Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Производящие функции

Определение

Формальный степенной ряд(производящая функция) – $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Формальный означает, что вместо t мы ничего не подставляем

Формальный степенной ряд – некоторый способ задавать последовательность

$A(t) = a_0 + a_1t^1 + a_2t^2 + \dots$

$B(t) = b_0 + b_1t^1 + b_2t^2 + \dots$

$C = A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t^1 + \dots$

$C = A - B = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t^1 + \dots$

$C = A \cdot B = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1)t^1 + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)t^2 \dots$

$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$C = \dfrac{A}{B}$:

$A = C \cdot B$

Потребуем $b_0 \neq 0$

$a_0 = c_0b_0 \Rightarrow c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$

$a_1 = c_0b_1 + c_1b_0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{a_1 - c_0b_1}{b_0}$

$c_n = \dfrac{a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}}{b_0}$

Если $a_0 \neq 0, b_0 = 0$, то получаем, что числитель не делится на t, а знаменатель делится

Т.о. такая дробь не является степенным рядом

Если $a_0 = 0, b_0 = 0$

Тогда мы можем сократить на t

$B := A'$ – формальная производная
$b_n = (n+1)a_{n+1}$
$(A \pm B)' = A' \pm B'$
$(A \cdot B)' = A' \cdot B + A \cdot B'$
$\frac{A}{B} = \frac{A'B - AB'}{B^2}$

Пример
$\frac{1}{1-t} = \sum t^n$
$(\frac{1}{1-t})'t = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum nt^n$

$A(B(t))$ – возможно только при $b_0 = 0$
$C = A(B(t)) = a_0 + a_1(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots) + a_2(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots)^3 + \dots =$
$a_0 + (a_1b_1)t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + a_2b_1b_2 + a_2b_2b_1 + a_3b_1^3)t^3 + \dots$
$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{n=s_1+\dots+s_k} \prod_{i=1}^{k} b_{s_k}$
$(A(B))' = A'(B)B'$
$B := \int A$ – формальная первообразная
$b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$
b_0 – может быть различным

2 Дробно-рациональные производящие функции

Определение

Дробно-рациональная производящая функция $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, q_0 \neq 0, P, Q$ – конечные многочлены

Определение

Линейное рекурр2ентное соотношение – $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$

$a_1, \ldots, a_k$ – конкретные значения

Теорема ч.1 (теорема о дробно-рациональных производящих функциях)

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \Leftrightarrow a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} \wedge Q(t) = 1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k$$

Доказательство $\Rightarrow$

$Q(t) = q_0 + \ldots + q_k t^k$

$1 + \frac{q_1}{q_0} t + \ldots + \frac{q_k}{q_0} t^k$

$c_i = -\frac{q_i}{q_0}$

$P(t) := \frac{P}{q_0}$

Рассмотрим $\frac{P}{1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k}$

Для $n > \max(k, \deg P)$

$$a_n = \frac{p_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(-c_{n-i})}{c_0} = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} c_i$$

Уберем исходное требование

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (c_i \cdot \begin{bmatrix} a_{n-i}, & n \geq i \\ 0, & n < i \end{bmatrix}) + p_n$$

Доказательство $\Leftarrow$

$n \geq m$

$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$

Рассмотрим $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$

$c_1 t A(t) = c_1 a_0 t + c_1 a_1 t^2 + c_1 a_2 t^3 + \ldots$

$c_2 t^2 A(t) = c_2 a_0 t^2 + c_2 a_1 t^3 + c_2 a_2 t^4 + \ldots$

$c_k t^k A(t) = c_k a_0 t^k + c_k a_1 t^{k+1} + c_k a_2 t^{k+2} + \ldots$

$A(t)(1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k) = P(t), \deg P \leq m$

$$A(t) = \frac{P}{1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k}$$

Рассмотрим $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix}$$

Применяя быстрое возведение матрицы в степень, можно найти a_n за $O(k^3 \log n)$

Рассмотрим $\dfrac{P}{Q}$

$\dfrac{P(t)}{Q(t)} \cdot \dfrac{Q(-t)}{Q(-t)} = \dfrac{P(t)Q(-t)}{Q_2(t)}$, где Q_2 – многочлен, где все нечетные коэффициенты нулевые

$Q_2 = \widetilde{Q}(t^2)$

Это следует из того, что $Q(t)Q(-t)$ – четная функция

$\deg Q = \deg \widetilde{Q}$

$\dfrac{P(t)}{Q(t)} = \dfrac{P(t)Q(-t)}{\widetilde{Q}(t^2)} = \dfrac{\widetilde{P}(t^2) + t\overline{P}(t^2)}{\widetilde{Q}(t^2)}$ (разбили на четные и нечетные степени)

Заметим, что нечетная подпоследовательность и четная подпоследовательность не связаны

У последовательности четных членов производящая функция – $\dfrac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}}$, у нечетных – $\dfrac{\overline{P}}{\widetilde{Q}}$

Т.о. мы можем каждый раз уменьшать последовательность в два раза

Итого асимтотика $O(k^2 \log n)$