Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

1 Линейное отображение

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть V, U - линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Определение
$\mathcal{A} : U \to V$ – *линейное отображение*, если $\forall\,\lambda\ \in K, u_1, u_2 \in U\ \mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$
Замечания

1. Обозначение: $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$ поточечно определены $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda\mathcal{A}u$

Примеры

1. $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2. $\epsilon v = v$
3. $V, U = P_n$ – множество многочленов степени $\leq n, A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ – дифференциальный оператор
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$ – матрица
   $\mathcal{A}u = B \cdot u$

Определение
$L(U,V) = \mathrm{Hom}_K(U,V) = \mathrm{Hom}(U,V)$ – множество всех линейных отображений $U \to V$
Определим операции
$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A}+\mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$
$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$
$L(U,V)$ – линейное пространство

Определение
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$ – образ линейного отображения
Замечание
$\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset V$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – конечномерное, то $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} =: \operatorname{rg}\mathcal{A}$
Определение
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$ – ядро линейного отображения (прообраз $\mathbb{0}_V$)
Замечание
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \varnothing$
$\mathbb{0}_U \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset U$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ конечномерно, то $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{def}\mathcal{A}$
Замечание 2
Изоморфизм – частный случай линейного отображения

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U,V) \\ \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbb{0}_U (\text{тривиально}) \end{cases}$$

Следствие
Если U, V – конечномерные

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U,V) \\ \operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim V \\ \operatorname{def}\mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

Определение
$\mathcal{A} \in L(U,V)$

- $\mathcal{A}$ сюръективное $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$ инъективное $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$ биективно $\Leftrightarrow$ сюръективно + инъективно $\Leftrightarrow$ изоморфизм

- $\mathcal{A}$ эндоморфизм $\Leftrightarrow$ линейный оператор $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in L(V,V)$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_K(V)$
- $\mathcal{A}$ автоморфизм $\Leftrightarrow$ эндоморфизм + изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \operatorname{Aut}_K(V)$

Примеры

1. $\mathbb{0} \in L(U,V)$
2. $\epsilon \in \operatorname{Aut}(V)$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$ – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m\times n}$ – матрица
   Определение
   $\operatorname{Im} A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ – образ матрицы
   $\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbb{0}\}$ – ядро матрицы
   $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker} A$ – дефект матрицы
   $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A$ – согласуется со старыми определениями ранга матрицы
   Доказательство
   Для $y \in \operatorname{Im} A$
   $y = Ax = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n$
   $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$
   $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A$
   Утверждение
   $\operatorname{Ker} A$ - множество решений $Ax = 0$
   Тогда $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rg} A$

   Отображение $u = Av$:

   (a) Сюръекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$
   (b) Инъекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
   (c) Биекция $\Leftrightarrow n = m = \operatorname{rg} A$
   (d) Эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m$
   (e) Автоморфизм $n = m = \operatorname{rg} A$

Определение
$\mathcal{AB} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – композиция
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – линейное отображение
Свойства

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
2. $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{AB}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$ – однородность
3. $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = \mathcal{ABC}$ – ассоциативность
4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – изоморфизм $\Rightarrow \mathcal{AB}$ – изоморфизм

Определение
Пусть $\mathcal{A} \in L(U, V)$ – изоморфизм
$\forall\, v \in V\ \exists!u: \ \mathcal{A}u = v$
Тогда зададим $\mathcal{A}^{-1}v = u$
$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$
$\mathcal{A}^{-1}$ – изоморфизм, обратный к $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$
$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$
Замечание
$\mathrm{End}(V)$ - ассициативная унитарная алгебра
$\mathrm{Aut}(V)$ - ассоциативная унитарная алгебра с делением
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$ – линейное подпространство
Тогда $\mathcal{A}_0 : U_0 \to V$ называется сужением на линейное подпространство U_0, если $\forall\, u \in U_0\ \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$
Очевидно $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$
$A_0 =: A|_{U_0}$
Утверждение
A изоморфизм $\Rightarrow A_0$ изоморфизм $\in L(U_0, \operatorname{Im}\mathcal{A}_0)$
Доказательство
$\mathcal{A}_0 : U_0 \to \operatorname{Im}\mathcal{A}_0$ – сюръекция
$\operatorname{Ker}\mathcal{A}_0 \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$ – из изоморфизма
Отсюда $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_0 = \{\mathbb{0}_U\}$
Тогда $\mathcal{A}_0$ инъекция, а значит изоморфизм
Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

U, V – конечномерные
$A \in L(U, V)$
Тогда $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$
Доказательство
$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$
Дополним U_0 до U: $U = U_0 \oplus U_1$
Пусть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\forall\, u \in U \;\; u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$ – единственным образом
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$
Отсюда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
Покажем, что $\mathcal{A}_1$ изоморфизм:
Сюръекция, т.к. действует в $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$
Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ из дизъюнктности
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ – тривиально
Тогда $\mathcal{A}_1$ инъективно
Отсюда $\mathcal{A}_1$ изоморфизм, т.е. $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
Тогда $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$, ч.т.д.

1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные U, V
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\xi_1, \dots, \xi_n$ – базис U
$\nu_1, \dots, \nu_m$ – базис V

$$\forall\, u \in U \;\; u = \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\forall\, v \in V \;\; v = \sum_{i=1}^{m} v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$\forall\, v \in \operatorname{Im} \mathcal{A}\ v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$
$\mathcal{A}$, как линейное отображение, полностью определяется значениями $\mathcal{A}$ на базисных векторах
$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$
$A = (A_1 \dots A_n)$ - матрица линейного отображения в базисах (ξ, ν)

Если $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(v)$ – линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадаю
$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \nu_j$
$v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} u_i)\nu_j$
Т.к. координаты введены единственным образом, то $\forall\, j\ v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} u_i \Leftrightarrow$
$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$
Примеры

1. $\epsilon : \underset{e_1 \dots e_n}{V} \to \underset{e_1 \dots e_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow E$

2. $\epsilon : \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{V} \to \underset{\nu_1 \dots \nu_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow T_{\nu \to \xi} = T_{e \to e'}$

Утверждение
$L(U, V) \cong M_{m \times n}$ – пространство всех матриц $A_{m \times n}, \dim U = n, \dim V = m$ (при фиксированных базисах U, V)
Доказательство
Соответствие между $\mathcal{A}$ и A взаимооднозначное
Докажем линейность
$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda\mathcal{B}_{\xi_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j + \lambda \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ji}\nu_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (a_{ji} + \lambda b_{ji})\nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$

Утверждение
$\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$

Доказательство

$\underset{\xi_1\ldots\xi_n}{U} \underset{\mathcal{B}}{\to} \underset{\theta_1\ldots\theta_r}{W} \underset{\mathcal{A}}{\to} \underset{\nu_1\ldots\nu_m}{V}$ $(\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{r} b_{ki}\theta_k) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\mathcal{A}_{\theta_k} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\nu_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki})\nu_i = \sum_{j=1}^{m} AB_{ji}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

Утверждение

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V)$

(В одном базисе)

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

Доказательство

Пусть $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon \leftrightarrow AB = E$

Отсюда $B = A^{-1}$

Утверждение

A изоморфно $\Rightarrow A_0$ изоморфно

Доказательство

$A_0 : U_0 \to \operatorname{Im}\mathcal{A}_0$ – сюръекция

$\operatorname{Ker} A_0 \subset \operatorname{Ker} A = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда $\operatorname{Ker} A_0 = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда A_0 - инъективно, а значит изоморфизм

Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\nu'}{V} \leftrightarrow A'$

$T_{\xi\to\xi'}T_{\nu\to\nu'}$ – матрицы перехода

Тогда $A' = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Доказательство

Пусть $\xi_U : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\xi}{U}$,

$\xi_V : \underset{\nu}{V} \to \underset{\nu'}{V}$

$\mathcal{A} = \xi_v\mathcal{A}\xi_u$

$A' = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Следствие

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

$\mathcal{A} : \underset{e}{V} \to \underset{e}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{e'}{V} \to \underset{e'}{V} \leftrightarrow A'$
$A' = T_{e' \to e} A T_{e \to e'}$
Определение
Матрицы $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ *подобны*, если $\exists\, C$ невырожденная: $A = C^{-1}BC$
A и A' – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны
Утверждение
$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Ker} A$
$\operatorname{Im} \mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Im} A$
Доказательство
$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{Im} A$
$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A} = 0\}$
$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} A$

1.3 Инвариантность линейного отображения

Определение
Инвариантностью/инвариантном называется свойство, которое не меняется при определенного рода преобразованиях
Теорема 1
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\operatorname{rg} A$ и $\operatorname{def} A$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$, не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса
Доказательство
$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$
$\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \ldots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$

$\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{rg} A$
$\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = n = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A \Rightarrow \operatorname{def} \mathcal{A} = \operatorname{def} A$
Следствие
$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$

Определение
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
$e_1, \ldots, e_n$ – базис V

Тогда $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$ – определитель системы векторов в базисе $e_1, \dots, e_n$

Теорема 2

Значение $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ (т.е. является инвариантом), причем $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора в некотором базисе

Доказательство

Выберем базис $e_1, \dots, e_n$

Тогда $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{n\times n}$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в $e'_1, \dots e'_n$ – базисе V – это тоже верно

$\mathcal{A} \underset{e'}{\leftrightarrow} A'$

$\det \mathcal{A} = \det A'$

$T = T_{e \to e'}$

$A' = T^{-1}AT$

Тогда $\det A' = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$

Следствие

$\forall f$ – n-форма на V

$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \;\; f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Доказательство

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

g – n-форма, т.к. f – n-форма

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n)$ (см. доказательство теоремы)

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Следствие 2

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$

Следствие 3

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$

Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$

Доказательство

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$

$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$

Примеры

1. В V_3
   $f(a, b, c) = (a, b, c) =$ ориентированный объем $= \det(a, b, c)$
   $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$
   $\lambda = \det \mathcal{A}$ – коэффициент пропорциональности объемов

   (a) $\mathcal{A}v = \mu v$ – оператор подобия
   Тогда $\lambda = \mu^3$

   (b) Поворот
   Пусть i, j, k перешли в e_1, e_2, e_3 поворотом
   Тогда $e_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{pmatrix}$
   Тогда $\mathcal{A} \underset{ijk}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$ – матрица поворота
   $f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a, b, c)$
   $\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1$ – смешанное произведение
   Отсюда при повороте объем сохраняется

Определение

$A_{n\times n}$

$\mathrm{tr}\, A := \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ – след матрицы

Теорема 3

Если матрицы подобные, то $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$

Доказательство

A, B – подобные $\Rightarrow \exists$ невырожденная $C : A = C^{-1}BC = SBC$

$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} S_{ik} \sum_{m=1}^{n} B_{km}C_{ki} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{km} \sum_{i=1}^{n} C_{mi}S_{ik} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{km}E_{mk} = \sum_{k=1}^{n} B_{kk} = \operatorname{tr} B$

Следствие
A и A' матрицы $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ в разных базисах
Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$(из формулы перехода)
Определение
$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$, где A – матрица $\mathcal{A}$ в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

Определение
$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
L называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если $\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$
Если L – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве
Примеры

1. $\mathbb{0}, V$

2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$

3. $\mathcal{A}$ – вращение пространства вокруг оси l на фиксированный угол
Тогда $l, L \perp l$ – инвариантное пространство (L – плоскость)
Линейные многообразия $P = x_0 + L$ – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

Теорема 4
$L \subset V$ – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
Тогда $\exists$ базис V такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ \mathbb{0} & A^3 \end{pmatrix}$, где $A^1_{k\times k}, k = \dim L$
Доказательство
Пусть L – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A}$
$\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$
Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L
Дополним его до базиса V:
$V = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j\in 1\ldots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{k_j} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что A имеет ожидаемый вид

Следствие 1

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$, где $A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$

Доказательство

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L_1

$e_{k+1}, \ldots, e_n$ – базис L_2

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in 1\ldots k} \in L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A^1_j \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in k+1\ldots n} \in L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A^2_{j-k} \end{pmatrix}$

Следствие 2

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид(аналогично предыдущему следствию)

Пусть $A|_{L_j} : L_j \to L_j$ (эндоморфизм)

Тогда $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_i$

Следствие 3

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Тогда $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(A|_{L_j})$

Доказательство

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$\forall\, x \in V\ \exists!x_1 \in L_1, \ldots, x_m \in L_m :\ x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$

$\mathcal{A}x = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}x_i$

$\mathcal{A}x_i \in \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Отсюда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Докажем дизъюнктность

Пусть $y_i \in \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Тогда $\exists\, x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$y_1 + \ldots + y_m = \mathbb{0} \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \ldots + \mathcal{A}x_m = \mathbb{0}$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$, т.к. L_i – инвариант

Т.к. $L_1 \ldots L_m$ – дизъюнктны, то $\mathcal{A}x_i = \mathbb{0}$

Отсюда $y_i = \mathbb{0}$

Отсюда $\operatorname{Im}\mathcal{A}_i$ дизъюнктны

1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

V – линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

$\lambda \in K$ – *собственное число* $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, если $\exists\, v \neq \mathbb{0} \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

v – собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ

Отсюда v – СВ $\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$

$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) =$ (множество всех СВ $\mathcal{A}$, отвечающих λ) $\cup\{\mathbb{0}\}$ – собственное подпространство $\mathcal{A}$, отвечающее λ

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность числа λ

$V_\lambda, \gamma_\lambda$ – инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$ и выбора базиса

Примеры

1. Оператор подобия:

$\forall\, v \in V\ \mathcal{A}v := \lambda v$
У него λ – собственное число, $V = V_x$
$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$

2. $\mathcal{A}$ – поворот на плоскости относительно начала координат на угол $\alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

3. $\lambda = 0$ – собственное число $\mathcal{A}$
$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \{\mathbb{0}\}$
$\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – не изоморфизм
$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = \mathbb{0}$

4. $v_1, \ldots, v_n$ – базис V, где v_j – СВ $\mathcal{A}$ для стационарного числа λ_j

Научимся находить СЧ и СВ
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \operatorname{tr} A + \ldots + \det A$ – характеристический могочлен $\mathcal{A}(A)$ λ – СЧ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$
Из основной теоремы алгебры $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ имеет ровно n корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)
Если $\lambda_{i \in 1 \ldots n}$ – корни, то $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ (т.к. свободный член χ)
Т.о. $\det A = 0 \leftrightarrow \exists\, \lambda_i = 0$
Также из теоремы Виета $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ – корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$, где $\alpha(\lambda)$ – алгебраическая кратность СЧ λ (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в $\mathbb{R}^2$ на $\alpha \in (-\pi, \pi)$
Найдем характеристический многочлен:
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 2t\cos\alpha + t^2 + \sin^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$
Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ
$\det A = 1, \operatorname{tr} A = 2\cos\alpha$

Теорема 1
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \lambda$ – СЧ $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$
Доказательство
$1 \leq \gamma(\lambda)$ очевидно, т.к. $\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda = \gamma$

Пусть $v_1, \ldots, v_\gamma$ – базис V_λ
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис V_λ такой, что A имеет ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$
Отсюда $\chi_\mathcal{A}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t)\chi_{A^2}(t)$
Пусть $v_1, \ldots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_n$ – наш базис
Т.к. $\mathcal{A}v_{j\in 1\ldots\gamma} = \lambda v_j$, то $A^1 = \lambda E_{\gamma\times\gamma}$
$\chi_{A_1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$
$\chi_A(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma$, т.к. возможо λ – корень $\chi_{A_2}(t)$
Определение
Набор СЧ $\mathcal{A}$ с учетом кратности является спектном оператора $\mathcal{A}$
Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е. $\forall\, \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = 1$
Теорема 2
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
$v_1, \ldots, v_m$ – соответствующие СВ
Тогда $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимые
Доказательство
Методом математической индукции:

1. $m = 1$ – очевидно (т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$)

2. Пусть верно для m
   Докажем для $m + 1$ от противного
   Пусть $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j\in 1\ldots m}, v_{m+1}$ – соответсвует λ_{m+1}
   Пусть $v_1, \ldots, v_{m+1}$ линейно зависимые
   Тогда $v_{m+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$
   $//$todo

Следствие 1
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
Тогда $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ – дизъюнктные
Доказательство
$v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0}, v_i \in V_{\lambda_i}$
Пусть $v_i \neq \mathbb{0}$. Тогда v_i - СВ для λ_i (т.к. $v_i \in V_{\lambda_i}$)
Тогда линейная комбинация СВ $= \mathbb{0}$, чего не может быть из теоремы
Тогда $v_i = \mathbb{0}$, откуда дизъюнктность

Следствие 2
Пусть $V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} V_\lambda$
$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \mathrm{End}(V_\lambda)$
Тогда $\chi_\mathcal{A}(t) = \prod\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$
Доказательство
$V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} V_\lambda$
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис такой, что $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$
$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$
$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$
Тогда $V = \mathrm{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$, где $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$ – базис V_{λ_k}
Тогда базис V – объединение базисов
Отсюда $\chi_A(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагонализируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ называется оператором простой структуры, если существует базис V такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид
$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Замечание
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow$ в V существует базис из СВ
Теорема
Если все корни $\chi_\mathcal{A}(t) \in K$, т.е. являются СЧ (т.е. $\sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \alpha(\lambda) = n = \deg \chi_\mathcal{A}(t)$)
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \forall\, \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$
Доказательство
$\gamma(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \exists$ базис из СВ $\Leftrightarrow \; = \bigoplus\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} V_\lambda \Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \gamma(\lambda)$

Отсюда $n = \sum\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$

Следствие

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ - ОПС

Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$\exists\, T$ невырожденная : $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$ – СВ

Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица A диагонализируема $\Leftrightarrow A$ – матрица ОПС $\mathcal{A}$ в некотором базисе

Причем $T = T_{e \to v}$, где $e_1, \dots, e_n$ – базис, в котором была записана $A, v_1, \dots, v_n$ – базис из СВ $\mathcal{A}$, соответствующих $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Доказательство $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$ – ОПС

$e_1, \dots, e_n$ – базис V $v_1, \dots, v_n$ – СВ, соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – СЧ, базис V

$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$ $\mathcal{A} \underset{v}{\leftrightarrow} A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$T = T_{e \to v}$

$A' = T^{-1}AT$

Отсюда A подобна диагональной

Доказательство $\Rightarrow$

$//$todo

Определение

Пусть $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i, L_i$ – линейное подпространство

Тогда $\forall\, v \in V \exists\, !v_1, \dots v_m : v_i \in L_i, v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i$

Зададим $\rho_i \in \operatorname{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

ρ_i – *оператор проектирования(проектор)* на L_i

Свойства:

1. $\forall\, i \neq j \;\; \rho_i \rho_j = \mathbb{0}$
2. $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i = \epsilon$

3. $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$ – идемпотентность

4. $\operatorname{Im}\rho_i = L_i$
   $\operatorname{Ker}\rho_i = \sum\limits_{j \neq i} L_j$

Утверждение
Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющие свойствам 1 и 2
Тогда $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$ (т.е. ρ – проектор на $L_i = \operatorname{Im}\rho_i$)
Доказательство
Докажем $1, 2 \Rightarrow 3$
$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_j = \rho_i^2$

Докажем, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$

$\forall\, v \in V \;\; v = \epsilon v = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i v \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$
Докажем дизъюнктность
$\mathbb{0} = v_1(\in \operatorname{Im}\rho_1) + \ldots + v_m(\in \operatorname{Im}\rho_m)$
$\forall\, i = 1 \ldots m \;\; v_i = \rho_i \omega_i (\exists\, \omega_i \in V)$
$v_i = \rho_i \omega_i =$ из свойства $3 = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_j \omega_j) = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} v_j) = \rho_i \mathbb{0} = \mathbb{0}$, ч.т.д.
Теорема о спектральном разложении о.п.с.
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ – о.п.с.
Тогда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda\text{ – С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$, где ρ_λ – проектор на V_λ
Доказательство
Обозначение: Пусть все λ – С.Ч. $\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$

$v = \sum\limits_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\forall\, v \in V \;\; \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum\limits_{\lambda} v_\lambda) = \sum\limits_{\lambda} (\mathcal{A}v) = \sum\limits_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda(v) = (\sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) v$
Отсюда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$ – *спектральное разложение*
Следствие

A – диагонализируема $\Rightarrow \exists\, \rho_\lambda, \lambda$ – С.Ч. $A : A = \sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda$

Определение

$(A_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность матриц $A_{n\times n} = (a_{ij}^m)_{n\times n}, m$ – индекс, а не степень

$\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A = (a_{ij})_{n\times n} \Leftrightarrow \forall\, i, j = 1\ldots n\ a_{ij} = \lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^m$

Немного про ряды

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ – числовой ряд ($a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$)

$S_m = \sum\limits_{i=1}^{m} a_k$ – частичная сумма ряда

Если S_m сходится, то ряд называется сходящимся

Определение

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ – ряд из матриц

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ – сходится $\Leftrightarrow \forall\, i, j = 1\ldots n\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{ij}^m$ – сходится

Далее про ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функциональный ряд

При фиксированном x – числовой ряд

Множество x таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда $= E$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m$ – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$, где R – радиус сходимости

В $\mathbb{C}$ – круг сходимости

В $\mathbb{R}$ – интервал сходимости

Для $\mathbb{R}: \dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}$, сходится при $|x - x_0| \leq \infty$

$\sin x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, сходится при $|x| \leq \infty$

На окружности (при $|x - x_0| = R$) ряд может как сходиться, так и расходиться

Определение

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда $f(A) := \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$ (если ряд сходится)

Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$, где $\Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Доказательство

$A_{n\times n}$ диагонализируема, а значит $\exists\, T : \Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k, R = \infty$

$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)T^{-1}$

Отсюда $S_m = T \operatorname{diag}(\sum\limits_{k=0}^{m} C_k \lambda_1^k, \dots, \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \lambda_n^k)T^{-1}$ (т.к. $R = \infty$, то все ряды сойдутся)

$S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$

Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = \sum\limits_{\lambda - \text{СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$, где $A = \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda$ – спектральное разложение

Доказательство

A – диагонализируема $\Rightarrow A = \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda$

Тогда $A^k = (\sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda)^k = \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} \lambda^k\rho_\lambda$

Отсюда $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} \lambda^k\rho_\lambda = \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} (\sum\limits_{k=0}^{m} C_k\lambda^k)\rho_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum\limits_{\lambda\, -\, \text{СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$

Следствие

A – диагонализируема, $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall\, \lambda$ – СЧ $|t\lambda| < R$

