

Линейная алгебра. Практика

Александр Сергеев

Пример

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{- Система линейных неоднородных уравнений.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_1a_{21} - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \end{cases}$$

Δ_i - определитель матрицы, где i -ый столбец заменен на столбец свободных членов.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

Определение

$\det A = \sum (-1)^{inv(\sigma)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}$, где $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, где $inv(S)$ - количество пар $(a, b) : a, b \in S, a > b$

Теорема Крамера

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists!$ решение $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где

Δ_i - определитель матрицы, где i -ый столбец заменен на столбец свободных членов.

Свойства:

1. $|A| = |A^T|$
2. Все свойства строк выполняются для столбцов
3. $|\dots, A_i + B_i, \dots| = |\dots, A_i, \dots| + |\dots, B_i, \dots|$, где A_i, B_i - столбцы
- свойство аддитивности по столбцам
4. $|\dots, k \cdot A_i, \dots| = k \cdot |\dots, A_i, \dots|$
5. Если в матрице есть нулевой столбец, то определитель = 0
6. $|\dots, A_i, \dots, A_j, \dots| = -|\dots, A_j, \dots, A_i, \dots|$
7. Отсюда $|\dots, S, \dots, S, \dots| = 0$
8. $|\dots, A_i, \dots, A_j, \dots| = |\dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots|$ - линейное преобразование
9.
$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij},$$
 где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - дополнение,
 M_{ij} - минор (матрица, полученная вычеркиванием i строки и j столбца).

Теорема

Пучок плоскостей, проходящих через $\alpha_1 \cap \alpha_2$ задается уравнением $a(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + b(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

Пересечение линейных пространств

Пусть $L_1, L_2 \subset V$ - линейные подпространства линейного пространства
 $L_1 = \text{span}(a_1, \dots, a_k), a_1, \dots, a_k$ - базис $L_2 = \text{span}(b_1, \dots, b_m), b_1, \dots, b_m$ - базис

Рассмотрим $u \in L_1 \cap L_2$

$$u = \sum_{i=1}^k x_i a_i = \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\sum_{i=1}^k x_i a_i - \sum_{i=1}^m y_i b_i = 0 - \text{СЛОУ}$$

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k \ -b_1 \ \dots \ -b_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = 0$$

Решая систему в общем виде, можем найти все вектора пересечения
Отсюда можно найти базис