

# Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

## 1 Линейное отображение

### 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть  $V, U$  - линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$  - *линейное отображение*, если  $\forall \lambda \in K, u_1, u_2 \in U$   $\mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$

**Замечания**

1. Обозначение:  $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2.  $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$  поточечно определены  $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda \mathcal{A}u$

**Примеры**

1.  $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2.  $\epsilon v = v$
3.  $V, U = P_n$  - множество многочленов степени  $\leq n, A = \frac{d}{dt}$  - дифференциальный оператор
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$  - матрица  
 $\mathcal{A}u = B \cdot u$

**Определение**

$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V)$  – множество всех линейных отображений  $U \rightarrow V$

Определим операции

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

$$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$$

$L(U, V)$  – линейное пространство

**Определение**

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$  – образ линейного отображения

**Замечание**

$\text{Im } \mathcal{A} \subset V$  – линейное подпространство

Если  $\text{Im } \mathcal{A}$  – конечномерное, то  $\dim \text{Im } \mathcal{A} =: \text{rg } \mathcal{A}$

**Определение**

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$  – ядро линейного отображения (прообраз  $\mathbb{0}_V$ )

**Замечание**

$$\text{Ker } \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$\mathbb{0}_U \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$\text{Ker } \mathcal{A} \subset U$  – линейное подпространство

Если  $\text{Ker } \mathcal{A}$  конечномерно, то  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$

**Замечание 2**

Изоморфизм – частный случай линейного отображения

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbb{0}_U \text{ (тривиально)} \end{cases}$$

**Следствие**

Если  $U, V$  – конечномерные

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

- $\mathcal{A}$  сюръективное  $\Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$  инъективное  $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$  биективно  $\Leftrightarrow$  сюръективно + инъективно  $\Leftrightarrow$  изоморфизм

- $\mathcal{A}$  эндоморфизм  $\Leftrightarrow$  линейный оператор  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in L(V, V) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{End}_K(V)$
- $\mathcal{A}$  автоморфизм  $\Leftrightarrow$  эндоморфизм + изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}_K(V)$

### Примеры

1.  $0 \in L(U, V)$
2.  $\epsilon \in \text{Aut}(V)$  – автоморфизм
3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$   
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$  – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм  
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$  – матрица

#### Определение

$\text{Im } A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$  – образ матрицы

$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$  – ядро матрицы

$\text{def } A = \dim \text{Ker } A$  – дефект матрицы

$\text{rg } A = \dim \text{Im } A$  – согласуется со старыми определениями ранга матрицы

#### Доказательство

Для  $y \in \text{Im } A$

$$y = Ax = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$\text{Im } A = \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\dim \text{Im } A = \text{rg } A$$

#### Утверждение

$\text{Ker } A$  – множество решений  $Ax = 0$

Тогда  $\text{def } A = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg } A$

Отображение  $u = Av$ :

- (a) Сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$
- (b) Инъекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- (c) Биекция  $\Leftrightarrow n = m = \text{rg } A$
- (d) Эндоморфизм  $\Leftrightarrow n = m$
- (e) Автоморфизм  $n = m = \text{rg } A$

**Определение**

$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – композиция

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – линейное отображение

**Свойства**

1.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$   
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность
2.  $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$  – однородность
3.  $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$  – ассоциативность
4.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$  – изоморфизм

**Определение**

Пусть  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  – изоморфизм

$\forall v \in V \exists ! u : \mathcal{A}u = v$

Тогда зададим  $\mathcal{A}^{-1}v = u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

$\mathcal{A}^{-1}$  – изоморфизм, обратный к  $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$

**Замечание**

$\text{End}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\text{Aut}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра с делением

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$  – линейное подпространство

Тогда  $\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow V$  называется сужением на линейное подпространство

$U_0$ , если  $\forall u \in U_0 \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$

Очевидно  $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$

$\mathcal{A}_0 =: \mathcal{A}|_{U_0}$

**Утверждение**

$\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{A}_0$  изоморфизм  $\in L(U_0, \text{Im } \mathcal{A}_0)$

**Доказательство**

$\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$\text{Ker } \mathcal{A}_0 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$  – из изоморфизма

Отсюда  $\text{Ker } \mathcal{A}_0 = \{0_U\}$

Тогда  $\mathcal{A}_0$  инъекция, а значит изоморфизм

**Теорема о ранге и дефекте линейного отображения**

$U, V$  – конечномерные

$A \in L(U, V)$

Тогда  $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$

**Доказательство**

$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$

Дополним  $U_0$  до  $U$ :  $U = U_0 \oplus U_1$

Пусть  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\forall u \in U \ u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$  – единственным образом

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$

Отсюда  $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

Покажем, что  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм:

Сюръекция, т.к. действует в  $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$

Отсюда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{0_U\}$  из дизъюнктивности

Тогда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{0_U\}$  – тривиально

Тогда  $\mathcal{A}_1$  инъективно

Отсюда  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм, т.е.  $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$

Тогда  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$ , ч.т.д.

## 1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные  $U, V$

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1, \dots, \xi_n$  – базис  $U$

$\nu_1, \dots, \nu_m$  – базис  $V$

$$\forall u \in U \ u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$$\forall v \in V \ v = \sum_{i=1}^m v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\forall v \in \text{Im } \mathcal{A} \quad v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i$$

$\mathcal{A}$ , как линейное отображение, полностью определяется значениями  $\mathcal{A}$  на базисных векторах

$$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$A = (A_1 \dots A_n)$  - матрица линейного отображения в базисах  $(\xi, \nu)$

Если  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  - линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадают

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \nu_j$$

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \right) \nu_j$$

Т.к. координаты введены единственным образом, то  $\forall j \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \Leftrightarrow$

$$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$$

### Примеры

$$1. \quad \epsilon: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow E$$

$$2. \quad \epsilon: \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{V} \rightarrow \underset{\nu_1 \dots \nu_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow T_{\nu \rightarrow \xi} = T_{e \rightarrow e'}$$

### Утверждение

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$  - пространство всех матриц  $A_{m \times n}$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = m$  (при фиксированных базисах  $U, V$ )

### Доказательство

Соответствие между  $\mathcal{A}$  и  $A$  взаимнооднозначное

Докажем линейность

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda \mathcal{B}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$$

### Утверждение

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} U \\ \xi_1 \dots \xi_n \end{matrix} \xrightarrow{B} \begin{matrix} W \\ \theta_1 \dots \theta_r \end{matrix} \xrightarrow{A} \begin{matrix} V \\ \nu_1 \dots \nu_m \end{matrix} \quad (\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^r b_{ki} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^r b_{ki} \mathcal{A}_{\theta_k} = \\
& \sum_{k=1}^r b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}\right) \nu_i = \sum_{j=1}^m AB_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Утверждение**

Пусть  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

(В одном базисе)

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

**Доказательство**

Пусть  $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon \leftrightarrow AB = E$$

Отсюда  $B = A^{-1}$

**Утверждение**

$A$  изоморфно  $\Rightarrow A_0$  изоморфно

**Доказательство**

$A_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$$\text{Ker } A_0 \subset \text{Ker } A = \{\mathbb{O}_U\}$$

Отсюда  $\text{Ker } A_0 = \{\mathbb{O}_U\}$

Отсюда  $A_0$  – инъективно, а значит изоморфизм

**Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах**

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix} \leftrightarrow A'$$

$T_{\xi \rightarrow \xi'} T_{\nu \rightarrow \nu'}$  – матрицы перехода

$$\text{Тогда } A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Доказательство**

Пусть  $\xi_U : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix}$ ,

$$\xi_V : \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix}$$

$$\mathcal{A} = \xi_V \mathcal{A}_{\xi_U}$$

$$A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Следствие**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : V \xrightarrow{e'} V \xleftarrow{e'} A'$$

$$A' = T_{e' \rightarrow e} A T_{e \rightarrow e'}$$

#### Определение

Матрицы  $A_{n \times n}, B_{n \times n}$  *подобны*, если  $\exists C$  невырожденная:  $A = C^{-1} B C$

$A$  и  $A'$  – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны

#### Утверждение

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Ker } A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Im } A$$

#### Доказательство

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{Im } A$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = 0\}$$

$$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } A$$

### 1.3 Инвариантность линейного отображения

#### Определение

Инвариантностью/инвариантом называется свойство, которое не меняется при определенном рода преобразованиях

#### Теорема 1

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\text{rg } A$  и  $\text{def } A$ , где  $A \leftrightarrow \mathcal{A}$ , не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса

#### Доказательство

$$\mathcal{A} : U \xrightarrow{\xi} V \xleftarrow{\nu} A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$$

$$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A$$

$$\text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = n = \text{rg } A + \text{def } A \Rightarrow \text{def } \mathcal{A} = \text{def } A$$

#### Следствие

$$\mathcal{A} \text{ изоморфизм} \Leftrightarrow \exists A^{-1}, \text{ где } A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

#### Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V$$



Тогда  $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$  – определитель системы векторов в базисе  $e_1, \dots, e_n$

### Теорема 2

Значение  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса  $e_1, \dots, e_n$  (т.е. является инвариантом), причем  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе

### Доказательство

Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$

Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A_{n \times n}$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в  $e'_1, \dots, e'_n$  – базисе  $V$  – это тоже верно

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e'} A'$$

$$\det \mathcal{A} = \det A'$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\text{Тогда } \det A' = \det(T^{-1} A T) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$$

### Следствие

$\forall f$  – n-форма на  $V$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \quad f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

### Доказательство

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$g$  – n-форма, т.к.  $f$  – n-форма

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \quad (\text{см. доказательство теоремы})$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

### Следствие 2

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$$

### Следствие 3

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

$$\text{Причем } \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

$$\det \mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A}^{-1}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \in \text{Aut}(V)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$$

$$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$$

## Примеры

1. В  $V_3$

$$f(a, b, c) = (a, b, c) = \text{ориентированный объем} = \det(a, b, c)$$

$$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$$

$\lambda = \det \mathcal{A}$  – коэффициент пропорциональности объемов

(a)  $\mathcal{A}v = \mu v$  – оператор подобия

$$\text{Тогда } \lambda = \mu^3$$

(b) Поворот

Пусть  $i, j, k$  перешли в  $e_1, e_2, e_3$  поворотом

$$\text{Тогда } e_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A} \xleftrightarrow{ijk} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

$$f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$$

$$\det \mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3) = 1 - \text{смешанное произведение}$$

Отсюда при повороте объем сохраняется

## Определение

$$A_{n \times n}$$

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} - \text{след матрицы}$$

## Теорема 3

Если матрицы подобные, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$

**Доказательство**

$$A, B - \text{подобные} \Rightarrow \exists \text{ невырожденная } C : A = C^{-1}BC = SBC$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A &= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik} \sum_{m=1}^n B_{km} C_{ki} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} \sum_{i=1}^n C_{mi} S_{ik} = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} E_{mk} = \sum_{k=1}^n B_{kk} = \operatorname{tr} B\end{aligned}$$

#### Следствие

$A$  и  $A'$  матрицы  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$  в разных базисах

Тогда  $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$  (из формулы перехода)

#### Определение

$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$ , где  $A$  – матрица  $\mathcal{A}$  в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

#### Определение

$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

$L$  называется инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Если  $L$  – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве

#### Примеры

1.  $\emptyset, V$
2.  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$
3.  $\mathcal{A}$  – вращение пространства вокруг оси  $l$  на фиксированный угол  
Тогда  $l, L \perp l$  – инвариантное пространство ( $L$  – плоскость)  
Линейные многообразия  $P = x_0 + L$  – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

#### Теорема 4

$L \subset V$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда  $\exists$  базис  $V$  такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$ , где  $A^1_{k \times k}, k = \dim L$

#### Доказательство

Пусть  $L$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A}$

$\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L$

Дополним его до базиса  $V$ :

$V = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что  $A$  имеет ожидаемый вид

### Следствие 1

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}, \text{ где } A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$$

### Доказательство

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L_1$

$e_{k+1}, \dots, e_n$  – базис  $L_2$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_j^1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in k+1 \dots n} \in L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A_{j-k}^2 \end{pmatrix}$$

### Следствие 2

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид (аналогично предыдущему следствию)

Пусть  $A|_{L_j} : L_j \rightarrow L_j$  (эндоморфизм)

Тогда  $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_j$

### Следствие 3

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$\text{Тогда } \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(A|_{L_j})$$

### Доказательство

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$$\forall x \in V \exists ! x_1 \in L_1, \dots, x_m \in L_m : x = \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}x_i$$

$$\mathcal{A}x_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}_i$$

Докажем дизъюнктность

Пусть  $y_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$

Тогда  $\exists x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$$y_1 + \dots + y_m = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \dots + \mathcal{A}x_m = 0$$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$ , т.к.  $L_i$  – инвариант

Т.к.  $L_1 \dots L_m$  – дизъюнкты, то  $\mathcal{A}x_i = 0$

Отсюда  $y_i = 0$

Отсюда  $\text{Im } \mathcal{A}_i$  дизъюнкты

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

$V$  – линейное пространство над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

