

Дифференциальные уравнения. Теория

Александр Сергеев

1 Уравнения первого порядка

1.1 Дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

Определение

$F(x, y, y') = 0$ – обыкновенное д/у первого порядка
(F – функция от трех параметров)

Определение

ϕ – решение д/у на $\langle a, b \rangle$, если $\phi \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$ на $\langle a, b \rangle$
(п. 1 необязательный, но нам будет удобнее работать только с такими функциями)

Определение

Интегральная кривая уравнения – график его решения

Определение

Общее решение – множество всех его решений

Определение

Общий интеграл уравнения – уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения при некоторых значениях C

Первый метод решения – подбор

Второй метод решения – интегрирование (для уравнений вида $y' = Cx$)

1.2 Уравнения в нормальной форме

Определение

$y' = f(x, y)$ – уравнение, выраженное относительно производной/уравнение в нормальной форме/нормальное уравнение

Определение

Область определения нормального уравнения – область определения f (множество точек, через которые могут проходить интегральные кривые)

Определение

Ломаная Эйлера – ломаная с вершинами $\{(x_k, y_k)\}$, где $x_{k+1} = x_k + h$, $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$

Третий метод решения (метод Эйлера) – построение ломаной Эйлера. Метод приближенный

1.3 Уравнение в дифференциалах

Определение

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ – уравнение в дифференциалах

Определение

Решением $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах на $\langle a, b \rangle$, если $\phi \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b \rangle$

Также решениями будут функции $x = \psi(y)$ (аналогично)

Определение

Область определения уравнения в дифференциалах $= D_P \cap D_Q$

Определение

$P(x) dx + Q(y) dy = 0$ – уравнение с разделенными переменными

Замечание

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = 0$$

Определение

Вектор-функция $(\phi, \psi) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ – параметрическое решение у.д., если $\phi, \psi \in C^1 \langle \alpha, \beta \rangle$, $(\phi', \psi') \neq (0, 0)$ (кривая гладкая)

и $P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$

Определение

Интегральная кривая уравнения в дифференциалах – годограф ее параметрического решения

Определение

$\gamma = \{r(t) | t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$ – годограф функции $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$

Утверждение

Если $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах, то $(t, \phi(t))$ – параметрическое решение

Если $(\phi(t), \psi(t))$ – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$, то $\forall t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle \exists U(t_0) :$

годограф функции (ϕ, ψ) – график некоторого решения $y = g(x)$ или $x = h(y)$

Геометрический смысл

Пусть (ϕ, ψ) – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда $P(\phi(t_0), \psi(t_0))\phi'(t_0) + Q(\phi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = 0$ при $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\exists F = \begin{vmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{vmatrix}, r(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix}$$

$$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$$

$$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \perp r'(t_0)$$

$r'(t_0)$ – вектор касательной к интегральным кривым

Тогда F – поле перпендикуляров

Определение

Поле на плоскости – это отображение $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Определение

Дифференциальные уравнения называют эквивалентными/равносильными на множестве D , если на этом множестве они имеют одинаковое множество интегральных кривых

Утверждение

$$y' = f(x, y) \text{ равносильно } dy = f(x, y) dx$$

Замечание

Уравнение в дифференциалах равносильно $y'_x = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ в областях,

где $Q(x, y) \neq 0$

и $x'_y = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$ в областях, где $P(x, y) \neq 0$

Определение

Если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то (x_0, y_0) – особая точка уравнения в дифференциалах

1.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение

$P(x) dx + Q(y) dy = 0$ – Уравнение с разделенными переменными

Определение

Функция $y = \phi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ при $x \in E$, если $F(x, \phi(x)) \equiv 0$ при $x \in E$

Теорема (общее решение уравнения с разделенными переменными)

ными)

Пусть $P \in C\langle a, b \rangle, Q \in C\langle c, d \rangle$

$P^{(-1)}, Q^{(-1)}$ – некоторые первообразные P, Q

Тогда $y = \phi(x)$ – решение уравнения на $\langle \alpha, \beta \rangle \Leftrightarrow$

- $\phi \in C^1\langle \alpha, \beta \rangle$
- $\exists C \in \mathbb{R} : y = \phi(x)$ неявно задана уравнением $P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(y) = C$

Доказательство \Rightarrow

Пусть $y = \phi(x)$ – решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$

1 – по определению

Выберем $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle, y_0 = \phi(x_0)$

Заметим, что $\exists A : P^{(-1)}(x) = \int_{x_0}^x P(t) dt + A$

$\exists A_2 : Q^{(-1)}(y) = \int_{y_0}^y Q(t) dt + A_2$

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + A + \int_{y_0}^y Q(t) dt + A_2 \equiv C$$

