

# Линейная алгебра. Практика

Александр Сергеев

## Пример

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{- Система линейных неоднородных уравнений.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_1a_{21} - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \end{cases}$$

$\Delta_i$  - определитель матрицы, где  $i$ -ый столбец заменен на столбец свободных членов.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

## Определение

$\det A = \sum (-1)^{inv(\sigma)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$ , где  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , где  $inv(S)$  - количество пар  $(a, b) : a, b \in S, a > b$

## Теорема Крамера

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists!$  решение  $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , где

$\Delta_i$  - определитель матрицы, где  $i$ -ый столбец заменен на столбец свободных членов.

Свойства:

1.  $|A| = |A^T|$
2. Все свойства строк выполняются для столбцов
3.  $|\dots, A_i + B_i, \dots| = |\dots, A_i, \dots| + |\dots, B_i, \dots|$ , где  $A_i, B_i$  - столбцы  
- свойство аддитивности по столбцам
4.  $|\dots, k \cdot A_i, \dots| = k \cdot |\dots, A_i, \dots|$
5. Если в матрице есть нулевой столбец, то определитель = 0
6.  $|\dots, A_i, \dots, A_j, \dots| = -|\dots, A_j, \dots, A_i, \dots|$
7. Отсюда  $|\dots, S, \dots, S, \dots| = 0$
8.  $|\dots, A_i, \dots, A_j, \dots| = |\dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots|$  - линейное преобразование
9. 
$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij},$$
 где  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  - дополнение,  
 $M_{ij}$  - минор (матрица, полученная вычеркиванием  $i$  строки и  $j$  столбца).

### Теорема

*Пучок плоскостей*, проходящих через  $\alpha_1 \cap \alpha_2$  задается уравнением  $a(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + b(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

### Пересечение линейных пространств

Пусть  $L_1, L_2 \subset V$  - линейные подпространства линейного пространства  
 $L_1 = \text{span}(a_1, \dots, a_k), a_1, \dots, a_k$  - базис  $L_2 = \text{span}(b_1, \dots, b_m), b_1, \dots, b_m$  - базис

Рассмотрим  $u \in L_1 \cap L_2$

$$u = \sum_{i=1}^k x_i a_i = \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^k x_i a_i - \sum_{i=1}^m y_i b_i = 0 - \text{СЛОУ}$$

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k \ -b_1 \ \dots \ -b_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = 0$$

Решая систему в общем виде, можем найти все вектора пересечения  
Отсюда можно найти базис