$\lambda \in K$  – *собственное число*  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \neq 0 \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

$v$  – *собственный вектор*  $\mathcal{A}$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$

$$\text{Отсюда } v - \text{СВ} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)v = 0$$

$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon) = (\text{множество всех СВ } \mathcal{A}, \text{ отвечающих } \lambda) \cup \{0\}$  – собственное подпространство  $\mathcal{A}$ , отвечающее  $\lambda$

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$  – геометрическая кратность числа  $\lambda$

$V_\lambda, \gamma_\lambda$  – инвариантны относительно оператора  $\mathcal{A}$  и выбора базиса

**Примеры**

1. Оператор подобия:

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v := \lambda v$$

У него  $\lambda$  – собственное число,  $V = V_x$

$$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$$

2.  $\mathcal{A}$  – поворот на плоскости относительно начала координат на угол  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
3.  $\lambda = 0$  – собственное число  $\mathcal{A}$   
 $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$   
 $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  – не изоморфизм  
 $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$
4.  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$ , где  $v_j$  – СВ  $\mathcal{A}$  для стационарного числа  $\lambda_j$

Научимся находить СЧ и СВ

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \text{tr } A + \dots + \det A$  – характеристический многочлен  $\mathcal{A}(A)$   $\lambda$  – СЧ  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$

Из основной теоремы алгебры  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)

Если  $\lambda_{i \in 1 \dots n}$  – корни, то  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  (т.к. свободный член  $\chi$ )

Т.о.  $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

Также из теоремы Виета  $\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$ , где  $\alpha(\lambda)$  – алгебраическая кратность СЧ  $\lambda$  (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в  $\mathbb{R}^2$  на  $\alpha \in (-\pi, \pi)$

Найдем характеристический многочлен:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos \alpha - t)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 2t \cos \alpha + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2t \cos \alpha + 1$$

Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ

$$\det A = 1, \text{tr } A = 2 \cos \alpha$$

### Теорема 1

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V), \lambda$  – СЧ  $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

### Доказательство

$1 \leq \gamma(\lambda)$  очевидно, т.к.  $\gamma(\lambda) = \dim V_{\lambda} = \gamma$

Пусть  $v_1, \dots, v_\gamma$  – базис  $V_\lambda$

$V_\lambda$  – инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис  $V_\lambda$  такой, что  $A$  имеет ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

Отсюда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE| |A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \chi_{A^2}(t)$

Пусть  $v_1, \dots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n$  – наш базис

Т.к.  $\mathcal{A}v_{j \in 1 \dots \gamma} = \lambda v_j$ , то  $A^1 = \lambda E_{\gamma \times \gamma}$

$\chi_{A^1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma$ , т.к. возможно  $\lambda$  – корень  $\chi_{A^2}(t)$

### Определение

Набор СЧ  $\mathcal{A}$  с учетом кратности является спектром оператора  $\mathcal{A}$

Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е.  $\forall \lambda$  – СЧ  $\alpha(\lambda) = 1$

### Теорема 2

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

$v_1, \dots, v_m$  – соответствующие СВ

Тогда  $v_1, \dots, v_n$  – линейно независимые

### Доказательство

Методом математической индукции:

1.  $m = 1$  – очевидно (т.к.  $v_1 \neq 0$ )

2. Пусть верно для  $m$

Докажем для  $m + 1$  от противного

Пусть  $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j \in 1 \dots m}$ ,  $v_{m+1}$  – соответствует  $\lambda_{m+1}$

Пусть  $v_1, \dots, v_{m+1}$  линейно зависимые

Тогда  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$

//todo

### Следствие 1

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

Тогда  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$  – дизъюнктные

### Доказательство

$v_1 + \dots + v_m = 0, v_i \in V_{\lambda_i}$

Пусть  $v_i \neq 0$ . Тогда  $v_i$  – СВ для  $\lambda_i$  (т.к.  $v_i \in V_{\lambda_i}$ )

Тогда линейная комбинация СВ  $= 0$ , чего не может быть из теоремы

Тогда  $v_i = 0$ , откуда дизъюнктность

**Следствие 2**

Пусть  $V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \text{End}(V_\lambda)$

Тогда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{\lambda - \text{СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$

**Доказательство**

$V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

$V_\lambda$  – инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис такой, что  $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$

$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$

Тогда  $V = \text{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$ , где  $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$  – базис  $V_{\lambda_k}$

Тогда базис  $V$  – объединение базисов

Отсюда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

## 1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагона- лизируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

**Определение**

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется оператором простой структуры, если существует базис  $V$  такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Замечание**

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow$  в  $V$  существует базис из СВ

**Теорема**

Если все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$ , т.е. являются СЧ (т.е.  $\sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda) = n =$

$\deg \chi_{\mathcal{A}}(t)$ )

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow \forall \lambda - \text{СЧ } \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$

**Доказательство**

$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$



$$\mathcal{A} - \text{ОПС} \Leftrightarrow \exists \text{ базис из СВ} \Leftrightarrow = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda} \Leftrightarrow n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \gamma(\lambda)$$

$$\text{Отсюда } n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$$

### Следствие

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}$  - ОПС

### Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$\exists T$  невырожденная :  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i$  - СВ

### Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица  $A$  диагонализируема  $\Leftrightarrow A$  - матрица ОПС  $\mathcal{A}$  в некотором базисе

Причем  $T = T_{e \rightarrow v}$ , где  $e_1, \dots, e_n$  - базис, в котором была записана  $A$ ,  $v_1, \dots, v_n$  - базис из СВ  $\mathcal{A}$ , соответствующих  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

### Доказательство $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$  - ОПС

$e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$ ,  $v_1, \dots, v_n$  - СВ, соответствующие  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - СЧ, базис  $V$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A \xleftrightarrow{v} \mathcal{A}' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$T = T_{e \rightarrow v}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

Отсюда  $A$  подобна диагональной

### Доказательство $\Rightarrow$

//todo

### Определение

Пусть  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  - линейное подпространство

Тогда  $\forall v \in V \exists ! v_1, \dots, v_m : v_i \in L_i, v = \sum_{i=1}^m v_i$

Зададим  $\rho_i \in \text{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

$\rho_i$  - оператор проектирования (проектор) на  $L_i$

Свойства:

$$1. \forall i \neq j \rho_i \rho_j = \mathbb{O}$$

$$2. \sum_{i=1}^m \rho_i = \epsilon$$

3.  $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$  – идемпотентность

4.  $\text{Im } \rho_i = L_i$   
 $\text{Ker } \rho_i = \sum_{j \neq i} L_j$

### Утверждение

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_m \in \text{End}(V)$ , удовлетворяющие свойствам 1 и 2

Тогда  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$  (т.е.  $\rho$  – проектор на  $L_i = \text{Im } \rho_i$ )

### Доказательство

Докажем  $1, 2 \Rightarrow 3$

$$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \sum_{j=1}^m \rho_j = \rho_i^2$$

Докажем, что  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$

$$\forall v \in V \quad v = \epsilon v = \sum_{i=1}^m \rho_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$$

Докажем дизъюнктность

$$0 = v_1 (\in \text{Im } \rho_1) + \dots + v_m (\in \text{Im } \rho_m)$$

$$\forall i = 1 \dots m \quad v_i = \rho_i \omega_i (\exists \omega_i \in V)$$

$$v_i = \rho_i \omega_i = \text{из свойства 3} = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m \rho_j \omega_j \right) = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m v_j \right) = \rho_i 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

### Теорема о спектральном разложении о.п.с.

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  – о.п.с.

Тогда  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$ , где  $\rho_\lambda$  – проектор на  $V_\lambda$

### Доказательство

Обозначение: Пусть все  $\lambda$  – С.Ч.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$

$$v = \sum_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v = \mathcal{A} \left( \sum_{\lambda} v_\lambda \right) = \sum_{\lambda} (\mathcal{A}v_\lambda) = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda(v) = \left( \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda \right) v$$

Отсюда  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$  – спектральное разложение

### Следствие

$A$  – диагонализируема  $\Rightarrow \exists \rho_\lambda, \lambda - \text{С.Ч. } A : A = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

### Определение

$(A_m)_{m=1}^\infty$  – последовательность матриц  $A_{n \times n} = (a_{ij}^m)_{n \times n}$ ,  $m$  – индекс, а не степень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A = (a_{ij})_{n \times n} \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \quad a_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^m$$

### Немного про ряды

$\sum_{m=1}^\infty a_m$  – числовой ряд ( $a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ )

$S_m = \sum_{i=1}^m a_k$  – частичная сумма ряда

Если  $S_m$  сходится, то ряд называется сходящимся

### Определение

$\sum_{m=1}^\infty A_m$  – ряд из матриц

$\sum_{m=1}^\infty A_m$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \quad \sum_{m=1}^\infty a_{ij}^m$  – сходится

### Далее про ряды

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x), u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функциональный ряд

При фиксированном  $x$  – числовой ряд

Множество  $x$  таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда  $= E$

$\sum_{m=1}^\infty C_m(x - x_0)^m$  – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при  $|x - x_0| < R$ , где  $R$  – радиус сходимости

В  $\mathbb{C}$  – круг сходимости

В  $\mathbb{R}$  – интервал сходимости

Для  $\mathbb{R}$ :  $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum_{m=1}^\infty \frac{x^m}{m!}$ , сходится при  $|x - x_0| \leq \infty$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \text{ сходится при } |x| \leq \infty$$

На окружности (при  $|x - x_0| = R$ ) ряд может как сходиться, так и расходиться

### Определение

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

$$\text{Тогда } f(A) := \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \text{ (если ряд сходится)}$$

### Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}, \text{ где } \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

### Доказательство

$A_{n \times n}$  диагонализируема, а значит  $\exists T : \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k, R = \infty$$

$$A^k = (T \Lambda T^{-1})^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}$$

Отсюда  $S_m = T \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^m C_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m C_k \lambda_n^k) T^{-1}$  (т.к.  $R = \infty$ , то все ряды

сойдутся)

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}$$

### Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$f(A) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$ , где  $A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$  – спектральное разложение

#### Доказательство

$A$  – диагонализируема  $\Rightarrow A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$

Тогда  $A^k = (\sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda)^k = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda$

Отсюда  $S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k = \sum_{k=0}^m C_k \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} (\sum_{k=0}^m C_k \lambda^k) \rho_\lambda \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$

#### Следствие

$A$  – диагонализируема,  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall \lambda - \text{CЧ} \quad |\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall \lambda - \text{CЧ} \quad |t\lambda| < R$

Тогда  $f(At) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \dots, f(\lambda_n t)) T^{-1}$

или  $f(At) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda t) \rho_\lambda$

#### Пример

$\exp At = e^{At} = \sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}$

#### Свойства

1.  $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
2.  $e^{A0} = E$
3.  $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At} A$

#### Доказательство

$$(e^{At})' = (\sum_{\lambda} f(\lambda t) \rho_\lambda)' = \sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t} \rho_\lambda = (\sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) (\sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At} A$$

#### Поиск обратной матрицы

Пусть  $A$  диагонализируема

$\forall \lambda \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}) T^{-1}$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_{\lambda}$$

**Определение**

$\sqrt[m]{A}$  – арифметический корень

Если  $\forall \lambda \lambda \geq 0$ , то результат определен однозначно

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$$

## 1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

$V$  – линейное пространство над полем  $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$   
Т.е. все корни являются С.Ч.  $\mathcal{A}$   
 $\forall \lambda \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)
2. Все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$   
Т.е. все корни являются С.Ч.  $\mathcal{A}$   
 $\exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)
3. При  $K = \mathbb{R}$  не все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$   
Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией

**Определение**

$V$  – вещественное линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$$

$$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$$

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \text{ в } V$$

$$0 = 0 + i0 - \text{нулевой в } V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall x \in V \quad V_{\mathbb{C}} \ni x + 0i = x$$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \quad \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

**Утверждение**

$V_{\mathbb{C}}$  – линейное пространство

**Теорема (о вещественном базисе  $V_{\mathbb{C}}$ )**

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ ,  $e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V_{\mathbb{C}}$  ( $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}}$ )

**Доказательство**

$\forall z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

Отсюда  $z = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$ , т.е.  $e_1, \dots, e_n$  – порождающая

//todo Отсюда  $e_1, \dots, e_n$  – линейно независимые

**Определение**

$$z = x + iy$$

Тогда  $\bar{z} = x - iy$  – сопряженный вектор

**Утверждение**

$z_1, \dots, z_m$  – линейно независимые в  $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$  – линейно независимые

$$(\Rightarrow \text{rg}(z_1, \dots, z_m) = \text{rg}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m))$$