Тогда $f(At) = T\,\mathrm{diag}(f(\lambda_1 t), \ldots, f(\lambda_n t))T^{-1}$

или $f(At) = \sum\limits_{\lambda - \text{СЧ}} f(\lambda t)\rho_\lambda$

Пример

$\exp At = e^{At} = \sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda = T\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})T^{-1}$

Свойства

1. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$
2. $e^{A0} = E$
3. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$

   Доказательство

   $(e^{At})' = (\sum\limits_{\lambda} f(\lambda t)\rho_\lambda)' = \sum\limits_{\lambda} \lambda e^{\lambda t}\rho_\lambda = (\sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda)(\sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At}A$

Поиск обратной матрицы

Пусть A диагонализируема

$\forall\, \lambda\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$

$A^{-1} = T\,\mathrm{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})T^{-1}$

$A^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_\lambda$

Определение

$\sqrt[m]{A}$ – арифметический корень

Если $\forall\, \lambda\ \lambda \geq 0$, то результат определен однозначно

$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$

1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

V – линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}$
   $\forall\, \lambda\ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)

2. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}$
   $\exists\, \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)

3. При $K = \mathbb{R}$ не все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$
   Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией

Определение

V – вещественное линейное пространство над $\mathbb{R}$

$\forall\, x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$

$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$

$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$ в V

$\mathbb{0} = \mathbb{0} + i\mathbb{0}$ – нулевой в $V_{\mathbb{C}}$

$\forall\, x \in V\ V_{\mathbb{C}} \ni x + \mathbb{0}i = x$

$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$\forall\, \lambda = \alpha + i\beta\ \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$

Утверждение

$V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство

Теорема (о вещественном базисе $V_{\mathbb{C}}$)
Пусть $\dim V = n, e_1, \dots, e_n$ – базис $V, e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$
Тогда $e_1, \dots, e_n$ – базис $V_{\mathbb{C}}(\dim V = \dim V_{\mathbb{C}})$
Доказательство
$\forall\, z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$
$x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e^j$
$y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e^j$
Отсюда $z = \sum\limits_{j=1}^{n}(x_j + iy_j)e_j$, т.е. $e_1, \dots, e_n$ – порождающая
//todo Отсюда $e_1, \dots, e_n$ – линейно независимые
Определение
$z = x + iy$
Тогда $\overline{z} = x - iy$ – сопряженный вектор
Утверждение
$z_1, \dots, z_m$ – линейно независимые в $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m$ – линейно независимые
$(\Rightarrow \operatorname{rg}(z_1, \dots, z_m) = \operatorname{rg}(\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m))$
Доказательство
$c_1\overline{z}_1 + \dots c_m\overline{z}_m = \mathbb{0}$
$\overline{c_1\overline{z}_1 + \dots c_m\overline{z}_m} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} = \overline{c}_1 z_1 + \dots + \overline{c}_m z_m$ – линейно независимые
Отсюда $\overline{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$
Определение
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
Продолжением $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ называется $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}(V_{\mathbb{C}})$ такой, что
$\forall\, z = x + iy \in V_{\mathbb{C}}\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$
Свойства

1. $e_1, \dots, e_n$ – базис V
   $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$
   Тогда $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n \times n}$
   Доказательство
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \dots = \mathcal{A} e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$
   Отсюда $A_{\mathbb{C}} = A$

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ (т.к. матрицы равны)

3. $\forall\, z \in V_{\mathbb{C}}\ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{z})$

4. $\alpha \pm i\beta$ – пара сопряженных корней $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ – СЧ для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
Тогда z – СВ, отвечающий СЧ $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \overline{z}$ – СВ, отвечающий СЧ $\alpha - i\beta$
Доказательство
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\overline{z}$

Тогда:
Т.о. если $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
Нормализованный многочлен – многочлен, старший коэффициент которого 1
Нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется *аннулятором* элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$
$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0 = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень многочлена}} (t-\lambda)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ – кратность корня
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_0\epsilon = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень}} (A - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$
Определение
Минимальный аннулятор x – аннулятор минимальной степени
Теорема о минимальном аннуляторе элемента
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\, x \in V\ \exists!$ минимальный аннулятор x

2. Любой аннулятор x делится на минимальный

Доказательство 1
(алгоритм)

1. $x = \mathbb{0}, \psi \equiv 1$
   $\epsilon = \psi(\mathcal{A})$

2. $x \neq \mathbb{0}$
   Пусть $x, \mathcal{A}x, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}x$ – линейно независимые и m максимальное
   $\exists\,! \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$
   $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{0}$
   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i$ – минимальный и определен единственным образом

Доказательство 2
Пусть $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + r(t), \deg r < \deg \phi$ – аннулятор
$\mathbb{0} = \psi'(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\underbrace{\psi(\mathcal{A})x}_{\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})x$
Отсюда $r(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
Но т.к. ψ – минимальный, то $r \equiv \mathbb{0}$
Определение
Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором $\mathcal{A}$, если $\forall\, v \in V\ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$ (т.е. $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$)
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени – *минимальный многочлен*
Теорема о минимальном многочлене
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\, \mathcal{A} \exists\,!$ минимальный многочлен

2. Любой аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен

Доказательство
(алгоритм)

1. $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
   По теореме 1 $\forall\, e_i \exists\,! \psi_i(t)$ – минимальный аннулятор e_i
   $\phi(t) := \mathrm{lcm}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$
   Тогда $\forall\, j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$
   Докажем, что $\phi(t)$ – аннулятор

$\forall\, v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^{m} v_j e_j = \sum_{j=1}^{m} \phi(\mathcal{A}) v_j e_j = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\psi_j(t) v_j e_j = \mathbb{0}$
Т.о. ϕ – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на ϕ
   Пусть $\phi_1(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$
   $\forall\, v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \forall\, j = 1 \dots n\ \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$ - тогда $\phi_1(\mathcal{A})$ – аннулятор e_j
   Т.к. $\psi_j(t)$ – минимальный аннулятор e_j, то $\phi_1(t)$ делится на $\psi_i(t)$
   Отсюда $\phi_1(t)$ делится на $\mathrm{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$
   Отсюда $\deg \phi$ – минимальная из возможных, а значит ϕ – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный
   Пусть $\phi_2(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$ такой, что $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$
   Тогда $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$ – степень меньше m
   Но тогда δ – аннулятор, $\deg \delta < m$ – противоречие
   Отсюда $\phi_2 = \phi$

Теорема Кэли-Камильтона
$\forall\, \mathcal{A} \in$ V
$\chi_{\mathcal{A}}$ – аннулятор $\mathcal{A}$ (т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$)
Доказательство
Пусть $\mathcal{A} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$
Пусть μ не корень χ
Тогда $\det(A - \mu E) \neq 0$
$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A - \mu E)}(b_{ij} := A_{ji})$
b_{ij} - многочлен $n-1$ степени от μ
Отсюда $(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A - \mu E)}(\mu^{n-1}B_{n-1} + \dots + B_0)$, где B_i – матрица $n \times n$
Отсюда $\det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1}B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$
$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k E$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \ldots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$
Отсюда $\alpha_0 E = AB_0$
$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$
$\vdots$
$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$
$\alpha_n E = -B_{n-1}$
$\chi(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \ldots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = \mathbb{0}$
Следствие
$\forall\, \mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ $\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}$
Следствие 2
$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$
Теорема (о корнях минимального многочлена)
Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть λ – корень $\chi(t)$

1. Пусть $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ – С.Ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \exists\, v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$
   Отсюда $\psi(t) = (t - \lambda)$ – минимальный аннулятор элемента v
   Т.к. ϕ – минимальный многочлен, то $\phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулятор v
   Тогда по теореме 1 ϕ делится на $\psi \Rightarrow \lambda$ – корень ϕ

2. Пусть $\lambda \notin K$, т.е. $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$
   $V \to V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \underset{V,e}{\leftrightarrow} A \underset{V_{\mathbb{C}},v}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda$ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
   Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена $\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
   Отсюда λ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

Доказательство $\Leftarrow$
Пусть λ – корень $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Замечание

Получаем второй способ получения С.Ч. $\mathcal{A}$

$m(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t), \phi_\lambda(t) := \prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$

$\deg\phi = m = \sum\limits_{\lambda} m(\lambda)$

Определение

$I_\lambda := \{p \in P_{m-1} : p$ делится на $\phi_\lambda\}$ – главный идеал, порождающий многочлен ϕ_λ

I_λ – линейное подпространство P_{m-1}

$I_\lambda \ni p(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$

$m-1 \ge \deg p = \deg a_\lambda + \deg\phi_\lambda = \deg a_\lambda + m - m_\lambda$

$\deg a_\lambda \le m(\lambda) - 1$

$I_\lambda \cong P_{m(\lambda)-1}$

$p \leftrightarrow a_\lambda$

$\dim I_\lambda = m(\lambda)$

Теорема

$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство

1. Проверим, что I_λ дизъюнктны
   $$\mathbb{0} = \sum_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum_{\lambda} a_\lambda(t)\phi_\lambda(t) = \underbrace{a_\lambda(t)\underbrace{\phi_\lambda(t)}_{\text{не делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum_{\mu\neq\lambda} a_\mu(t)\phi_\mu(t)}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$
   Отсюда $a_\lambda(t)$ делится на $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$, но $\deg a_\lambda \le m(\lambda) - 1$
   Тогда $a_\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow p_\lambda(t) \equiv 0 \Rightarrow$ дизъюнктные

2. $\bigoplus\limits_\lambda I_\lambda \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m$
   $\dim \bigoplus\limits_\lambda I_\lambda = \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m$
   Отсюда $P_{m-1} = \bigoplus\limits_\lambda I_\lambda$

Следствие
$\forall\, p \in P_{m-1} \exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$
В частности, для $p \equiv 1$ $\exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, 1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda$ – полиноминальное разложение единицы (порожденное многочленом ϕ)
$p_\lambda(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$
Замечание

1. $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_\lambda p_\mu$ делится на ϕ
   Доказательство
   $p_\lambda(t) = a_\lambda \phi_\lambda(t)$
   $p_\mu(t) = a_\mu \phi_\mu(t)$
   $p_\lambda(t) p_\mu(t) = a_\lambda(t) a_\mu(t) \phi_\lambda(t) \phi_\mu(t) = b(t)\phi(t)$
2. Пусть все корни ϕ взаимно-простые, т.е. $\forall\, \lambda\ m(\lambda) = 1$
   $\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t - \lambda)$
   $\deg a_\lambda(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$
   Отсюда $a_\lambda(t) = \mathrm{const}$

Теорема Лагранжа
Пусть все корни $\phi(t)$ взаимно прострые
Т.е. $\forall\, \lambda : m(\lambda) = 1$ $\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t - \lambda)$
Тогда $\forall\, p \in P_{m-1}$ $p(t) = \sum\limits_\lambda \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_\lambda(t)$
$(a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$
Доказательство
$\exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p(t) = \sum\limits_\lambda \underbrace{a_\lambda \phi_\lambda(t)}_{\phi_\lambda(t) \in I_\lambda}$

$p(\lambda) = \sum\limits_{\mu} a_\mu \phi_\mu(\lambda) = a_\lambda \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$

$\phi(t) = \prod\limits_{\mu}(t-\mu) = (t-\lambda)\underbrace{\prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)}_{\phi_\lambda(t)}$

$\phi'(t) = \sum\limits_{\mu}\prod\limits_{\xi\neq\mu}(t-\xi)$

$\phi'(\lambda) = \prod\limits_{\xi\neq\lambda}(\lambda-\xi) = \phi_\lambda(\lambda)$

Отсюда $a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

Следствие

Пусть $\forall\,\lambda : m(\lambda) = 1$

Тогда $1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda \Rightarrow p(t) = t = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$

Доказательство

$1 = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda \phi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{1}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$

$t = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\lambda}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda(t)$

Пусть $\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Построим полиноминальное разложение 1, порождающее многочлен ϕ

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{p_\lambda(\mathcal{A})}_{\rho\text{– спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)

Спектральный оператор действует не на собственное подпространство

Свойства

Пусть $\lambda \neq \mu$

Проверим, что $\rho_\lambda \rho_\mu = \mathbb{0}$

$\rho_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\rho_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = a_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})$

$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

Если λ единственный корень $\phi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$
Если все корни взаимно прострые:
$\forall\, \lambda \; m(\lambda) = 1$
По следствию из т. Лагранжа:
$\epsilon = \sum\limits_\lambda p_\lambda$
$\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda$
Далее покажем, что p_λ – проекторы на V_λ, т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с
Т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с.

Определение
$K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$ называется корневым подпространством $\mathcal{A}$
λ – СЧ $\mathcal{A}$
Очевидно, что $V_\lambda \subset K_\lambda$
$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Теорема о корневом подпространстве

1. K_λ – инвариантно относительно $\mathcal{A}$
2. $\operatorname{Im}\rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V)$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $A\Big|_{K_\lambda} \in \operatorname{End}(K_\lambda)$

Доказательство

1. $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
   $\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}x = \mathbb{0}$
   Отсюда $\mathcal{A}x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
   $\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{k-1}$
2. $\forall\, x \in V\, \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x$
   $(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\operatorname{Im}\rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} x =$

$\mathbb{0}$

Отсюда $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда $\operatorname{Im} \rho_\lambda \subset K_\lambda$

Обратно

$x \in K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть $\mu \neq \lambda$

$$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = \mathbb{0}$$

$$x = \epsilon x = \sum_\mu \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \operatorname{Im} \rho_\lambda$$

Отсюда $K_\lambda \subset \operatorname{Im} \rho_\lambda$

3. $\mathcal{B} = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in \operatorname{End}(K_\lambda)$

Проверим, что $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен

$(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – аннулятор $\mathcal{B}$

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть $(t-\lambda)^k$ – минимальный многочлен, $k < m(\lambda)$

$\phi_1(t) := (t-\lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg \phi_1 \leq \deg \phi$

Покажем, что ϕ_1 – аннулятор $\mathcal{A}$

$\forall\, v \in V = \bigoplus\limits_\mu K_\mu \; v = \sum\limits_\mu \underbrace{v_\mu}_{\in K_\mu}$ – раскладывается единственным образом

$$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum_\mu (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_\mu}_{\in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} = \sum_{\mu\neq\lambda} (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k b_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_\mu + (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k \phi_\lambda(\mathcal{A}) v_\lambda = \mathbb{0}$$

Отсюда ϕ_1 аннулятор $\mathcal{A}$, причем степени меньшей, чем ϕ, что противоречит минимальности ϕ

Отсюда $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{B}$

Следствие 1

$\forall\, \lambda \; m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$ (очевидно из п.3 теоремы)

Следствие 2

$\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow \forall\, \lambda \; m(\lambda) = 1$

Доказательство $\Rightarrow$

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

Пусть $\phi(t) := \prod\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} (t-\lambda)$

Очевидно аннулятор $\mathcal{A}$, причем минимальный

$\forall\, v \in V\;\; v = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{v_\lambda}_{\in V_\lambda}$ – раскладывается единственным образом

$\phi(\mathcal{A}) = \prod\limits_{\mu}\prod\limits_{\lambda}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon) \underbrace{v_\mu}_{\in V_\mu = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\mu\epsilon)} = \prod\limits_{\mu}\prod\limits_{\lambda\neq\mu}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)(\mathcal{A}-\mu\epsilon)v_\mu = \mathbb{0}$

Доказательство $\Leftarrow$

$\forall\,\lambda\; m(\lambda) = 1$

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$

$\forall\,\lambda\; K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^1 = V_\lambda$

Отсюда $\bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda = V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ – о.п.с.

1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

Определение

$\mathcal{B} \in \operatorname{End}(V)$ называется *нильпотентным*, если $\chi_{\mathcal{B}} = t^\nu, \nu \geq 1$

ν – индекс нильпотентности ($\nu \leq n$)

(Т.е. $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$)

Теорема (разложение Жордана)

$\forall\,\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

$\exists\,\mathcal{D}$ – оператор простой структуры $\in \operatorname{End}(V), \mathcal{B}$ нильпотентный $\in \operatorname{End}(V)$:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$

Доказательство

$\phi(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$(все корни $\in K$)

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$

$\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda$

Проверим, что $\mathcal{D}$ – о.п.с.

Достаточно убедиться, что λ – СЧ $\mathcal{D}, \operatorname{Im}\rho_\lambda = V_\lambda^D$ – собственное подпространство для $\mathcal{D}$

Пусть $v_\lambda \in \operatorname{Im}\rho_\lambda$

$$\mathcal{D}v_\lambda = \sum_\mu \mu \underbrace{\rho_\mu \underbrace{v_\lambda}_{\in \operatorname{Im}\rho_\lambda}}_{\mu\neq\lambda \Rightarrow \ldots = 0} = \lambda\rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda \text{ – СЧ } \mathcal{D}$$

$V = \bigoplus\limits_\mu \operatorname{Im}\rho_\mu$ – дизъюнктны

Отсюда $\operatorname{Im}\rho_\lambda \subset V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$V = \bigoplus\limits_\lambda \operatorname{Im} p_\lambda \subset \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}} \subset V$

Отсюда $\operatorname{Im} p_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$ – о.п.с

$V = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$D = \sum\limits_\lambda \rho_\lambda$ – спектральное разложение $\mathcal{D}$

$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$

$\nu := \max\limits_\lambda m(\lambda)$

Покажем, что $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

$(\mathcal{A}-\mathcal{D})^\nu = (\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)^\nu = (\mathcal{A}\sum\limits_\lambda \rho_\lambda - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)^\nu = (\sum\limits_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)\rho_\lambda)^\lambda =$
$\sum\limits_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^\nu\rho_\lambda = \sum\limits_\lambda b_\lambda(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\mathcal{B}\mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)(\sum\limits_\mu \mu\rho_\mu) = (\sum\limits_\mu \mu\rho_\mu)(\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda) = \mathcal{D}\mathcal{B}$

Теорема (единственность разложения Жордана)

Разложение Жордана $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$ возможно единственным образом

Доказательство

Пусть $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}}{}' + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$

$\mathcal{D}' = \sum\limits_\mu \mu Q_\mu$ – спектральное разложение

Достаточно доказать, что

1. множество μ с.ч. $\mathcal{D}'$ совпадает с множеством с.ч. $\mathcal{A}$
2. $\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda (D = \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda, \operatorname{Im}\rho_\lambda = K_\lambda)$

   $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$
3. $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$

$(\mathcal{A}-\mu\epsilon)Q_\mu = (\sum\limits_{\xi} \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$
Покажем, что $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$
$\exists \lambda \neq \mu$ $(\lambda-\mu)Q_\lambda C Q_\mu = \lambda Q_\lambda C Q_\mu - Q_\lambda C \mu Q_\mu = Q_\lambda D' C Q_\mu - Q_\lambda C D' Q_\mu = Q_\lambda(D'C - CD')Q_\mu = \mathbb{0}$
Отсюда $Q_\lambda C Q_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu C Q_\lambda, \lambda \neq \mu$
$\sum\limits_{\lambda} Q_\lambda C Q_\mu = \sum\limits_{\mu} Q_\lambda C Q_\mu$
При $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$
$(\mathcal{A}-\mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$
Пусть $m(\mu)$ – минимальное $k : (\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{m(\mu)} = \mathbb{0}$
Такой k найдется, т.к. $\mathcal{C}$ нильпотентный и при каком-то k дает $= \mathbb{0}$
$\psi_\mu(t) = (t-\mu)^{m(\mu)}$
$\forall\, x \in \operatorname{Im} Q_\mu$ $\psi_\mu(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$
Тогда $\psi_\mu(\mathcal{A})$ – минимальный аннулятор элементов $\operatorname{Im} Q_\mu$
ϕ – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и $\operatorname{Im} Q_\mu$
Тогда ϕ делится на ψ_μ
Тогда $\forall\, \mu$ μ – корень ϕ
Рассмотрим $\psi = \prod\limits_{\mu} \psi_\mu(t)$. Покажем, что это аннулятор $\mathcal{A}$
$\forall\, v \in V$ $v = \sum\limits_{\mu} \underbrace{v_\mu}_{\in \operatorname{Im} Q_\mu}$
$\psi(\mathcal{A})v = \sum\limits_{\xi} \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum\limits_{\xi} b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = \mathbb{0}$
Отсюда ψ – аннулятор $\mathcal{A}$
Тогда ψ делится на ϕ
Т.о. $\psi \equiv \phi$
Докажем пункт 2
$(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = \mathbb{0}$
$\operatorname{Im} Q_\lambda \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
$V = \bigoplus\limits_{\lambda} \operatorname{Im} Q_\lambda \subset \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda = V$
$\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda = \operatorname{Im} p_\lambda$
Теорема 3
$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ – разложение Жордана
$\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$

Доказательство
$\mathcal{D} = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$
$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$
$\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}, \nu = \max m(\lambda)$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ – попарно перестановочные
$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$
$\operatorname{Im} p_\lambda = K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$
$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = (\det \mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu$
$t \in K, (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu - t^\nu \mathcal{B}^\nu = (\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$
$\underbrace{\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu}_{\text{не зависит от } t} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})}_{\text{многочлен от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$
Отсюда $\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})$ и $\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$ не зависит от t
Тогда $\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - \mathcal{B}) = \det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)$
$\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1})$
$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^\nu = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$
Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$
$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$
Следствие 1
$\det \mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0) = \det \mathcal{D}$
Следствие 2
$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$
Доказательство
$\alpha(\lambda)$ – кратность корня в $\chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow$ в $\chi_{\mathcal{D}}$. А т.к. $\mathcal{D}$ – о.п.с., то $\dim K_\lambda^{\mathcal{D}} = \dim V_\lambda^{\mathcal{D}} = \alpha(\lambda)$

1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис. Функция от матрицы

Пусть все корни $\chi(t) \in K$
$V = \bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda$
$K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Построим в каждом K_λ такой базис, что матрица оператора в нем будет иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)\Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть $K_j = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{B}^r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \operatorname{rg}\mathcal{B}^r + \dim K_r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда $\operatorname{rg}\mathcal{B}^r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1}$

$\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} \subset \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$

Т.о. $\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$

Тогда $\operatorname{Im}\mathcal{B}^r = \operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \ldots = \operatorname{Im}\mathcal{B}^m = \mathbb{0}$, что противоречит минимальности m

Рассмотрим $K_1 \dots K_m$

Найдем j_m – компоненту, которая лежит в K_m, но не лежит в K_{m-1}

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1}$ $j_r := \mathcal{B}j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B}j_r$

$\mathcal{B}^{r-1}j_{r-1} = \mathcal{B}^r j_r = \mathbb{0}$

Отсюда $j_{r-1} \in K_{r-1} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r-1}$

$Bj_1 = \mathbb{0}$

$\underbrace{j_1, \ldots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$ – циклический базис, порожденный вектором j_m

