Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Графы

1.1 Неориентированные графы

Определение

Неориентированный граф – множество вершин V и множество ребер $E \subset (V \times V \setminus \{(u,u)\})/_\sim$ (факторизованное отношением эквивалентности $\sim$: $(u,v) \sim (v,u)$)

Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро

$k := |P|$ или $k := \text{len}(P)$ – *длина пути*

Простой путь – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

Реберно-простой путь – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\exists P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$
  $\exists Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$
  $\exists R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$
  $P \sim R, P \sim Q$ – равны с точностью до отражения и циклического сдвига

- Пусть если в циклическом пути $\forall\, i\ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$, то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности $\sim$

Ациклический граф – граф без циклов

Определение

Пусть $\exists P : u_0 = u, u_k = v$. Тогда $u \rightsquigarrow v$ (отношение связанности путем)

Пусть $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$. Тогда $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$ – конкатенация пути

Теорема

Отношение $\rightsquigarrow$ в неориентированном графе – отношение эквивалентности

Определение

Класс эквивалентности по отношению $\rightsquigarrow$ – *компонента связности*

Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

Определение

u, v – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из u в v

Теорема

Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

Доказательство

Путь u (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность

Симметричность очевидна

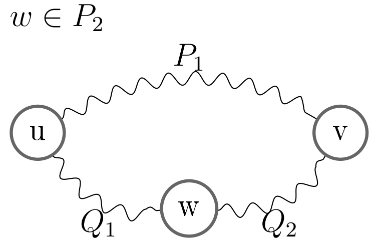
Докажем транзитивность

Рассмотрим u, v, w, пары $(u, v), (v, w)$ реберно двусвязные

P_1, P_2 – пути между u, w

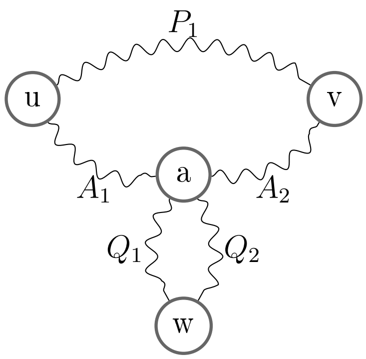
Рассмотрим случаи:

- $w = v \vee w = u$ – очевидно
- $w \in P_2$

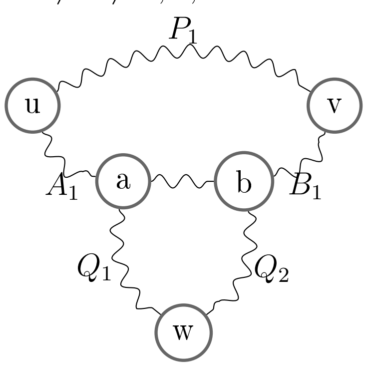
  Тогда $Q_2, P_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq v, u, w :$



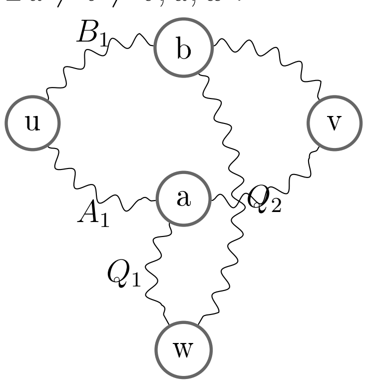
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w:$



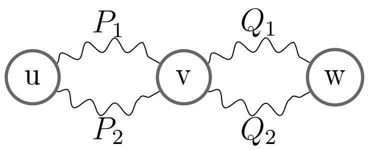
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists\, a \neq b \neq v, u, w:$



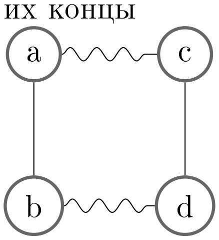
Тогда $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$ реберно не пересекаются

-

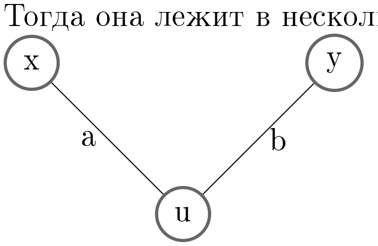


Тогда $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

Определение
Ребра ab, cd(не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы

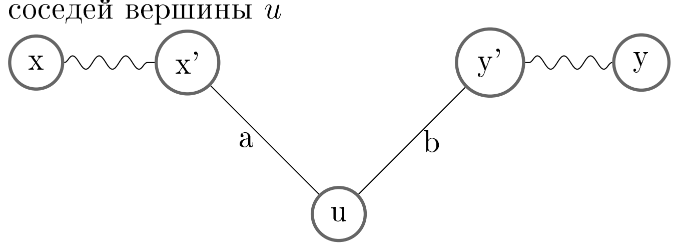


Теорема
Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности
Доказательство аналогично предыдущей теореме
Определение
Рассмотрим $A = \{a, b : ab$ – вершинно двусвязные$\}$ – *компоненту вершинной двусвязности (блок)*
Точка v – *точка сочленения*, если она лежит в нескольких блоках
Теорема
Вершина является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ Ее удаление увеличивает количество компонент связности
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть u – точка сочленения
Тогда она лежит в нескольких блоках:



a, b – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках
Тогда не существует пути $x \rightsquigarrow y$, не проходящего через u
Отсюда при удалении u x и y окажутся в разных компонентах
Доказательство $\Leftarrow$

Пусть при удалении u количество компонент увеличилось
Возьмем x и y такие, что до удаления u они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных
Тогда любой путь из x в y проходил через u
Выберем какой-то путь из x в y и возьмем на нем вершины x' и y' – соседей вершины u



Тогда ребра a и b вершинно не двусвязные
Определение
Мост – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности
Мост – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

1.2 Ориентированные графы

Определение
Ориентированный граф – множество вершин V и ребер $E \subset V \times V$ (разрешаем петли)
В ребре $w = uv$ $\operatorname{beg} w = u, \operatorname{end} w = v$
Путь P – последовательность $u_o e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1}u_i$ – ребро
Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$
Цикл – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига
Теорема
Если G – ациклический ориентированный граф, то $\exists \phi : V \to \{1, \dots, n\} : uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$
(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)
Лемма

G – ациклический ориентированный граф
Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро
Доказательство теоремы
Докажем по индукции
Возьмем вершину, из которой не выходит ребро
Присвоим ей номер n
Удалим ее
Пронумеруем оставшиеся вершины
Определение
Симметризация G – граф $\overline{G}$ такой, что $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$
(Т.е. восприятие G как неориентированного графа (возможно, с петлями))
Компонента слабой связности – компонента связности в $\overline{G}$
Компонента сильной связности – компоненты, где существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$
Сильная связность – отношение эквивалентности

1.3 Деревья

Определение
Дерево – связный неориентированный граф без циклов
Теорема
G – граф, содержащий n вершин
Рассмотрим утверждения:

1. В нем $n - 1$ ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связен

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево
Лемма
Пусть G – дерево, содержащее ≥ 2 вершины
Тогда $\exists$ вершина степени 1
(На самом деле их хотя бы две)
Доказательство
Возьмем вершину u_1. Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа u_2. Если у него степень 1, ч.т.д.
Иначе пойдем в соседа u_3, которого мы еще не посещали
Через не более n шагов мы придем в вершину u_i, все соседи которой уже посещены
Если u_i имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда u_i будет иметь степень 1

Доказательство 2

Рассмотрим самый длинный путь в графе
Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1
Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл
Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

Доказательство теоремы

$2 + 3 \Rightarrow 1$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$: Возьмем вершину степени 1
Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе $n - 2$ ребра

$1 + 2 \Rightarrow 3$

Пусть в графе k компонент связности
Если в i компоненте n_i вершин, то в ней $n_i - 1$ ребро
Тогда всего ребер в графе $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k = n - 1$
Отсюда $k = 1$

$1 + 3 \Rightarrow 2$

Если $n = 1$ – очевидно
Если $n > 1$ и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ацикличен
Если $n > 1$ и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше $\dfrac{2 * n}{2} = n$ – противоречие

Лемма о рукопожатии

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \sum_{e \in E} \underbrace{\sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_{2} = 2|E|$$

Теорема
G – дерево $\Leftrightarrow \forall\, u, v\ \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$
Доказательство $\Rightarrow$
Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой $l_1 + l_2$ минимально
Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)
Тогда эти два пути образуют цикл
Доказательство $\Leftarrow$
Граф связен
Граф ацикличен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути
Отсюда это дерево
Теорема
G – связен $\Leftrightarrow$ G связен и любое ребро – мост
Определение
G – граф
H – получен удалением из G вершин и/или ребер
H – *подграф* G
Определение
G – граф
H – получен из G удалением вершин (и ребер, выходящих из них)
H – *индуцированный* подграф G
Определение G – граф
H – получен из G удалением ребер с сохранением связности
H – *остовный* подграф G
Теорема
У любого связного графа есть остовное дерево
Доказательство 1
Обойдем граф bfs-ом и получим дерево
Доказательство 2
Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер
Утверждается, что он будет деревом
Доказательство 3 (жадный алгоритм)
Будем удалять ребра, пока граф связен
Мы получим ацикличный связный граф