**Доказательство**

$$c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m = 0$$

$$\overline{c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m} = \bar{0} = 0 = \bar{c}_1 z_1 + \dots + \bar{c}_m z_m \text{ – линейно независимые}$$

$$\text{Отсюда } \bar{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$$

**Определение**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

Продолжением  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  называется  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$  такой, что

$$\forall z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$$

**Свойства**

1.  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n \times n}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \dots = \mathcal{A} e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

$$\text{Отсюда } A_{\mathbb{C}} = A$$

2.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$  (т.к. матрицы равны)
3.  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\bar{z})$
4.  $\alpha \pm i\beta$  – пара сопряженных корней  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  – СЧ для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   
Тогда  $z$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \bar{z}$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha - i\beta$

**Доказательство**

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\bar{z}$$

Тогда:

Т.о. если  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

**Определение**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

*Нормализованный многочлен* – многочлен, старший коэффициент которого 1

Нормализованный многочлен  $\psi(t)$  называется *аннулятором* элемента  $x \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0 = \prod_{\lambda - \text{корень многочлена}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) -$$

кратность корня

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_0\epsilon = \prod_{\lambda - \text{корень}} (A - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

**Определение**

Минимальный аннулятор  $x$  – аннулятор минимальной степени

**Теорема о минимальном аннуляторе элемента**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

1.  $\forall x \in V \exists!$  минимальный аннулятор  $x$
2. Любой аннулятор  $x$  делится на минимальный

**Доказательство 1**

(алгоритм)



$$1. \ x = \mathbb{O}, \psi \equiv 1$$

$$\epsilon = \psi(\mathcal{A})$$

$$2. \ x \neq \mathbb{O}$$

Пусть  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$  – линейно независимые и  $m$  – максимальное

$$\exists !\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$$

$$(\mathcal{A}^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{O}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i \text{ – минимальный и определен единственным образом}$$

### Доказательство 2

Пусть  $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$ ,  $\deg r < \deg \phi$  – аннулятор

$$\mathbb{O} = \psi'(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})x}_{\mathbb{O}} + r(\mathcal{A})x$$

Отсюда  $r(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$

Но т.к.  $\psi$  – минимальный, то  $r \equiv \mathbb{O}$

### Определение

Нормализованный многочлен  $\phi(t)$  называется аннулятором  $\mathcal{A}$ , если  $\forall v \in V \ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$  (т.е.  $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$ )

Аннулятор  $\mathcal{A}$  минимальной степени – *минимальный многочлен*

### Теорема о минимальном многочлене

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$1. \ \forall \mathcal{A} \exists ! \text{ минимальный многочлен}$$

$$2. \ \text{Любой аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$$

### Доказательство

(алгоритм)

$$1. \ e_1, \dots, e_n \text{ – базис } V$$

По теореме 1  $\forall e_i \exists ! \psi_i(t)$  – минимальный аннулятор  $e_i$

$$\phi(t) := \text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

$$\text{Тогда } \forall j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$$

Докажем, что  $\phi(t)$  – аннулятор

$$\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^m v_j e_j = \sum_{j=1}^m \phi(\mathcal{A})v_j e_j = \sum_{j=1}^m a_j(t) \psi_j(t) v_j e_j =$$

$\emptyset$

Т.о.  $\phi$  – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на  $\phi$

Пусть  $\phi_1(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$\forall v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow \forall j = 1 \dots n \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset$  – тогда  $\phi_1(\mathcal{A})$  – аннулятор  $e_j$

Т.к.  $\psi_j(t)$  – минимальный аннулятор  $e_j$ , то  $\phi_1(t)$  делится на  $\psi_j(t)$

Отсюда  $\phi_1(t)$  делится на  $\text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$

Отсюда  $\deg \phi$  – минимальная из возможных, а значит  $\phi$  – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный

Пусть  $\phi_2(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  такой, что  $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$

Тогда  $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$  – степень меньше  $m$

Но тогда  $\delta$  – аннулятор,  $\deg \delta < m$  – противоречие

Отсюда  $\phi_2 = \phi$

### Теорема Кэли-Камильтона

$\forall \mathcal{A} \in V$

$\chi_{\mathcal{A}}$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  (т.е.  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$ )

#### Доказательство

Пусть  $\mathcal{A} \xleftrightarrow[e_1, \dots, e_n]{} A$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$$

Пусть  $\mu$  не корень  $\chi$

Тогда  $\det(A - \mu E) \neq 0$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (b_{ij} := A_{ji})$$

$b_{ij}$  – многочлен  $n - 1$  степени от  $\mu$

Отсюда  $(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0)$ , где  $B_i$  – матрица

$n \times n$

$$\text{Отсюда } \det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

$$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

Отсюда  $\alpha_0 E = AB_0$

$$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$$

$\vdots$

$$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$$

$$\alpha_n E = -B_{n-1}$$

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \dots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = 0$$

**Следствие**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) \chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}$

**Следствие 2**

$$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$$

**Теорема (о корнях минимального многочлена)**

Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $\lambda$  – корень  $\chi(t)$

1. Пусть  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$  – С.Ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0$

Отсюда  $\psi(t) = (t - \lambda)$  – минимальный аннулятор элемента  $v$

Т.к.  $\phi$  – минимальный многочлен, то  $\phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$  аннулятор  $v$

Тогда по теореме 1  $\phi$  делится на  $\psi \Rightarrow \lambda$  – корень  $\phi$

2. Пусть  $\lambda \notin K$ , т.е.  $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V \rightarrow \text{базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[V, e]{V_{\mathbb{C}}, v} A \xleftrightarrow[V_{\mathbb{C}}, v]{V, e} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda - \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda - \text{корень } \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена

$$\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Отсюда  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$  – корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

**Замечание**

Получаем второй способ получения С.Ч.  $\mathcal{A}$

$$m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t), \phi_{\lambda}(t) :=$$

$$\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\deg \phi = m = \sum_{\lambda} m(\lambda)$$

**Определение**

$I_{\lambda} := \{p \in P_{m-1} : p \text{ делится на } \phi_{\lambda}\}$  – главный идеал, порождающий многочлен  $\phi_{\lambda}$

$I_{\lambda}$  – линейное подпространство  $P_{m-1}$

$$I_{\lambda} \ni p(t) = a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$m - 1 \geq \deg p = \deg a_{\lambda} + \deg \phi_{\lambda} = \deg a_{\lambda} + m - m_{\lambda}$$

$$\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$$

$$I_{\lambda} \cong P_{m(\lambda)-1}$$

$$p \leftrightarrow a_{\lambda}$$

$$\dim I_{\lambda} = m(\lambda)$$

**Теорема**

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

**Доказательство**

1. Проверим, что  $I_{\lambda}$  дизъюнкты

$$0 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t) \underbrace{\phi_{\lambda}(t)}_{\text{не делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} a_{\mu}(t) \phi_{\mu}(t)}_{\text{делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}}$$

Отсюда  $a_{\lambda}(t)$  делится на  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ , но  $\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$

Тогда  $a_{\lambda}(t) = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda}(t) \equiv 0 \Rightarrow$  дизъюнкты

$$\begin{aligned}
2. \quad & \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m \\
& \dim \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \\
& \text{Отсюда } P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}
\end{aligned}$$

### Следствие

$$\forall p \in P_{m-1} \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$$

В частности, для  $p \equiv 1 \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, 1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$  — полиномиальное

разложение единицы (порожденное многочленом  $\phi$ )

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t)\phi_{\lambda}(t)$$

### Замечание

1.  $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_{\lambda}p_{\mu}$  делится на  $\phi$

#### Доказательство

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)$$

$$p_{\mu}(t) = a_{\mu}\phi_{\mu}(t)$$

$$p_{\lambda}(t)p_{\mu}(t) = a_{\lambda}(t)a_{\mu}(t)\phi_{\lambda}(t)\phi_{\mu}(t) = b(t)\phi(t)$$

2. Пусть все корни  $\phi$  взаимно-простые, т.е.  $\forall \lambda m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\deg a_{\lambda}(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$$

$$\text{Отсюда } a_{\lambda}(t) = \text{const}$$

### Теорема Лагранжа

Пусть все корни  $\phi(t)$  взаимно простые

$$\text{Т.е. } \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \quad \phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\text{Тогда } \forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$(a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$$

#### Доказательство

$$\exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p(t) = \sum_{\lambda} \underbrace{a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)}_{\phi_{\lambda}(t) \in I_{\lambda}}$$

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = a_{\lambda} \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi_{\lambda}(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu) = (t - \lambda) \underbrace{\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)}_{\phi_{\lambda}(t)}$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\xi \neq \mu} (t - \xi)$$

$$\phi'(\lambda) = \prod_{\xi \neq \lambda} (\lambda - \xi) = \phi_{\lambda}(\lambda)$$

Отсюда  $a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

### Следствие

Пусть  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Тогда  $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow p(t) = t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

### Доказательство

$$1 = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$$

Пусть  $\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Построим полиномиальное разложение 1, порождающее многочлен  $\phi$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \underbrace{p_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\rho\text{- спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \text{ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)}$$

**Спектральный оператор действует не на собственное подпространство**

### Свойства

Пусть  $\lambda \neq \mu$

Проверим, что  $\rho_{\lambda} \rho_{\mu} = 0$

$$\rho_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\rho_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = a_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

$$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = 0$$

Если  $\lambda$  единственный корень  $\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$$

Если все корни взаимно простые:

$$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$$

По следствию из т. Лагранжа:

$$\epsilon = \sum_{\lambda} p_\lambda$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

Далее покажем, что  $p_\lambda$  – проекторы на  $V_\lambda$ , т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с

Т.е.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.

**Определение**

$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$  называется корневым подпространством  $\mathcal{A}$

$\lambda$  – СЧ  $\mathcal{A}$

Очевидно, что  $V_\lambda \subset K_\lambda$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

**Теорема о корневом подпространстве**

1.  $K_\lambda$  – инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$2. \text{Im } \rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V)$$

$$3. (t - \lambda)^{m(\lambda)} \text{ минимальный многочлен для } \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

**Доказательство**

$$1. x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \mathcal{A} x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} x = 0$$

перестановочные, т.к. многочлены

$$\text{Отсюда } \mathcal{A} x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{k-1}$$

$$2. \forall x \in V \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\text{Im } \rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A}) x}_{\phi(\mathcal{A})=0} =$$

$\mathbb{O}$

Отсюда  $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда  $\text{Im } \rho_\lambda \subset K_\lambda$

**Обратно**

$x \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть  $\mu \neq \lambda$

$$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = \mathbb{O}$$

$$x = \epsilon x = \sum_{\mu} \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \text{Im } \rho_\lambda$$

Отсюда  $K_\lambda \subset \text{Im } \rho_\lambda$

$$3. \mathcal{B} = \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

Проверим, что  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен  
 $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – аннулятор  $\mathcal{B}$

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть  $(t - \lambda)^k$  – минимальный многочлен,  $k < m(\lambda)$

$$\phi_1(t) := (t - \lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg \phi_1 \leq \deg \phi$$

Покажем, что  $\phi_1$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V = \bigoplus_{\mu} K_{\mu} v = \sum_{\mu} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} - \text{раскладывается единственным об-}$$

разом

$$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum_{\mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} = \sum_{\mu \neq \lambda} (\mathcal{A} -$$

$$\lambda\epsilon)^k b_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_{\mu} + (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) v_{\lambda} = \mathbb{O}$$

Отсюда  $\phi_1$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем степени меньше, чем  $\phi$ , что противоречит минимальности  $\phi$

Отсюда  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен  $\mathcal{B}$

**Следствие 1**

$\forall \lambda \ m(\lambda) \leq \dim K_{\lambda}$  (очевидно из п.3 теоремы)

**Следствие 2**

$\mathcal{A}$  – о.п.с  $\Leftrightarrow \forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$



Пусть  $\phi(t) := \prod_{\lambda - \text{СЧ}} (t - \lambda)$

Очевидно аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем минимальный

$\forall v \in V \ v = \sum_{\lambda} \underbrace{v_{\lambda}}_{\in V_{\lambda}}$  – раскладывается единственным образом

$$\phi(\mathcal{A}) = \prod_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \underbrace{v_{\mu}}_{\in V_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu\epsilon)} = \prod_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)(\mathcal{A} - \mu\epsilon)v_{\mu} = 0$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\forall \lambda \ K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^1 = V_{\lambda}$$

$$\text{Отсюда } \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} - \text{о.п.с.}$$

## 1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

**Определение**

$\mathcal{B} \in \text{End}(V)$  называется *нильпотентным*, если  $\chi_{\mathcal{B}} = t^{\nu}, \nu \geq 1$

$\nu$  – индекс нильпотентности ( $\nu \leq n$ )

(Т.е.  $\mathcal{B}^{\nu} = 0$ )

**Теорема (разложение Жордана)**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\exists \mathcal{D}$  – оператор простой структуры  $\in \text{End}(V)$ ,  $\mathcal{B}$  нильпотентный  $\in \text{End}(V)$  :

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ , причем  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$

**Доказательство**

$\phi(t)$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A}$  (все корни  $\in K$ )

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}$$

Проверим, что  $\mathcal{D}$  – о.п.с.