Далее повторяем это для всех векторов $K_m, K_{m-1}, \ldots$

Максимальная длина циклического базиса, порожденного $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$ – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора(фундамент башни) – вектора j_m

Крыша башни – вектора j_1
Крыша башна – собственное подпространство
Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу
Если $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то $V_\lambda = K_\lambda$, то замок будет состоять из одной башни высоты 1
$K = K_\lambda = \text{span}(\ldots, j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots)$ – линейная оболочка всех векторов всех башен
$j_r = \mathcal{B} j_{r+1}$
$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) j_{r+1}$
$\mathcal{A} j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} j_1 = \lambda j_1 \\ \mathcal{A} j_2 = j_1 + \lambda j_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A} j_m = j_{m-1} + \lambda j_m \end{array} \quad \leftrightarrow \; J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ – клетка Жордана}$$

m-ого порядка (блок нижнего уровня)
Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера m
Рассмотрим теперь блочную матрицу $\text{diag}(\underbrace{J_1, \ldots J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \ldots, \underbrace{J_m, \ldots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$
– блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству K_λ
Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты
Объединим все блоки вернего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу
Получим жорданов базис пространства V
Матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы
$T_{e \to j} = T = (\ldots, j_1, \ldots j_m, \ldots)$
$T^{-1} A T = J$
$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$

Обоснование алгоритма

Пусть $\mathcal{B} K = \operatorname{Im} \mathcal{B}$
$Z_0 = \mathcal{B} K$
$Z_r = \mathcal{B} K + K_r, r = 1 \ldots m$
$Z_m = \mathcal{B} K + K_m = K$
$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$

$\overline{K}_1 \subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1$
$\overline{K}_2 \subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2$
$\overline{K}_r \subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K$
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$ (1)
$\overline{K}_j$ – опорные подпространства
Теорема
$1 \leq r \leq m$
$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$
Доказательство
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$ (1)
$\forall\, x \in K : \ \exists!(x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \ldots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \operatorname{Ker} \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = \mathbb{0}$$

$$\mathcal{B}^r \underbrace{(\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x')}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' = \sum_{j=1}^{m} x_j + \mathcal{B}y'$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности $\overline{K}_j$ и $\mathcal{B}K$ $\forall\, j\ x_j = \mathbb{0}$
$\mathbb{0} + \mathcal{B}^{r+1} = \mathbb{0}$ – дизъюнктность

$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$
$\mathcal{B}K = \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K$
$\vdots$
$\mathcal{B}^{m-1} K = \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=\mathbb{0}}$
Отсюда следствие
Следствие
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$
Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \overline{K}_m \\
 & & & \overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}K_m \\
 & & \iddots & \iddots & \vdots \\
 & \overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m \\
\overline{K}_1 & \mathcal{B}\overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$

Отсюда $\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \operatorname{Ker}\mathcal{B} = V_\lambda$

Если $\overline{K}_r \neq \mathbb{0}$, то $J_r = \overline{K}_r \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$

$\overline{K}_r$ – основание башни (опорное пространство, поорожденное J_r)

$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m$ – основание (1 этаж – крыша)

Верхние клетки каждого этажа – основание

l-ый этаж: $\overline{K}_l \oplus \mathcal{B}\overline{K}_{l+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$

$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \mathbb{0}, j = 0 \ldots m-l$

Отсюда $\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

Первые j этажей соответствуют K_j

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни имеют однинаковую размерность $d_r = \dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \ldots r-1$

Доказательство

Рассмотрим $\mathcal{B}^j$ (очевидно, что $\mathcal{B}^j$ – эндоморфизм)

Докажем, что $\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е. $\dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

Пусть $x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \mathbb{0}$

Тогда $x \in \operatorname{Ker} B^j = K^j$

$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \ldots r-1$

$K_1, \ldots, K_{r-1}$ дизъюнктны с $\overline{K}_r$

Т.о. $x = \mathbb{0}$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

Следствие

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} d_r$$

$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum\limits_{r=1}^{m} r d_r$

Следствие 2 (теорема Фробениуса)

$\forall\, r = 1 \ldots m\ d_r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r-1} - 2\operatorname{rg}\mathcal{B}^{r} + \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1}$

(при $r = m\ d_m = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{m-1}$)

Доказательство

$\rho_j = \operatorname{rg}\mathcal{B}^j$

$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im}\mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im}\mathcal{B}^{j+1}}$

$\rho_j = d_{j+1} + \ldots + d_m + \rho_{j+1}$

$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \ldots + d_m$

$\rho_0 = \operatorname{rg}\mathcal{B}^0 = \operatorname{rg}\epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$

$d_1 + \ldots + d_m = \rho_0 - \rho_1$

$\vdots$

$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$

$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$

Отсюда $d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$

$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$

Замечание

На практике удобнее

$\rho\mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$

Рассмотрим башню

$\dim \overline{K}_r = d_r = d$

$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \ldots, g_d)$

$$\begin{array}{c|cccc}
\overline{K}_r & g_1 & g_2 & \ldots & g_d \\
\mathcal{B}\overline{K}_r & \mathcal{B}g_1 & \mathcal{B}g_2 & \ldots & \mathcal{B}g_d \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1}g_1 & \mathcal{B}^{r-1}g_2 & \ldots & \mathcal{B}^{r-1}g_d
\end{array}$$

$\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. базис переходит в базис

$\mathcal{B}^j g_1 \ldots \mathcal{B}^j g_d$ – базис $\mathcal{B}^j \overline{K}^r$ – циклический базис

Тогда $J_r = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i, \ldots, \mathcal{B}g_i, g_i)$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda\epsilon)\mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$

$\mathcal{A}\Big|_{\mathrm{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i,\ldots,\mathcal{B}g_i,g_i)} \underset{\text{в цикл.базисе}}{\leftrightarrow} J_r$ – клетка Жордана размерности $r\times r$ – блок нижнего уровн

$\mathcal{A}\Big|_{J_i} \leftrightarrow \operatorname{diag}(\underbrace{J_r(\lambda),\ldots,J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda)$

$\mathcal{A}\Big|_{K=\bigoplus_{r=1}^{m} J_r} \leftrightarrow \operatorname{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda),\ldots,\mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda)$

$\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1),\mathcal{J}(\lambda_2),\ldots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J}$

//todo 13:11 16.03

1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$f(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$

$\exists T(j_1,\ldots,j_n), A = T\mathcal{J}T^{-1}$

Пусть $\mathcal{J} = \operatorname{diag}(\mathcal{J}_1,\ldots,\mathcal{J}_n)$ Тогда $\mathcal{J}^k = \operatorname{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k,\ldots,\mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$A^k = T\operatorname{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k,\ldots,\mathcal{J}(\lambda_n)^k)T^{-1}$

$f(A) = T\operatorname{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)),\ldots,f(\mathcal{J}(\lambda_n)))T^{-1}$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r\times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

Отсюда $J_r^k = (\lambda E_{r\times r} + I_r)^k = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} +$

$C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$

$= \begin{pmatrix} C_k^0\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1}\lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & C_k^0\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1}\lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

//todo 23.03 10:27

2 Черная магия

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Отсюда $(\ln|y|)' = \frac{y'}{y}$

$y' = y(\ln|y|)'$ (удобно)

3 Тензоры

3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

V – линейное пространство над $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

Линейная функция $f : V \to K$ называется *линейной формой(линейным функционалом)*

Т.е. $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$
Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор
2. $A_{n\times n}, f : M_{n\times n} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
   $f(A) = \operatorname{tr} A$
3. $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$
   Пусть $f^j = P_n \to \mathbb{R}, f^j(p) = \dfrac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$
   Тогда $f^0, f^1, \dots$ – линейная форма
4. $f : \underbrace{C}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
   $\delta(f) := f(0)$ – δ-функция Дирака
   $\delta(f)$ – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$
$V^* = \{f : V \to K\ f \text{ – линейнаяя форма}\}$
$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$
$\forall\, f \in V^*\ (-f) \in V^*$
Тогда V^* – линейное пространство над полем K
V^* – *сопряженное(дуальное)* к V

Вспоминаем правило Эйнштейна
Выражение $\alpha^i\beta_i := \sum\limits_i \alpha_i\beta_i$
иначе: $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$
$\forall\, x \in V\ \ f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$
$a := f(e_i)$ называется *коэффициентами линейной формы* f
Тогда $f(x) = x^i a_i$ – f полностью описывается значениями на базисных элементах
Тогда $f \leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ – зависит от выбора базиса
Сопоставление – изоморфизм
Фанфакт

Естественный изоморфизм – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай
$V^* \cong K_n(K^n)$ – пространство n-мерных строк
Определение
$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$
$\forall\, x \in V \omega^i(x) = x_i$ – координатные функции
(очевидно, что $\omega^i \in V^*, w^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$)
$w^i(e_j) = \delta^i_j = +(i == j) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_{i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Теорема
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*
Доказательство
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – линейно независимые
$\alpha_i \omega^i = \mathbb{0}$
$\alpha_i \in K$
$j = 1 \dots n$ $\alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow$ линейно независимые
$\dim V^* = n \Rightarrow$ базис
Следствие
a_i – координаты f в базисе $\omega^1 \dots \omega^n$
Доказательство
$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$
Определение
$\omega = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix}$ называется *сопряженным(дуальным)* базисом к базису e пространства V

Вопрос: есть другой базис в V^*. Будет ли он сопряженным к некоторому базису V
Теорема
$\omega'^1, \dots, \omega'^n$ – базис V^*
Тогда $\exists\, e'_1, \dots, e'_n$ – базис в V такой, что ω' сопряжен с e'
Доказательство
Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ – базис в V
Базис V $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряжен с e
$\omega'^1, \dots, \omega'^n$ – базис $V^* \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega'^1 & \dots & \omega'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix} T_{\omega \to \omega'}$
$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = \underbrace{T^T_{\omega \to \omega'}}_{=: S_{\omega \to \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис e'
$T_{e\to e'} = S^{-1} = T$
$\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} T$ – тоже базис по определению
Покажем, что ω' сопряжен к e', т.е. ω'^i – координатные функции по отношению к e'
Пусть $s^i_j = s_{ij}, t^i_j = t_{ij}$
$\forall\, x \in V\ \omega'^i(x) = s^i_k\omega^k(x) = s^i_k x^k = \underbrace{\underbrace{s^i_k t^k_j}_{(ST)^i_j = \delta^i_j}}_{E} x'^i = \delta^i_j x'^j = x'^i$
Отсюда ω'^i – координатная функция $\Rightarrow$ базис сопряженный
Замечание
Вообще говоря, базис e' существует и единственный (очевидно из доказательства)
Следствие
$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T^T_{\omega\to\omega'}$
Тогда $a' = aT$
$T = S^{-1} = T_{e\to e'}$
$x' = Sx$
Доказательство
$X' = SX$ очевидно$(X = TX' = S^{-1}X')$
$\begin{pmatrix} \omega'^1 & \dots & \omega'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix} T_{\omega\to\omega'}$
$a^T = T_{\omega\to\omega'}(a')^T\ a = a'T^T_{\omega\to\omega'} = a'S \Leftrightarrow a' = aS^{-1}aT$

Определение
Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону(т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным(согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*
Элементы V^* – это ковекторы (линейная форма $\equiv$ ковектор)
В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, провоположному(т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контровариантным* или про-

сто вектором
Элементы V – контрвариантные векторы
Принято писать индекс координаты контрвектора сверзу, а ковариантного – снизу

$\forall\, f \in V^*, x \in V \;\, f(x) = x'ia'_i = s^i_k x^k a_m t^m_i = \underbrace{t^m_i s^i_k}_{\delta^m_k} x^k a_m = x^k a_k$

Т.о. форма записи f – инвариант относительно замены базиса
Определение
$V^{**} = (V^*)^*$
$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$ – можем построить изоморфизм между V и V^{**}
Теорема 3 (естественный изоморфизм V и V^{**})
Вместо обозначения "x"буду использовать <x>
$\forall\, x \in V \to < x > \in V^{**}$
$\forall\, f \in V^* < x > (f) = f(x)$
Отсюда $x \leftrightarrow < x >$
$V \cong V^{**}$
Доказательство
$\forall\, f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K \;\; < x > (f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) =< x > (f_1) + \lambda < x > (f_2)$
Отсюда $< x > \in (V^*)^*$
Покажем, что V линейно вложено в V^{**}, т.е. $x \in V \to < x > \in V^{**}$
//todo 12:00 23.03
Покажем, что базис V $e_1, \dots e_n$ перейдет в базис V^{**}
$e_j \to < e_j >$
$\forall\, f \in V^* < e_j > (f) = f(e_j) = a_j$ – координата f в базисе $\omega^1, \dots \omega_n$, сопр. с e
Т.о. $< e_j >$ – координатная функция в пространстве V^* относительно $\omega^1, \dots \omega_n$
Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства
Т.о. $< e_j >$ – базис V^{**}
Базис V $e_1, \dots, e_n \to$ базис $V^{**} < e_1 >, \dots, < e_n >$
Т.о. отображение линейно, то изоморфизм
Замечание

1. принято отождествлять элементы V и V^{**} с помощью изоморфиз-

ма, описанного в теореме 3
Поэтому <> не пишут
$\forall\, f \in V^*, x \in V\;\; f(x) = a_i x^i = f(e_i)x^i = e_i(f)x^i = x(f)$
$a_i = f(e_i)$
$x^i = x(\omega^i)$

2. $\omega^i(e_j) = \delta^i_j = e_j(\omega^i)$
   Как найти на практике?
   $e_1, \dots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ – столбцы
   $w^i(e_j) = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}}_{a} \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_{x} = \delta^i_j$
   Отсюда $\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}}_{S=T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_{T} = E$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса дуальны
   ω сопряженный базис к e
   e сопряженный базис к ω
   (здесь подразумевается элементы V^{**})

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)
   $V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$
   $\forall\, x \in V\; \exists!x = \sum\limits_{\lambda} x_\lambda, x_\lambda \in V_\lambda$
   $\rho_\lambda : V \to V, \operatorname{Im} \rho_\lambda = V_\lambda, \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda = \epsilon$
   $\forall\, x \in V\;\; \rho x := x_\lambda, \underbrace{\rho_\lambda \rho \mu}_{\lambda \neq \mu} = 0$
   $v_1, \dots, v_n$ – базис V = объединение базисов V_λ
   $x = x^i v_i = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{\sum\limits_{m_\lambda} x^{m_\lambda} v_{m_\lambda}}_{x_\lambda} = \omega^1, \dots, \omega^n$ – сопряженный базис =

$$\sum_{\lambda}\sum_{m_\lambda}\omega^{m_\lambda}(x)v_{m_\lambda}$$
$\omega^{m_\lambda} \leftrightarrow (a_i^{m_\lambda})_i$ – строка
$x \leftrightarrow X$
$\omega^{m_\lambda}(x) = a^{m_\lambda}X$
$v_{m_\lambda} \leftrightarrow (V_{m_\lambda,i})_i$ – столбец
$$x = \sum_{\lambda}\sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda}a^{m_\lambda}X = \sum_{\lambda}\underbrace{(\sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda}a^{m_\lambda})}_{\rho_\lambda}X = \sum_{\lambda}(\sum_{m_\lambda}\underbrace{(a^{m_\lambda}x)}_{\omega^{m_\lambda}(x)}V_{m_\lambda})$$

3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

Определение
V, V^* – сопряженные линейные пространства над полем $K(\mathbb{R},\mathbb{C})$
$f : V^p \times (V^*)^q \to K, p, q \geq 0$ – линейная по каждому аргументу
f – тензор порядка (p,q) или p раз ковариантом, q раз контрвариантным
Множество таких функций обозначим $T_{(p,q)}$
p, q – *валентности*
$r = p + q$ – полная валентность/ранг тензора (не наш rg)
$f \in T_{p,0}$ – ковариантный тензор валентности p
$f \in T_{0,q}$ – контрвариантный тензор валентности q
$r = 0$ – тензор нулевого ранга. $f = \text{const} \in K$
Пример
$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_{V}$ – столбец
$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$ – строка
$f(x,a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1,1)}$

$\mathbb{0}$ – нулевой тензор
$\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_p \in V, \nu^1, \ldots, \nu^p \in V^*\ 0(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu^1, \ldots, \nu^q) = 0$
$\forall\, f \in T_{(p,q)}\ \ -f \in T_{(p,q)}$
$T_{(p,q)}$ – линейное пространство

$e_1, \ldots, e_n$ – базис V
$\omega^1, \ldots, \omega^n$ – базис V^*

e, ω – сопряженные
Для $\xi \in V$ $\xi = \xi^i e_j$
Для $\nu \in V^*$ $\nu = \nu_i \omega^j$
Тогда $f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu^1, \ldots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \ldots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_p})$
$= \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \ldots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, \omega^1, \ldots, \omega^{i_q})$ – любой тензор определяется значениями на всевозможных наборах e_j, ω^i
$\alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} := f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_q})$ – коэффициенты тензона f относительно базисов e, ω
$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu^1, \ldots, \nu^q) = \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \ldots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q}$

Определение

S – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов $s_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q}$, где $i_k, j_m \in (1, \ldots n)$ называется $p+q$-мерной матрицей порядка n

Пример

$n = 3$, трехмерная матрица

1. S^{ijk}
2. S_k^{ij}
3. S_{jk}^i
4. S_{ijk}

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q})$ – изоморфизм
$T_{(p,q)} \cong S_(p+q)$

Правило записи элементов тензора в многомерной записи

В $\alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q}$ сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы
Для двумерных матриц:

1. строка
2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой

Запись: $\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

Для четырехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой
4. срез

Запись: $\left(\begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \end{array}\right)$

//todo 11:59 30.03

$\forall\, \xi \in V\ \xi = \xi^i e_i = \xi^{ij} e^i_j$

$\xi^i = t^i_j \xi'^j$

$\forall\, \eta \in V^*\ \eta = \eta_i \omega^i = n'_j \omega'^j$

$\eta_i = s^j_i \eta'_j$

$\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_p \in V, \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^* f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, ., \eta^q) = \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p} \xi^{j_1}_1 \cdot \ldots \cdot \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \cdot \ldots \cdot \eta^q_{i_q} = \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p} t^{j_1}_{u_1} \xi'^{u_1}_1 \cdot \ldots \cdot t^{j_p}_{u_p} \xi'^{u_p}_p \cdot s^{r_1}_{i_1} \eta'^1_{r_1} \cdot \ldots \cdot s^{r_q}_{i_q} \eta'^1_{r_q}$

$\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p} t^{j_1}_{u_1} \cdot \ldots \cdot t^{j_p}_{u_p} s^{r_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot s^{r_q}_{i_q} = \alpha'^{r_1,\ldots,r_q}_{u_1,.,u_p}$

$f('e_{u_1}, \ldots, e'_{u_p}, \omega'^{r_1}, \ldots, \omega'^{r_q}) = \alpha'^{r_1,\ldots,r_q}_{u_1,.,u_p}$

Нижние индексы – ковариантные, т.к. при смене базиса соответствующая координата пересчитывается по ковариантному закону (т.е. через T)

Верхние индексы – контрвариантные

Пример

$\forall\, x \in V \cong V^{**}, x$ – линейное отображение

$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \alpha, x \in T_{(0,1)}$

$\alpha'^r = \alpha^i s_i^r$
$\alpha' = S\alpha \Rightarrow \alpha = T\alpha'$
$\forall\, f \in V^*, f$ – линейное отображение
$f \leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}, f \in T_{(0,1)}$
$a'_u = a_j t_u^j$
$a' = aT \Rightarrow a = a'S$
Определение 2
Геометрический объект на линейном пространстве V над полем K, описываемый $p+q$-мерной матрицей размерности $n(= \dim V)$ с элементами из поля K, которая при смене пространства V пересчитывается по формуле $\alpha_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} t_{u_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \cdot \dots \cdot s_{i_q}^{r_q} = \alpha'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p}$, где $(t_j^i) = T_{e \to e'}, S = T^{-1}$, называется тензором типа (p, q) или p раз ковариантным и q раз контрвариантным

Пусть $\mathbb{0}$ – нулевая матрица, $-\alpha$ – противоположная матрица, задано умножение на скаляр и сложение
Докажем, что $+$ и $\lambda\cdot$ сохраняют свойство тензоров
$\alpha, \beta \in T_{(p,q)}, \forall\, \lambda \in K$
$(\alpha + \lambda\beta)_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} = \alpha_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} + \lambda\beta_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q}$
$(\alpha + \lambda\beta)'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p} = (\alpha + \lambda\beta)_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{u_q}^{r_q} = \alpha'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p} + \lambda\beta'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p}$ – верно

3.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свойства тензоров

Определение
$\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$
$\beta \in T_{(p_2,q_2)}$
$\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+q_1,p_2+q_2)}$
$\gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}}^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}} = \alpha_{j_1,.,j_{p_1}}^{i_1,\dots,i_{q_1}} \beta_{m_1,.,m_{p_2}}^{k_1,\dots,k_{q_2}}$
Доказательство корректности произведения
$\gamma'^{r_1 \dots r_{q_1} \sigma_1 \dots \sigma_{q_2}}_{u_1 \dots u_{p_1} v_1 \dots v_{p_2}} = \gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}}^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}}$
$= \alpha_{j_1,.,j_{p_1}}^{i_1,\dots,i_{q_1}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{r_{q_1}}^{r_{q_1}} \beta_{m_1,.,m_{p_2}}^{k_1,\dots,k_{q_2}} t_{v_1}^{m_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{k_1}^{\sigma_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}}$
$= \alpha'^{r_1,\dots,r_{q_1}}_{u_1,.,u_{p_1}} \beta'^{\sigma_1,\dots,\sigma_{q_2}}_{v_1,.,v_{p_2}}$
Замечание

