

# Математический анализ. Практика

Александр Сергеев

## 1 Урок 05.09.2022

Пусть есть функция  $f(x)$

### Определение

$f(x)$  - Инъекция, если  $\forall x_0 \overline{\exists x : f(x) = f(x_0)}$

### Определение

$f(x)$  - Сюръекция, если  $\forall y_0 \exists x : f(x) = y_0$

### Определение

$f(x)$  - Биекция, если  $\forall y_0 \exists! x : f(x) = y_0$   
(Сюръекция+Инъекция)

Биекция из  $A$  в  $B \Leftrightarrow |A| = |B|$

Сравним мощности групп чисел:

1)  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

### Доказательство

Получим биекцию, сопоставив значениям  $2k$  из  $\mathbb{N}$  значения  $k$  из  $\mathbb{Z}$ , а значениям  $2k + 1$  из  $\mathbb{N}$  значения  $-(1 + k)$  из  $\mathbb{Z}$ . Ч.т.д.

2)  $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

### Доказательство

Представим числа из  $\mathbb{Q}$  как  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  - целое,  $q$  - положительное. Составим таблицу, отложив по горизонтали  $p$ , а по вертикали  $q$ :

|   | 0 | 1  | -1 | 2 | -2 | 3  |
|---|---|----|----|---|----|----|
| 1 | 1 | 2  | 3  | 5 | 8  | 11 |
| 2 | . | 4  | 6  | . | .  |    |
| 3 | . | 7  | 9  |   |    |    |
| 4 | . | 10 |    |   |    |    |
| 5 | . |    |    |   |    |    |

Мы получили бесконечную таблицу всех значений  $\mathbb{Q}$ . Пронумеруем ее по диагонали в направлении сверху вниз справа налево, пропуская повторяющиеся значения. Мы получили биекцию из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{Q}$ . Отсюда два множества равномощны, ч.т.д.

$$3) |\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$$

#### Доказательство

Выберем  $X = [0; 1)$ , где все числа  $x \in X$  содержат в своей записи только 0 и 1.

Пусть  $|X| = |\mathbb{N}|$ .

Сопоставим каждому числу из  $\mathbb{N}$  число из  $X$ .

Мы получили биекцию:

$$\begin{array}{c|l} 1 & 0, r_{11} \ r_{12} \ r_{13} \ r_{14} \ \dots \\ 2 & 0, r_{21} \ r_{22} \ r_{23} \ r_{24} \ \dots \\ 3 & 0, r_{31} \ r_{32} \ r_{33} \ r_{34} \ \dots \\ 4 & 0, r_{41} \ r_{42} \ r_{43} \ r_{44} \ \dots \end{array}$$

Возьмем число  $0, \overline{r_{11}} \ \overline{r_{22}} \ \overline{r_{33}} \ \overline{r_{44}} \ \dots$ , где  $\overline{x} = 1 - x$ . Это число отличается как минимум одной цифрой от каждого числа в таблице. При этом в нем нет (9), что гарантирует, что каждое число в  $X$  может быть представлено единственным способом. Тогда мы получили число, не содержащееся в таблице. Отсюда  $|X| > |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ , ч.т.д.

Свойства мощности:

1.  $|A| = \infty \Rightarrow |A^2| = |A|$
2.  $|2^A| > |A|$ , где  $2^A$  - булеан - множество всех подмножеств  $A$ .
3.  $\left. \begin{array}{l} \text{Существует инъекция из } A \text{ в } B \\ \text{Существует инъекция из } B \text{ в } A \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = |B|$

## 2 Урок 12.09.2022

### Последовательности

Методы нахождения пределов:

1. Теорема о двух городских

2. Линейность:

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha A + \beta B$$

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B \Rightarrow x_n y_n \rightarrow AB$$

$$x_n \rightarrow A, y_n \rightarrow B \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0 \wedge \exists N : \forall n > N \ y_n \neq 0$$

3. Доказательство существования предела:

Пусть  $x_n$  монотонно возрастающая (убывающая) последовательность, ограниченная сверху (снизу). Тогда  $x_n$  сходится.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

## 3 Урок 19.09.2022

### Частичный предел

**Определение**

$$x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

$x_n, y_n$  - эквивалентные последовательности

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - \text{первый замечательный предел}$$

Правило Лопиталя:

$$f(x), g(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Определение**

*Подпоследовательность* - упорядоченное подмножество с индуцированным порядком (т.е. если в последовательности элемента стояли в определенном порядке, то те элементы, которые попали в подпоследовательность, стоят в ней в том же порядке)

### Определение

Пусть  $x_{n_k}$  - подпоследовательность  $x_n$ . Тогда  $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} a$  - *частичный предел*  $x_n$

### Определение

$\sup A$  - наименьшая верхняя граница  $A$

$\inf A$  - наибольшая нижняя граница  $A$

$\sup A, \inf A \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\sup A, \inf A$  всегда существуют.

$\sup\{\text{частичные пределы } x_n\}$  - верхний предел

$\inf\{\text{частичные пределы } x_n\}$  - нижний предел

## 4 Урок 17.10.2022

### Предел функции

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x : 0 < \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$

$f(x)$  - непрерывна в  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Для непрерывной  $f(x) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x : \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) < \varepsilon$  (в том числе при  $x = a$ )

Если  $F$  непрерывна, то  $\lim_{x \rightarrow a} F(f(x)) = F(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

### Определение

Пусть  $a : a$  - предельная в  $D_f$  и не содержится там

Тогда  $a$  - *особая точка*

$a$  - *устраняемая*, если существует предел в точке  $a$ . Тогда определим

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases} \quad \text{- устранение особенностей}$$

$$f'(x) = \lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$$

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + g(h), \text{ где } g(h) = f(x + h) - f(x) - hf'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow g(h) = o(h) \text{ (на самом деле } g(h) \in o(h), \text{ но так не пишут)}$$

Тогда  $\exists f'(x) \rightarrow f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$

Отсюда  $e^{x+h} = e^x + he^x + o(h)$

$$e^h = 1 + h + o(h)$$

$$\sin h = \sin(0+h) = \sin 0 + h \sin' 0 + o(h) = h + o(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$$

## 5 Урок 24.10.2022

1.  $o(x) + o(x) = o(x)$
2.  $o(o(x)) = o(x)$
3.  $x o(x) = o(x^2)$
4.  $o(1) = \{f : f \rightarrow 0\}$
5.  $o(x^3) = o(x)$ , но не наоборот
6.  $\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$
7.  $o(x) + o(x^2) = o(x)$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Если функция дифференцируема:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a), \text{ где } o(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

## 6 Урок 14.11.2022

### Определение

Функция  $f$  называется *дифференцируемой* в точке  $x$ , если  $f(x + \delta x) - f(x) = A\delta x + o(\delta x)$ , где  $A$  - константа

Если  $f$  дифференцируема, то  $A = f'(x)$

$A\delta x$  - *дифференциал* в точке  $x$

**Свойства дифференциала  $dx$**

1.  $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$

2.  $d(fg) = f dg + g df$  - Формула Лейбница

3.  $d1 = d1 \cdot 1 = 1 d1 + 1 d1$   
 $d1 = 0$

4.  $d(dx) = 0$

$$d(df) = d^2 f = d(f'(x) dx) = (dx) df'(x) + f'(x) d(dx) = f''(x)(dx)^2$$

**Определение**

$f$  - *гладкая*, если она дифференцируема до бесконечности (на практике - дифференцируема столько, сколько нужно)

## 7 Урок 5.12.2022

Функция *возрастает* в  $x_*$ , если в некоторой выколотой окрестности  $x_*$

$$\frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \geq 0$$

Тогда  $f'(x_*) \geq 0$

Если  $f'(x_*) > 0$ , то функция возрастает