Достаточно убедиться, что  $\lambda$  – СЧ  $\mathcal{D}$ ,  $\text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$  – собственное подпространство для  $\mathcal{D}$

Пусть  $v_{\lambda} \in \text{Im } \rho_{\lambda}$

$$\mathcal{D}v_\lambda = \sum_{\mu} \mu \rho_{\mu} \underbrace{v_\lambda}_{\substack{\in \text{Im } \rho_\lambda \\ \mu \neq \lambda \Rightarrow \dots = 0}} = \lambda \rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda - \text{с.ч. } \mathcal{D}$$

$$V = \bigoplus_{\mu} \text{Im } \rho_{\mu} - \text{дизъюнкты}$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_{\lambda} \subset V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } \rho_{\lambda} \subset \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}} \subset V$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$\mathcal{D} - \text{о.п.с.}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$D = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \text{спектральное разложение } \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\nu := \max_{\lambda} m(\lambda)$$

$$\text{Покажем, что } \mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}$$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{D})^{\nu} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\mathcal{A} \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \rho_{\lambda})^{\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{\nu} \rho_{\lambda} = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{B} \mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) = (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) = \mathcal{D} \mathcal{B}$$

**Теорема (единственность разложения Жордана)**

Разложение Жордана  $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$  возможно единственным образом

**Доказательство**

$$\text{Пусть } \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$$

$$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_{\mu} - \text{спектральное разложение}$$

Достаточно доказать, что

$$1. \text{ множество } \mu \text{ с.ч. } \mathcal{D}' \text{ совпадает с множеством с.ч. } \mathcal{A}$$

$$2. \text{ Im } Q_{\lambda} = K_{\lambda} (D = \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}, \text{Im } \rho_{\lambda} = K_{\lambda}) \\ \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$$

$$3. \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$$

$$(\mathcal{A} - \mu\epsilon)Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon\right)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

Покажем, что  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \exists \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)Q_\lambda C Q_\mu &= \lambda Q_\lambda C Q_\mu - Q_\lambda C \mu Q_\mu = Q_\lambda D' C Q_\mu - Q_\lambda C D' Q_\mu = \\ Q_\lambda (D' C - C D') Q_\mu &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда  $Q_\lambda C Q_\mu = 0 = Q_\mu C Q_\lambda, \lambda \neq \mu$

$$\sum_{\lambda} Q_\lambda C Q_\mu = \sum_{\mu} Q_\lambda C Q_\mu$$

При  $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

Пусть  $m(\mu)$  – минимальное  $k : (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{m(\mu)} = 0$

Такой  $k$  найдется, т.к.  $\mathcal{C}$  нильпотентный и при каком-то  $k$  дает  $= 0$

$$\psi_\mu(t) = (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\forall x \in \text{Im } Q_\mu \quad \psi_\mu(\mathcal{A})x = 0$$

Тогда  $\psi_\mu(\mathcal{A})$  – минимальный аннулятор элементов  $\text{Im } Q_\mu$

$\phi$  – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и  $\text{Im } Q_\mu$

Тогда  $\phi$  делится на  $\psi_\mu$

Тогда  $\forall \mu \quad \mu$  – корень  $\phi$

Рассмотрим  $\psi = \prod_{\mu} \psi_\mu(t)$ . Покажем, что это аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{\mu} \underbrace{v_\mu}_{\in \text{Im } Q_\mu}$$

$$\psi(\mathcal{A})v = \sum_{\xi} \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum_{\xi} b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = 0$$

Отсюда  $\psi$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

Тогда  $\psi$  делится на  $\phi$

Т.о.  $\psi \equiv \phi$

Докажем пункт 2

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = 0$$

$$\text{Im } Q_\lambda \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } Q_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

$$\text{Im } Q_\lambda = K_\lambda = \text{Im } p_\lambda$$

**Теорема 3**

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  – разложение Жордана

$$\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{D} = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}, \nu = \max m(\lambda)$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$  – попарно перестановочные

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\text{Im } p_{\lambda} = K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = (\det \mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} = \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu}$$

$$t \in K, (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} - t^{\nu} \mathcal{B}^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

$$\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})}_{\text{не зависит от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$$

$$\text{Отсюда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \text{ и } \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

не зависят от  $t$

$$\text{Тогда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - \mathcal{B}) = \det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)$$

$$\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1})$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$$

$$\text{Отсюда } \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$$

**Следствие 1**

$$\det \mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0) = \det \mathcal{D}$$

**Следствие 2**

$$\dim K_{\lambda} = \alpha(\lambda)$$

**Доказательство**

$\alpha(\lambda)$  – кратность корня в  $\chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow$  в  $\chi_{\mathcal{D}}$ . А т.к.  $\mathcal{D}$  – о.п.с., то  $\dim K_{\lambda}^{\mathcal{D}} =$

$$\dim V_{\lambda}^{\mathcal{D}} = \alpha(\lambda)$$

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис.

### Функция от матрицы

Пусть все корни  $\chi(t) \in K$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}$$

$$K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

Построим в каждом  $K_\lambda$  такой базис, что матрица оператора в нем будет иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть  $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть  $K_j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{B}^r = \text{Ker } \mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \text{rg } \mathcal{B}^r + \dim K_r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда  $\text{rg } \mathcal{B}^r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1}$

$\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} \subset \text{Im } \mathcal{B}^r$

Т.о.  $\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \text{Im } \mathcal{B}^r$

Тогда  $\text{Im } \mathcal{B}^r = \text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{B}^m = \mathbb{0}$ , что противоречит минимальности  $m$

Рассмотрим  $K_1 \dots K_m$

Найдем  $j_m$  – компоненту, которая лежит в  $K_m$ , но не лежит в  $K_{m-1}$

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1} \quad j_r := \mathcal{B}j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что  $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \text{Ker } \mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B}j_r$

$\mathcal{B}^{r-1}j_{r-1} = \mathcal{B}^rj_r = \mathbb{0}$

Отсюда  $j_{r-1} \in K_{r-1} = \text{Ker } \mathcal{B}^{r-1}$

$\mathcal{B}j_1 = \mathbb{0}$

$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$  – циклический базис, порожденный вектором  $j_m$

Далее повторяем это для всех векторов  $K_m, K_{m-1}, \dots$

Максимальная длина циклического базиса, порожденного  $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$  – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора(фундамент башни) – вектора  $j_m$

Крыша башни – вектора  $j_1$

Крыша башни – собственное подпространство

Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу

Если  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то  $V_\lambda = K_\lambda$ , то замок будет состоять из одной башни высоты 1

$K = K_\lambda = \text{span}(\dots, j_1, j_2, \dots, j_m, \dots)$  – линейная оболочка всех векторов всех башен

$$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$$

$$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)j_{r+1}$$

$$\mathcal{A}j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}j_1 &= \lambda j_1 \\ \mathcal{A}j_2 &= j_1 + \lambda j_2 \\ &\vdots \\ \mathcal{A}j_m &= j_{m-1} + \lambda j_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана}$$

$m$ -ого порядка (блок нижнего уровня)

Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера  $m$

Рассмотрим теперь блочную матрицу  $\text{diag}(\underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \dots, \underbrace{J_m, \dots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$

– блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству  $K_\lambda$

Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты

Объединим все блоки верхнего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу

Получим жорданов базис пространства  $V$

Матрица  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы

$$T_{e \rightarrow j} = T = (\dots, j_1, \dots, j_m, \dots)$$

$$T^{-1}AT = J$$

$$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$$

**Обоснование алгоритма**

Пусть  $\mathcal{B}K = \text{Im } \mathcal{B}$

$$Z_0 = \mathcal{B}K$$

$$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \dots m$$

$$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$$

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_m$$

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1 &\subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1 \\
\overline{K}_2 &\subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2 \\
\overline{K}_r &\subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K \\
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1) \\
\overline{K}_j &- \text{ опорные подпространства}
\end{aligned}$$

**Теорема**

$$1 \leq r \leq m$$

$$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$$

**Доказательство**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1)$$

$$\forall x \in K : \exists ! (x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \dots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^m \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \text{Ker } \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^r \left( \underbrace{\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j}}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} + \mathcal{B}x' \right) &= 0 \\
\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' &= \sum_{j=1}^m x_j + \mathcal{B}y'
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности  $\overline{K}_j$  и  $\mathcal{B}K \forall j x_j = 0$   
 $0 + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$  – дизъюнктность

$$\begin{aligned}
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \\
\mathcal{B}K &= \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K \\
&\vdots \\
\mathcal{B}^{m-1} K &= \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=0}
\end{aligned}$$

Отсюда следствие

**Следствие**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$$

Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & \overline{K}_m & \\
& & & & & \overline{\mathcal{B}}K_m & \\
& & & & & \vdots & \\
& & \ddots & & \ddots & & \\
& & \overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m & \\
\overline{K}_1 & \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m & & 
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \text{Ker } \mathcal{B} = V_\lambda$$

$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset, \text{ то } J_r = \overline{K}_r \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$$

$\overline{K}_r$  – основание башни (опорное пространство, порожденное  $J_r$ )

$$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m - \text{основание (1 этаж – крыша)}$$

Верхние клетки каждого этажа – основание

$$l\text{-ый этаж: } \overline{K}_l \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$$

$$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \emptyset, j = 0 \dots m-l$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

Первые  $j$  этажей соответствуют  $K_j$

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

**Теорема (о размерности башни)**

Все этажи башни имеют одинаковую размерность  $d_r = \dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \dots r-1$

**Доказательство**

Рассмотрим  $\mathcal{B}^j$  (очевидно, что  $\mathcal{B}^j$  – эндоморфизм)

Докажем, что  $\mathcal{B}^j$  – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е.  $\dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

$$\text{Пусть } x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \emptyset$$

$$\text{Тогда } x \in \text{Ker } \mathcal{B}^j = K^j$$

$$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \dots r-1$$

$$K_1, \dots, K_{r-1} \text{ дизъюнкты с } \overline{K}_r$$

$$\text{Т.о. } x = \emptyset$$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

**Следствие**

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^m d_r$$



$$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum_{r=1}^m r d_r$$

**Следствие 2 (теорема Фробениуса)**

$$\forall r = 1 \dots m \quad d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$$

(при  $r = m \quad d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$ )

**Доказательство**

$$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$$

$$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$$

$$\rho_j = d_{j+1} + \dots + d_m + \rho_{j+1}$$

$$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \dots + d_m$$

$$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$d_1 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$\vdots$

$$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$$

$$\text{Отсюда } d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$$

**Замечание**

На практике удобнее

$$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$$

Рассмотрим башню

$$\dim \overline{K}_r = d_r = d$$

$$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \dots, g_d)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \mathcal{B} \overline{K}_r & \mathcal{B} g_1 & \mathcal{B} g_2 & \dots & \mathcal{B} g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1} \overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1} g_1 & \mathcal{B}^{r-1} g_2 & \dots & \mathcal{B}^{r-1} g_d \end{array} \quad \mathcal{B}^j - \text{изоморфизм, т.е. базис пе-}$$

реходит в базис

$$\mathcal{B}^j g_1 \dots \mathcal{B}^j g_d - \text{базис } \mathcal{B}^j \overline{K}^r - \text{циклический базис}$$

$$\text{Тогда } J_r = \bigoplus_{i=1}^d \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i)$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda \epsilon) \mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow J_r - \text{клетка Жордана размерности } r \times r - \\ \text{в цикл. базисе} \\ \text{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i, \dots, \mathcal{B}g_i, g_i) \\ \text{блок нижнего уровня} \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\underbrace{J_r(\lambda), \dots, J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda) \\ J_i \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda), \dots, \mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda) \\ K = \bigoplus_{r=1}^m J_r \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J} \\
// \text{todo 13:11 16.03}
\end{array}$$

### 1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

$$\sqcap T(j_1, \dots, j_n), A = T \mathcal{J} T^{-1}$$

Пусть  $\mathcal{J} = \text{diag}(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$  Тогда  $\mathcal{J}^k = \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$$A^k = T \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k) T^{-1}$$

$$f(A) = T \text{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)), \dots, f(\mathcal{J}(\lambda_n))) T^{-1}$$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r \times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } J_r^k &= (\lambda E_{r \times r} + I_r)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + \\ & C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ // \text{todo 23.03 10:27} \end{aligned}$$

## 2 Черная магия

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } (\ln |y|)' &= \frac{y'}{y} \\ y' &= y(\ln |y|)' \text{ (удобно)} \end{aligned}$$

## 3 Тензоры

### 3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

$V$  – линейное пространство над  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

Линейная функция  $f : V \rightarrow K$  называется *линейной формой* (линейным функционалом)

Т.е.  $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$

### Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор

2.  $A_{n \times n}, f : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$   
 $f(A) = \text{tr } A$

3.  $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$

Пусть  $f^j = P_n \rightarrow \mathbb{R}, f^j(p) = \frac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$

Тогда  $f^0, f^1, \dots$  – линейная форма

4.  $f : \underbrace{C}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\delta(f) := f(0)$  –  $\delta$ -функция Дирака