1. $\lambda \in K \leftrightarrow \lambda \in T_{(0,0)}$

$\forall\, \alpha \in T_{(p,q)}\ \lambda \otimes \alpha = \lambda\alpha$

2. $\oplus$ ассоциативно, не коммутативно, дистрибутивно по сложению

$\alpha \in T_{(p_1,q_1)} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \to K$ – полилинейная
$\beta \in T_{(p_2,q_2)} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} f : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \to K$ – полилинейная
Тогда $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2,q_1+q_2)} \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to R$
$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$
$\forall\, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$
$t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$
$= \gamma^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}}_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_p} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \theta^1_{k_1} \dots k^{q_2}_{q_2}$
$= \alpha^{i_1,\dots,i_{q_1}}_{j_1,.,j_{p_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \beta^{k_1,\dots,k_{q_2}}_{m_1,.,m_{p_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_p} \theta^1_{k_1} \dots k^{q_2}_{q_2}$
$= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$
Отсюда $\gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow t = fg$
В частности:
$\forall\, f^1, \dots, f^p \in V^*, g_1, \dots, g_q \in V\ f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\eta_1) \dots f^p(\eta_p) g_1(\eta^n) \dots g_q(\eta^q)$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*
$\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1 j_1, \dots, \xi_p^{j_p}, \eta^1_{i_1}, \dots, \eta^q_{i_q}$
Теорема о базисе пространства тензоров
Набор тензоров $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ по всем возможным i, j – базис $T_{(p,q)}$
Доказательство
$\omega^j \in T_{(1,0)}, e_i \in T_{(0,1)}$
$\{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\}$ – набор из n^{p+q}
Система порождающая:
$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in V$
$\forall\, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$
$\forall\, f \in T_{(p,q)}\ f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1,\dots,\xi_p,\eta^1,\dots,\eta^q)}$
Отсюда $f = \underbrace{\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p}}_{\text{в будущем: координата}} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$
Система линейно независимая
Рассмотрим $\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

Применим к $e_{u_1},\dots,e_{u_p}\in V,\omega^{r_1},\dots,\omega^{r_q}\in V^*$

$\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,..,j_p}\underbrace{\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_p}\otimes e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_q}(e_{u_1},\dots,e_{u_p},\omega^{r_1},\dots,\omega^{r_q})}_{\delta^{j_1}_{u_1}\dots\delta^{j_p}_{u_p}\delta^{r_1}_{i_1}\dots\delta^{r_q}_{i_q}}=\mathbb{0}$

Отсюда $\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,..,j_p}=0$

Тогда все $\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,..,j_p}$ нули $\Rightarrow$ линейно независимые

Следствие

$\dim T_{(p,q)}=n^{p+q}$

Замечание

//todo 14:20 30.03

Определение

Пусть $\alpha\in T(p,q),p,q\neq 0$

Тензор $\beta\in T_{p-1,q-1}$ называется сверткой тензора α, если

$\beta^{i_1,\dots,\hat{i_k},\dots,i_q}_{j_1,\dots\hat{j_m}\dots j_p}:=\sum\limits_{\kappa}\alpha^{i_1,\dots,\underset{\text{k-ая позиция}}{\kappa}\dots i_q}_{j_1,\dots\underset{\text{m-ая позиция}}{\kappa}\dots j_p}$, где $\hat{i_k}$ – отсутствие i_k

Доказательство корректности определения

$\beta'^{i_1,\dots,\hat{i_k},\dots,i_q}_{j_1,\dots\hat{j_m}\dots j_p}=\alpha'^{r_1,\dots,\kappa,\dots,r_q}_{u_1,\dots,\kappa,\dots u_p}=\alpha'^{r_1,\dots,i_k,\dots,r_q}_{u_1,\dots,j_m,\dots u_p}t^{j_1}_{u_1}\dots t^{j_m}_{\kappa}\dots t^{j_m}_{u_p}s^{r_1}_{i_1}\dots s^{\kappa}_{i_k}\dots s^{r_q}_{i_q}$

$t^{j_m}_{\kappa}s^{\kappa}_{i_k}=\delta^{j_m}_{i_k}$

$\beta'^{i_1,\dots,\hat{i_k},\dots,i_q}_{j_1,\dots\hat{j_m}\dots j_p}=\underbrace{\alpha'^{r_1,\dots,\omega,\dots,r_q}_{u_1,\dots,\omega,\dots u_p}}_{\beta^{i_1,\dots,\hat{i_k},\dots,i_q}_{j_1,\dots\hat{j_m}\dots j_p}}t^{j_1}_{u_1}\dots t^{\hat{j_m}}_{\kappa}\dots t^{j_m}_{u_p}s^{r_1}_{i_1}\dots s^{\hat{\kappa}}_{i_k}\dots s^{r_q}_{i_q}$

Свертка может быть по нескольким парам индексов

Если в результате свертки получится тензор (0,0), т.е. число, то свертка *полная*

3.4 Транспонирование тензоров. Кососимметричные и симметричные тензоры

$\alpha=(\alpha_{ij})\rightsquigarrow A^T=B=(\beta_{ij}),\beta_{ij}=\alpha_{ji}$

Обобщим операцию транспонирования

Пусть $\alpha\in T_{(p,q)},p\geq 2$

$\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,*,\dots,\delta,\dots,j_p}$ – зафиксируем все, кроме $*,\delta$

Т.о. мы извлекли из матрицы тензора слой – двумерную матрицу

Получили матрицу $\widetilde{\alpha}_{*\delta}$

Протранспонируем ее

Т.о. $\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,\delta,\dots,*,\dots,j_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,*,\dots,\delta,\dots,j_p}$
Определение
$\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$
$\beta = \sigma(\alpha)$ называется тензором, полученным транспонированием тензора α по перестановке σ, если $\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_{\sigma_1},\dots,j_{\sigma_p}}$
Замечание
Любая перестановка σ – конечное число транспозиций 2-х элементов

Заметим, что не любая многомерная матрица – тензор
Проверим, что β – тензор
Корректность
Достаточно проверить для σ – транспозиции двух элементов
Возьмем $\beta'^{k_1,\dots,k_q}_{m_1,\dots,\underbrace{*}_{\text{r-ая}},\dots,\underbrace{\delta}_{\text{l-ая}},\dots,m_p}$
$\beta'^{k_1,\dots,k_q}_{m_1,\dots,*,\dots,\delta,\dots,m_p} = \alpha^{k_1,\dots,k_q}_{m_1,\dots,\delta,\dots,*,\dots,m_p}$ Т.к. α – тензор:
$\alpha^{k_1,\dots,k_q}_{m_1,\dots,\delta,\dots,*,\dots,m_p} = \underbrace{\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_r,\dots,j_l,\dots,j_p}}_{\beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_l,\dots,j_r,\dots,j_p}} t^{i_1}_{m_1} \dots t^{j_r}_{\delta} \dots t^{j_l}_{*} \dots t^{j_p}_{m_p} s^{k_1}_{i_1} \dots s^{k_q}_{i_q}$

Теперь посмотрим на операцию транспонирования с точки зрения полилинейной функции
$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \ \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$
$\beta = \sigma(\alpha)$
$\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}$
$= \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_{\sigma_1},\dots,j_{\sigma_p}} \xi^{j_{\sigma_1}}_{\sigma_1} \dots \xi^{j_{\sigma_p}}_{\sigma_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q} = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$
Замечание

1. Транспониование тензора можно определить по аналогии по верхним индексам, если $q \geq 2$
2. Тензоры можно транспонировать только по одному типу индексов: либо по верхним, либо по нижним, в отличие от произвольной многомерной матрицы
3. Мы будем работать только с нижними индексами, но все свойства и теоремы работают и для верхних индексов

Свойства

1. Из определения очевидно, что σ – линейная операция
   $\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)$

2. $\alpha = f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \widetilde{\alpha} \in T_{(p,q)}, f^i \in V^*, \widetilde{\alpha} \in T_{(0,q)}$
   Тогда $\forall\sigma : \beta = \sigma(\alpha) \forall\xi_i \in V \forall\eta^j \in V^* \beta(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q)$
   $= f^1(\xi_{\sigma_1}) \cdot \ldots \cdot f^p(\xi_{\sigma_p}) \cdot \widetilde{\alpha}(\eta^1, \ldots, \eta^q) = f^{\sigma_1^{-1}}(\xi_1) \ldots f^{\sigma_p^{-1}}(\xi_p)\alpha(\eta^1, \ldots, \eta_q)$
   Отсюда $\beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \ldots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \widetilde{\alpha}$

α – называется симметричным тензором, если $\forall\sigma\ \sigma(\alpha) = \alpha$
α – кососимметричная(антрисимметричная/альтернированная), если $\forall\sigma\ \sigma(\alpha) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}\alpha$
Заметим, что симметричность $\Leftrightarrow$ симметричность при транспозиции(свапе)
$\Leftrightarrow \forall(n,k) : \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots) = \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots)$
Заметим, что кососимметричность $\Leftrightarrow$ кососимметричность при транспозиции(свапе)
$\Leftrightarrow \forall(n,k) : \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots) = -\alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots)$
Теорема
α кососимметричная $\Leftrightarrow \forall(k,m)\ \alpha(\ldots, \mu, \ldots, \mu, \ldots, \nu^1, \ldots) = 0 \Leftrightarrow \forall(k,m)\alpha^{\cdots}_{\ldots,i,\ldots,i,\ldots} = 0$
Доказательство
Смотри доказательство для полилинейной ассиметричной формы
Примеры

1. $f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) : V_3^3 \to \mathbb{R}$
   $f \in T_{(3,0)}$
   f – кососимметричный тензор

2. $\beta \in T_{(3,0)}, n = 3, \beta$ – кососимметричная
   Тогда тензор имеет следующий вид
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), b = \beta(e_1, e_2, e_3)$$

3. $A = (\alpha_{ij}) \in T_{(2,0)}$. Тогда симметричность и антисимметричность согласуется с свойствами матриц

4. $(\alpha_{ijk}) \in T_{(3,0)}, n = 3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c & a & d & a & x & b & d & b & y \\ a & x & b & x & e & z & b & z & g \\ d & b & y & b & z & g & y & g & f \end{array}\right)$$

3.5 Операция sim и alt для тензоров

Определение

$\forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\ \ \operatorname{sim}\alpha = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_p}\sigma(\alpha)$ – симметрирование для тензора α по нижним индексам

$\forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\ \ \operatorname{sim}\alpha = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\sigma(\alpha)$ – альтернирование для тензора α по нижним индексам

Замечание

1. Т.к. σ – линейный оператор, то $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$ – линейные

2. Для α – симметричной $\operatorname{sim}\alpha = \alpha$
Для α – кососимметричной $\operatorname{alt}\alpha = \alpha$

3. Операции $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$ можно проводить не по всем индексам. Тогда набор индексов, по которым проводится операция, заключается в круглые(для симметрирования) или квадратные(для альтернирования) скобки Если какие-то индексы внутри скобок не участвуют, их выделяют вертикальными чертами

4. Очевидно, что можно определить аналогичные операции по верхним индексам

5. Пусть $\gamma = \operatorname{sim}\alpha$
Тогда $\forall\,\sigma\ \gamma_{i_1,\dots,i_p} = \gamma_{i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_p}}$
Пусть $\gamma = \operatorname{alt}\alpha$
Тогда $\forall\,\sigma\ \gamma_{i_1,\dots,i_p} = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\gamma_{i_{\sigma_1},\dots,i_{\sigma_p}}$

Теорема о перестановочности σ и $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$

$\forall\,\alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\forall\,\sigma\ \operatorname{sim}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\operatorname{sim}(\alpha)) = \operatorname{sim}\alpha\ \forall\,\alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\forall\,\sigma\ \operatorname{alt}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\operatorname{alt}(\alpha)) = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\operatorname{alt}\alpha$

Доказательство

Доказать проще, чем затехать

Следствие 1
$\forall\, \alpha\, \mathrm{sim}\, \alpha$ – симметричный, $\mathrm{alt}\, \alpha$ – кососимметричный
Доказательство
$\forall\, \alpha\ \sigma(\mathrm{sim}\, \alpha) = \mathrm{sim}\, \alpha$ – симметричный
$\forall\, \alpha\ \sigma(\mathrm{alt}\, \alpha) = (-1)^{\mathrm{inv}\, \sigma}\, \mathrm{alt}\, \alpha$ – кососимметричный
Следствие 2
α – симметричный $\Leftrightarrow \alpha = \mathrm{sim}\, \alpha$ α – кососимметричный $\Leftrightarrow \alpha = \mathrm{alt}\, \alpha$
Следствие 3
$\mathrm{sim}(\mathrm{sim}\, \alpha) = \mathrm{sim}\, \alpha$
$\mathrm{alt}(\mathrm{alt}\, \alpha) = \mathrm{alt}\, \alpha$
$\mathrm{sim}(\mathrm{alt}\, \alpha) = 0$
$\mathrm{alt}(\mathrm{sim}\, \alpha) = 0$
Доказательство
$$\mathrm{sim}(\mathrm{alt}\, \alpha) = \mathrm{sim}(\frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^{\mathrm{inv}\, \sigma}\sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!}\sum_\sigma (-1)^{\mathrm{inv}\, \sigma}\, \mathrm{sim}(\sigma(\alpha)) = \mathrm{sim}\, \alpha \frac{1}{p!}\underbrace{\sum_\sigma (-1)^{\mathrm{inv}\, \sigma}}_{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} = 0$$
$\mathrm{alt}(\mathrm{sim}(\alpha))$ – аналогично

$T^{\text{сим}}_{(p,q)}$ – симметрирование T по фиксированному набору
$T^{\text{сим}}_{(p,q)}, T^{\text{кососим}}_{(p,q)}$ – линейные подпространства $T_{(p,q)}$
Для перестановки (k, m)(транспозиция):
$T^{\text{сим}}_{(p,q)} \oplus T^{\text{кососим}}_{(p,q)} = T_{(p,q)}$
Свойства $\mathrm{sim}, \mathrm{alt}$ сохраняются, если они производятся не по всем индексам

3.6 p-формы. Внешнее произведение p-формы

Определение
f – p-форма, если $f \in T_{(p,0)}, f$ – кососимметричный(или $p == 1$)
$f : V^p \to K$
$f \in V^*$ – 1-форма
$$\underbrace{T^{\text{кососим}}_{(p,0)}}_{\Lambda^p V^* \text{– пространство p-форм}} \text{ – линейное подпространство } T_{(p,0)}$$
Определение

f – p_1 – форма ($f \in \Lambda^{p_1} V^*$)
g – p_2 – форма ($f \in \Lambda^{p_2} V^*$)
$f \wedge g := \dfrac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!} \operatorname{alt}(\underbrace{f \otimes g}_{\in T_{(p_1+p_2,0)}}) \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$ – внешнее произведение

Свойства

1. $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$
   В частности $f, g \in \Lambda^1 V^* (V^*)$
   $f \wedge g = -g \wedge f$
   $f \wedge f = 0$
   Доказательство
   $f \in \Lambda^{p_1} V^* \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}})$
   $g \in \Lambda^{p_2} V^* \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_2,\dots,j_{p_2}})$
   $f \otimes g \leftrightarrow \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow \gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}} = \alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}} \beta_{m_1,\dots,m_{p_2}}$
   $g \otimes f \leftrightarrow \theta = \beta \otimes \alpha \leftrightarrow \theta_{m_1,\dots,m_{p_2},j_1,\dots,j_{p_1}} = \beta_{m_1,\dots,m_{p_2}} \alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}}$
   $\operatorname{alt} f \otimes g = \dfrac{1}{(p_1+p_2)!} \sum\limits_{\sigma} \sigma(\gamma)$
   $\operatorname{alt} g \otimes f = \dfrac{1}{(p_1+p_2)!} \sum\limits_{\tau} \tau(\theta)$
   //todo 13.04 13:12

2. $(f+g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$
   $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$

3. $(\lambda f) \wedge g = \lambda (f \wedge h) = f \wedge (\lambda g)$

4. $f \wedge \underbrace{\mathbb{0}}_{p_1\text{-форма}} = \mathbb{0} \wedge f = \underbrace{\mathbb{0}}_{(p_1+p_2)\text{-форма}}$

5. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$
   Доказательство
   $f \wedge g = \dfrac{1}{p_1!p_2!} \sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g)$
   $(f \wedge g) \wedge h = \dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{(p_1+p_2)!p_1!p_2!p_3!} \operatorname{alt}(\sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h)$
   Рассмотрим $\operatorname{alt}(\sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h) = \sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \operatorname{alt}(\underbrace{\sigma(f \otimes g) \otimes h}_{\tau(f \otimes g \otimes h)}) =$
   ...

Возьмем τ – перестановку такую, что первые p_1+p_2 индексов переставляются, а последние p_3 индекса не меняются
$(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}=(-1)^{\operatorname{inv}\tau}$
$\ldots=\sum\limits_{\sigma\in S_{p_1+p_2}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)=\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)\sum\limits_{\sigma\in S_{p_1+p_2}}1=$
$(p_1+p_2)!\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$
$(f\wedge g)\wedge h=\dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$
Аналогично $f\wedge(g\wedge h)=\dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$

Пусть $f^i\in V^*=\Lambda^1V^*$ – 1-форма, $j=1\ldots p$
$f^1\wedge\ldots\wedge f^p=\dfrac{p!}{1!\ldots1!}\operatorname{alt}(f^1\otimes\ldots\otimes f^p)\in\Lambda^pV^*$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=p!\operatorname{alt}(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})\in\Lambda^pV^*$
$\omega^i\wedge\omega^j=2\operatorname{alt}(\omega^i\otimes\omega^j)=\omega^i\otimes\omega^j-\omega^j\otimes\omega^i$
$\omega^i\wedge\omega^j=-\omega^j\wedge\omega^i$
$\omega^i\wedge\omega_i=0$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^m\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=-\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^m\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=0$
Теорема (о базисе пространства внешних форм)
$\{\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}:j_1<\ldots<j_p\}$ – базис пространства Λ^pV^*
Доказательство
$\forall f\in\Lambda^pV^*\Leftrightarrow\begin{cases}f\in T_{p,0}\\ \operatorname{alt}f=f\end{cases}$
$f=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}$
$\operatorname{alt}f=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}\operatorname{alt}(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})$
$=\dfrac{\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}}{p!}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\omega^{j_{\sigma_1}}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_{\sigma_p}}$
$=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$
$=\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\underbrace{(\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma})}_{\beta_{j_1,\ldots,j_p}}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$ – порождающая
Существуют координаты p-формы f относительно базиса $\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$, $j_1<\ldots<j_p$
Проверим линейную независимость

$$\mathbb{0} = \sum_{j_1<\ldots<j_p} \beta_{j_1,\ldots,j_p} \underbrace{\underbrace{\omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_p}}_{p! \quad \mathrm{alt}(\omega^{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{j_p})}}_{\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}\sigma(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})} = \sum_{j_1<\ldots<j_p} \sigma_{\sigma\in S_p}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}\omega^{j_{\sigma_1}} \otimes$$

$\ldots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}}$

Т.к. базис $T_{(p,0)}$, $\forall\, \alpha_{j_1,\ldots,j_p} = 0$

$\beta_{j_1,\ldots,j_p} = 0$

Тогда линейно независимые

Следствие 1

$$\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Следствие 2

$\forall\, f \in \Lambda^P V^*$

$$f = \sum_{j_1<\ldots<j_p} \beta_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_p}$$

$\beta_{j_1,\ldots,j_p} = \alpha_{j_1,\ldots,j_p} = f(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}), j_1 < \ldots < j_p$

Доказательство

Из доказательства теоремы:

$$\beta_{j_1,\ldots,j_p} = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1},\ldots,j_{\sigma_p}}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma} = \alpha_{[j_1,\ldots,j_p]}, j_1 < \ldots < j_p$$

$f = \mathrm{alt}\, f \Rightarrow \alpha_{[j_1,\ldots,j_p]} = \alpha_{j_1,\ldots,j_p}$, т.к. $j_1 < \ldots < j_p$

Теорема

$f^i \in \Lambda^1 V^*, j = 1 \ldots p$ – 1-формы

$\forall\, \xi_1,\ldots,\xi_p \in V$

$$(f^1 \wedge \ldots \wedge f^p)(\xi_1,\ldots,\xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \ldots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \ldots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix}$$

$f^j \leftrightarrow a^j = \begin{pmatrix} a_1^j & \ldots & a_p^j \end{pmatrix}$ – координатные строки в V^* относительно ω^i

$\xi_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix}$ – координаты в V относительно e_j

$f^j(\xi_i) = a_k^j \xi_i^k = a^j \xi_i$

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1,\ldots,\xi_p) = \det(\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_p \end{pmatrix})$$

Замечание

Если $p=n$: $f^1\wedge\ldots\wedge f^p(\xi_1,\ldots,\xi_p)=\det A\det\xi$

Доказательство

$f^1\wedge\ldots\wedge f^p(\xi_1,\ldots,\xi_p) = p!\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\sigma(f^1\otimes\ldots\otimes f^p)(\xi_1,\ldots,\xi_p) = \sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}f^{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes f^{\sigma_p}(\xi_1,\ldots,\xi_p) = \sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}f^{\sigma_1}(\xi_1)\ldots f^{\sigma_p}(\xi_p) = \det(f^i(\xi_j))$

Следствие 1

$$\forall\,\xi_1,\ldots,\xi_p\in V\ \ \omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}(\xi_1,\ldots,\xi_p)=\begin{vmatrix}\xi_1^{j_1} & \ldots & \xi_p^{j_1}\\ \vdots & \ddots & \ldots\\ \xi_1^{j_p} & \ldots & \xi_p^{j_p}\end{vmatrix}$$

Следствие 2

$$f^1\wedge\ldots\wedge f^p=\sum_{j_1<\ldots<j_p}\underbrace{\begin{vmatrix}a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a^p_{j_1} & \ldots & a^p_{j_p}\end{vmatrix}}_{\beta_{j_1,\ldots,j_p}\text{ для }f^1\wedge\ldots\wedge f^p}\ \omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$$

Доказательство

$$\beta_{j_1<\ldots<j_p}=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}=(f^1\wedge\ldots\wedge f^p)(e_{j_1},\ldots,e_{j_p})=\begin{vmatrix}f^1(e_{j_1}) & \ldots & f^1(e_{j_p})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f^p(e_{j_1}) & \ldots & f^p(e_{j_p})\end{vmatrix}=$$

$\begin{vmatrix}a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a^p_{j_1} & \ldots & a^p_{j_p}\end{vmatrix}$, т.к. $a^i_j=f^i(e_j)$ по определению коэффициентов формы f

В частности, при $p=n$: $f^1\wedge\ldots\wedge f^n=\det A\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^n$

Следствие 3

$$\det(\begin{pmatrix}a^1\\ \vdots\\ a^p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_p\end{pmatrix})=\sum_{j_1<\ldots<j_p}\begin{vmatrix}a^1_{j_1} & \ldots & a^1_{j_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a^p_{j_1} & \ldots & a^p_{j_p}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\xi_1^{j_1} & \ldots & \xi_p^{j_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_1^{j_p} & \ldots & \xi_p^{j_p}\end{vmatrix}$$

В частности, при $p=n$: $\det(A\xi)=\det A\det\xi$

Определение

Пусть $g\in T_{0,q},\operatorname{alt}g=g$:

g называется *поливектор*(q-вектор)