Научимся считать количество остовных деревьев
Рассмотрим матрицу $n \times n$:
На диагонали напишем степень вершины
В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

Определение

Матрица Кирхгофа – матрица $n \times n$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Теорема

Пусть G – связный граф
Тогда количество остовных деревьев $G = \widehat{A_i j}\ \forall\, i, j$ – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы A

Лемма 1

Рассмотрим *матрицу инцидентности* I_G
Это матрица $n \times m, m = |E|$
В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$

$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$(\overrightarrow{I_G})_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$

$(\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

$\overrightarrow{I_G}\overrightarrow{I_G}^T =$ матрица Кирхгофа

Лемма 2

Рассмотрим $\overrightarrow{I_G}$
Выберем $n - 1$ ребро
Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине u (u любая)
Мы получили матрицу $n-1 \times n-1$
Обозначим ее как B
Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $|B| = \pm 1$, иначе $|B| = 0$
Доказательство
Рассмотрим граф T, образованный всеми вершинами и выбранными ребрами
Докажем, что если T не дерево, то $|B| = 0$
Т.к. это не дерево и в нем $n-1$ ребро, то граф не связен
Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u
Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты
Утверждается, что сумма $= \mathbb{0}$
Отсюда матрица вырожденная
Докажем, что если T – дерево, то $|B| = \pm 1$
По лемме у дерева есть два листа
Тогда есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_1
Переставим строчку, соответствующую v, на первое место
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Т.к. v_1 – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы
От этого определитель не изменится с точностью до знака
Рассмотрим дерево T_2, полученное удалением v_1 из T
В нем есть как минимум один лист, не равный u. Назовем его v_2
Переставим строчку, соответствующую v_2, на второе место
Т.к. v_2 – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место
Повторим действия
В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой ± 1
Отсюда определитель будет ± 1
Лемма 3 (Формула Коши-Бине)
Пусть даны матрицы $r \times s$ и $s \times r, r \leq s$
$\det AB = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \ldots i_r} \det B_{i_1 \ldots i_r}, A^{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только столбцы $i_1 \ldots i_r, B_{i_1 \ldots i_r}$ – оставили только строки $i_1 \ldots i_r$

Лемма 4
$\widehat{A_i i} = \det(\overrightarrow{I}_{G \text{без i строки}} \overrightarrow{I}_{G \text{без i столбца}}^T)$
Т.к. $m = |E| \geq n - 1$, применим лемму 3:
$$\widehat{A_i j} = \det(\overrightarrow{I}_{G \text{без i строки}} \overrightarrow{I}_G^{T \text{без i столбца}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \overrightarrow{I}_{G \text{без i строки}}^{i_1 \ldots i_{n-1}} \det \overrightarrow{I}_{G i_1 \ldots i_{n-1}}^{T \text{ без i столбца}}}_{\text{1, если образует ост.д, иначе 0}}$$
Отсюда $\widehat{A_i j}$ = кол-во остовных деревьев

1.4 Ориентированные деревья

Определение
Пусть G – ориентированный граф
Подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень
Обратное подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину
Теорема Тутта
Лапласиан графа G – матрица $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$ – позволяет искать исходящиие остовные корневые деревья
(Для входящих $\deg^+$ и $ji \in E$)
Количество остовных корневых деревьев с корнем i равно $\widehat{L(G)}_{ii}$

Определение
Пусть $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
Функциональный граф – граф $G : (i, f(i)) \in E$
В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья
Всего существует n^n функциональных графов
Число функциональных подграфов $= \prod_{u \in v} \deg^- u$

1.5 Обход графа

Определение
Эйлеров путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

Гамильтонов путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз
Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)
Теорема
G – Эйлеров $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и $\forall v \ \deg v$ – четное
Доказательство $\Rightarrow$
Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли
Остюда степени четные и компонента связности одна
Доказательство $\Leftarrow$
Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности
Докажем индукцией по числу ребер
Если ребер 0, доказано
Пусть ребер > 0
//todo
Теорема
G содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени
Доказательство
Если она одна, то начнем обход в ней
Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее
Теорема
Ориентированный граф содержит эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\forall v \ \deg^-(v) = \deg^+(v)$
Теорема
Ориентированный граф содержит эйлеров путь $\Leftrightarrow$ граф слабо связен и $\deg^-(v) = \deg^+(v)$ для не более чем двух вершин a, b, а $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$ и $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$
Задача
Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты
Всего их $\sum\limits_{C \text{ – к. св. с ребрами} G} \max(\frac{\text{odd}(C)}{2}, 1), \text{odd}(C)$ – кол-во вершин нечетной степени в C
Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\sum_{C \text{ – к. св. с ребрами} G} \max(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1)$