$\delta(f)$  – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$

$V^* = \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ – линейная форма}\}$

$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$

$\forall f \in V^* \quad -f \in V^*$

Тогда  $V^*$  – линейное пространство над полем  $K$

$V^*$  – сопряженное (дуальное) к  $V$

Вспоминаем правило Эйнштейна

Выражение  $\alpha^i \beta_i := \sum_i \alpha_i \beta_i$

иначе:  $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$

$\forall x \in V \quad f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$

$a := f(e_i)$  называется коэффициентами линейной формы  $f$

Тогда  $f(x) = x^i a_i - f$  полностью описывается значениями на базисных элементах

Тогда  $f \leftrightarrow a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  – зависит от выбора базиса

Сопоставление – изоморфизм

### Факт

*Естественный изоморфизм* – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай

$V^* \cong K_n(K^n)$  – пространство  $n$ -мерных строк

**Определение**

$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$

$\forall x \in V \omega^i(x) = x_i$  – координатные функции

(очевидно, что  $\omega^i \in V^*, \omega^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$ )

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = + (i == j) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

**Доказательство**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – линейно независимые

$\alpha_i \omega^i = 0$

$\alpha_i \in K$

$j = 1 \dots n \alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow$  линейно независимые

$\dim V^* = n \Rightarrow$  базис

**Следствие**

$a_i$  – координаты  $f$  в базисе  $\omega^1 \dots \omega^n$

**Доказательство**

$$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$$

**Определение**

$\omega = (\omega^1 \dots \omega^n)$  называется *сопряженным (дуальным)* базисом к базису  $e$  пространства  $V$

Вопрос: есть другой базис в  $V^*$ . Будет ли он сопряженным к некоторому базису  $V$

**Теорема**

$\omega'^1, \dots, \omega'^n$  – базис  $V^*$

Тогда  $\exists e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$  такой, что  $\omega'$  сопряжен с  $e'$

**Доказательство**

Пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$

Базис  $V \omega^1, \dots, \omega^n$  сопряжен с  $e$

$\omega'^1, \dots, \omega'^n$  – базис  $V^* \Rightarrow (\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = \underbrace{T_{\omega \rightarrow \omega'}^T}_{=: S_{\omega \rightarrow \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис  $e'$

$$T_{e \rightarrow e'} = S^{-1} = T$$

$$(e'_1 \dots e'_n) := (e_1 \dots e_n) T - \text{тоже базис по определению}$$

Покажем, что  $\omega'$  сопряжен к  $e'$ , т.е.  $\omega'^i$  – координатные функции по отношению к  $e'$

$$\text{Пусть } s_j^i = s_{ij}, t_j^i = t_{ij}$$

$$\forall x \in V \quad \omega'^i(x) = s_k^i \omega^k(x) = s_k^i x^k = \underbrace{s_k^i t_j^k}_{(ST)_{j= \delta_j^i}^i} x'^j = x'^i$$

Отсюда  $\omega'^i$  – координатная функция  $\Rightarrow$  базис сопряженный

### Замечание

Вообще говоря, базис  $e'$  существует и единственный (очевидно из доказательства)

### Следствие

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$$

$$\text{Тогда } a' = aT$$

$$T = S^{-1} = T_{e \rightarrow e'}$$

$$x' = Sx$$

### Доказательство

$$X' = SX \text{ очевидно } (X = TX' = S^{-1}X')$$

$$(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$a^T = T_{\omega \rightarrow \omega'}(a')^T \quad a = a' T_{\omega \rightarrow \omega'}^T = a' S \Leftrightarrow a' = a S^{-1} a T$$

### Определение

Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону (т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным (согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*

Элементы  $V^*$  – это ковекторы (линейная форма  $\equiv$  ковектор)

В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, противоположному (т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контрвариантным* или про-

сто вектором

Элементы  $V$  – контрвариантные векторы

Принято писать индекс координаты контрвектора сверху, а ковариантного – снизу

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = x^i a'_i = s_k^i x^k a_m t_i^m = \underbrace{t_i^m s_k^i}_{\delta_k^m} x^k a_m = x^k a_k$$

Т.о. форма записи  $f$  – инвариант относительно замены базиса

### Определение

$$V^{**} = (V^*)^*$$

$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$  – можем построить изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$

### Теорема 3 (естественный изоморфизм $V$ и $V^{**}$ )

Вместо обозначения " $x$ " буду использовать  $\langle x \rangle$

$$\forall x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$$

$$\forall f \in V^* \quad \langle x \rangle (f) = f(x)$$

Отсюда  $x \leftrightarrow \langle x \rangle$

$$V \cong V^{**}$$

### Доказательство

$$\forall f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K \quad \langle x \rangle (f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = \langle x \rangle (f_1) + \lambda \langle x \rangle (f_2)$$

Отсюда  $\langle x \rangle \in (V^*)^*$

Покажем, что  $V$  линейно вложено в  $V^{**}$ , т.е.  $x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$

//todo 12:00 23.03

Покажем, что базис  $V$   $e_1, \dots, e_n$  перейдет в базис  $V^{**}$

$$e_j \rightarrow \langle e_j \rangle$$

$\forall f \in V^* \quad \langle e_j \rangle (f) = f(e_j) = a_j$  – координата  $f$  в базисе  $\omega^1, \dots, \omega_n$ , сопр. с  $e$

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – координатная функция в пространстве  $V^*$  относительно  $\omega^1, \dots, \omega_n$

Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – базис  $V^{**}$

Базис  $V$   $e_1, \dots, e_n \rightarrow$  базис  $V^{**}$   $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$

Т.о. отображение линейно, то изоморфизм

### Замечание

1. принято отождествлять элементы  $V$  и  $V^{**}$  с помощью изоморфиз-

ма, описанного в теореме 3

Поэтому  $\langle \rangle$  не пишут

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = a_i x^i = f(e_i) x^i = e_i(f) x^i = x(f)$$

$$a_i = f(e_i)$$

$$x^i = x(\omega^i)$$

$$2. \quad \omega^i(e_j) = \delta_j^i = e_j(\omega^i)$$

Как найти на практике?

$$e_1, \dots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} - \text{столбцы}$$

$$w^i(e_j) = \underbrace{(\dots)}_a \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_x = \delta_j^i$$

$$\text{Отсюда} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}}_{S=T^{-1}} \underbrace{(e_1 \dots e_n)}_T = E$$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса дуальны

$\omega$  сопряженный базис к  $e$

$e$  сопряженный базис к  $\omega$

(здесь подразумевается элементы  $V^{**}$ )

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$

$$\forall x \in V \quad \exists ! x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}, x_{\lambda} \in V_{\lambda}$$

$$\rho_{\lambda} : V \rightarrow V, \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}, \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} = \epsilon$$

$$\forall x \in V \quad \rho x := x_{\lambda}, \underbrace{\rho_{\lambda} \rho_{\mu}}_{\lambda \neq \mu} = 0$$

$v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$  = объединение базисов  $V_{\lambda}$

$$x = x^i v_i = \sum_{\lambda} \underbrace{\sum_{m_{\lambda}} x^{m_{\lambda}} v_{m_{\lambda}}}_{x_{\lambda}} = \omega^1, \dots, \omega^n - \text{сопряженный базис} =$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} \omega^{m_{\lambda}}(x) v_{m_{\lambda}} \\
& \omega^{m_{\lambda}} \leftrightarrow (a_i^{m_{\lambda}})_i - \text{строка} \\
& x \leftrightarrow X \\
& \omega^{m_{\lambda}}(x) = a^{m_{\lambda}} X \\
& v_{m_{\lambda}} \leftrightarrow (V_{m_{\lambda}, i})_i - \text{столбец} \\
& x = \sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \underbrace{\left( \sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} \right)}_{\rho_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m_{\lambda}} \underbrace{(a^{m_{\lambda}} x)}_{\omega^{m_{\lambda}}(x)} V_{m_{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

### 3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

#### Определение

$V, V^*$  – сопряженные линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K, p, q \geq 0$  – линейная по каждому аргументу

$f$  – тензор порядка  $(p, q)$  или  $p$  раз ковариантом,  $q$  раз контрвариантным

Множество таких функций обозначим  $T_{(p, q)}$

$p, q$  – валентности

$r = p + q$  – полная валентность/ранг тензора (не наш rg)

$f \in T_{p, 0}$  – ковариантный тензор валентности  $p$

$f \in T_{0, q}$  – контрвариантный тензор валентности  $q$

$r = 0$  – тензор нулевого ранга.  $f = \text{const} \in K$

#### Пример

$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_V$  – столбец

$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$  – строка

$f(x, a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1, 1)}$

$\mathbb{O}$  – нулевой тензор

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \nu^1, \dots, \nu^q \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = 0$

$\forall f \in T_{(p, q)} \quad f \in T_{(p, q)}$

$T_{(p, q)}$  – линейное пространство

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

$e, \omega$  – сопряженные

Для  $\xi \in V$   $\xi = \xi^i e_i$

Для  $\nu \in V^*$   $\nu = \nu_i \omega^i$

Тогда  $f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_q})$

$= \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$  – любой тензор определяется значениями на всевозможных наборах  $e_j, \omega^i$

$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$  – коэффициенты тензора  $f$  относительно базисов  $e, \omega$

$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

### Определение

$S$  – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ , где  $i_k, j_m \in (1, \dots, n)$  называется  $p + q$ -мерной матрицей порядка  $n$

### Пример

$n = 3$ , трехмерная матрица

1.  $S^{ijk}$

2.  $S_k^{ij}$

3.  $S_{jk}^i$

4.  $S_{ijk}$

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q})$  – изоморфизм

$$T_{(p,q)} \cong S_{(p+q)}$$

### Правило записи элементов тензора в многомерной записи

В  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы

Для двумерных матриц:

1. строка

2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка

2. столбец

3. слой

Запись:  $\left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$

Для четырехмерных матриц:

1. строка

2. столбец

3. слой

4. срез

Запись:  $\left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$

//todo 11:59 30.03

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i = \xi^{ij} e_j^i$$

$$\xi^i = t_j^i \xi'^j$$

$$\forall \eta \in V^* \quad \eta = \eta_i \omega^i = \eta'_j \omega'^j$$

$$\eta_i = s_i^j \eta'_j$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots$$

$$\dots \eta_{i_q}^q = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \xi_1^{u_1} \dots t_{u_p}^{j_p} \xi_p^{u_p} \cdot s_{i_1}^{r_1} \eta_{r_1}^1 \dots s_{i_q}^{r_q} \eta_{r_q}^q$$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

$$f(e'_{u_1}, \dots, e'_{u_p}, \omega'^{r_1}, \dots, \omega'^{r_q}) = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

Нижние индексы – ковариантные, т.к. при смене базиса соответствующая координата пересчитывается по ковариантному закону (т.е. через  $T$ )

Верхние индексы – контрвариантные

**Пример**

$\forall x \in V \cong V^{**}, x$  – линейное отображение

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \alpha, x \in T_{(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'^r &= \alpha^i s_i^r \\
\alpha' &= S\alpha \Rightarrow \alpha = T\alpha' \\
\forall f \in V^*, f &- \text{линейное отображение} \\
f \leftrightarrow a &= (a_1 \dots a_n), f \in T_{(0,1)} \\
a'_u &= a_j t_u^j \\
a' &= aT \Rightarrow a = a'S
\end{aligned}$$

## Определение 2

Геометрический объект на линейном пространстве  $V$  над полем  $K$ , описываемый  $p+q$ -мерной матрицей размерности  $n (= \dim V)$  с элементами из поля  $K$ , которая при смене пространства  $V$  пересчитывается по формуле  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q}$ , где  $(t_j^i) = T_{e \rightarrow e'}$ ,  $S = T^{-1}$ , называется тензором типа  $(p, q)$  или  $p$  раз ковариантным и  $q$  раз контрвариантным

Пусть  $\mathbb{O}$  – нулевая матрица,  $-\alpha$  – противоположная матрица, задано умножение на скаляр и сложение

Докажем, что  $+$  и  $\lambda \cdot$  сохраняют свойство тензоров

$$\begin{aligned}
\alpha, \beta &\in T_{(p,q)}, \forall \lambda \in K \\
(\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} &= \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} + \lambda\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \\
(\alpha + \lambda\beta)_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} &= (\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} + \lambda\beta'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} - \text{верно}
\end{aligned}$$

## 3.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свойства тензоров

### Определение

$$\begin{aligned}
\alpha &\in T_{(p_1, q_1)} \\
\beta &\in T_{(p_2, q_2)} \\
\gamma &= \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+q_1, p_2+q_2)} \\
\gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} &= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}}
\end{aligned}$$

### Доказательство корректности произведения

$$\begin{aligned}
\gamma_{u_1 \dots u_{p_1} v_1 \dots v_{p_2}}^{r_1 \dots r_{q_1} \sigma_1 \dots \sigma_{q_2}} &= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}} \\
&= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{r_{q_1}}^{r_{q_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}} t_{v_1}^{m_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{k_1}^{\sigma_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}} \\
&= \alpha_{u_1, \dots, u_{p_1}}^{r_1, \dots, r_{q_1}} \beta_{v_1, \dots, v_{p_2}}^{\sigma_1, \dots, \sigma_{q_2}}
\end{aligned}$$