Если $q\in T_{(0,1)}$ – g – 1-вектор

Линейное пространство q-векторов $\mathcal{V}^qV$

Аналог внешнего произведения: $g_1 \in \mathcal{V}^{q_1}V, g_2 \in \mathcal{V}^{q_2}V, g_1 \vee g_2 = \dfrac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!}\operatorname{alt}(g_1 \otimes g_2)$ – по верхним индексам
$\{e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_q}, i_1 < \ldots < i_q\}$ – базис $\mathcal{V}^q V$
Пусть $p = q$
$\forall\, f^1, \ldots, f^p \in V^*$
$V \cong V^{**}\ \forall \xi \in V\ \xi(f) = f(\xi)$
$\xi \in \mathcal{V}^1 V$
$\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_p(f^1, \ldots, f^p) = \begin{vmatrix} \xi_1(f^1) & \ldots & \xi_p(f^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(f^p) & \ldots & \xi_p(f^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \ldots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \ldots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} =$
$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1, \ldots, \xi_p)$

3.7 Евклидовы и унитарные пространства

3.7.1 Скалярное и псевдоскалярное произведение. Евклидово и унитарное пространство. Норма в евклидовом и унитарном пространстве

Определение
Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещественное линейное пространство)
$(\cdot,\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если
$\forall\, x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$ – симметричность
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Следствие
Линейность по второму аргументу
$(V, (\cdot,\cdot))$ – вещественное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением – Евклидово пространство
Определение
Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{C}$

$(\cdot,\cdot): V^2 \to \mathbb{R}$ называется псевдоскалярным произведением, если
$\forall\, x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) = \overline{(x, x)} \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$
   $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Следствие
$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ – аддитивность по второму аргументу
$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$
Вместе: полуторолинейность
$(\mathbb{C}, (\cdot,\cdot))$ – унитарное пространство (псевдоевклидово)
Замечание
Иногда будем называть псевдоскалярное пространство скалярным (читай контекст)
Примеры

1. $V_3, (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$
2. $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$
   $(x, y) := \sum x_i y_i$
3. $\mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}$
   $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$

Определение
Норма $\|\cdot\| : V \to K, V$ – V – линейное пространство над полем K

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbb{0}$ – невырожденность
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ – однородность

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Определение
$(V, (\cdot,\cdot))$ – евклидово/унитарное пространство
$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ – евклидова норма
Докажем аксиомы

1. Очевидно
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda\overline{\lambda})(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\|x\|$
3. **К.Б.Ш.**
   $|(x,x)| \le \|x\|\|y\|$, причем $|(x,x)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимые
   Доказательство
   $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
   $0 \le (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) + \alpha\overline{\beta}(x,y) + \overline{\alpha}\beta(y,x) + \beta\overline{\beta}(y,y) = \ldots$
   Пусть $\alpha := (y,y) \in \mathbb{R}$
   $\beta := -(x,y) \in \mathbb{C}$
   $\ldots = \alpha(\|x\|^2\|x\|^2 - \underbrace{\overline{(x,y)}(x,y)}_{|(x,y)|^2} - (x,y)(y,x) + |(x,y)|^2) = \alpha(\|x\|^2\|y\|^2 - (x,y)^2) \ge 0$
   $\alpha \ge 0$
   Отсюда $\|x\|\|y\| \ge (x,y)$
   Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство 0
   Если $x, y \ne 0, |(x,y)| = \|x\|\|y\|$
   $\alpha, \beta \ne 0$ Тогда $0 \le (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha(\underbrace{\|y\|^2\|x\|^2 - |(x,y)|^2}_{0}) = 0$
   Тогда $\exists\, \alpha, \beta \ne 0 : \|\alpha x + \beta y\| = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимые
   Пусть $\exists\, \alpha, \beta \ne 0 : \alpha x + \beta y = \mathbb{0}$
   $$\begin{cases} \underbrace{\alpha(x,x)}_{\ne 0} + \beta(y,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\|x\|^2 = -\beta(y,x) \\ \alpha(x,y) + \underbrace{\beta(y,y)}_{\ne 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\|y\|^2 = -\alpha(x,y) \end{cases}$$
   Тогда $\alpha\beta\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha\beta(y,x)(x,y) = |(x,y)|^2$
   Доказательство выполнения аксиомы
   $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 +$

$\|y\|^2 + 2\underbrace{\Re((x,y))}_{\le|(x,y)|} \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| =$
$(\|x\| + \|y\|)^2$
$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Определение
$\forall\, x, y \in (V, (\cdot,\cdot))$
$\|x\|$ – длина вектора
$\cos\angle(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ – косинус угла между векторами
$|\cos\angle(x,y)| \le 1$ – по КБШ

3.7.2 Процесс ортогональный Грама-Шмидта. О.Н.Б. (ортонормированный базис). Ортогональное дополнение

Определение
$(V, (\cdot,\cdot))$ – евклидово/унитарное
$\forall\, x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x,y) = 0$
$\mathbb{0}$ ортогонален всем векторам
Определение
Система векторов $v_1, \ldots, v_m$ называется ортогональной, если вектора попарно ортогональны
Система векторов называется ортонормированными, если вектора попарно ортогональны и нормированы($\|v_i\| = 1$)
Утверждение
Ненулевые $v_1, \ldots, v_m$ ортогональны $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_m$ система линейно независимая
Доказательство
Пусть $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = \mathbb{0}$
$v_j(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_j v_k = \mathbb{0}$
$\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_j v_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \underbrace{v_j v_k}_{\mathbb{0} \text{ при } k \ne j} = \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\ne 0}$
Тогда $\forall\, i\ \alpha_i = 0$
Отсюда вектора линейно независимые

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)
Любую систему векторов $a_1, \dots, a_m$ можно заменить на систему ортогональных векторов $b_1, \dots, b_k$ таким образом, что $\mathrm{span}(a_1, \dots, a_m) = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_k)$, причем $k \leq m$, $k = m \Leftrightarrow$ система линейно независимая
Доказательство

1. Пусть $a_1, \dots, a_m$ линейно независимые Построим b индукционно:

   (a) Возьмем a_1, a_2
   $b_1 := a_1$
   $b_2 := a_2 - c_1 a_1$
   $c_1 : (b_2, b_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = (a_2, b_1) - c_1(a_1, a_1) \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{(a_2, b_1)}{(a_1, a_1)}$
   $\mathrm{span}(a_1, a_2) = \mathrm{span}(b_1, b_2)$, т.к. b_2 линейно независим с a_1, a_2

   (b) $a_1, \dots, a_k \to b_1, \dots, b_k$ – ортогональные
   $\underbrace{\mathrm{span}(a_1, \dots, a_k)}_{\text{линейно независимый}} = \underbrace{\mathrm{span}(b_1, \dots, b_k)}_{\text{попарно орт.}} \Rightarrow$ линейно независимые

   (c) Покажем для $k+1$
   $b_{k+1} = a_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i b_i$
   c_i такой, чтобы $\forall\, i = 1 \dots k$ $(b_{k+1}, b_i) = 0$ $c_i := \dfrac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$
   $b_{k+1} \in \mathrm{span}(a_1, \dots, a_{k+1})$
   $b_{k+1} \perp b_j, j = 1 \dots k$
   $\mathrm{span}(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_k)$
   b_{k+1} линейно независимый с $(a_1, \dots, a_k)$
   $\mathrm{span}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \mathrm{span}(b_1, \dots, b_{k+1})$

2. Если $a_1, \dots, a_m$ линейно зависимые, предварительно выполним прополку a
   Если без прополки, то некоторые b_i будут $\mathbb{0}$

Следствие 1
В $(V, (\cdot, \cdot))$ всегда существует о.н.б.
Доказательство
Применим Грама-Шмидта и нормируем
Следствие 2

В $(V, (\cdot,\cdot))$ любую ортогональную систему можно дополнить до ортонормированного базиса

Определение

$L \subset V$ – линейное подпространство

$L^\perp = \{y \in V : (x,y) = 0 \forall\, x \in L\}$ – ортогональное дополнение

Свойства

1. $L^\perp$ – линейное подпространство

   Доказательство

   $\forall\, y_1, y_2 \in L^\perp, \lambda \in K, x \in L$ $(x, \lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}\underbrace{(x, y_1)}_{0} + \underbrace{(x, y_2)}_{0}$

   Отсюда $\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$ – линейное подпространство

2. $V = L \oplus L^\perp$

   Доказательство

   Докажем, что $L, L^\perp$ – дизъюнктные

   $y \in L \cap L^\perp \Rightarrow (y,y) = 0 \Leftrightarrow y = \mathbb{0}$ – дизъюнктные

   Пусть $L = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_k)$

   Дополним $a_1, \dots, a_k$ векторами $a_{k+1}, \dots, a_n$ до базиса V

   Тогда $V = L \oplus \operatorname{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

   $\forall\, a_{k+j}$ $(a_i, a_{k+j}) = 0$

   Тогда $(a_i, \sum\limits_{j=1}^{n-k} \alpha_j a_{k+j}) = 0$

   Тогда $(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i a_i, \sum\limits_{j=1}^{n-k} a_{k+j}) = 0$

   Отсюда $\operatorname{span}(a_{k+1}, \dots, a_n) \subset L^\perp$

   $V = L \oplus \operatorname{span}(a_{k+1}, \dots, a_n), L, L^\perp$ – дизъюнктные

   Тогда $L^\perp = \operatorname{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

   Тогда $V = L \oplus L^\perp$

3. $(L^\perp)^\perp = L$

   Доказательство

   $L \oplus L^\perp = V = L \perp \oplus (L^\perp)^\perp$

   $\forall\, x \in L, y \in L^\perp (x,y) = 0 \Rightarrow x \in (L^\perp)^\perp \Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$

   Тогда $L = L^\perp$

4. $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$

   $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Доказательство
Докажем 1
Пусть $y \in (L_1 + L_2)^\perp$
Тогда $\forall \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2} \in L_1 + L_2\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$

(a) $x_2 = 0$
$\forall\, x_1 \in L_1\ (x_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L^\perp$
$(x_2, y) = 0$
Тогда $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$
Отсюда $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp$ Обратно: $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$
$\forall\, x_1\ (x_1, y) = 0$
$\forall\, x_2\ (x_2, y) = 0$
Отсюда $(x_1 + x_2, y) = 0 \Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp$
$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp$

(b) Из предыдущего пункта
$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$
$L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$

5. $\mathbb{0}^\perp = V, V^\perp = \mathbb{0}$

3.8 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы

$(V, (\cdot, \cdot))$
$e_1, \ldots, e_n$ – базис
$$\forall\, x, y \in V\ x \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$y \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_i \sum j x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$$
Пусть $g_{ij} = (e_i, e_j)$
$\Gamma = (g_{ij})$ – матрица Грама базиса $e_1, \ldots, e_n$

$(x,y) = x^{\perp}\Gamma\overline{y}$ – координатная форма записи скалярного произведения
В частности, если e – о.н.б., то $g_{ij} = \sigma_{ij}$
$\Gamma = E$
$(x,y) = x^{\perp}\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$
$(x,x) = x^{\perp}\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$
Замечание
Если V евклидово пространство, то, очевидно, все комплексные сопряжения можно убрать
Определение
$A_{n\times n}$
A^* называется сопряженной к A, если $A^* = \overline{A^T}$
$*$ – операция сопряжения
$(A+\lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda}B^*$
Определение
Матрица $A_{n\times n}$ – самосопряженная, если $A^* = A$
Если $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то самосопряженная = симметричная
Если $a_{ij} \in \mathbb{C}$, то самосопряженная = эрмитова
Очевидно, что $\Gamma^* = \Gamma$, т.е. самосопряженная
Определение
$a_1, \ldots, a_k \in V$
$G(a_1,\ldots,a_k) = ((a_i,a_j))_{k\times k}$ – матрица Грама для системы векторов
$\Gamma = G(e_1,\ldots,e_n)$
$G = G^*$
Теорема об определителе матрица Грама
$g(a_1,\ldots,a_k) := \det G(a_1,\ldots,a_k)$
Применим к векторам алгоритм Грама-Шмидта
$a_1,\ldots,a_k \rightsquigarrow b_1,\ldots,b_k$
Тогда $g(a_1,\ldots,a_k) = \prod\limits_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$
Доказательство
$g(a_1,\ldots,a_k) = \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \ldots & (a_1,a_k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \ldots & (a_k,a_k) \end{vmatrix}$ Заменим в матрица все a_1 на b_1

2 строка -= 1 строка $\cdot c_1$

Тогда $\forall\, j = 2 \dots k$ $\begin{matrix} (a_2, a_j) - c_1(b_1, a_j) = (a_2 - c_1 b_1, a_j) = (b_2, a_j) \\ (a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) = (b_2, b_1) = 0 \end{matrix}$

2 столбец -= 1 столбец $\cdot c_1$

$\forall\, j = 3 \dots k$ $\begin{matrix} (a_j, a_2) - c_1(a_j b_1) = (a_j, a_2 - c_1 b_1) = (a_j, b_2) \\ (b_1, a_2) - c_1(b_1, a_1) = (b_1, b_2) = 0 \end{matrix}$

Тогда после этих двух шагов в матрице не осталось a_2

Применим аналогичные действия, зная, что $b_i = a_i - c_1 b_1 - \dots - c_{i-1} b_{i-1}$

Таким образом мы получим матрицу, где вместо a_i будут b_i

По построению определитель не поменялся

Тогда $g(a_1, \dots, a_k) = g(b_1, \dots, b_k) = \det \operatorname{diag}(\|b_1\|^2, \dots, \|b_k\|^2) = \prod\limits_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$

Следствие 1

$a_1, \dots, a_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0$

Доказательство

Если $a_1, \dots, a_k$ линейно незавиимые $\underset{\text{Г.Ш.}}{\leftrightarrow}$ $b_1, \dots, b_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow \|b_i\|^2 > 0$

Следствие 2

$a_1, \dots, a_{k-1}$ – линейно независимые

$\|b_k\|^2 = \dfrac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$

Свойства матрицы Грама

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n), e$ – базис

$1 + 2$ – положительно определенная матрица $(\Gamma > 0)$

1. $\Gamma = \Gamma^*$

2. $\forall\, x \neq \mathbb{0}$ $x^T \Gamma \overline{x} > 0$

3. $\forall\, \delta k = g(e_1, \dots, e_k)$ $\delta_k > 0$
   δk – угловой минор
   В частности, при $k = n$ $\delta_k = g > 0$, т.е. Γ невырожденная
   Доказательство
   $e_1, \dots, e_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(e_1, \dots, e_k) > 0$

4. $e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n$ – базисы V $T = T_{e \to e'}$
   $\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$
   $\Gamma' = G(e'_1, \dots, e'_n)$

Тогда $\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$

Доказательство

$(x, y) = x'^T \Gamma' \overline{y}' = x^T \Gamma \overline{y}$

$\Gamma' = (g'_{ij})$

$g'_{ij} = (e'_1, \dots, e'_j) = T_i^T \Gamma \overline{T_j} \Leftrightarrow \Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$

В частности, если e, e' – о.н.б. V

$\Gamma' = E = \Gamma$

$T^T \overline{T} = E \Leftrightarrow \overline{T^T} T = E \Leftrightarrow T^* T = E \Leftrightarrow T^{-1} = T^*$

Определение

Невырожденная матрица Q вещественная/комплексная называется ортогональной/унитарной, если $Q^* = Q^{-1}$

Свойства унитарной/ортогональной матрицы

1. Q – унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow$ строки(столбцы) попарно ортогональны в стандартном скалярном произведении пространств $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

   Доказательство

   Q унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E$

   Пусть $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$

   $$Q^* Q = \overline{Q^T} Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = ((Q_i, Q_j)) = E$$

2. Q унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow Q^{-1}$ унитарна ортогональна

   $\overline{A} \cdot (\overline{A})^{-1} \overline{A A^{-1}} = \overline{E} = E$ $(Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q$

   Тогда $Q = (Q^{-1})^{-1} = Q^{-1*}$

3. Q унитарна/ортогональна $\Rightarrow |\det Q| = 1$

   В частности, если Q ортогональная, то $\det Q = \pm 1$

   Доказательство

   $Q^* Q = E$

   $\det Q^* \det Q = 1$

   $\det Q^* = \det(\overline{Q^*}) = \overline{\det Q}$

   $\det Q \overline{(}\det Q) = |\det Q|^2 = 1$

4. Q, R унитарная/ортогональная $\Rightarrow QR$ унитарная/ортогональная

   Доказательство

$$(QR)^* = \overline{(QR)^T} = \overline{R^T Q^T} = \overline{R^T}\,\overline{Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

5. e, e' – о.н.б.$V, T = T_{e \to e'}$
   Тогда T унитарна/ортогональна (см. свосто матрицы Г)

3.9 Теорема Пифагора. Задача о наилучшем приближении и перпендикуляре. Расстояние от точки до линейного подпространства и многообразия. Объем k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве

Теорема Пифагора
$\forall\, y, z \in V : (y, z) = 0$
$\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$
Доказательство
$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \underbrace{(z, y)}_{0} + \underbrace{(y, z)}_{0} + \|z\|^2$
Следствие
$x_1, \ldots, x_k$ попарно ортогональны
$\|x_1 + \ldots + x^k\|^2 = \sum\limits_i \|x_i\|^2$

Пусть $L \subset V$ – линейное подпространство
$V = L \oplus L^\perp$
$\forall\, x \in V\ \exists\, !x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$
$(y, z) = 0$
y – ортогональная проекция x на L
z – ортогональной составляющей x относительно L или перпендикуляром, опущенном из x на линейное подпространство L
Теорема о наилучшем приближении
$L \subset V$ – линейное подпространство
$\forall\, x \in V\ \exists\, !y \in L, z \in L^\perp : x = y + z$
$\forall\, l \neq y \in L \|x - y\| < \|x - l\|$
Т.е. y является наилучшим приближением к x из элементов пространства L
(Любая наклонная длиннее перпендикуляра)
Доказательство

$\forall\, l \neq y \in L$
$\|x-l\|^2 = \|y+z-l\|^2 = \|y-l\|^2 + \|z\| > \|z\|^2 = \|x-y\|^2$

Как найти перпендикуляр?
$L = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k), a$ – базис
$x = y + z, y \in L, z \in L^{\perp}$
Пусть $y = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i a_i + z$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_{0}$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j)$$

$G^T(a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$ – СЛНУ относительно c_i

$a_1, \ldots, a_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(a_1, \ldots, a_k) > 0 \Leftrightarrow G(a_1, \ldots, a_k)$ – невырожденная $\Leftrightarrow \exists!$ решение $\Rightarrow y = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$ – определен однозначно

Определение
$\operatorname{dist}(x, L) = \min\limits_{l \in L} \|x - l\| = \|x - y\| = \|z\|$

Теорема о расстоянии до линейного подпространства
$L = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k), a$ – базис
$\operatorname{dist}^2(x, L) = \dfrac{g(a_1, \ldots, a_k, x)}{g(a_1, \ldots, a_k)}$

Доказательство
$\operatorname{dist}^2(x, L) = \|z\|^2$
$a_1, \ldots, a_k \rightsquigarrow b_1, \ldots, b_k$
$\operatorname{span}(a_1, \ldots, a_k) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_k)$

$$z = x - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i a_i}_{z} = x - \sum_{i} \widetilde{c}_i b_i$$

$(z, y) = 0$
$a_1, \dots, a_k, x = b_1, \dots, b_k, z =: b_{k+1}$
$\|b_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 = \dfrac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$
Определение
$P = x_0 + L$ – линейное многообразие
$\mathrm{dist}(x, P) = \min\limits_{u \in P} \|x - u\| \underbrace{=}_{u = x_0 + l, l \in L} \min\limits_{l \in L} \|x - x_0 - l\| = \mathrm{dist}(x - x_0, L)$

Пусть $P_1, P_2 : P_i = x_i + L_i, L_i \subset V, x_i \in V$
$\mathrm{dist}(P_1, P_2) = \min\limits_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_1 - u_2\| = \min\limits_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_1 - x_2 - (l_1 + l_2)\| =$
$\mathrm{dist}(x_1 - x_2, L_1 + L_2) = \dfrac{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2)}}{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}} = \dfrac{V(\Pi(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2))}{V(\Pi(a_1, \dots, a_k))}$
Определение
$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово
$a_1, \dots, a_k$ – линейно независимые
$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \_i \in [0, 1]\}$ – k-мерный параллелепипед
(считаем, что все $a_1, \dots, a_k$ приложены к какой-то одной точке, к $\mathbb{0}$, натянутой на векторы $a_1, \dots, a_k$)
Определение
$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}$ – объем k-мерного параллелепипеда
$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = V(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1}))\|h\|$
$\|h\| = \dfrac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$
$h \perp \mathrm{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$ из алгоритма Г.Ш.
h – перпендикуляр, опущенный из a_k на подпространство $\mathrm{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – о.н.б V
$\Pi(a_1, \dots, a_k)$ – параллелепипед
$a_j \underset{e}{\leftrightarrow} A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k \end{pmatrix}$
$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)}$
$(a_i, a_j) = A_i^T A_j$

Тогда $G = A^T A$

Отсюда $V(\Pi(a_1, \ldots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_k)} = \sqrt{\det \underbrace{A^T}_{k \times n} \underbrace{A}_{n \times k}}$

В частности, если $k = n$, то $V(\Pi(a_1, \ldots, a_n)) = |\det A|$

Также можно задать ориентацию базиса: если определитель матрицы перехода из одного базиса в другой > 0, то базисы в одной ориентации. Иначе в разных

Тогда $\det A = +V(\Pi(a_1, \ldots, a_n))$, если $a_1, \ldots, a_n$ и базис в одной ориентации

Иначе $\det A = -V(\Pi(a_1, \ldots, a_n))$

Пусть $\mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$ – невырожденный(изоморфизм)

$x \in \Pi(a_1, \ldots, a_k) \leftrightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]$

$\mathcal{B}x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{B} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i \in \Pi(b_1, \ldots, b_k)$

$\mathcal{B}(\Pi(a_1, \ldots, a_k)) = \Pi(b_1 := \mathcal{B}a_1, \ldots, b_k := \mathcal{B}a_k)$

$V(\Pi(b_1, \ldots, b_k)) = \sqrt{g(b_1, \ldots, b_k)} = \sqrt{\det(BA)^T(BA)} = \sqrt{\det A^T B^T B A}$

Если $k = n$, то $V(\Pi(b_1, \ldots, b_k)) = |\det A||\det B| = V(\Pi(a_1, \ldots, a_k))|\det B|$

3.10 Коэффициенты Фурье. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. Ортогональные проекторы. Полиномы Лежандра

