Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Графы

1.1 Неориентированные графы

Определение
Неориентированный граф – множество вершин V и множество ребер $E \subset (V \times V \setminus \{(u,u)\})/_\sim$ (факторизованное отношением эквивалентности $\sim$: $(u,v) \sim (v,u)$)
Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро
$k := |P|$ или $k := \text{len}(P)$ – *длина пути*
Простой путь – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза
Реберно-простой путь – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза
Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$
Зададим *цикл*:

- $\exists P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$
  $\exists Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$
  $\exists R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$
  $P \sim R, P \sim Q$ – равны с точностью до отражения и циклического сдвига

- Пусть если в циклическом пути $\forall\, i\ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$, то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности $\sim$
Ациклический граф – граф без циклов

Определение
Пусть $\exists\, P : u_0 = u, u_k = v$. Тогда $u \rightsquigarrow v$ (отношение связанности путем)
Пусть $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$. Тогда $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$ – конкатенация пути

Теорема
Отношение $\rightsquigarrow$ в неориентированном графе – отношение эквивалентности

Определение
Класс эквивалентности по отношению $\rightsquigarrow$ – *компонента связности*
Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

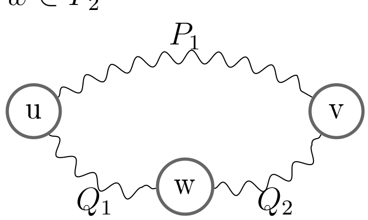
Определение
u, v – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из u в v

Теорема
Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

Доказательство
Путь u (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность
Симметричность очевидна
Докажем транзитивность
Рассмотрим u, v, w, пары $(u, v), (v, w)$ реберно двусвязные
P_1, P_2 – пути между u, w
Рассмотрим случаи:

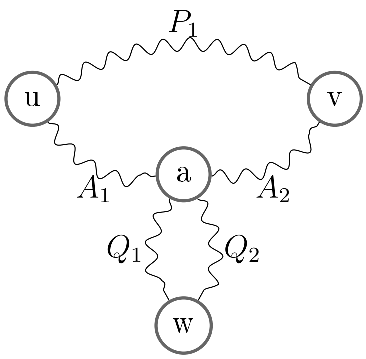
- $w = v \vee w = u$ – очевидно

- $w \in P_2$

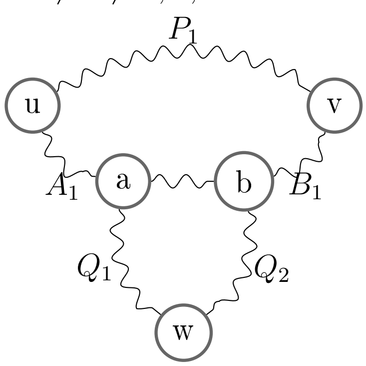
  Тогда $Q_2, P_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq v, u, w :$



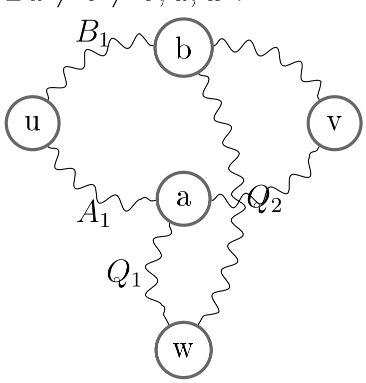
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w:$



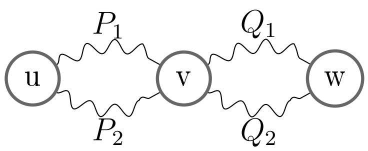
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w:$



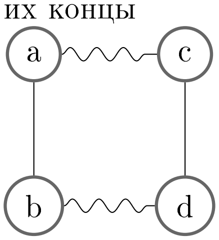
Тогда $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$ реберно не пересекаются

-

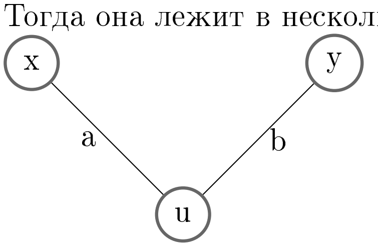


Тогда $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

Определение
Ребра ab, cd(не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы

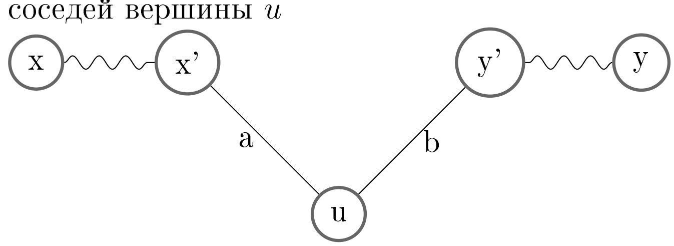


Теорема
Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности
Доказательство аналогично предыдущей теореме
Определение
Рассмотрим $A = \{a, b : ab$ – вершинно двусвязные$\}$ – *компоненту вершинной двусвязности (блок)*
Точка v – *точка сочленения*, если она лежит в нескольких блоках
Теорема
Вершина является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ Ее удаление увеличивает количество компонент связности
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть u – точка сочленения
Тогда она лежит в нескольких блоках:



a, b – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках
Тогда не существует пути $x \rightsquigarrow y$, не проходящего через u
Отсюда при удалении u x и y окажутся в разных компонентах
Доказательство $\Leftarrow$

Пусть при удалении u количество компонент увеличилось
Возьмем x и y такие, что до удаления u они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных
Тогда любой путь из x в y проходил через u
Выберем какой-то путь из x в y и возьмем на нем вершины x' и y' – соседей вершины u



Тогда ребра a и b вершинно не двусвязные
Определение
Мост – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности
Мост – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

1.2 Ориентированные графы

Определение
Ориентированный граф – множество вершин V и ребер $E \subset V \times V$ (разрешаем петли)
В ребре $w = uv$ $\operatorname{beg} w = u, \operatorname{end} w = v$
Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \ldots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро
Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$
Цикл – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига
Теорема
Если G – ациклический ориентированный граф, то $\exists \phi : V \to \{1, \ldots, n\} : uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$
(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)
Лемма

G – ациклический ориентированный граф
Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро
Доказательство теоремы
Докажем по индукции
Возьмем вершину, из которой не выходит ребро
Присвоим ей номер n
Удалим ее
Пронумеруем оставшиеся вершины
Определение
Симметризация G – граф $\overline{G}$ такой, что $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$
(Т.е. восприятие G как неориентированного графа (возможно, с петлями))
Компонента слабой связности – компонента связности в $\overline{G}$
Компонента сильной связности – компоненты, где существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$
Сильная связность – отношение эквивалентности

1.3 Деревья

Определение
Дерево – связный неориентированный граф без циклов
Теорема
G – граф, содержащий n вершин
Рассмотрим утверждения:

1. В нем $n-1$ ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связен

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево
Лемма
Пусть G – дерево, содержащее ≥ 2 вершины
Тогда $\exists$ вершина степени 1
(На самом деле их хотя бы две)
Доказательство
Возьмем вершину u_1. Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа u_2. Если у него степень 1, ч.т.д.
Иначе пойдем в соседа u_3, которого мы еще не посещали
Через не более n шагов мы придем в вершину u_i, все соседи которой уже посещены
Если u_i имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда u_i будет иметь степень 1
Доказательство 2
Рассмотрим самый длинный путь в графе
Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1
Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл
Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.
Доказательство теоремы

$2 + 3 \Rightarrow 1$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$: Возьмем вершину степени 1
Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе $n - 2$ ребра

$1 + 2 \Rightarrow 3$

Пусть в графе k компонент связности
Если в i компоненте n_i вершин, то в ней $n_i - 1$ ребро
Тогда всего ребер в графе $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = n - 1$
Отсюда $k = 1$

$1 + 3 \Rightarrow 2$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$ и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ацикличен
Если $n > 1$ и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше $\dfrac{2 * n}{2} = n$ – противоречие

Лемма о рукопожатии
$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_{2} = 2|E|$$

Теорема
G – дерево $\Leftrightarrow \forall\, u, v\ \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$
Доказательство $\Rightarrow$
Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой $l_1 + l_2$ минимально
Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)
Тогда эти два пути образуют цикл
Доказательство $\Leftarrow$
Граф связен
Граф ацикличен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути
Отсюда это дерево
Теорема
G – связен $\Leftrightarrow$ G связен и любое ребро – мост
Определение
G – граф
H – получен удалением из G вершин и/или ребер
H – *подграф* G
Определение
G – граф
H – получен из G удалением вершин (и ребер, выходящих из них)
H – *индуцированный* подграф G
Определение G – граф
H – получен из G удалением ребер с сохранением связности
H – *остовный* подграф G
Теорема
У любого связного графа есть остовное дерево
Доказательство 1
Обойдем граф bfs-ом и получим дерево
Доказательство 2
Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер
Утверждается, что он будет деревом
Доказательство 3 (жадный алгоритм)
Будем удалять ребра, пока граф связен
Мы получим ацикличный связный граф

Научимся считать количество остовных деревьев
Рассмотрим матрицу $n \times n$:
На диагонали напишем степень вершины
В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

Определение

Матрица Кирхгофа – матрица $n \times n$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Теорема