### Замечание

$$1. \lambda \in K \leftrightarrow \lambda \in T_{(0,0)}$$

$$\forall \alpha \in T_{(p,q)} \quad \lambda \otimes \alpha = \lambda \alpha$$

2.  $\oplus$  ассоциативно, не коммутативно, дистрибутивно по сложению

$$\alpha \in T_{(p_1, q_1)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \rightarrow K - \text{полилинейная}$$

$$\beta \in T_{(p_2, q_2)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K - \text{полилинейная}$$

$$\text{Тогда } \gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2, q_1+q_2)} \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \otimes (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow R$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$$

$$t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

$$= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \theta_{k_1}^1 \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2}$$

$$= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \theta_{k_1}^1 \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2}$$

$$= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

$$\text{Отсюда } \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow t = fg$$

В частности:

$$\forall f^1, \dots, f^p \in V^*, g_1, \dots, g_q \in V \quad f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\eta_1) \dots f^p(\eta_p) g_1(\eta^n) \dots g_q(\eta^q)$$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

$$\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$$

**Теорема о базисе пространства тензоров**

Набор тензоров  $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$  по всем возможным  $i, j$  – базис  $T_{(p,q)}$

**Доказательство**

$$\omega^j \in T_{(1,0)}, e_i \in T_{(0,1)}$$

$$\{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\} - \text{набор из } n^{p+q}$$

Система порождающая:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$$

$$\forall f \in T_{(p,q)} \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q}_{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

$$\text{Отсюда } f = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\text{в будущем: координата}} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

Система линейно независимая

Рассмотрим  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

Применим к  $e_{u_1}, \dots, e_{u_p} \in V, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q} \in V^*$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}_{\delta_{u_1}^{j_1} \dots \delta_{u_p}^{j_p} \delta_{i_1}^{r_1} \dots \delta_{i_q}^{r_q}}(e_{u_1}, \dots, e_{u_p}, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q}) = 0$$

Отсюда  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = 0$

Тогда все  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  нули  $\Rightarrow$  линейно независимые

**Следствие**

$$\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}$$

**Замечание**

//todo 14:20 30.03

**Определение**

Пусть  $\alpha \in T(p, q), p, q \neq 0$

Тензор  $\beta \in T_{p-1, q-1}$  называется сверткой тензора  $\alpha$ , если

$$\beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} := \sum_{\kappa} \alpha_{j_1, \dots, \underbrace{\dots}_{\kappa\text{-ая позиция}}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \underbrace{\dots}_{\kappa\text{-ая позиция}}, \dots, i_q}, \text{ где } \hat{i}_k - \text{отсутствие } i_k$$

**Доказательство корректности определения**

$$\begin{aligned} \beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} &= \alpha_{u_1, \dots, \kappa, \dots, u_p}^{r_1, \dots, \kappa, \dots, r_q} = \alpha_{u_1, \dots, j_m, \dots, u_p}^{r_1, \dots, i_k, \dots, r_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_m} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_k}^{\kappa} \dots s_{i_q}^{r_q} \\ t_{\kappa}^{j_m} s_{i_k}^{\kappa} &= \delta_{i_k}^{j_m} \\ \beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} &= \underbrace{\alpha_{u_1, \dots, \omega, \dots, u_p}^{r_1, \dots, \omega, \dots, r_q}}_{\beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_m} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_k}^{\kappa} \dots s_{i_q}^{r_q} \end{aligned}$$

Свертка может быть по нескольким парам индексов

Если в результате свертки получится тензор  $(0,0)$ , т.е. число, то свертка *полная*

### 3.4 Транспонирование тензоров. Кососимметричные и симметричные тензоры

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \rightsquigarrow A^T = B = (\beta_{ij}), \beta_{ij} = \alpha_{ji}$$

Обобщим операцию транспонирования

Пусть  $\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\alpha_{j_1, \dots, *, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  – зафиксируем все, кроме  $*$ ,  $\delta$

Т.о. мы извлекли из матрицы тензора слой – двумерную матрицу

Получили матрицу  $\tilde{\alpha}_{*\delta}$

Протранспонируем ее

Т.о.  $\beta_{j_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

### Определение

$\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\beta = \sigma(\alpha)$  называется тензором, полученным транспонированием тензора

$\alpha$  по перестановке  $\sigma$ , если  $\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q}$

### Замечание

Любая перестановка  $\sigma$  – конечное число транспозиций 2-х элементов

Заметим, что не любая многомерная матрица – тензор

Проверим, что  $\beta$  – тензор

### Корректность

Достаточно проверить для  $\sigma$  – транспозиции двух элементов

Возьмем  $\beta_{m_1, \dots, \underbrace{*}_{r\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\delta}_{l\text{-ая}}, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$

$\beta_{m_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$  Т.к.  $\alpha$  – тензор:

$\alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_r, \dots, j_l, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\beta_{j_1, \dots, j_l, \dots, j_r, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}} t_{m_1}^{i_1} \dots t_{\delta}^{j_r} \dots t_{*}^{j_l} \dots t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_q}^{k_q}$

Теперь посмотрим на операцию транспонирования с точки зрения полилинейной функции

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$

$\beta = \sigma(\alpha)$

$\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$

$= \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q} \xi_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1}} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_{\sigma_p}} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$

### Замечание

1. Транспонирование тензора можно определить по аналогии по верхним индексам, если  $q \geq 2$
2. Тензоры можно транспонировать только по одному типу индексов: либо по верхним, либо по нижним, в отличие от произвольной многомерной матрицы
3. Мы будем работать только с нижними индексами, но все свойства и теоремы работают и для верхних индексов

### Свойства

1. Из определения очевидно, что  $\sigma$  – линейная операция

$$\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)$$

2.  $\alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \tilde{\alpha} \in T_{(p,q)}, f^i \in V^*, \tilde{\alpha} \in T_{(0,q)}$

$$\text{Тогда } \forall \sigma : \beta = \sigma(\alpha) \forall \xi_i \in V \forall \eta^j \in V^* \beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$= f^1(\xi_{\sigma_1}) \cdot \dots \cdot f^p(\xi_{\sigma_p}) \cdot \tilde{\alpha}(\eta^1, \dots, \eta^q) = f^{\sigma_1^{-1}}(\xi_1) \cdot \dots \cdot f^{\sigma_p^{-1}}(\xi_p) \alpha(\eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$\text{Отсюда } \beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \tilde{\alpha}$$

$\alpha$  – называется симметричным тензором, если  $\forall \sigma \sigma(\alpha) = \alpha$

$\alpha$  – кососимметричная (антисимметричная/альтернированная), если  $\forall \sigma \sigma(\alpha) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} \alpha$

Заметим, что симметричность  $\Leftrightarrow$  симметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

Заметим, что кососимметричность  $\Leftrightarrow$  кососимметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = -\alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

### Теорема

$\alpha$  кососимметричная  $\Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha(\dots, \mu, \dots, \mu, \dots, \nu^1, \dots) = 0 \Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha_{\dots, i, \dots, i, \dots} = 0$

### Доказательство

Смотри доказательство для полилинейной ассиметричной формы

### Примеры

1.  $f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) : V_3^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in T_{(3,0)}$$

$f$  – кососимметричный тензор

2.  $\beta \in T_{(3,0)}, n = 3, \beta$  – кососимметричная

Тогда тензор имеет следующий вид

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 \end{array} \right), b = \beta(e_1, e_2, e_3)$$

3.  $A = (\alpha_{ij}) \in T_{(2,0)}$ . Тогда симметричность и антисимметричность согласуется с свойствами матриц



$$4. (\alpha_{ijk}) \in T_{(3,0)}, n = 3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} c & a & d & a & x & b & d & b & y \\ a & x & b & x & e & z & b & z & g \\ d & b & y & b & z & g & y & g & f \end{array} \right)$$

### 3.5 Операция sim и alt для тензоров

#### Определение

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{sim } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$  – симметрирование для тензора  $\alpha$  по нижним индексам

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)$  – альтернирование для тензора  $\alpha$  по нижним индексам

#### Замечание

1. Т.к.  $\sigma$  – линейный оператор, то sim, alt – линейные
2. Для  $\alpha$  – симметричной  $\text{sim } \alpha = \alpha$  Для  $\alpha$  – кососимметричной  $\text{alt } \alpha = \alpha$
3. Операции sim, alt можно проводить не по всем индексам. Тогда набор индексов, по которым проводится операция, заключается в круглые(для симметрирования) или квадратные(для альтернирования) скобки Если какие-то индексы внутри скобок не участвуют, их выделяют вертикальными чертами
4. Очевидно, что можно определить аналогичные операции по верхним индексам
5. Пусть  $\gamma = \text{sim } \alpha$   
Тогда  $\forall \sigma \gamma_{i_1, \dots, i_p} = \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$   
Пусть  $\gamma = \text{alt } \alpha$   
Тогда  $\forall \sigma \gamma_{i_1, \dots, i_p} = (-1)^{\text{inv } \sigma} \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$

#### Теорема о перестановочности $\sigma$ и sim, alt

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \forall \sigma \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{sim}(\alpha)) = \text{sim } \alpha \quad \forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \forall \sigma \text{alt}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{alt}(\alpha)) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$

#### Доказательство

Доказать проще, чем затеять

**Следствие 1**

$\forall \alpha$   $\text{sim } \alpha$  – симметричный,  $\text{alt } \alpha$  – кососимметричный

**Доказательство**

$\forall \alpha$   $\sigma(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$  – симметричный

$\forall \alpha$   $\sigma(\text{alt } \alpha) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$  – кососимметричный

**Следствие 2**

$\alpha$  – симметричный  $\Leftrightarrow \alpha = \text{sim } \alpha$   $\alpha$  – кососимметричный  $\Leftrightarrow \alpha = \text{alt } \alpha$

**Следствие 3**

$\text{sim}(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$

$\text{alt}(\text{alt } \alpha) = \text{alt } \alpha$

$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = 0$

$\text{alt}(\text{sim } \alpha) = 0$

**Доказательство**

$$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = \text{sim}\left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \text{sim } \alpha \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma}}_{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} =$$

0

$\text{alt}(\text{sim}(\alpha))$  – аналогично

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}$  – симметрирование  $T$  по фиксированному набору

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}, T_{(p,q)}^{\text{кососим}}$  – линейные подпространства  $T_{(p,q)}$

Для перестановки  $(k, m)$  (транспозиция):

$$T_{(p,q)}^{\text{сим}} \oplus T_{(p,q)}^{\text{кососим}} = T_{(p,q)}$$

Свойства  $\text{sim}, \text{alt}$  сохраняются, если они производятся не по всем индексам

---

**3.6 р-формы. Внешнее произведение р-формы****Определение**

$f$  –  $p$ -форма, если  $f \in T_{(p,0)}, f$  – кососимметричный (или  $p == 1$ )

$f : V^p \rightarrow K$

$f \in V^*$  – 1-форма

$\underbrace{T_{(p,0)}^{\text{кососим}}}_{\text{линейное подпространство}} T_{(p,0)}$

$\Lambda^p V^*$  – пространство  $p$ -форм

**Определение**

$f - p_1$  – форма ( $f \in \Lambda^{p_1} V^*$ )  
 $g - p_2$  – форма ( $g \in \Lambda^{p_2} V^*$ )  
 $f \wedge g := \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{alt}(\underbrace{f \otimes g}_{\in T_{(p_1+p_2, 0)}}) \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$  – внешнее произведение

### Свойства

1.  $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$  В частности  $f, g \in \Lambda^1 V^*(V^*)$   
 $f \wedge g = -g \wedge f$   
 $f \wedge f = 0$

#### Доказательство

$$\begin{aligned}
 f \in \Lambda^{p_1} V^* &\leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}) \\
 g \in \Lambda^{p_2} V^* &\leftrightarrow \beta = (\beta_{j_2, \dots, j_{p_2}}) \\
 f \otimes g &\leftrightarrow \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}} = \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \\
 g \otimes f &\leftrightarrow \theta = \beta \otimes \alpha \leftrightarrow \theta_{m_1, \dots, m_{p_2}, j_1, \dots, j_{p_1}} = \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \\
 \text{alt } f \otimes g &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} \sigma(\gamma) \\
 \text{alt } g \otimes f &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\tau} \tau(\theta) \\
 // \text{todo 13.04 13:12}
 \end{aligned}$$

2.  $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$   
 $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$
3.  $(\lambda f) \wedge g = \lambda(f \wedge h) = f \wedge (\lambda g)$

$$4. \quad f \wedge \underbrace{\mathbb{0}}_{p_1\text{-форма}} = \mathbb{0} \wedge f = \underbrace{\mathbb{0}}_{(p_1+p_2)\text{-форма}}$$

5.  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

#### Доказательство

$$f \wedge g = \frac{1}{p_1! p_2!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g)$$

$$(f \wedge g) \wedge h = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{(p_1 + p_2)! p_1! p_2! p_3!} \text{alt} \left( \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right)$$

$$\text{Рассмотрим } \text{alt} \left( \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right) = \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt}(\underbrace{\sigma(f \otimes g) \otimes h}_{\tau(f \otimes g \otimes h)}) =$$

...