$(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово пространство

$e_1, \ldots, e_n$ – ортогональный базис

$\forall\, x \in V \;\; x = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_i e_i$

$\forall\, x \in V \;\; (x, e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_i (e_i, e_j) = \chi_j (e_j, e_i) = \chi_j \|e_j\|^2$

$\chi_j = \dfrac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициент Фурье элемента относительно ортогонального базиса

$L_i = \mathrm{span}(e_i), i = 1 \ldots n$

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$
$\forall\, x \in V\ \exists!(x_i) : x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, x_i$ – ортогональная проекция x на e_i
$x = \chi_i e_i$
Тогда по т. Пифагора $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_i|^2 \|e_i\|^2$ – тождество Парсеваля
Неравенство Бесселя: $\forall\, k = 1 \dots n\ \ \sum\limits_{i=1}^{k} |\chi_i| \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2$ – квадрат длины вектора не меньше суммы квадратов длин его проекций
В частности, если e – ортонормированный базис
$\chi_j = (x, e_j)$ – проекция x на вектор e_j
$x = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$
$x_j = \chi_j e_j$ – проекция x на вектор e_j
$\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_i|^2$
$\|x\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{k} |\chi_i|^2$
$\rho_i : V \to V$ – проектор
$\forall\, x \in V\ \rho x := x_i$
$\exists!(x_i) : x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in L_i}$
ρ_i – оператор ортогонального проектирования
$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} L_i, L_i \subset V$ – попарно ортогональные линейные подпространства
$V = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_n)$ – о.н.б.
$\forall\, x \in V\, \rho_i x = \sum\limits_{e_j \in L_j} (x_i, e_j) e_j$

Примеры ортогональных систем

1. Рассмотрим множество полиномов степени не более n
   $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) \, \mathrm{d}\, t$

Рассмотрим многочлены $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$

Найдем ортогональный базис

$\underbrace{1, t, t^2 - \dfrac{1}{3}, t^3 - \dfrac{3}{5}t, \ldots}_{\text{полиномы Лежандра}}$

$l_k = \lambda_k((t^2-1)^k)^{(k)}, \deg l_k = k$ – общая формула полиномов Лежандра

Покажем, что $q_k(t) := ((t^2-1)^k)^{(k)}$ ортогональны $1, \ldots, t^{k-1}$

$(q_k, t^m) = \displaystyle\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)} t^m \,\mathrm{d}\, t = \int_{-1}^{1} t^m \,\mathrm{d}((t^2-1)^k)^{(k-1)} =$

$= \underbrace{t^m \underbrace{((t^2-1)^k)^{(k-1)}}_{\pm 1\text{ – корни}} \Big|_{-1}^{1}}_{0} - m\displaystyle\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k-1)} t^{m-1} = \ldots$

$= (-1)m! \underbrace{\displaystyle\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^(k-m)\,\mathrm{d}\, t}_{((t^2-1)^k)^{k-m-1}\Big|_{-1}^{1}}$

$q_k \perp \operatorname{span}(1, \ldots, t^{k-1}) \Rightarrow q_k \perp \operatorname{span}(l_1, \ldots, l_{k-1}) \Rightarrow l_k \perp \operatorname{span}(l_1, \ldots, l_{k-1})$

$(uv)^{(k)} = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} C_k^m u^{(m)} v^{(k-m)}$ – формула Лейбница

$q_k(1) = ((t^2-1)^k)^{(k)}\Big|_{t=1} = ((t-1)^k(t+1)^k)^{(k)}\Big|_{t=1} = \displaystyle\sum_{m=0}^{k} C_k^m((t-1)^k)^{(m)}((t+1)^k)^{(k-m)}\Big|_{t=1} = C_k^k \underbrace{((t-1)^k)^{(k)}}_{k!} \underbrace{((t+1)^k)^{(0)}}_{2^k}\Big|_{t=1} = k!2^k = (2k)!!$

$l_k = \dfrac{((t^2-1)^k)^{(k)}}{k!2^k}, l_k(1) = 1$ – формула многочлена Лежандра в форме Родрига

$B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} \,\mathrm{d}\, t$

$B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$\|l_k\|^2 = \dfrac{1}{(2^k k!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^{(k)} \,\mathrm{d}\, t = \dfrac{1}{(2^k k!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^{(k)} ((t^2 -$
$1)^k)^{(k)} \,\mathrm{d}\, t = \dfrac{1}{(2^k k!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^{(k)} \,\mathrm{d}((t^2-1)^k)^{(k-1)} = -\dfrac{1}{((2k)!!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} ((t^2-$
$1)^k)^{(k-1)}((t^2-1)^k)^{(k+1)} = \ldots = \dfrac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)^k \underbrace{((t^2-1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} \,\mathrm{d}\, t =$

$$\frac{(-1)^k(-1)^k(2k)!}{((2k)!!)^2} 2\int_0^1 \frac{t(1-t^2)^k}{t} \,\mathrm{d}\, t = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^k t^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\, t}_{B(k+1,\frac{1}{2})} = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\underbrace{\Gamma(k+1+\frac{1}{2})}_{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+\ldots+\frac{1}{2}\Gamma(}}$$

$$\frac{(2k)!k!2^{k+1}}{((2k)!!)^2(2k+1)!!} = \frac{2(2k)!(2k)!!}{(2k+1)!(2k)!!} = \frac{2}{2k+1}$$

2. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
   $(f, g) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \,\mathrm{d}\, t$
   $f \in L^1(-\pi, \pi) \vee f \in L^2(-\pi, \pi)$

   (a) вещественная ортогональная тригонометрическая система
   $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots$ – бесконечномерная ортогональная система
   Несложно проверить, что $(\sin kt, \cos mt) = (\sin kt, \sin mt) = (\cos kt, \cos mt) = 0, k \neq m$
   $\|\cos kt\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \,\mathrm{d}\, t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kt}{2} \,\mathrm{d}\, t = \pi, k \neq 0$
   $\|1\|^2 = 2\pi$
   $\|\sin kt\|^2 = \pi$
   Пусть $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} c_n e_n$ – ряд Фурье
   $c_j = \dfrac{(f, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициенты Фурье
   Тогда $a_k := \dfrac{(f, \cos kt)}{\|\cos kt\|^2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt = \mathrm{d}\, t$
   $b_k := \dfrac{(f, \sin kt)}{\|\sin kt\|^2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \,\mathrm{d}\, t$
   Теперь забьем на сходимость и сопоставим f с последователь-

ностью коэффициентов

$f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ – ряд Фурье по классической тригонометрической системе

(b) комплексная ортогональная тригонометрическая система

$c_k = \widehat{f(k)} = \dfrac{1}{\|e^{ikt}\|^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} \, \mathrm{d}\, t$

$\|e^{ikb}\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ikt} \, \mathrm{d}\, t = 2\pi$

$f \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ – комплексный ряд Фурье

(c) $L^2([-1,1], \dfrac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}})$

$(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t) g(t) \frac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}}$

$T_n(t) = \cos(n - \arccos t)$ – полиномы Чебышева

$\deg T_n = n$

3.11 Изометрия евклидовых/унитарных пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидова пространства своему сопряженному

$(V, (\cdot,\cdot)_V), (V', (\cdot,\cdot)_{V'})$

Определение

V, V' изометричны, если V, V' изоморфны и сохраняется скалярное произведение

$x, y \in V \leftrightarrow x', y' \in V' \Rightarrow (x,y)_V = (x', y')_{V'}$

Отсюда $\|x - y\|_V = \sqrt{(x,y)_V^2} = \sqrt{(x',y')_{V'}^2} = \|x' - y'\|_{V'}$ – расстояния сохраняются

Теорема

Любые два конечномерных линейных пространства одной размерности изометричны

Доказательство

Пространства изоморфны

Пусть e – о.н.б. V

e' – о.н.б. V'

Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e'_i = x'$

$\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n) = E = G(e'_1, \ldots, e'_n) = \Gamma'$

$(x, y)_v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x', y')_{V'}$

Зафиксируем $y \in V$

$\forall\, x \in V\ (x, y) =: f(x) \in V^*$

$(\cdot, y) : V \to V^*$

Теорема Рисса

$\forall\, f \in V^* \exists\, !y \in V : f(x) = (x, y) \forall\, x \in V$

Т.е. $V \leftrightarrow V^*$ – взаимооднозначное сопоставление

Доказательство

Докажем единственность

Пусть $y_1, y_2 \in V : f(x) = (x, y_1) = (x, y_2) \forall\, x \in V$

Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0$

Пусть $x = y_1 - y_2$

Тогда $\|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Докажем существование

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. в V

$\forall\, x \in V\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\forall\, f \in V^*\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

Пусть $y_i = \overline{f(e_i)}$

$y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$

$f(x) = (x, y)$

Т.о. мы сопоставили f и y

Если V – евклидово (вещественное), то $V \overset{P}{\cong} V^*$ (изоморфизм)

Замечание

$e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. V

$\forall\, x \in V\ \omega^i(x) = \chi^i = (x, e_i)$

$x = \chi^i e_i$

Тогда $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e_i$

3.12 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрические тензоры. Взаимные базисы. Операции опускания и поднимания индексов. Евклидовы тензоры

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово
$e_1, \dots, e_n$ – базис V
$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n) = (g_{ij})$
$g_{ij} = (e_i, e_j)$
Γ – тензор $\in T_{(2,0)}$ – 2 раза ковариантный метрический тензор
Покажем, что Γ – тензор
$T = T_{e \to e'}$
$\Gamma' = T^T \Gamma T$
$g'_{ij} = t_i^k g_{km} t_j^m = g_{km} t_i^k t_j^m$ – действительно тензор
$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) \in T_{(0,2)}$ – 2 раза контрвариантный метрический тензор
$\Gamma^{-1}\Gamma = E$
$(\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = (T^T)^{-1} \Gamma^{-1} T^{-1} = S^T \Gamma^{-1} S$
$g'^{ij} = s_k^i g^{km} s_m^j = g^{km} s_k^i s_m^j$
Свойства

1. $\Gamma = \Gamma^T$
   $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1})^T$
   $g^{ij} = g^{ji}, g_{ij} = g_{ji}$
2. $\Gamma\Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1}\Gamma \Rightarrow g^{ik} g_{kj} = g^{ki} g_{kj} = g^{ki} g_{jk} = g^{ik} g_{jk} = \sigma_i^j$
3. $\forall\, x, y \in V\ (x, y) = g_{ij} x^i y^j, (x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0) \Rightarrow (x \neq 0 \Rightarrow g_{ij} x^i x^j > 0)$

Определение
Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V
$e^1, \dots, e^n$ – базис V
e_i, e^i – взаимные базисы, если $(e_i, e^j) = \sigma_i^j$
Теорема
$\forall\, e_1, \dots, e_n$ – базис $V \exists\, !e^1, \dots, e^n$ – взаимный базис
Доказательство
Пусть $e^1, \dots, e^n$ – базис V
$T_{e_i \to e^i} = (x^{km})_{n \times n}$
$\begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} T_{e_i \to e^i}$

$(e_i, e^j) = (e_i, x^{kj} e_k) = x^{kj} \underbrace{(e_i, e_k)}_{g_{ik}} = \sigma_i^j$

$g_{ik} x^{kj} = \sigma_i^j \Leftrightarrow \Gamma T_{e_i \to e^i} = E$
$T_{e_i \to e^i} = \Gamma^{-1}$
$e^1, \ldots, e^n$ – взаимооднозначное с $e_1, \ldots, e_n$
Следствие 1

1. e_i, e^i – взаимные базисы
   $\begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \leftrightarrow e^j = g^{kj} e_k = g^{jk} e_k$
   $\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^n \end{pmatrix} \Gamma \leftrightarrow e_j = g_{kj} e^k = g_{jk} e^k$

2. $\Gamma^{-1} = G(e^1, \ldots, e^n)$
   Доказательство
   $(e^i, e^j) = (e^i, g^{jk} e_k) = g^{jk}(e^i, e_k) = g^{jk} \sigma_k^j = g^{ji} \in \Gamma^{-1}$

Следствие 2
$e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б.
Тогда $e^i = e_i$
Доказательство
Очевидно, $\Gamma = E = \Gamma^{-1}$
Замечание

1. на практике скалярное произведение, в свою очередь, может быть задано какой-то матрицей Грамма, относительно какого-то другого базиса

2. $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ – имеют один класс ориентации, если $\det T_{e \to e'} > 0$
   Отсюда взаимные базисы принадлежат к одному классу ориентации

Теорема 2
Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V
$\omega^1, \ldots, \omega^n$ – сопряженный базис V^*
Тогда $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e^i \in V \Rightarrow e^1, \ldots, e^1, \ldots, e^n$ – взаимный с $e_1, \ldots, e_n$
Доказательство
$\forall\, \omega^i \in V^* \; \exists! e^i \in V : \omega^i(x) = (x, e^i) \forall\, x \in V$
Пусть $x = e_j$ $\underbrace{\omega^i(e_j)}_{\sigma_i^j} = (e_j, e^i) \Rightarrow$ взаимный базис

Замечание
e – о.н.б. из теоремы Рисса такой, что $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e_i$
$\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e^i$
Отсюда $e^i = e_i$ (снова следствие 2)
Определение
$e_1, \ldots, e_n$ и $e^1, \ldots, e^n$ – взаимные базисы
$\forall\, x = x^i e_i = x^j e^j$
x_j – ковариантные координаты
x^i – контрвариантные координаты

координатная функция относительно базиса $e^i \leftrightarrow (x, e_i) = (x_j e^j, e_i) = x_j(e^j, e_i) = x_j \sigma_i^j = x_i$
$\omega^j \leftrightarrow (x, e^j) = (x^i e_i, e^j) = x^i(e_i, e^j) = x^i \sigma_i^j = x^j$
$x = (x, e_i)e^i = (x, e^j)e_j$ – формула Гибса
$T = T_{e \to e'}$
$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$ – контрвариантный
$\omega^j \overset{P}{\cong} e^j$
$x_j \omega^j \cong x_j e^j$
$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 & \ldots & x'^n \end{pmatrix} S$ – ковариантный

Рассмотрим координаты как тензоры
$(x^i) \leftrightarrow T_{(0,1)}$
$(x_i) \leftrightarrow T_{(1,0)}$
Рассмотрим свертку с соответствующим метрическим тензором
$g_{ki} x^i = (e_k, e_i) x^i = (e_k, e_i x^i) = (e_k, x) = (x, e_k) = x_k$
Свертка контрвариантного тензора с ковариантным метрическим тензором дает ковариантный тензор – опускание индекса
$g^{jk} x_j = (e^j, e^k) x_j = (x_j e^j, e^k) = (x, e^k) = x^k$
Свертка ковариантного тензора с контрвариантным метрическим тензором дает контрвариантный тензор – поднятие индекса

Определим операции для произвольных тензоров
Рассмотрим $\alpha \in T_{(p,q)}$
Операцией опускания поднятия индекса называется преобразование мат-

рицы тензора в результате его свертки с ковариантным/контрвариантным метрическим тензором. При этом, чтобы сохранить соответствия записи элементов в матрице тензора применяют следующие правила записи

1. Если опускается крайний правый верхний индекс, он становится крайним левым нижним
   $\alpha_{j_1,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_{q-1},\kappa} g_{\kappa,j_0} = \alpha_{j_0,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_{q-1}}$
2. Если поднимается крайний левый нижний индекс, он становится крайним правым верхним
   $\alpha_{\kappa,j_2,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_q} g^{\kappa,i_{q+1}} = \alpha_{j_2,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_{q+1}}$
3. Если происходит опускание или поднятие остальных индексов, его прежняя позиция обозначается точкой. Сам индекс при этом занимает крайнюю левую нижнюю/правую верхнюю позицию
   $\alpha_{j_1,\dots,j_p}^{i_1,\dots,\kappa,\dots,i_q,\kappa} g_{\kappa,j_0} = \alpha_{j_0,\dots,j_p}^{i_1,\dots,\bullet,\dots,i_q}$
   $\alpha_{j_1,\dots,\kappa,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_q} g^{\kappa,i_{q+1}} = \alpha_{j_1,\dots,\bullet,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_{q+1}}$
4. Если опускаются/поднимаются несколько индексов то их прежние позиции обозначаются точками, а сами они записываются по тем же правилам с сохранением исходного порядка

Если базис ортонормированный, то поднятие/опускание индексов не меняет тензор
Если $e_1,\dots,e_n; e'_1,\dots,e'_n$ – о.н.б. базисы, то $T = T_{e\to e'}$ – ортогональная (т.е. $T^{-1} = T^T$)
Тогда $\alpha'^{k^1,\dots,k_q}_{m_1,\dots,m_p} = \alpha_{j_1,\dots,j_p}^{i_1,\dots,i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{j_p} \dots s_{i_q}^{k_q} = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_q} \alpha^{i_1,\dots,i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} t_{j_p}^{i_1} \dots t_{k_q}^{i_q}$
После приведения к о.н.б. в V получаем тензоры, которые отличаются только расположением тензора сверху/снизу. Такие тензоры называются *евклидовы* ранза $r = p + q$
Для них нет разницы, сверху или снизу индексы (пока мы переходим по ортонормированным базисам), поэтому пишем все внизу

4 Линейные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

4.1 Сопряженные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathcal{A}^* : V^* \to U^*$ – сопряженное к $\mathcal{A}$
$\forall\, f \in V^*\ \forall\, x \in U\ (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x)$
Заметим, что $\mathcal{A}$ – линейное отображение
Пусть $\mathcal{A}^* f = g$
$g(x) = f(\mathcal{A}x) \in K$ – линейно по x, т.к. $\mathcal{A}, f$ – линейные
Тогда $g \in U^*$
Тогда $\mathcal{A}^* : V^* \to U^*$
$\forall\, \lambda \in K \forall\, f_1, f_2 \in V^*$
$\forall\, x \in U\ (\mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2))(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \lambda f_1(\mathcal{A}x) + f_2(\mathcal{A}x) = \lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x) + (\mathcal{A}^* f_2)(x)$

$\underset{x}{U} \overset{\mathcal{A}}{\to} \underset{\mathcal{A}x}{V}$
$\underset{g=\mathcal{A}^* f}{U^*} \underset{\mathcal{A}^*}{\leftarrow} \underset{f}{V^*}$
Пусть $(V, (\cdot,\cdot))$ – унитарное/евклидово, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
$V^* \overset{P}{\leftrightarrow} V$ – естественный изоморфизм
$f \in V^* \overset{P}{\leftrightarrow} y \in V$
$\forall\, x \in V\ f(x) = (x, y)$
$\mathcal{A}^* : V^* \to V^*$
$\exists\, !z \in V \overset{P}{\leftrightarrow} g \in V^*$
$\exists\, !y \in V \overset{P}{\leftrightarrow} f \in V^*$
$\forall\, x \in V\ g(x) = (x, z), f(x) = (x, y)$
По определению $\mathcal{A}^* : g(x) = (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$
$\mathcal{A}^* : \underbrace{V^*}_{\overset{P}{\leftrightarrow} V} \to \underbrace{V^*}_{\overset{P}{\leftrightarrow} V}$
Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
$\mathcal{A}^* \in \mathrm{End}(V)$ называется сопряженным к $\mathcal{A}$, если $\forall\, x, y \in V\ (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)$

Замечание
$\mathcal{A}^*$ зависит от скалярного произведения
При фиксированном скалярном произведении $\mathcal{A}^*$ определен однозначно
Если поменять скалярное произведение, получим другое евклидово/унитарное пространство
Тогда и $\mathcal{A}^*$ будет другим
Свойства сопряженного оператора

1. $A, A^{(*)}$ – матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V
   Тогда $A^{(*)} = \overline{\Gamma^{-1}}A^*\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma^{-1}A^T\Gamma}$
   Доказательство
   $\forall\, x, y \in V$
   $(x, \mathcal{A}^*y) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ij}x_i\overline{A^{(*)}y}_j = x^T\Gamma\overline{\mathcal{A}^{(*)}y}$
   $(\mathcal{A}x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}(Ax)_i\overline{y}_j = (Ax)^T\Gamma y$
   $x^T\Gamma A^{(*)}\overline{y} = x^T A^T\Gamma\overline{y}$
   Пусть $x = e_i, y = e_j$
   $(\Gamma\overline{A^{(*)}})_{ij} = (A^T\Gamma)_{ij}$
   $\Gamma\overline{A^{(*)}} = A^T\Gamma$
   $\overline{A^{(*)}} = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$
   В частности, если о.н.б., то $T = E \Rightarrow A^{(*)} = A^* = \overline{A^T}$

2. $\forall\, \lambda \in K\ (\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\mathcal{B}^*$
   Если евклидово пространство, то $*$ – линейное, если унитарное – полуторолинейное

3. $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

4. Если $\exists\, \mathcal{A}^{-1}$, то $\exists\, (\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$
   Доказательство
   $(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = (E)^* = \varepsilon$
   $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \varepsilon$
   Отсюда $\exists\, (\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

5. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
   Доказательство

$(x, \mathcal{A}^*y) = (\mathcal{A}x, y)$
$\overline{(\mathcal{A}^*y, x)} = \overline{(y, \mathcal{A}^x)}$
$(\mathcal{A}^*y, x) = (y, \mathcal{A}x)$
Тогда по определению $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$

6. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
   $\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$
   Доказательство
   Пусть $y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$
   $(x, \underbrace{\mathcal{A}^*y}_{0}) = (\mathcal{A}x, y)$
   Тогда $y \perp \mathcal{A}x \Rightarrow y \perp \operatorname{Im} \mathcal{A}$
   Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* \subset (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
   $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \dim \operatorname{Ker} A^{(*)} = \operatorname{Ker} \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = n - \operatorname{rg}(\Gamma^{-1} A^T \Gamma) = n - \operatorname{rg} A^T = n - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) \perp$
   Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = (\operatorname{Im} \mathcal{A}^*) \perp$
   Тогда $\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$

7. $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda) = 0$
   Доказательство
   $\chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \det(\mathcal{A}^{(*)} - tE) = \det(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} - tE) = \overline{\det(\Gamma^{-1} A^T)\Gamma - \overline{t}\,\underbrace{\Gamma^{-1}\Gamma}_{E}} = \overline{\det(\Gamma^{-1}(A^T - \overline{t}E)\Gamma)} = \overline{\det(A^T - \overline{t}E)} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\overline{t})}$

8. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}$
   $\mu \neq \overline{\lambda}$ – с.ч., v – с.в. $\mathcal{A}^*$
   Тогда $u \perp v$
   Доказательство
   $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \mu v) = \overline{\mu}(u, v)$
   $(\lambda - \overline{\mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0$

9. $L \subset V$ – инвариантное относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ - инвариантное относительно $\mathcal{A}^*$
   Доказательство
   $\forall\, x \in L, y \in L^\perp$ $(x, \mathcal{A}^*y) = (u \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in L}, \underbrace{y}_{\in L^\perp}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^\perp$

4.2 Нормальные операторы и их свойства

Определение

$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$

$\mathcal{A}$ – нормальный, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Или $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

Свойства

1. $\mathcal{A}$ – нормальный $\Leftrightarrow A^{(*)}A = AA^{(*)}$, где $A, A^{(*)}$ – матрицы операторов в некотором базисе

2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   $\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = \operatorname{Im} \mathcal{A}$
   $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   Тогда $V = \operatorname{Ker} \mathcal{A} \oplus \operatorname{Im} \mathcal{A}$
   Доказательство
   $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$
   $(\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   $\operatorname{Im} \mathcal{A} = (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp = \operatorname{Im} \mathcal{A}^*$
   Пусть $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x\mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in \operatorname{Im} \mathcal{A}} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   $\mathcal{A}x \in \operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = 0$
   $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   Очевидно также, что $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 \supset \operatorname{Ker} \mathcal{A}$
   Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2$

3. Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\varepsilon$ – нормальный оператор
   Доказательство
   $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\varepsilon$
   $\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\varepsilon) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} + |\lambda|^2\varepsilon$
   Аналогично $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\varepsilon$
   Отсюда ч.т.д.

4. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A} \Rightarrow \overline{\lambda}$ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}^*$
   Доказательство
   $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0$

u – с.в. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}u = \lambda u \Leftrightarrow \mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^* \Leftrightarrow \mathcal{B}^* u = \mathbb{0} \Leftrightarrow \mathcal{A}^* u = \overline{\lambda} u \Leftrightarrow u$ – с.в. $\mathcal{A}^*$

5. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}$
   $\mu \neq \lambda$ – с.ч., v – с.в. $\mathcal{A}$
   Тогда $u \perp v$
   Т.о. собственные подмножествва $V_\lambda \perp V_\mu$
   Доказательство
   $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \overline{\mu} v) = \mu(u, v)$
   Отсюда $(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в унитарном пространстве
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное
$\mathcal{A}$ – нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Причем, матрица $\mathcal{A}^*$ в этом базисе также будет иметь диагональный вид $\overline{\Lambda} = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n)$
Замечание $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – с.ч. $\mathcal{A}$
$\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$ – с.ч. $\mathcal{A}^*$
$\mathcal{A}$ – нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}$ – о.п.с., но не наоборот
о.н.б. – из собственных векторов
Доказательство
Пусть λ_1, v_1 – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
Рассмотрим $L = \operatorname{span}(v_1), V - L \oplus L^\perp$
L – инвариантное относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}^*$
Также по свойству 4 v_1 – с.в. $\mathcal{A}^* \Rightarrow L$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp$ инвариантное относительно $\mathcal{A}$
Тогда $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}, \mathcal{A}^*\Big|_{L^\perp}$ – остаются взаимосопряженными и нормальными
Применим метод математической индукции:
База: $n = 1$ – очевидно
Пусть для $n = k$ выполнено. Докажем для $k + 1$
Пусть λ_1, v_1 – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
$L = \operatorname{span}(v_1)$
$V = L \oplus L^\perp, \dim L^\perp = k$

По индукционному предположению для $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}$ $\exists$ о.н.б. $v_2, \dots, v_{k+1}$ в $L^\perp$ из с.в., матрицы $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$
Т.к. $V = L \oplus L^\perp$, матрица $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$
$v_1 \perp v_2, \dots, v_{k+1}$
В обратную сторону очевидно
Следствие 1
$\mathcal{A}$ – нормальный в унитарном пространстве $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda, V_\lambda \perp V_\mu, \lambda != \mu$
Следствие 2
$AA^* = A^*A$ – нормальная матрица
$a_{ij} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ унитарная матрица $T : T^*AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$ – с.ч. $\mathcal{A}$
Доказательство
A^* – матрица $\mathcal{A}^*$ в о.н.б.
A – матрица $\mathcal{A}$
Тогда по теореме существует базис и о.н.с.в. A
$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ – о.н.с.в. $= T_{e \to v}$
$T^{-1} = AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – т.к. $v_1, \dots, v_n$ – попарно ортогональны и нормированы
$\Leftrightarrow T$ – унитарная матрица $\Leftrightarrow T^{-1} = \overline{T^T} = T^*$

Что будет в евклидовом пространстве?
A – вещественная матрица $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}$ – вещественные коэффициенты
Не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ – собственные числа, а только вещественные
Определение
V – линейное пространство над $\mathbb{R}$
$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство
$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация V
$\forall\, z = x + iy, w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}, x, y, u, v \in V\ (z, w) := (x, y) + (y, v) + i(-(x, v) + (y, u))$
$(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$ – унитарное пространство
Упражнение
$\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2)$
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}(V_{\mathbb{C}})$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Напоминание
$e_1, \dots, e_n$ – базис $V \Rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$
$\chi_A(t) = \chi_{A_{\mathbb{C}}}(t)$
$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{z})$
λ, z – с.ч., с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \overline{\lambda}, \overline{z}$ – с.ч., с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$
Свойства

1. $\lambda \in \mathbb{R}, V_\lambda$ – с.ч. и собственное подпространство $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda, (V_\lambda)_{\mathbb{C}}$ – с.ч. и с.п. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   Доказательство //todo 12:10 11.05

2. λ, z – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
   $\overline{\lambda}, \overline{z}$ – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   $z = u + iv, \overline{z} = u - iv$
   Тогда $(z, \overline{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$
   Доказательство
   $0 = (z, \overline{z}) = (u + iv, u - iv) = \underbrace{(u, u) - (v, v)}_{0} + \underbrace{i(v, u) + i(u, v)}_{0}$

3. $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$
   Доказательство
   $e_1, \dots, e_n$ – о.н.б. $V \to e_1, \dots, e_n$ – о.н.б. в $V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \leftrightarrow A, \mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T \Rightarrow (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^T$
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A, (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow A^T$

4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$
   Доказательство
   $(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{C}} z = (\mathcal{A}\mathcal{B})x + i(\mathcal{A}\mathcal{B})y = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}x + i\mathcal{B}y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathcal{B}_{\mathbb{C}} z$

5. $\exists\, \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1}$, причем $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}}$
   Доказательство
   $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \exists\, (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1}$
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{-1} = \varepsilon = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}}$

6. $\mathcal{A}$ нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ нормальный

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V), (V, (\cdot,\cdot))$ – евклидово пространство
$\mathcal{A}$ – нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. пр-ва V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, где $\lambda_i \in R$ – с.ч. $\mathcal{A}$
$\Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, где $\alpha_i \pm i\beta_i$ – комплексные сопряженные корни характеристического многочлена $\mathcal{A}$
Причем, матрица $\mathcal{A}^*$ имеет вид $\Lambda^* = \Lambda^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, l_k, \Phi_1^T, \ldots, \Phi_m^T)$
Доказательство $\Leftarrow$
Очевидно: $\Phi_i^T\Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^2+\beta_i^2 & 0 \\ 0 & \alpha_i^2+\beta_i^2 \end{pmatrix} = \Phi_i\Phi_i^2$
Доказательство $\Rightarrow$
Если все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные, все очевидно
Иначе применим комплексификацию
$\mathcal{A}$ – нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ нормальный, $V_{\mathbb{C}}$ – унитарное пространство
Тогда по теореме $\exists$ о.н.б. $w_1, \ldots, w_n$ из с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ такой, что матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет иметь диагональный вид

$$V = \bigoplus_{\lambda-\text{ с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} V_\lambda = \bigoplus_{i=1, \lambda_i \in \mathbb{R}}^{k} V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\mu, \overline{\mu}} \mathrm{span}(z_j^\mu, \overline{z}_j^{\overline{\mu}})$$

$\mu, \overline{\mu}$ – комплексные сопряженные корни $\chi_{\mathcal{A}}$
$z, \overline{z}$ – с.в., пусть они нормированные
$(z, \overline{z}) = 0$
$z = u + iv, u, v \in V$
$V_\lambda \perp V_\mu$
$V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} =$ по свойству $1 = (V_{\lambda_i})_{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \ldots, \omega_k)$
$(z, \overline{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$
$\mathrm{span}^{\mathbb{C}}(z, \overline{z}) = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(u, v) = (\mathrm{span}(u, v))_{\mathbb{C}}$
Тогда $V_\mu^{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(z_1, \ldots, z_r) \perp V_{\overline{\mu}}^{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_r)$
$V_{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \ldots, \omega_k, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots), \omega, u, v$ – вещественные вектора
$\|z_i\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 + \|v_i\|^2, \|u_i\| = \|v_i\| \Rightarrow \|u_i\| = \|v_i\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \leftrightarrow \mathcal{A}$ – в вещественном базисе
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \mu_i z_i$
$\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(z_i + \overline{z}_i) = \dfrac{1}{2}(\mu_i z_i + \overline{\mu}_i \overline{z}_i) = \mathrm{Re}(\mu_i z_i) = \mathrm{Re}((\alpha_i + i\beta_i)(u_i + ib_i)) =$

$$\alpha_i u_i - \beta_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ -\beta_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} v_i = \frac{1}{2i}\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(z_i - \overline{z}_i) = \frac{1}{2i}(\mu_i z_i - \overline{\mu}_i \overline{z}_i) = \Im(\mu_i z_i) = \beta_i u_i + \alpha_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_i \\ \alpha_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Осталось ортогонализовать базис. Заменим u_i на $\sqrt(2)u_i, v_i$ – на $\sqrt(2)v_i$

Т.о. мы получили матрицу из теоремы

Следствие

$AA^* = A^*A(AA^T = A^TA)$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

Тогда $\exists$ ортогональная матрица T такая, что $T^TAT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_i, \ldots, \Phi_m)$

Доказательство

$T = \begin{pmatrix} \omega_1 & \ldots & \omega_k & u_1 & v_1 & \ldots \end{pmatrix}$

T – ортогональная матрица $\Leftrightarrow T^{-1} = T^* = T^T$

4.3 Самосопряженные операторы и их свойства. Изометрические операторы и их свойства

Определение

$\mathcal{A}$ – называются самосопряженный, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Если V унитарное, то – эрмитовый

Если V евклидово, то – симметричный

$\Leftrightarrow (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$

Замечание

Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный, то $\mathcal{A}$ – нормальный
Свойства

1. $\mathcal{A}$ – самосопряженный $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что $A^* = A$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопряженные $\Rightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ – самосопряженный

3. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – самосопряженные и перестановочные $\Rightarrow \mathcal{AB}, \mathcal{BA}$ – самосопряженные

4. Если $\exists\, \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A}$ – самосопряженный $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ – самосопряженный
   Доказательство
   $(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})^* = \varepsilon^* = \varepsilon$
   $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon$
   $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{A}^{-1}$

5. $\mathcal{A}$ самосопряженный $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ нормальный и все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные
   Доказательство для унитарного пространства
   По теореме о каноническим виде матрицы
   $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
   $\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \mathrm{diag}\,\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$
   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda^T} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$
   Доказательство для евклидова пространства
   По теореме о каноническом виде матрицы
   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda^T$
   $\Phi_i = \Phi_i^T \Leftrightarrow \beta_i = 0$
   Тогда нет блоков $\Phi_i \Rightarrow \Lambda$ – диагональная $\Rightarrow \lambda_i$ вещественные

6. $L \subset V$ – линейное подпространство
   L – инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$

//todo 11.05 13:56 **Следствие 2**
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Rightarrow \exists$ унитарная/ортогональная T такая, что T^*AT имеет диагональный вид
Определение
Q невырожденный $\in \mathrm{End}(V)$ называется изометрическим, если $Q^{-1} = Q^*$
Если V – унитарная, то называется унитарным
Если V – евклидово, то называется ортогональным

$\Leftrightarrow (Qx, Qy) = (x, Q^*Qy) = (x, y)$
Замечание
Изометрический $\Rightarrow$ нормальный
Свойства

1. Q изометрический $\Leftrightarrow \exists$ базис такой, что $\overline{Q^T} = Q^* = Q^{-1}$

2. Q изометрический $\Rightarrow$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис
   Доказательство $\Rightarrow$
   $e_1, \dots, e_n$ – о.н.б.
   $(Qe_i, Qe_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$
   Доказательство $\Leftarrow$
   $e_1, \dots, e_n$ – о.н.б.
   $\forall\, x, y \in V\ Qe_1, \dots, Qe_n$ – о.н.б.
   Тогда $(Qe_i, Qe_j) = \delta_{ij}$
   $(Qx, Qy) = \sum\limits_{ij} x_i\overline{y_j}(Qe_i, Qe_j) = \sum\limits_{i} x_i\overline{y_i} = (x, y)$

3. Q, R – изометрические $\Rightarrow QR$ – изометрические

4. Q – изометрический $\Rightarrow Q^{-1}$ – изометрический

5. Q – изометрический $\Leftrightarrow Q$ – нормальный и все корни χ_Q по модулю равны 1
   Доказательство для унитарного пространства
   По теореме о каноническом виде
   $\exists$ о.н.б. такой, что $Q \leftrightarrow \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
   $Q^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$
   $QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda\overline{\Lambda^T} = E = \mathrm{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_n\|^2) \Rightarrow \|\lambda\| = \pm 1$
   Доказательство для евклидова пространства
   $QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda\overline{\Lambda^T} = E = \mathrm{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_k\|^2, |\Phi_1\Phi_1^T|, \dots, |\Phi_k\Phi_k^T|)$
   $\Phi_i\Phi_i^T = \mathrm{diag}(\alpha_i^2 + \beta_i^2, \alpha_i^2 + \beta_i^2)$
   $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$
   В частности, если корни χ_Q вещественные, то ± 1

6. $L \subset V$ – линейное подпространство, инвариантное относительно Q. Тогда $L^\perp$ инвариантно относительно Q

Доказательство
//todo 11.05 14:19

Теорема о каноническом виде матрицы изометрического оператора
$Q \in \mathrm{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово
Q – изометрический $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что матрица имеет диагональный/блочно-диагональный вид
$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ / $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_1, \ldots, \Phi_m), \lambda_i = \pm 1, \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & \sin\phi_i \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \cos\phi_i \pm i\sin\phi_i$ – корни χ_Q
Доказательство
$\Lambda^{-1} = \overline{\Lambda^T}$
Замечание
Q ортогональный в евклидовом пространстве $\Rightarrow$ композиция поворотов и отражений
Следствие
$Q^* = Q^{-1}$ – унитарная/ортогональная матрица
Тогда $\exists$ унитарная/ортогональная матрица T такая, что $T^*QT = \Lambda$ – из теоремы

4.4 Разложение матриц. LU(LDU), Холецкого, QR-разложение, полярное

Определение
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & e_{ij} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ – нижняя унитреугольная матрица(левая)
Аналогично верхнетреугольная матрица U
Определение
$A = (a_{ij})_{n \times n}$

$1 \le k \le n \ A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ – угловая матрица

$\Delta_k = \det A_k$ – угловой минор

Теорема

$\Delta_k \ne 0, \forall\, k = 1 \dots n-1 \Leftrightarrow \exists!$ унитреугольная нижняя L, унитреугольная верхняя $U, D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), d_k \ne 0, k = 1 \dots n-1$ такие, что $A = LDU$

Замечание

1. A невырожденная $\Leftrightarrow \det A = \det L \det D \det U = \det D = \underbrace{d_1 d_2 \dots d_{n-1}}_{\ne 0} d_n \Leftrightarrow$

   $d_n \ne 0$

2. $A = LDU$

$$LD = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & * & & \ddots & 0 \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = L \Rightarrow A = LU$$

$$DU = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ 0 & \ddots & & * & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = U \Rightarrow A = LU$$

Называется LU-разложением. Оно неоднозначно, а отличие от LDU

Доказательство $\Leftarrow$

$A = LDU \Rightarrow A_k = L_k D_k U_k$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \underbrace{l_{is}}_{s>i \Rightarrow =0} d_{st} \underbrace{u_{ti}}_{t>j \Rightarrow =0} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} l_{is} d_{st} u_{ij} = \underbrace{\sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k} l_{is} d_{st} u_{ij}}_{(L_k D_k U_k)_{ij}}$$

$\Delta_k = \det A_k = \underbrace{\det L_k}_{1} \det D_k \underbrace{\det U_k}_{1} = d_1 \dots d_k \ne 0$

$d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$

Доказательство $\Rightarrow$
Методом мат. индукции

1. $k = 1 . a_{11} = \underbrace{1}_{L} \underbrace{d_1}_{D} \underbrace{1}_{U}$

2. Пусть верно для k
Тогда $\Delta_1, \ldots, \Delta_k \neq 0$
$A_k = L_k D_k U_k$ – единственным образом, $d_1, \ldots, d_k \neq 0$ Докажем для $k+1$
$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ c_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$
$L_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$
$U_{k+1} = \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D_{k+1} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$
Докажем, что $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$
$//$todo 18.05 10:38

Алгоритм LDU-разложения
Рассмотрим матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right)$

Методом Гаусса приведем к верхнедиагональному виду $\left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \end{array}\right)$

Здесь не переставляем строки и столбцы во время преобразований, а также не прибавляем к строке i значения из строк $j < i$(чтобы получить справа нижнедиагольный вид)
Получим A' – верхнедиагональную и A'' нижнедиагональную
$A' = DU, A'' = L^{-1}$
Определение
$L_{ij}(\lambda)$ – элементарная унитарная нижняя матрица, если $\exists ! i, j : i > j, L_{ij} \neq 0$, при этом $L_{ij} = \lambda$ (единственный ненулевой элемент под диагональю)
$i > j$

$$AL_{ij}(\Lambda)=\begin{pmatrix}\dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots\\ a_{j1} & a_{jj} & \dots & a_{ji} & \dots\\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{ii} & \dots\\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ & 1 & \ddots & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & \underbrace{\lambda}_{ij} & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dots & (A_j+\lambda A_i) & \dots & A_i & \dots\end{pmatrix}$$

$$L_{ij}(\Lambda)A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ & 1 & \ddots & 0 & 0\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & \underbrace{\lambda}_{ij} & & \ddots & \vdots\\ & & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots\\ a_{j1} & a_{jj} & \dots & a_{ji} & \dots\\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{ii} & \dots\\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots\\ (S_j+\lambda S_i)\\ \dots\\ S_i\\ \dots\end{pmatrix}$$

$L_{ij}(\lambda)$ – невырожденная $\Rightarrow \exists\, L_{ij}^{-1}(\lambda)=L_{ij}(-\lambda)$

Возвращаемся к методу Гаусса

$$\left(\underbrace{L_m\dots L_2L_1}_{\text{эл. нижн.унитр., соотв. м. Гаусса}} \quad A=DU \quad\middle|\quad \underbrace{L_mL_{m-1}\dots L}_{L^{-1}}E\right)$$

$A=L_1^{-1}\dots L_m^{-1}DU=LDU$

$L_k^{-1}=L_k(-\lambda_k)$

$L_1^{-1}L_2^{-1}\dots L_m^{-1}=(L_m\dots L_1)^{-1}=L$

Следствие

$A^*=A$

$\Delta_1,\dots,\Delta_{n-1}\neq 0$

$\Leftrightarrow \exists!, L, D=\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n), U: d_i\in\mathbb{R}, d_i\neq 0, A=LDL^*=U^*DU$

Доказательство

Из теоремы $\exists! L, D, U$

$LDU=A=A^*=L^*D^*U^*=L^*DU^*$

Из единственности $L=U^*, U=L^*$

Определение

$\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$ – самосопряженный оператор

V – унитарное/евклидово

$\mathcal{A}$ – положительно(отрицательно) определенным ($\mathcal{A}>0$), если $\forall\, x\neq 0\ (\mathcal{A}x,x)=(x,\mathcal{A}x)\gtrless 0$

$\mathcal{A}$ – положительный(отрицательный) полуопределенный ($\mathcal{A}\geq 0$), если $\forall\, x\neq 0\ (\mathcal{A}x,x)=(x,\mathcal{A}x)\ \substack{\geq\\ \leq}\ 0$ и $\exists\, x\neq 0:(\mathcal{A}x,x)=0$

> 0 не является ч.с.≥ 0
$\mathcal{A} \gtrless 0$ – неопределенный, если $\exists\, x \in V : (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) > 0$ и $\exists\, y \in V : (\mathcal{A}y, y) = (y, \mathcal{A}y) < 0$

$\mathcal{A}$ – самосопряженный $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda - \text{ с.ч.}} V_\lambda$ – о.п.с.
Все корни $\lambda \in \mathbb{R}$
$V_\lambda \perp V_\mu, \lambda \neq \mu$
Теорема
$\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda > 0$
$\mathcal{A} \geq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \geq 0, \exists\, \lambda = 0$
$\mathcal{A} \gtrless 0 \Leftrightarrow \exists$ с.ч. $\lambda > 0, \exists$ с.ч. $\lambda < 0$
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть $\mathcal{A} > 0$
$\forall\, x \in V, x \neq 0\ (\mathcal{A}x, x) > 0$
$x = \sum\limits_\lambda x_\lambda$
$(\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_\mu \sum\limits_\lambda (\lambda x_\lambda, x_\mu) = \sum\limits_\lambda (\lambda x_\lambda, x_\lambda) > 0$
$\lambda(x_\lambda, x_\lambda) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$
Аналогично для всех остальных случаев
Доказательство $\Leftarrow$
$\forall\, x : (\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_\lambda \lambda(x_\lambda, x_\lambda)$
Пусть все $\lambda > 0 \Rightarrow \forall\, x \neq \mathbb{0} (\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_\lambda \lambda \|x_\lambda\|^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{A} > 0$
Замечание
Для самосопряженных матриц теорема аналогичная
Замечание
$A > 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$
Теорема (разложение Холецкого или метод квадратного корня)
$\forall\, A > 0 \exists! L > 0$ – нижнетреугольная $U > 0$ – верхнетреугольная: $A = LL^* = U^*U$
Доказательство
Пусть $x \neq 0, A > 0, A = L_0 D_0 U_0 \underset{A = A^*}{=} L_0 D_0 L_0^* = U_0^* D_0 U_0$
$0 < (Ax, x) = (L_0 D_0 U_0 x, x) = (D_0 \underbrace{U_0 x}_{y}, L_0^* x) = (D_0 y, y) = \sum\limits_{j=1}^n d_j y_j^2$

U_0 – унитреугольная $\Rightarrow$ невырожденная $\Rightarrow y \neq 0$, т.к. $x \neq 0$
Пусть $y = e_j$
Тогда $\forall\, j = 1 \dots n$ $d_j > 0$
$\sqrt{D_0} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$
$\sqrt{D_0}\sqrt{D_0} = D_0$
$A = \underbrace{L_0\sqrt{D_0}}_{L}\sqrt{D_0}L_0^* = U_0^*\sqrt{D_0}\underbrace{\sqrt{D_0}U_0}_{U}$
$L^* = (L_0\sqrt{D_0})^* = \sqrt{D_0}L_0^* = L_0^*\sqrt{D_0}$
$U^* = \sqrt{D_0}U_0$
Теорема (QR-разложение)
$\forall$ невырожд. A (компл./вещ.) $\exists$ унит./ортог. Q, правотреугольная(верхнетреугольная)
$R : A = QR$
Доказательство
$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}$
Т.к. A невырожденная, то $A_1, \dots, A_n$ – линейно независимые
Применим алгоритм Грамма-Шмидта
Получим попарно ортогональные и нормированные столбцы $q_1, \dots, q_n$
$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ – унитарная/ортогональная по построению
Q – унитарная/ортогональная по построению
$q_1 = u_{11}A_1$
$q_2 = u_12A_1 + u_22A_2$
$\vdots$
$q_n = u_{1n}A_1 + \ldots + u_{nn}A_n$
$\underbrace{A}_{\text{невыр.}} U = \underbrace{Q}_{\text{невыр.}}$
Тогда U – невырожденная
Тогда $\exists U^{-1} = R$
R – верхнетреугольная
$A = QU^{-1} = QR$
Следствие
$\forall$ невыр. $A \exists Q$ – унит./ортог., L – левотреугольная(нижнетреугольная)
$A = LQ$
Доказательство
$A^* = \widetilde{Q}R$
$A = (\widetilde{Q}R)^* = R^* \underbrace{\widetilde{Q}^*}_{\text{унит./орт.}} = R^*\widetilde{Q}^{-1} = LQ$

Теорема (полярное разложение)

В унитарном: $A = \underbrace{H}_{\text{эрмитова}} \underbrace{U}_{\text{унитарная}}$

В евклидовом: $A = \underbrace{S}_{\text{симметричная}} \underbrace{Q}_{\text{ортогональная}}$

$\forall\, A_{n\times n} \exists!$ ортогональная $H($ симметричная $S), H \geq 0 (S \geq 0)$ и $\exists$ унитарная $U($ ортогональная $Q) : A = HU (A = SQ)$

Причем, если A невырожденная, то $U(Q)$ – единственные, $H > 0 (S > 0)$

Сформуриуем докажем соответствующую теорему для операторов, т.к. в о.н.б. этим матрицам соответствуют матрицам операторов

Теорема (полярное разложение эндоморфизма в унитарном/евклидовом пространстве)

$(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/ортогональное

$\forall\, \mathcal{A} \in \mathrm{End}(V) \exists\,!$самосопряженный $H \geq 0 (S \geq 0), \exists\, U$ – изомерический $: \mathcal{A} = HU (\mathcal{A} = SQ)$

Причем, если $\mathcal{A}$ невырожденный, то $\exists\,! U(Q), H > 0, S > 0$

Лемма

Пусть $\mathcal{A}$ – о.п.с.