Сделаем замену $t \rightarrow \phi(t)$ справа

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + A + \int_{x_0}^x Q(\phi(t))\phi'(t) dt + A_2 \equiv C$$

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + \int_{x_0}^x Q(\phi(t))\phi'(t) dt \equiv C - A - A_2$$

$$\int_{x_0}^x \underbrace{(P(t) + Q(\phi(t))\phi'(t))}_{0 \text{ по определению решения}} dt \equiv C - A - A_2$$

Отсюда $C := A + A_2$

Т.о. 2 доказано

Доказательство \Leftarrow

Проверим $P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(\phi(x)) \equiv C$$

Продифференцируем

$$P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$$

Определение

$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными

1.5 Задача Коши

Рассмотрим $y' = f(x, y)$

Определение

Задачей Коши (ЗК) для нормального уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$

Теорема Пиано (частный случай) – существование решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

Пусть $f \in C(G)$, G – область (открытое связное множество)

Возьмем $(x_0, y_0) \in G$

Тогда $\exists E = \langle a, b \rangle$, $x_0 \in E$, $\exists \phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ – решение для задачи Коши

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

Теорема Пикара о единственности решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка

$f, f'_y \in C(G)$, G – область, $(x_0, y_0) \in G$

Пусть ψ, ϕ – решения задачи Коши

Тогда $\phi = \psi$ на $D_\phi \cap D_\psi$

1.6 Линейное уравнение 1-ого порядка

Определение

$y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнение

$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнение

Теорема (общее решение линейного уравнения первого порядка)

$$E = \langle a, b \rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$$

Тогда $y = \frac{C + \int(q\mu)}{\mu}$, $C \in \mathbb{R}$, $D_y = E$ – общее решение ЛУ

Доказательство

Пусть S – множество всех решений ЛУ

$$F := \left\{ \phi : \underbrace{\tilde{E}}_{\text{промежуток}} \subset E \rightarrow \mathbb{R} \right\}, \phi = \frac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Докажем, что $F = S$

Возьмем $\phi \in S$

Тогда $\phi' \equiv p\phi + q$ на \tilde{E}

$$\phi'\mu = p\phi\mu + q\mu$$

$$\phi'\mu - p\phi\mu = q\mu$$

$$\phi' e^{-\int p} - p \phi e^{-\int p} = (\phi e^{-\int p})' = (\phi \mu)'$$

$$(\phi \mu)' = q \mu$$

$$\phi \mu = \int q \mu + C$$

$$\phi = \frac{\int (\phi \mu) + C}{\mu}$$

Отсюда $\phi \in F$

Возьмем $\phi \in F$

$$\phi = \frac{C + \int (\mu q)}{\mu} \text{ на } \tilde{E}$$

$$\phi \in C^1$$

Подставим в уравнение

$$\phi' = p\phi + q$$

$$\frac{\mu q + \mu'(C + \int (\mu q))}{\mu^2} = \frac{p(C + \int (\mu q))}{\mu^2} + q$$

$$\text{Л.ч.: } \frac{\mu q + \mu'(C + \int (\mu q))}{\mu^2} = \frac{\mu^2 q - (-\pi)\mu(C + \int (pq))}{\mu^2} = q + \frac{p}{\mu}(C + \int pq)$$

$$\text{П.ч.} = \text{Л.ч.}$$

Ч.Т.Д.

Следствие (общее решение ЛОУ)

$$p \in C^1(E), E = \langle a, b \rangle$$

$$\text{Тогда } y = C e^{\int p}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$$

Доказательство

$$q = 0$$

Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)

1. Для ЛУ $y' = p(x)y + q(x)$ запишем соответствующее ЛОУ

$$y_2' = p(x)y_2$$

$$y_2 = C e^{\int p}$$

2. Заменим C на $C(x)$ и подставим в исходное уравнение

$$y = C(x) e^{\int p}$$

$$p(x)(C(x) e^{\int p}) + q(x) = (C(x) e^{\int p})'$$

3. Находим $C(x)$ из полученного уравнения

4. Запишем общее решение $y = C(x) e^{\int p}$

Доказательство

В общем виде мы получим ту же формулу, что и в предыдущем методе

Определение

$P dx + Q dy = 0$ – однородное уравнение, если
 P, Q – однородные функции одинаковой степени

Определение

$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y) \Rightarrow P$ – однородная функция степени α

1.7 Уравнение в полных дифференциалах**Определение (УПД)**

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, если

$\exists u : u'_x = P, u'_y = Q$

$u' = (P, Q) = (u'_x, u'_y)$ – матрица Якоби – градиент

Его решение имеет вид $du = 0$

$du = u'_x dx + u'_y dy$

Определение

u – потенциал уравнения

Тогда $u = \text{const}$

Теорема (общее решение УПД)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, $P, Q \in C(G)$