Пусть G – связный граф
Тогда количество остовных деревьев $G = \widehat{A_i j}\ \forall\, i, j$ – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы A

Лемма 1

Рассмотрим *матрицу инцидентности* I_G
Это матрица $n \times m, m = |E|$
В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$

$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$(\overrightarrow{I_G})_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$

$(\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

$\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T =$ матрица Кирхгофа

Лемма 2

Рассмотрим $\overrightarrow{I_G}$
Выберем $n - 1$ ребро
Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине u (u любая)
Мы получили матрицу $n-1 \times n-1$
Обозначим ее как B
Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $|B| = \pm 1$, иначе $|B| = 0$
Доказательство
Рассмотрим граф T, образованный всеми вершинами и выбранными ребрами
Докажем, что если T не дерево, то $|B| = 0$
Т.к. это не дерево и в нем $n-1$ ребро, то граф не связен
Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u
Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты
Утверждается, что сумма $= \mathbb{0}$
Отсюда матрица вырожденная
Докажем, что если T – дерево, то $|B| = \pm 1$
По лемме у дерева есть два листа
Тогда есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_1
Переставим строчку, соответствующую v, на первое место
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Т.к. v_1 – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Рассмотрим дерево T_2, полученное удалением v_1 из T
В нем есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_2
Переставим строчку, соответствующую v_2, на второе место
Т.к. v_2 – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место
Повторим действия
В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой ± 1
Отсюда определитель будет ± 1
Лемма 3 (Формула Коши-Бине)
Пусть даны матрицы $r \times s$ и $s \times r, r \leq s$
$\det AB = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \ldots i_r} \det B_{i_1 \ldots i_r}, A^{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только столбцы $i_1 \ldots i_r, B_{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только строки $i_1 \ldots i_r$

Лемма 4
$\widehat{A_i i} = \det(\overrightarrow{I}_{G\text{без i строки}}\overrightarrow{I}^T_{G\text{без i столбца}})$
Т.к. $m = |E| \geq n-1$, применим лемму 3:
$\widehat{A_i j} = \det(\overrightarrow{I}_{G\text{без i строки}}\overrightarrow{I}_G^{T\text{без i столбца}}) = \sum\limits_{1\leq i_1<\ldots<i_{n-1}\leq m} \underbrace{\det \overrightarrow{I}^{i_1\ldots i_{n-1}}_{G\text{без i строки}} \det \overrightarrow{I}^{T\text{ без i столбца}}_{G\, i_1\ldots i_{n-1}}}_{\text{1, если образует ост.д, иначе 0}}$
Отсюда $\widehat{A_i j}$ = кол-во остовных деревьев

1.4 Ориентированные деревья

Определение
Пусть G – ориентированный граф
Подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень
Обратное подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину
Теорема Тутта
Лапласиан графа G – матрица $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$ – позволяет искать исходящиие остовные корневые деревья
(Для входящих $\deg^+$ и $ji \in E$)
Количество остовных корневых деревьев с корнем i равно $\widehat{L(G)}_{ii}$

Определение
Пусть $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
Функциональный граф – граф $G : (i, f(i)) \in E$
В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья
Всего существует n^n функциональных графов
Число функциональных подграфов $= \prod\limits_{u\in v} \deg^- u$

1.5 Обход графа

Определение
Эйлеров путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

Гамильтонов путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз
Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)
Теорема
G – Эйлеров $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и $\forall v \ \deg v$ – четное
Доказательство $\Rightarrow$
Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли
Остюда степени четные и компонента связности одна
Доказательство $\Leftarrow$
Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности
Докажем индукцией по числу ребер
Если ребер 0, доказано
Пусть ребер > 0
//todo
Теорема
G содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени
Доказательство
Если она одна, то начнем обход в ней
Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее
Теорема
Ориентированный граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\forall v \ \deg^-(v) = \deg^+(v)$
Теорема
Ориентированный граф содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\deg^-(v) = \deg^+(v)$ для не более чем двух вершин a, b, а $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$ и $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$
Задача
Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты
Всего их $\displaystyle\sum_{C \text{ – к. св. с ребрами} G} \max(\frac{\mathrm{odd}(C)}{2}, 1), \mathrm{odd}(C)$ – кол-во вершин нечетной степени в C
Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты
Всего их $\sum\limits_{C\text{ – к. св. с ребрами} G} \max(\sum\limits_{u\in C, \deg^+ u<\deg^- u}(\deg^- u - \deg^+ u), 1)$

BEST-Теорема

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов $E = A\prod\limits_{u\in V}(\deg^- u - 1)!$

Доказательство

Выберем стартовое ребро xr
//todo лекция 3