Все с.ч. $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

Тогда $\exists! \mathcal{B}$ – о.п.с такой, что с.ч. $\mu \in \mathbb{R}, \mu \geq 0, \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$

$\mathcal{B} := \sqrt{\mathcal{A}}$

Доказательство существования

$\mathcal{A}$ – о.п.с., $V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n), v_n$ – с.в.

Определим $\mathcal{B}$:

$\forall\, v_j\ \beta v_j = \sqrt{\lambda_j} v_j$

$\mathcal{B}^2 v_j = \sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j} v_j = \lambda_j v_j = \mathcal{A} v_j$

$\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$, т.к. их значения совпадают на базисных векторах

Очевидно из определения $\mathcal{B}$, что β – о.п.с., $\sqrt{\lambda_j} = \mu_j$ – с.ч. $\mathcal{B}$

v_j – с.в. $\mathcal{B}$

$V_\lambda^\alpha = V_\mu^\beta$ – с.в. β

Доказательство единственности

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ – о.п.с.

$\nu \geq 0$ – с.ч. $\mathcal{C}$

$V = \bigoplus\limits_{\nu} V_\nu^C = \mathrm{span}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – с.в. $\mathcal{C}$

$\mathcal{A}\omega_j = \mathcal{C}^2 \omega_j = \nu_j^2 \omega_j \Rightarrow \lambda_j^2$ – с.ч. $\mathcal{A}$

$V_\nu^{\mathcal{C}} = V_\lambda^{\mathcal{A}} = V_\mu^{\mathcal{C}}$

$\mathcal{C}\omega_i = \mathcal{C}\omega_i, \mu \Longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$

Доказательство теоремы

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самосопряженные

$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

$\forall\, x \neq 0\ (\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) \geq 0, (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$

Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

Рассмотрим $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Он самосопряженный $\Leftrightarrow$ он о.п.с. и его собственные подпространства попарно ортонормированы

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda, V_\lambda \perp V_\mu, \forall\, \lambda\ \lambda > 0$

$V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ – попарно ортогональные и нормированные с.в. $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_k) = \underbrace{(\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_j, v_k)}_{\geq 0} = (\lambda_j v_j, v_k) = \lambda\sigma_{jk}$

1. $\lambda_j \neq 0\ (\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j) = \lambda > 0, \|\mathcal{A}v_j\|^2 \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}v_j \neq \mathbb{0}$

2. $\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_k \neq 0, \lambda_j, \lambda_k \neq 0, \mathcal{A}v_j \perp \mathcal{A}v_j$

   Тогда $\mathcal{A}$ переводит попарно ортогональную нормированную систему с.в. в попарно ортогональную, но, возможно, неполную

   Дополним получившуюся систему до базиса

   Пусть о.н.б. $z_1, \ldots, z_n$ такой, что $\mathcal{A}\lambda_j \neq 0, z_j = \dfrac{\mathcal{A}v_j}{\sqrt{\lambda_j}}$

   $(z_j, z_j) = \dfrac{(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j)}{\lambda_j} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1$

   Определим $H \in \operatorname{End}(V)$

   $Hz_j := \sqrt{\lambda_j} z_j$

   Очевидно, H – о.п.с., $\sqrt{\lambda_j}$ – с.ч.

   $H \geq 0$

   Определим $U \in \operatorname{End}(V)$

   $U \underbrace{v_j}_{\text{о.н.б.}} := \underbrace{z_j}_{\text{о.н.б.}}$

   Тогда U – изометрический

   $HUv_j = Hz_j = \sqrt{\lambda_j} z_j = \mathcal{A}v_j$

   Т.к. совпадает на базисных векторах, то $HU = \mathcal{A}$

   $\mathcal{A}^* = U^*H^* = U^*H = U^{-1}H$

   $\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\text{о.п.с., все с.ч.}\geq 0} = HUU^{-1}H = H^2$

Отсюда $\exists! H$ – о.п.с., все с.ч. ≥ 0
$H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ – левый модуль $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ – невырожденный $\Rightarrow \mathcal{A}^*$ – невырожденный $\Rightarrow \mathcal{A}^*\mathcal{A} > 0, \mathcal{A}\mathcal{A}^* > 0 \Rightarrow$ все $\lambda_j > 0 \Rightarrow H > 0$ – невырожденный
$\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{невыр.}} = \underbrace{H}_{\text{невыр.}} U \Rightarrow U$ – невырожденный $\Rightarrow U = H^{-1}\mathcal{A}$ – ед.образом

Аналогично для вещественного случая
Следствие
Аналогично для разложений $\mathcal{A} = UH (\mathcal{A} = QS)$
Доказательство
Построим разложение $\mathcal{A}^* = H_0 U_0$
$H_0 = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ – правый модуль
$\mathcal{A} = (H_0 U_0)^* = U_0^* H_0^* = \underbrace{U_0^{-1}}_{\text{изометрия}} H_0 = U_0' H_0$

5 Квадратичные формы

5.1 Основные понятия

Определение
Квадратичной формой называется $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$,
где $a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = a_{ji}$
$f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$
$A = (a_i j)_{n \times n}$
$A^T = A$
$f(x) = x^T A = (x, Ax) = (Ax, x)$ – в стандартном скалярном произведении в $\mathbb{R}^n$
Определение
$\operatorname{rg} F = \operatorname{rg} A$
Определение
Говорят, что к квадратичной форме f применили линейное преобразование Q, если $x = Qy, y \in \mathbb{R}^n$
$g(y) = f(Qy) = (Qy)^T A(Qy) = y^t Q^T A Q y$ – снова квадратичная форма
$A_g = Q^T A_f Q$

Если Q невырожденное, то $\operatorname{rg} A_g = \operatorname{rg} A_f$
Мы будем рассматривать только невырожденные преобразования
Если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, то говорят, что форма приведена к каноническому виду

$f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$

σ^+ – положительный индекс инерции – число $a_{ii} > 0$ в каноническом виде
σ^- – отрицательный индекс инерции – число $a_{ii} < 0$ в каноническом виде
σ^0 – число $a_{ii} = 0$ в каноническом виде
$(\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$ – сигнатура квадратичной формы
$\operatorname{rg} f = \sigma^+ + \sigma^- = n - \sigma^0$
Нормальный вид квадратичной формы – канонический, где все все $a_{ii} \pm 1$ или 0

5.2 Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. $\underbrace{A}_{=A^T} \Rightarrow \underbrace{\Lambda}_{Q^TAQ} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ //todo когда-то 18.05 между 14:00 и 15:30

2. Метод Лагранжа(метод выделения полного квадрата)
   $f(x) = x^TAx, A = A^T, x = \underbrace{Q}_{\text{невыр.}} y$

   $g(y) = y^TBy = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2, B = Q^TAQ$

   (a) Пусть $i = 1 \ldots n, a_{ii} = 0$ (в квадратичной форме нет квадратов)
   Пусть $a_{ij} \neq 0, i \neq j$
   $x_i = y_i + y_j$
   $x_j = y_i - y_j$
   $x_k = y_k, k \neq i, j$
   $f(x) = \ldots + 2a_{ij}x_ix_j + \ldots = \ldots + 2a_{ij}y_i^2 - 2a_{ij}y_j^2 + \ldots = g(y)$ – есть ненулевые слагаемые с квадратами

   (b) $\exists\, a_{ii} \neq 0$ (есть слагаемые с квадратом, тогда предыдущий шаг

не нужен)
Выпишем из f все слагаемые, содержащие x_i:
$a_{ii}x_i^2+2\sum\limits_{j\neq i} a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii}^2x_i^2+2\sum\limits_{j\neq i} a_{ij}a_{ii}x_ix_j) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2-$
$\underbrace{\frac{1}{a_ii}\underbrace{(\sum\limits_{j\neq i} a_{jj}^2x_j^2 + 2\sum\limits_{j,k\neq i} a_{ij}a_{ik}x_jx_k)}_{\text{нет } x_i}}_{\text{кв. форма от } x_1\dots x_n \text{ без } x_i}$

$$f(x) = \frac{1}{a_{ii}}(\sum_j a_{ij}x_j)^2 + \underbrace{\widetilde{f}(x_1,\dots,\underbrace{\hat{x}_i}_{\text{без}},\dots,x_n)}_{\text{кв.форма}}$$

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j, y_k = x_k, k\neq i, y = Q^{-1}x$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii}\neq 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ – невырожденная}$$

$$x = Qy, g(y) = \frac{1}{a_{ii}}y_i^2 + \underbrace{\widetilde{g}(y_1,\dots,\hat{y}_i,\dots,y_n)}_{\text{кв.форма} \Rightarrow \text{повторим алгоритм}}$$

Метод универсальный: можно применить ко всем квадратичным формам, но заранее неизвестен канонический вид в отличие от ортогононального преобразования

3. Метод Якоби
   $\Delta_k \neq 0, k = 1\dots n-1, \Delta_i$ – угловые миноры (возможно, $\delta_n = 0$)
   $f(x) = x^TAx$
   Если $A = A^* = A^T, \exists!$ унитреугольная нижняя L, верхнетреугольная $U, D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n), d_i \in \mathbb{R}$
   L, U – унитр. $\Rightarrow U, L$ – невырожденные
   $L^* = L^T, U^T = U^*$
   $D = L^{-1}A(L^{-1})^T = (U^{-1})^T \underbrace{A}_{\text{матр. кв. формы}} U^{-1}$

$x = Qy, Q = U^{-1} = (L^{-1})^T$ – верхнетреугольная матрица (матрица Якоби)
См. алгоритм LDU преобразования
$d_1, \ldots, d_n$ – из алгоритма(числа на диагонали слева)
$f(x) = g(y) = d_1 y_i^2 + \ldots + d_n y_n^2 = \Delta_1 y_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \operatorname{rg} f \geq n-1$

Теорема Якоби
$\forall$ кв.ф. $f \exists!$ верхнетреуг. преобр. $Q : x = Qy$ такое, что кв. форма будет приведена к каноническому виду $g(y) = \Delta_1 y_1^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2$

Причем $Q = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \ldots & q_{1n} \\ 0 & 1 & q_{23} & \ldots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$q_i = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{i-1,i} \end{pmatrix}$

$b_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{i-1,i} \end{pmatrix}$

$A_{k-1} q_k = -b_k, k = 2 \ldots n$

Доказательство
Методом мат. индукции

1. $k = 2$
   $a_{11} = \Delta_1 \neq 0$
   $Q = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$
   $a_{11} q_{12} = -a_{12}$
   $q_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$
   $Q^T A^Q = \operatorname{diag}(\Delta_1, \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1})$

2. Пусть верно для $k: A_{j-1}q_j = -b_j, j = 1\dots k, Q_k^T A_k Q_k = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_k)$
$\Delta_1, \dots, \Delta_k \neq 0$
Покажем для $k+1$
$Q_{k+1} = \begin{pmatrix} Q & q_{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Пусть q_{k+1} – решение СЛНУ $A_k q_{k+1} = -b_{k+1}$
$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ b_{k+1}^T & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$
$Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} = \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ b_{k+1}^T & a_{k+1}a_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} Q_k^T A_k & Q_k^T b_{k+1} \\ q_{k+1}^T A_k + b_{k+1}^T & q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \underbrace{Q_k^T A_k Q_k}_{D_k} & \underbrace{Q_k^T A_k q_{k+1} + Q_k^T b_{k+1}}_{Q_k^T(A_k q_{k+1} + b_{k+1}) = 0} \\ 0 & q_{k+1}^T b_{k+1} q_{k+1} + a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$
$\det(Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1}) = \underbrace{(\det Q_{k+1})^2}_{1} \underbrace{\det A_{k+1}}_{\Delta_{k+1}} = d_1 \dots d_k x = \Delta_k x$
$x = \dfrac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = d_{k+1}$
Т.о индукционный переход доказан, нигде не использовано, что $\Delta_{k+1} \neq 0$
Отсюда можно применить до $k = n-1 \rightsquigarrow n$

Метод Якоби не универсальный, но позволяет сразу записать канонический вид, не находя самого преобразования

5.3 Закон инерции кв. форм. Критерий Сильвестра

Теорема (Закон инерции кв. форм)
Каким бы линейным невырожденным преобразованием кв. ф. f не была приведена к канон. виду, сигнатура этого вида будет одна и та же
$f(x) = x^T A x$
Пусть $x = \underbrace{Q_1}_{\text{невыр}} y, g(y) = y^T B y$
$x = \underbrace{Q_2}_{\text{невыр}} z, t(z) = z^T C z$
$\sigma(g) = \sigma(t)$ (сигнатуры)

Доказательство

$g(y) = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{b_{ii}}_{>0} y_i^2 + \sum_{j=p+1}^{r} \underbrace{b_{ii}}_{<0} y_i^2, r = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$

$\sigma(g) = (p, r-p, n-r)$

$t(z) = \sum_{i=1}^{s} c_{ii} z_i^2 + \sum_{j=s+1}^{r} c_{ii} z_i^2$

$\sigma(t) = (s, r-s, n-r)$

Пусть $p < s$

Т.к. Q_1, Q_2 невырожденные, рассмотрим системы:

$y = Q_1^{-1} x$ – по любому y однозначно находится x

$z = Q_2^{-1} x$ – по любому z однозначно находится x

Возьмем первые p строк системы $Q_1^{-1} x$ и приравняем к нулю

$(Q_1^{-1})_{1 \ldots p} x = \mathbb{0}$

Возьмем последнте $n-s$ строк системы $Q_2^{-1} x$ и приравняем к нулю

$(Q_2^{-1})_{n-s \ldots n} x = \mathbb{0}$

Рассмотрим систему

$(Q_1^{-1})_{1 \ldots p} x = \mathbb{0}$

$(Q_2^{-1})_{n-s \ldots n} x = \mathbb{0}$

Мы получили СЛОУ

Уравнений $p+n-s < n$. Тогда существует нетривиальное решение $x_0 \neq \mathbb{0}$

Подставим x_0 в наши системы

$y_0 = Q_1^{-1} x_0$ – первые p координат решения – нули, но сам он $\neq \mathbb{0}$ в силу невырожденности Q_1^{-1}

Аналогично с $z_0 = Q_2^{-1} x_0$

$f(x) = g(y) = t(z)$

$f(x_0) = \underbrace{g(y_0)}_{\leq 0} = \underbrace{t(z_0)}_{>0}$ – противоречие

Определение

$f > 0$ – положительно определенная, если $\forall\, x \neq 0 f(x) > 0$

Тогда $f(x) = x^T A x > 0 \Leftrightarrow A > 0, A^T = A$

Аналогично $f < 0$

$f \geq 0 \Leftrightarrow \forall\, x : f(x) \geq 0, \exists\, x \neq 0 : f(x) = 0 \Leftrightarrow A \geq 0$

$f \gtrless \Leftrightarrow \exists\, x : f(x) > 0, y : f(y) < 0 \Leftrightarrow A \gtrless$

$f > 0 \Leftrightarrow \forall$ с.ч. $> 0 \Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = g(y) > 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (n, 0, 0)$

$f < 0 \Leftrightarrow \forall$ с.ч. $< 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (0, n, 0)$

$f \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (r, 0, n-r), r < n$

$f \leq 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (0, r, n-r), r < n$
$f \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (r, s, n-r-s), r, s > 0$
Замечание
$f > 0 \Rightarrow -f < 0$ и т.д.
Теорема (критерий Сильвестра)
Если $\Delta_k \neq 0, k = 1 \dots n$
Тогда $f > 0 \Leftrightarrow \Delta_k > 0 \forall\, k$
Тогда $f < 0 \Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0 \forall\, k$
$(\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots)$
Доказательство
Берем метод Якоби

5.4 Приведение уравнения ПВП к каноническому виду

i, j, k - о.н.б.
V_3 – лин.пр-во геом. векторов
$\underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz}_{\text{лин.форма}} + 2a_1x + 2a_2y_2 + 2a_3z + a_0 = 0$
$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
$f(v) = v^TAv + 2a^Tv + a_0 = 0$
$i, j, k \xrightarrow{Q \text{ орт}} e'_1, e'_2, e'_3$ – о.н.б.
$Q = T_{ijk \to e'}$ – поворот
$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$
$Q = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix}$
Т.к. ориентация не меняется, $\det A = 1 > 0$
$A \xrightarrow{Q}$ диагональная(канонический вид)
$v = Qv'$
$v^TAv = v'Q^TAQv$
Для кв.ф. f построим ортогональное преобразование f такое, что $f \overset{Q}{\rightsquigarrow}$ канонический вид

Q – матрица поворота $\det Q = 1 \Rightarrow$ столбцы Q – координаты нового базиса $\Rightarrow$ оси

После преобразования получим $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \underbrace{2\underbrace{a^T Q}_{a'} v'}_{2a_1'x'+2a_2'y+2a_3'z} + a_0 = 0$

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$
   $\lambda_1 x'^2 + 2a_1'x' = \lambda_1(x' + \dfrac{a_1'}{x_1})^2 - \dfrac{a_1^2}{\lambda_1}$
   Аналогично с y, z
   Получили параллельный перенос. $O' = (-\dfrac{a_1'}{\lambda_1}, -\dfrac{a_2'}{\lambda_2}, -\dfrac{a_2'}{\lambda_2})$
   Получили $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 x''^2 + \lambda_3 x''^2 + a_0' = 0$ Если $a_0' \neq 0$
   $\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma z''^2 = 1$
   $\alpha, \beta, \gamma > 0$ – эллипсоид
   $\alpha, \beta, \gamma < 0$ – $\varnothing$
   $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$ – однополостной
   $\alpha, \beta < 0, \gamma > 0$ – двуполостной
   Если $a_0' = 0$
   $\alpha, \beta > 0$ – конус
   $\alpha \cdot \beta < 0$ – конус
   α, β – точка

2. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$
   Выполним перенос
   $x'' = x' + \dfrac{a_1'}{\lambda_1}$
   $y'' = y' + \dfrac{a_2'}{\lambda_2}$
   Если $a_3' \neq 0$
   $z'' = z' + \dfrac{a_0}{2a_3'}$
   $2a_3'z' + a_0 = 2a_3'(z + \dfrac{a_0}{2a_3'})$
   Получили $\alpha x''^2 + \beta y''^2 = z''$
   $\alpha \cdot \beta > 0$ – эллиптический парабороид
   $\alpha \cdot \beta < 0$ – гиперболический парабороид
   Если $a_3' = 0$
   $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$

Если $a_0 \neq 0$
$\alpha x''^2 + \beta y''^2 = 1$
$\alpha, \beta > 0$ – эллиптический цилинд
$\alpha, \beta < 0$ – $\varnothing$
$\alpha \cdot \beta < 0$ – гиперболический цилинд
Если $a_0 = 0$
$y''^2 = \alpha x''^2$
$\alpha > 0 \Rightarrow + \pm \sqrt{\alpha} x''$ – пересекающиеся плоскости
$\alpha < 0 \Rightarrow x = y = 0$ – прямая

3. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2, \lambda_3 = 0$
   $\lambda_1 x''^2 + 2a_2' y'' + 2a_3' z'' + a_0' = 0$
   Если $a_2', a_3' \neq 0$
   Выполним поворот в плоскости $O''Y''Z''$ на $\alpha : \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\alpha_3'}{\alpha_2'}$
   Получили $\lambda_1 x''^2 + 2a_2'' y''' + a_0' = 0$ – параболический цилиндр
   Если $a_3' = 0, a_2' \neq 0$
   Аналогично
   $a_2' = a_3' = 0$
   $\lambda_1 x''^2 \neq a_0' = 0$
   $x''^2 = \alpha$