Теория вероятности. Теория

Александр Сергеев

1 Вероятностное пространство. Вероятность и ее свойство

Определение
Алгебра событий:
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – набор подмножеств Ω
$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A + B \in \mathcal{A}$

Элементы алегбры – *события*
Операции с событиями

1. $A \cup B = A + B$
2. $A \cap B = AB = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
4. $A \setminus B = A - B = A\overline{B}$

Определение
σ-алгебра
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра

1. $\mathcal{A}$ – алгебра

2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$

Определение
События A, B – *несовместные* $AB = \varnothing$
Набор несовместный, если события попарно несовместные
Определение(вероятностное пространство)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$

Определение(вероятностное пространство в широком смысле)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\bigcup\limits^{\infty} A_i \Rightarrow P(\bigcup\limits^{\infty} A_i) = \sum P(A_i)$

Теорема о продолжении меры
$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ – вероятностное пространство в широком смысле
Тогда $\exists!Q : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ – вероятность, $Q\Big|_{\mathcal{A}} = P$, где $\sigma(\mathcal{A})$ – сигма-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$
Определение
$\mathcal{A}$ – система интервалов на $\mathbb{R}$, замкнутая относительно конечного объединения и пересечения
$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ – борелевская сигма-алгебра
Примеры вероятностных пространств

1. Модель классической вероятности
   $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
   $\mathcal{A} = 2^\Omega$
   $P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$
   $\mathcal{A} = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \dfrac{M}{N}$

2. Ω – набор $\{0^i, 1\}, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
   $P(0^i 1) = q^i p$

3. Модель геометрической вероятности Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество
   $\mathcal{A}$ – измеримое по Лебегу подмножество Ω
   $P(A) = \dfrac{\lambda A}{\lambda \Omega}$

Теорема (свойство вероятности)

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5. $P(\varnothing) = 0$
6. $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Доказательство

1. $P(B) = P(A) + P(B - A)$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$
3. $A \sqcup \overline{A} = \Omega$
4. $B = AB \sqcup (B \setminus AB)$
5. $B_1 = A_1$ $B_2 = A_2 \setminus A_1$
   $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots A_{n-1}) \bigsqcup B_i = \bigcup A_i$
   $B_i \subset A_i$
   $P(\bigcup A_i) = P(\bigsqcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i)$

Теорема (формула включения/исключения)

$$P(A_1+\ldots+A_n)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\ldots(-1)^{n+1}\sum_{i_1<\ldots<i_n}P(A_{i_1}\ldots A_{i_n})$$

Доказательство

Доказательство по индукции

Теорема

$\mathcal{A}$ – алгебра(?) на Ω, p – мера

Тогда равносильны

1. p – счетно-аддитивно
2. p – конечно-аддитивно $+\forall\,(B_n)_{n=1}^{\infty}:B_{n+1}\subset B_n, B=\bigcap B_n\Rightarrow P(B_n)\to P(B)$ – непрерывность сверху
3. p – конечно-аддитивно $+\forall\,(A_n)_{n=1}^{\infty}:A_{n+1}\supset A_n, A=\bigcup A_n\Rightarrow P(A_n)\to P(A)$ – непрерывность снизу

Доказательство (непрерывность сверху) $\Leftrightarrow$ (непрерывность снизу)

$A(n):A_n\subset A_{n+1}; A=\bigcup A_n$

$B_n:=\overline{A}_n, B:=\overline{A}$

$B_n\supset B_{n+1}$

$B=\overline{A}=\overline{\bigcup A_n}=\cap\overline{A}_n=\cap B_n$

$p(B_n)=1-p(A_n)\to 1-p(A)=p(B)$

Доказательство $1\to 2$

$C_1=B_1\overline{B}_2$

$C_2=B_2\overline{B}_3$

$C_k=B_k\overline{B}_{k+1}$

$$B_k=B\sqcup\bigsqcup_{j=k}^{\infty}C_j$$

$$p(B_k)=p(B)+\underbrace{\sum_{j=k}^{\infty}p(C_j)}_{\to 0}$$

$p(B_k)\to p(B)$

Доказательство $2\to 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty}p(C_k)=\lim_n\sum_{k=1}^{n}p(C_k)=\lim_n p(\bigsqcup_{k=1}^{n}C_k)=p(B)$$

2 Условная вероятность. Формуоа полной вероятности. Теорема Байеса

Определение (условная вероятность)
$(\Omega, \mathcal{A}, p)$ – вероятностное пространство
$B \in \mathcal{A} : p(B) > 0$
$p_B(A) = p(A|B) := \dfrac{p(AB)}{p(B)}$
Замечание
$p(AB) = p(A)p(B|A)$
Теорема (формула произведения вероятностей)
$p(A_1 \dots A_1) = p(A_1)p(A_2|A_1) \dots p(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$
Доказательство
Тривиально
Определение
$A_1, \dots, A_n$ – независимые, если $\forall\, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ $p(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \dots p(A_{i_k})$
Теорема (формула полной вероятности)
$A \subset \bigsqcup\limits_k B_k$ (как правило, $\bigsqcup B_k = \Omega$)
Тогда $p(A) = \sum\limits_k p(A|B_k)p(B_k)$
Доказательство
$p(A) = p(A \cap \bigsqcup B_k) = p(\bigsqcup AB_k) = \sum\limits_k p(AB_k) = \sum p(A|B_k)p(B_k)$
Теорема Байеса
Краткая форма:
$p(B|A) = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$
Полная:
$A \subset \bigsqcup B_k$

$$\underbrace{p(B_k|A)}_{\text{апостериорные; posterior}} = \frac{\underbrace{p(A|B_k)}_{\text{likelyhood}} \underbrace{p(B_k)}_{\text{априорные; prior}}}{\sum_j p(A|B_j)} p(B_j)$$

Доказательство краткой формы
$p(B|A) = \dfrac{p(AB)}{p(A)} = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$