$u' = (P, Q)$

Тогда функция $y = \phi(x), x \in E, E = \langle a, b \rangle$ – решение уравнения \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \phi \in C^1(E), \exists C \in \mathbb{R} : \phi$ – неявно задана уравнением $u(x, y) = C$ на E

Напоминание

$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x), g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow b \subset \mathbb{R}^m, f : B \rightarrow \mathbb{R}^k$

Доказательство \Rightarrow

По определению $\phi \in C^1(E)$

По определению решения: $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$

$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$

$(u(x, \phi(x)))' \equiv_E 0$

Значит $\exists C : u(x, \phi(x)) \equiv_E C$

Доказательство \Leftarrow

Имеем $\phi \in C^1(E)$

$u(x, \phi(x)) \equiv_E C$

$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$

$P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$

По определению ϕ – решение

Пример

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0$$

$$P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$$

$$u(x, y) = \int P + \int Q - \text{потенциал}$$

$$\text{Тогда } \int P(x) dx + \int Q(y) dy = C - \text{ неявно задает все решения}$$

Теорема (признак УПД (достаточное условие))

$$P, Q \in C^1(G), G - \text{область в } \mathbb{R}^2$$

$$P'_y = Q'_x$$

$$\text{Тогда } \exists u : (P, Q) = u' \text{ в области } G$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} + Q(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y}) + C,$$

$$\text{где } (x_0, y_0) \in G, C \in \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0), (x, y) - \text{концы кусочно-гладкой привой, лежащей в } G$$

Пояснение

$$P'_y = (u'_x)'_y$$

$$Q'_x = (u'_y)'_x$$

$$\text{Тогда } P'_y = Q'_x - \text{это необходимое решение для существования } u$$

Доказательство жди на матане

Определение

$$\forall x, y \mu(x, y) \neq 0$$

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 - \text{УПД}$$

$$\text{Тогда } \mu - \text{интегрирующий множитель для } P dx + Q dy$$

Замечание

$$\text{Если } (\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_y$$

Пример

$$y' = p(x)y + q(x)$$

$$(p(x)y + q(x)) dx - dy = 0 - \text{не уравнение в полных дифференциалах}$$

Найдем μ

$$\mu'_y (p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = \mu'_x (-1) + 0$$

$$\text{Попробуем найти } \mu : \mu'_y = 0$$

$$\mu = \mu(x)$$

$$\mu' = -\mu p(x)$$

$$\mu = C e^{-\int p}$$

$$\text{Выберем } C = 1$$

$$\mu = e^{-\int p}$$

1.8 Замена переменных

Пример

$$y' = \frac{y^3 - x^3}{xy^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, x > 0$$

$$\text{Пусть } v(x) = \frac{y}{x}x$$

$$y'_x = v - 1 \frac{1}{v^2}$$

$$y(x) = v(x)x \Rightarrow y' = v'x + v$$

$$v'x + v = v - \frac{1}{v^2}$$

$$v'x = -\frac{1}{v^2}$$

$$v^2 dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^3}{3} = -\ln x + C$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = -\ln x + C$$

Определение

Векторным полем уравнения $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ назовем $F : D \rightarrow \text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$

$$D = D_P \cap D_Q$$

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Интегральная кривая векторного поля – интегральная кривая уравнения

Теорема (замена переменной в уравнении)

$$D \subset \mathbb{R}_{x,y}^2, \Omega \in \mathbb{R}_{u,v}^2 - \text{область}$$

(внизу указаны координатные оси)

$$\Phi : D \rightarrow \Omega - \text{диффеоморфизм (биекция, что } \Phi \in C^1(D), \Phi^{-1} \in C^1(\Omega))$$

$F(x, y)$ – векторное поле исходного уравнения

$$G : \Omega \rightarrow \text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$G(u, v) := F(\Phi^{-1}(u, v))(\Phi^{-1})'(u, v)$$

Значит Φ биективно отображает интегральные кривые поля F на интегральные кривые поля G

Критерий диффеоморфизма

Φ – инъекция

$$\Phi \in C^1(D)$$

$$\det \Phi'(r) \neq 0 \quad \forall r \in D$$

Пример (Уравнение Бернулли)

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1$$

Пусть $y > 0$

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{\alpha-1} + q(x)$$

$$v = y^{1-\alpha}$$

$$v'_x = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'_x$$

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{v'_x}{1-\alpha}$$

$$v'_x = (1-\alpha)p(x)v + (1-\alpha)q(x)$$

Пример (Уравнение Риккати)

$$y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичная по } y}$$

Утверждение: если ϕ – решение, то подстановка $y(x) = v(x) + \phi(x)$ сводит уравнение к уравнению Бернулли