t \in E$

$F(\gamma(t))\gamma'(t) \underset{E}{\equiv} 0$

Докажем, что $\Phi(\Gamma)$ – интегральная кривая для уравнения (2)

Рассмотрим $\lambda(t) = \Phi(\gamma(t))$

$\lambda(E) = \Phi(\gamma(E)) = \Phi(\Gamma)$

$\lambda = \Phi \circ \gamma$

Отсюда $\lambda \in C^1(E \to \mathbb{R}^2)$

$\lambda'(t) = \underbrace{\Phi'(\gamma(t))}_{\det \neq 0} \underbrace{\gamma'(t)}_{\neq 0}$

Подставим в (2)

Рассмотрим $F(\gamma(t))\gamma'(t) \underset{E}{\equiv} 0$

$\gamma(t) = \Phi'(\lambda(t))$

$F(\Phi^{-1}(\lambda(t)))(\Phi^{-1})'(\lambda(t))\lambda'(t) \underset{E}{\equiv} 0$

$\Leftrightarrow G(\lambda(t))\lambda'(t) \underset{E}{\equiv} 0$

Теперь докажем, что Φ – инъекция интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)

Пусть Γ_1, Γ_2 – интегральные кривые (1)

$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$

Пусть н.у.о. $\exists\, r_1 \in \Gamma_1 : r_1 \notin \Gamma_2$

Докажем от противного

Пусть $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2) = L$

$\forall\, s \in L \;\exists\, r_1 \in \Gamma_1 : s = \Phi(r_1)$

$\forall\, s \in L \;\exists\, r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2)$ (*)

Рассмотрим $s = \Phi(r_1)$

По утверждению (*) $\exists\, r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2)$

Тогда $\Phi(r_1) = \Phi(r_2)$, но $r_1 \notin \Gamma_2, r_2 \in \Gamma_2 \Rightarrow r_1 \neq r_2$

Тогда Φ – не инъекция (как отображение множества D)

Докажем сюръективность интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)

Рассмотрим кривую L уравнения (2) в области $\Phi(D)$

Рассмотрим $H = \Phi^{-1}$

Применим к H рассуждение из начала доказательства
Т.к. H – диффеоморфизм, то $H(L)$ – интегральная кривая
Ч.т.д.
Критерий диффеоморфизма
Φ – инъекция
$\Phi \in C^1(D)$
$\det \Phi'(r) \neq 0 \ \forall\, r \in D$
Пример (Уравнение Бернулли)
$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \alpha \neq 0, 1$
Пусть $y > 0$
$\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)y^{\alpha-1} + q(x)$
$v = y^{1-\alpha}$
$v'_x = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'_x$
$\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{v'_x}{1-\alpha}$
$v'_x = (1-\alpha)p(x)v + (1-\alpha)q(x)$
Пример (Уравнение Риккати)
$y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичная по y}}$
Утверждение: если ϕ – решение, то подстановка $y(x) = v(x) + \phi(x)$ сводит уравнение к уравнению Бернулли

2 Уравнения, не разрешенные относительно производной

2.1 Уравнения, разрешимые относительно производной

Определение
Задача Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ задача нахождения его решения удовлетворяет условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$
Теорема (существование задачи Коши для уравнения, не выраженного относительно производной)
$G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область, $(x_0, y_0, y'_0) \in G, y'$ – в данном случае название переменной, а не производная
$F \in C^1(G), F'$

Определение
$F \in C^1(G), G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область
Тогда D – дискриминальная кривая уравнения $F(x, y, y') = 0$, если $D = \{(x, y) : \exists\, y' \in \mathbb{R} : F(x, y, y') = 0, F'_y(x, y, y') = 0\}$
Определение
Решения ϕ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называются особыми, если $\forall\, x_0 \in \operatorname{dom}\phi\ \exists\, \psi$ – решение, такое, что $\psi(x_0) = \phi(x_0), \psi'(x_0) = \phi'(x_0)$ и при этом $\forall\, U(x_0)\ \phi \neq \psi$ на $U \cap \operatorname{dom}\psi \cap \operatorname{dom}\phi$
Пример
Рассмотрим $F(x, y') = 0$
Оно неявным образом задает производную
Пусть мы смогли выразить решение параметрически: $x = \phi(t), y' = \psi(t)$
Т.е. $F(\phi(t), \psi(t)) \underset{E}{\equiv} 0$
Найдем $y = g(x) : y'(t) = \psi(t)$
Пусть мы нашли такую g
$\mathrm{d}\, g = g'_x \,\mathrm{d}\, x$
$x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in E$ – параметрическое заданеи функции $y = g(x)$
$\mathrm{d}\, y = y'_x \,\mathrm{d}\, x$ – основное соотношение
$\mathrm{d}\, g = \psi(t)\phi'(t) \,\mathrm{d}\, t$
Пример
$e^{y'} + y' = x$
Пусть $y' = t$
$x = t + e^t$
Основное соотношение $\mathrm{d}\, y = y'_x \,\mathrm{d}\, x$
$\mathrm{d}\, y = t(t + e^t)' \,\mathrm{d}\, t = (t + te^t) \,\mathrm{d}\, t$
$y = \displaystyle\int (t + te^t) \,\mathrm{d}\, t = \frac{t^2}{2} + e^t(t - 1) + C$
Пример
$F(x, y, y') = 0$
Пример
σ – параметризуется так: $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v), y' = \xi(u, v)$
Далее подставим ϕ, ψ, ξ в основное соотношение
$\mathrm{d}\, y = \psi'_u \,\mathrm{d}\, y + \psi'_v \,\mathrm{d}\, v$
$y'_x = \xi$
$\mathrm{d}\, x = \phi'_u \,\mathrm{d}\, u + \phi'_v \,\mathrm{d}\, v$
Если $u = g(v, C)$ – решение, то $x = \phi(g(v, C), v), y = \psi(g(v, C), v)$ – решение исходного