Возьмем  $\tau$  – перестановку такую, что первые  $p_1 + p_2$  индексов переставляются, а последние  $p_3$  индекса не меняются

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\text{inv } \sigma} = (-1)^{\text{inv } \tau} \\
& \dots = \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt}(f \otimes g \otimes h) = \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} 1 = \\
& (p_1 + p_2)! \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& (f \wedge g) \wedge h = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& \text{Аналогично } f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{alt}(f \otimes g \otimes h)
\end{aligned}$$

Пусть  $f^i \in V^* = \Lambda^1 V^*$  – 1-форма,  $j = 1 \dots p$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \frac{p!}{1! \dots 1!} \text{alt}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = p! \text{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = 2 \text{alt}(\omega^i \otimes \omega^j) = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = -\omega^j \wedge \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega_i = 0$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = -\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = 0$$

**Теорема (о базисе пространства внешних форм)**

$\{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} : j_1 < \dots < j_p\}$  – базис пространства  $\Lambda^p V^*$

**Доказательство**

$$\forall f \in \Lambda^p V^* \Leftrightarrow \begin{cases} f \in T_{p,0} \\ \text{alt } f = f \end{cases}$$

$$f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}$$

$$\text{alt } f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \text{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p})$$

$$= \frac{\alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1}}{p!} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} \omega^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge \omega^{j_{\sigma_p}}$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$= \underbrace{\sum_{j_1 < \dots < j_p} \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \right)}_{\beta_{j_1, \dots, j_p}} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} - \text{порождающая}$$

Существуют координаты р-формы  $f$  относительно базиса  $\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} m_{j_1 < \dots < j_p}$

Проверим линейную независимость

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \frac{\underbrace{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}_{\substack{\text{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}) \\ \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \omega^{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}}} \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sigma_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \omega^{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}} \end{aligned}$$

...

Т.к. базис  $T_{(p,0)}$ ,  $\forall \alpha_{j_1, \dots, j_p} = 0$

$\beta_{j_1, \dots, j_p} = 0$  Тогда линейно независимые

**Следствие 1**

$$\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Следствие 2**

$\forall f \in \Lambda^p V^*$

$$f = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}), j_1 < \dots < j_p$$

**Доказательство**

Из доказательства теоремы:

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} = \alpha_{[j_1, \dots, j_p]}, j_1 < \dots < j_p$$

$$f = \text{alt } f \Rightarrow \alpha_{[j_1, \dots, j_p]} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}, \text{ т.к. } j_1 < \dots < j_p$$

**Теорема**

$f^i \in \Lambda^1 V^*, j = 1 \dots p-1$ -формы

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix}$$

$f^j \leftrightarrow a^j = (a_1^j \dots a_p^j)$  – координатные строки в  $V^*$  относительно  $\omega^i$

$\xi_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix}$  – координаты в  $V$  относительно  $e_j$

$$f^j(\xi_i) = a_k^j \xi_i^k = a^j \xi_i$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \dots \xi_p)$$

**Замечание**

Если  $p = n$ :  $f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det A \det \xi$

### Доказательство

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = p! \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f^1 \otimes \dots \otimes f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1}(\xi_1) \dots f^{\sigma_p}(\xi_p) =$$

$$\det(f^i(\xi_j))$$

### Следствие 1

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \omega^{j_1}, \dots, \omega^{j_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

### Следствие 2

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}}_{\beta_{j_1, \dots, j_p} \text{ для } f^1 \wedge \dots \wedge f^p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

### Доказательство

$$\beta_{j_1 < \dots < j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = (f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{vmatrix} f^1(e_{j_1}) & \dots & f^1(e_{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(e_{j_1}) & \dots & f^p(e_{j_p}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}, \text{ т.к. } a_j^i = f^i(e_j) \text{ по определению коэффициентов формы } f$$

В частности, при  $p = n$ :  $f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$

### Следствие 3

$$\det \left( \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \quad \dots \quad \xi_p) \right) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

В частности, при  $p = n$ :  $\det(A\xi) = \det A \det \xi$

### Определение

Пусть  $g \in T_{0,q}$ ,  $\text{alt } g = g$ :

$g$  называется *поливектор* ( $q$ -вектор)

Если  $q \in T_{(0,1)}$  —  $g$  — 1-вектор

Линейное пространство  $q$ -векторов  $\mathcal{V}^q V$

Аналог внешнего произведения:  $g_1 \in \mathcal{V}^{q_1}V, g_2 \in \mathcal{V}^{q_2}V, g_1 \vee g_2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1!p_2!} \text{alt}(g_1 \otimes$

$g_2)$  – по верхним индексам

$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}, i_1 < \dots < i_q\}$  – базис  $\mathcal{V}^qV$

Пусть  $p = q$

$\forall f^1, \dots, f^p \in V^*$

$V \cong V^{**} \forall \xi \in V \xi(f) = f(\xi)$

$\xi \in \mathcal{V}^1V$

$$\xi_1 \vee \dots \vee \xi_p(f^1, \dots, f^p) = \begin{vmatrix} \xi_1(f^1) & \dots & \xi_p(f^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(f^p) & \dots & \xi_p(f^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} =$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

### 3.7 Евклидовы и унитарные пространства

#### 3.7.1 Скалярное и псевдоскалярное произведение. Евклидово и унитарное пространство. Норма в евклидовом и унитарном пространстве

##### Определение

Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (вещественное линейное пространство)

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется скалярным произведением, если

$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $(x, y) = (y, x)$  – симметричность
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  – аддитивность по первому аргументу
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  – однородность по 1 аргументу
4.  $(x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

##### Следствие

Линейность по второму аргументу

$(V, (\cdot, \cdot))$  – вещественное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением – Евклидово пространство

##### Определение

Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{C}$

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется псевдоскалярным произведением, если  
 $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  – аддитивность по первому аргументу
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  – однородность по 1 аргументу
4.  $(x, x) = \overline{(x, x)} \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$   
 $(x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

### Следствие

$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$  – аддитивность по второму аргументу  
 $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$

Вместе: полутороллинейность

$(\mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$  – унитарное пространство (псевдоевклидово)

### Замечание

Иногда будем называть псевдоскалярное пространство скалярным (читай контекст)

### Примеры

1.  $V_3, (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$
2.  $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$   
 $(x, y) := \sum x_i y_i$
3.  $\mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}$   
 $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$

### Определение

Норма  $\|\cdot\| : V \rightarrow K, V - V$  – линейное пространство над полем  $K$

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  – невырожденность
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  – однородность



$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

### Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово/унитарное пространство

$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  – евклидова норма

Докажем аксиомы

1. Очевидно

$$2. \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda \bar{\lambda})(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$$

3. К.Б.Ш.

$|(x, x)| \leq \|x\| \|y\|$ , причем  $|(x, x)| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x, y$  линейно зависимых

### Доказательство

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha} (x, x) + \alpha \bar{\beta} (x, y) + \bar{\alpha} \beta (y, x) + \beta \bar{\beta} (y, y) = \dots$$

Пусть  $\alpha := (y, y) \in \mathbb{R}$

$\beta := -(x, y) \in \mathbb{C}$

$$\dots = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 - \underbrace{(x, y)(x, y)}_{|(x, y)|^2} - (x, y)(y, x) + |(x, y)|^2) = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 -$$

$$(x, y)^2) \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Отсюда  $\|x\| \|y\| \geq (x, y)$

Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то неравенство 0

Если  $x, y \neq 0$ ,  $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$

$$\alpha, \beta \neq 0 \text{ Тогда } 0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{(\|y\|^2 \|x\|^2 - |(x, y)|^2)}_0 = 0$$

Тогда  $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \|\alpha x + \beta y\| = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \Leftrightarrow x, y$  линейно зависимые

Пусть  $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \alpha x + \beta y = 0$

$$\begin{cases} \underbrace{\alpha(x, x)}_{\neq 0} + \beta(y, x) = 0 \Rightarrow \alpha \|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \underbrace{\beta(y, y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \beta \|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \alpha \beta \|x\|^2 \|y\|^2 = \alpha \beta (y, x)(x, y) = |(x, y)|^2$$

### Доказательство выполнения аксиомы

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 +$$

$$\begin{aligned} \|y\|^2 + 2 \underbrace{\Re((x, y))}_{\leq |(x, y)|} &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \\ &(\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

### Определение

$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot))$

$\|x\|$  – длина вектора

$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$  – косинус угла между векторами

$|\cos \angle(x, y)| \leq 1$  – по КБШ

### 3.7.2 Процесс ортогональный Грама-Шмидта. О.Н.Б. (орто-нормированный базис). Ортогональное дополнение

#### Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово/унитарное

$\forall x, y \in V$  называются ортогональными, если  $(x, y) = 0$

$\mathbb{O}$  ортогонален всем векторам

#### Определение

Система векторов  $v_1, \dots, v_m$  называется ортогональной, если вектора попарно ортогональны

Система векторов называется ортонормированными, если вектора попарно ортогональны и нормированы ( $\|v_i\| = 1$ )

#### Утверждение

Ненулевые  $v_1, \dots, v_m$  ортогональны  $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$  система линейно независимая

#### Доказательство

Пусть  $\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k = \mathbb{O}$

$$v_j \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \mathbb{O}$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \underbrace{v_j v_k}_{\mathbb{O} \text{ при } k \neq j} = \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\neq 0}$$

Тогда  $\forall i \alpha_i = 0$

Отсюда вектора линейно независимые

### Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)

Любую систему векторов  $a_1, \dots, a_m$  можно заменить на систему ортогональных векторов  $b_1, \dots, b_k$  таким образом, что  $\text{span}(a_1, \dots, a_m) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$ , причем  $k \leq m$ ,  $k = m \Leftrightarrow$  система линейно независимая

#### Доказательство

1. Пусть  $a_1, \dots, a_m$  линейно независимые. Построим  $b$  индукционно:

(а) Возьмем  $a_1, a_2$

$$b_1 := a_1$$

$$b_2 := a_2 - c_1 a_1$$

$$c_1 : (b_2, b_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = (a_2, b_1) - c_1(a_1, a_1) \Leftrightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(a_1, a_1)}$$

$\text{span}(a_1, a_2) = \text{span}(b_1, b_2)$ , т.к.  $b_2$  линейно независим с  $a_1, a_2$

(б)  $a_1, \dots, a_k \rightarrow b_1, \dots, b_k$  — ортогональные

$$\underbrace{\text{span}(a_1, \dots, a_k)}_{\text{линейно независимый}} = \underbrace{\text{span}(b_1, \dots, b_k)}_{\text{попарно орт.}} \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

(с) Покажем для  $k+1$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k c_i b_i$$

$$c_i \text{ такой, чтобы } \forall i = 1 \dots k \ (b_{k+1}, b_i) = 0 \quad c_i := \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$b_{k+1} \in \text{span}(a_1, \dots, a_{k+1})$$

$$b_{k+1} \perp b_j, j = 1 \dots k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$b_{k+1} \text{ линейно независимый с } (a_1, \dots, a_k)$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \text{span}(b_1, \dots, b_{k+1})$$

2. Если  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависимые, предварительно выполним прополку  $a$

Если без прополки, то некоторые  $b_i$  будут  $\mathbb{0}$

#### Следствие 1

В  $(V, (\cdot, \cdot))$  всегда существует о.н.б.

#### Доказательство

Применим Грама-Шмидта и нормируем

#### Следствие 2

В  $(V, (\cdot, \cdot))$  любую ортогональную систему можно дополнить до ортонормированного базиса

### Определение

$L \subset V$  – линейное подпространство

$L^\perp = \{y \in V : (x, y) = 0 \forall x \in L\}$  – ортогональное дополнение

### Свойства

1.  $L^\perp$  – линейное подпространство

#### Доказательство

$\forall y_1, y_2 \in L^\perp, \lambda \in K, x \in L \quad (x, \lambda y_1 + y_2) = \underbrace{\bar{\lambda}(x, y_1)}_0 + \underbrace{(x, y_2)}_0$  Отсюда

$\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$  – линейное подпространство

2.  $V = L \oplus L^\perp$

#### Доказательство

Докажем, что  $L, L^\perp$  – дизъюнктные

$y \in L \cap L^\perp \Rightarrow (y, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$  – дизъюнктные

Пусть  $L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$

Дополним  $a_1, \dots, a_k$  векторами  $a_{k+1}, \dots, a_n$  до базиса  $V$

Тогда  $V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

$\forall a_{k+j} \quad (a_i, a_{k+j}) = 0$

Тогда  $(a_i, \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j a_{k+j}) = 0$

Тогда  $(\sum_{i=1}^k \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j}) = 0$

Отсюда  $\text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n) \subset L^\perp$

$V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n), L, L^\perp$  – дизъюнктные

Тогда  $L^\perp = \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

Тогда  $V = L \oplus L^\perp$

3.  $(L^\perp)^\perp = L$

#### Доказательство

$L \oplus L^\perp = V = L \perp \oplus (L^\perp)^\perp$

$\forall x \in L, y \in L^\perp \quad (x, y) = 0 \Rightarrow x \in (L^\perp)^\perp \Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$

Тогда  $L = L^\perp$

4.  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$   
 $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

### Доказательство

Докажем 1

Пусть  $y \in (L_1 + L_2)^\perp$

Тогда  $\forall \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2} \in L_1 + L_2 \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$

(a)  $x_2 = 0$

$\forall x_1 \in L_1 \quad (x_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L^\perp$

$(x_2, y) = 0$

Тогда  $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Отсюда  $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp$  Обратно:  $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

$\forall x_1 \quad (x_1, y) = 0$

$\forall x_2 \quad (x_2, y) = 0$

Отсюда  $(x_1 + x_2, y) = 0 \Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp$

$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp$

(b) Из предыдущего пункта

$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$

$L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$

5.  $0^\perp = V, V^\perp = 0$

## 3.8 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы

$(V, (\cdot, \cdot))$

$e_1, \dots, e_n$  – базис

$$\forall x, y \in V \quad x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$$

Пусть  $g_{ij} = (e_i, e_j)$

$\Gamma = (g_{ij})$  – матрица грамма базиса  $e_1, \dots, e_n$

$(x, y) = x^\perp \Gamma \bar{y}$  – координатная форма записи скалярного произведения

В частности, если  $e$  – о.н.б., то  $g_{ij} = \sigma_{ij}$

$$\Gamma = E$$

$$(x, y) = x^\perp \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$(x, x) = x^\perp \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

### Замечание

Если  $V$  евклидово пространство, то, очевидно, все комплексные сопряжения можно убрать

### Определение

$$A_{n \times n}$$

$A^*$  называется сопряженной к  $A$ , если  $A^* = \overline{A^T}$

$*$  – операция сопряжения

$$(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda} B^*$$

### Определение

Матрица  $A_{n \times n}$  – самосопряженная, если  $A^* = A$

Если  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , то самосопряженная = симметричная

Если  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ , то самосопряженная = эрмитова

Очевидно, что  $\Gamma^* = \Gamma$ , т.е. самосопряженная

### Определение

$$a_1, \dots, a_k \in V$$

$G(a_1, \dots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$  – матрица Грама для системы векторов

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$G = G^*$$

### Теорема об определителе матрица Грама

$$g(a_1, \dots, a_k) := \det G(a_1, \dots, a_k)$$

Применим к векторам алгоритм Грама-Шмидта

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{Тогда } g(a_1, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

### Доказательство

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

на  $b_1$

Заменим в матрица все  $a_1$

2 строка  $\leftarrow$  1 строка  $\cdot c_1$

Тогда  $\forall j = 2 \dots k$   $(a_2, a_j) - c_1(b_1, a_j) = (a_2 - c_1 b_1, a_j) = (b_2, a_j)$   
 $(a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) = (b_2, b_1) = 0$

2 столбец  $\leftarrow$  1 столбец  $\cdot c_1$

$\forall j = 3 \dots k$   $(a_j, a_2) - c_1(a_j b_1) = (a_j, a_2 - c_1 b_1) = (a_j, b_2)$   
 $(b_1, a_2) - c_1(b_1, a_1) = (b_1, b_2) = 0$

Тогда после этих двух шагов в матрице не осталось  $a_2$

Применим аналогичные действия, зная, что  $b_i = a_i - c_1 b_1 - \dots - c_{i-1} b_{i-1}$

Таким образом мы получим матрицу, где вместо  $a_i$  будут  $b_i$

По построению определитель не поменялся

Тогда  $g(a_1, \dots, a_k) = g(b_1, \dots, b_k) = \det \text{diag}(\|b_1\|^2, \dots, \|b_k\|^2) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$

### Следствие 1

$a_1, \dots, a_k$  — линейно независимые  $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0$

### Доказательство

Если  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимые  $\xleftrightarrow{\text{Г.Ш.}} b_1, \dots, b_k$  — линейно независимые

$\Leftrightarrow \|b_i\|^2 > 0$

### Следствие 2

$a_1, \dots, a_{k-1}$  — линейно независимые

$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

### Свойства матрицы Грама

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$ ,  $e$  — базис

1 + 2 — положительно определенная матрица ( $\Gamma > 0$ )

$$1. \Gamma = \Gamma^*$$

$$2. \forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x > 0$$

$$3. \forall \delta k = g(e_1, \dots, e_k) \quad \delta k > 0$$

$\delta k$  — угловой минор

В частности, при  $k = n$   $\delta k = g > 0$ , т.е.  $\Gamma$  невырожденная

### Доказательство

$e_1, \dots, e_k$  — линейно независимые  $\Leftrightarrow g(e_1, \dots, e_k) > 0$

$$4. e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n \text{ — базисы } V$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$\Gamma' = G(e'_1, \dots, e'_n)$$

$$\text{Тогда } \Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$$

**Доказательство**

$$(x, y) = x^T \Gamma' \bar{y}' = x^T \Gamma \bar{y}$$

$$\Gamma' = (g'_{ij})$$

$$g'_{ij} = (e'_1, \dots, e'_j) = T_i^T \Gamma \bar{T}_j \Leftrightarrow \Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$$

В частности, если  $e, e' - \text{o.n.b. } V$

$$\Gamma' = E = \Gamma$$

$$T^T \bar{T} = E \Leftrightarrow \bar{T}^T T = E \Leftrightarrow T^* T = E \Leftrightarrow T^{-1} = T^*$$

**Определение**

Невырожденная матрица  $Q$  вещественная/комплексная называется ортогональной/унитарной, если  $Q^* = Q^{-1}$

**Свойства унитарной/ортогональной матрицы**

1.  $Q$  – унитарна/ортогональна  $\Leftrightarrow$  строки(столбцы) попарно ортогональны в стандартном скалярном произведении пространств  $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

**Доказательство**

$$Q \text{ унитарна/ортогональна} \Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E$$

$$\text{Пусть } Q = (Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n)$$

$$Q^* Q = \overline{Q^T} Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix} \cdot (Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n) = ((Q_i, Q_j)) = E$$

2.  $Q$  унитарна/ортогональна  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  унитарна ортогональна  
 $\bar{A} \cdot (\bar{A})^{-1} A A^{-1} = \bar{E} = E \quad (Q^{-1})^* = (\overline{Q^{-1}})^T = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q$   
 Тогда  $Q = (Q^{-1})^{-1} = Q^{-1*}$

3.  $Q$  унитарна/ортогональна  $\Rightarrow |\det Q| = 1$   
 В частности, если  $Q$  ортогональная, то  $\det Q = \pm 1$

**Доказательство**

$$Q^* Q = E$$

$$\det Q^* \det Q = 1$$

$$\det Q^* = \det(\overline{Q^*}) = \overline{\det Q}$$

$$\det Q (\det Q) = |\det Q|^2 = 1$$



4.  $Q, R$  унитарная/ортогональная  $\Rightarrow QR$  унитарная/ортогональная

**Доказательство**

$$(QR)^* = \overline{(QR)^T} = \overline{R^T Q^T} = \overline{R^T} \overline{Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

5.  $e, e' - \text{о.н.б. } V, T = T_{e \rightarrow e'}$

Тогда  $T$  унитарна/ортогональна (см. свойство матрицы  $\Gamma$ )

### 3.9 Теорема Пифагора. Задача о наилучшем приближении и перпендикуляре. Расстояние от точки до линейного подпространства и многообразия. Объем $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном пространстве

**Теорема Пифагора**

$$\forall y, z \in V : (y, z) = 0$$

$$\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

**Доказательство**

$$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \underbrace{(z, y)}_0 + \underbrace{(y, z)}_0 + \|z\|^2$$

2

**Следствие**

$x_1, \dots, x_k$  попарно ортогональны

$$\|x_1 + \dots + x^k\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$$

Пусть  $L \subset V$  – линейное подпространство

$$V = L \oplus L^\perp$$

$$\forall x \in V \exists! x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$$

$$(y, z) = 0$$

$y$  – ортогональная проекция  $x$  на  $L$

$z$  – ортогональной составляющей  $x$  относительно  $L$  или перпендикуляром, опущенном из  $x$  на линейное подпространство  $L$

**Теорема о наилучшем приближении**

$L \subset V$  – линейное подпространство

$$\forall x \in V \exists! y \in L, z \in L^\perp : x = y + z$$

$$\forall l \neq y \in L \|x - y\| \leq \|x - l\|$$

Т.е.  $y$  является наилучшим приближением к  $x$  из элементов простран-

ства  $L$

(Любая наклонная длиннее перпендикуляра)

**Доказательство**

$\forall l \neq y \in L$

$$\|x - l\|^2 = \|y + z - l\|^2 = \|y - l\|^2 + \|z\|^2 > \|z\|^2 = \|x - y\|^2$$

Как найти перпендикуляр?

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a$  – базис

$x = y + z$ ,  $y \in L$ ,  $z \in L^\perp$

Пусть  $y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$

$$x = \sum_{i=1}^k c_i a_i + z$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_0$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j)$$

$$G^T(a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix} - \text{СЛНУ относительно } c_i$$

$a_1, \dots, a_k$  – линейно независимые  $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0 \Leftrightarrow G(a_1, \dots, a_k)$  –

невырожденная  $\Leftrightarrow \exists!$  решение  $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$  – определен однозначно

**Определение**

$$\text{dist}(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\| = \|x - y\| = \|z\|$$

**Теорема о расстоянии до линейного подпространства**

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a$  – базис

$$\text{dist}^2(x, L) = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

**Доказательство**

$$\text{dist}^2(x, L) = \|z\|^2$$

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$z = x - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i a_i}_z = x - \sum_i \tilde{c}_i b_i$$

$$(z, y) = 0$$

$$a_1, \dots, a_k, x = b_1, \dots, b_k, z =: b_{k+1}$$

$$\|b_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

### Определение

$P = x_0 + L$  – линейное многообразие

$$\text{dist}(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \underbrace{=} \min_{\substack{u = x_0 + l, l \in L}} \|x - x_0 - l\| = \text{dist}(x - x_0, L)$$

Пусть  $P_1, P_2 : P_i = x_i + L_i, L_i \subset V, x_i \in V$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \min_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_1 - u_2\| = \min_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_1 - x_2 - (l_1 + l_2)\| =$$

$$\text{dist}(x_1 - x_2, L_1 + L_2) = \frac{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2)}}{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}} = \frac{V(\Pi(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2))}{V(\Pi(a_1, \dots, a_k))}$$

### Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово

$a_1, \dots, a_k$  – линейно независимые

$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]\} - k\text{-мерный параллелепипед}$$

пед

(считаем, что все  $a_1, \dots, a_k$  приложены к какой-то одной точке, к  $\mathbb{O}$ , натянутой на векторы  $a_1, \dots, a_k$ )

### Определение

$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}$  – объем  $k$ -мерного параллелепипеда

$$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = V(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1})) \|h\|$$

$$\|h\| = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

$h \perp \text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$  из алгоритма Г.Ш.

$h$  – перпендикуляр, опущенный из  $a_k$  на подпространство  $\text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – о.н.б  $V$

$\Pi(a_1, \dots, a_k)$  – параллелепипед

$$a_j \xleftrightarrow{e} A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (A_1 \ \dots \ A_k) \quad V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)}$$

$$(a_i, a_j) = A_i^T A_j$$

$$\text{Тогда } G = A^T A$$

$$\text{Отсюда } V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \underbrace{A^T}_{k \times n} \underbrace{A}_{n \times k}}$$

$$\text{В частности, если } k = n, \text{ то } V(\Pi(a_1, \dots, a_n)) = |\det A|$$

Также можно задать ориентацию базиса: если определитель матрицы перехода из одного базиса в другой  $> 0$ , то базисы в одной ориентации.

Иначе в разных

Тогда  $\det A = +V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$ , если  $a_1, \dots, a_n$  и базис в одной ориентации

$$\text{Иначе } \det A = -V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$$

Пусть  $\mathcal{B} \in \text{End}(V)$  – невырожденный (изоморфизм)

$$x \in \Pi(a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]$$

$$\mathcal{B}x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{B}a_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i \in \Pi(b_1, \dots, b_k)$$

$$\mathcal{B}(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \Pi(b_1 := \mathcal{B}a_1, \dots, b_k := \mathcal{B}a_k)$$

$$V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = \sqrt{g(b_1, \dots, b_k)} = \sqrt{\det(BA)^T(BA)} = \sqrt{\det A^T B^T B A}$$

$$\text{Если } k = n, \text{ то } V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = |\det A| |\det B| = V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) |\det B|$$