BEST-Теорема

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов

$E = A \prod_{u \in V} (\deg^- u - 1)!$

1.6 Укладки графов

Утверждение

Компактные многообразия эквивалентны сфере «с ручками»

Пример: сфера с одной ручкой – тор, с двумя – «крендель»

Определение

Ориентируемое многообразие – поверхность с ручками

Задается числом – количество ручек

Определение

Укладка графа на поверхность A – инъективное отображение точек графа в точки на поверхности и ребер – в непересекающиеся кривые

$V : V_G \to A$ – инъекция

$e : E_G \to C_A$

$\phi \in C_A$ – путь

$\phi : [0,1] \to A, \phi(0) = \text{beg}(e), \phi(1) = \text{end}(e)$

$\forall \phi_1, \phi_2 \ \phi_1[0,1] \cap \phi_2[0,1] = 0$

Теорема

Любой граф можно вложить в $\mathbb{R}^3$

Доказательство

Вложим граф как-то с пересечениями

Для каждого пересечения искривим одно из ребер, чтобы убрать пересечение

Доказательство 2

Воспользуемся вероятностным методом: случайно расположим точки, после чего проведем ребра-отрезки

Вероятность их пересечения равна 0

Определение

Два графа гомеоморфны, если можно превратить G_1 в G_2 следующими

операциями
(кратные ребра разрешены)

1. Удаляем ребро uv, добавляем вершину x и ребра ux, xv

2. Берем вершину x степени 2 с соседями u, v
   Удалим вершину x и добавим ребро uv

Лемма 1
G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ можно уложить на сфере
Доказательство
Нарисуем плоскость
Положим на нее сферу
Точка соприкосновения сферы и плоскости =: южный полюс S
Противоположная сторона сферы =: северный полюс N
Возьмем точку x на плоскости
Построим отрезок xN
Точка пересечения отрезка со сферой x' – существует и единственная
Т.о. мы построили непрерывную биекцию между сферой $\setminus\{N\}$ и плоскостью
Теперь положим сферу на плоскость так, чтобы северный полюс не лежал на ребре и не был вершиной
Тогда биекция ребра переводит в кривые-ребра, а вершины – в точки-вершины
Определение
Грани – области, полученные разрезанием поверхности по ребрам
Теорема (Формула Эйлера)
В связном графе на плоскости $V + F - E = 2$
V – число вершин
E – число ребер
F – число граней
Доказательство
Будем рисовать наш граф постепенно
При добавлении ребра количество ребер увеличивается на $1 (E+ = 1)$ и число граней увеличивается на $1 (F+ = 1)$
При добавлении вершины число ребер увеличивается на $1 (E+ = 1)$ и число вершин увеличивается на $1 (V+ = 1)$
Тогда $V + F - E = 2$
Теорема

K_5 нельзя уложить на плоскости
Доказательство
$V = 5$
$E = 10$
Отсюда $F = 7$
С точки зрения теории графов грань – это цикл
Цикл имеет длину хотя бы 3
Пройдем по каждому циклу, соответствующему грани
Тогда суммарно мы пройдем хотя бы по 21 ребру
С другой стороны, ребро лежит на границе двух граней
Значит по каждому ребру мы должны пройти по 2 раза
Т.е. мы должны пройти суммарно по 20 ребрам
Теорема 2
$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскости
Доказательство
В двудольном графе цикл имеет длину хотя бы 4
Применяем тот же трюк
Теорема
В произвольном графе G $3V - 6 \geq E$
В произвольном двудольном графе G $2V - 4 \geq E$
Лемма
G_1, G_2 гомеоморфны
G_1 можно уложить $\Leftrightarrow$ G_2 можно уложить
Лемма
G – подграф H
H можно уложить $\Rightarrow$ G можно уложить
Лемма
G можно уложить на плоскости и u – вершина G, то G можно уложить так, чтобы u была инцидентна(смежна) внешней грани
Доказательство
Переложим граф на плоскости
Переложим его на сферу
Повернем сферу так, чтобы грань, инцидентная u, содержала северный полюс
Переложим граф на плоскость
Лемма
G можно уложить на плоскости и uv – ребро G, то G можно уложить так, чтобы u было инцидентно(смежна) внешней грани

Определение
G – планарный, если его можно уложить на плоскость
Лемма
Если все компоненты реберной двусвязности G планарны, то G планарен
Доказательство
Докажем по индукции
База ($n = 1$) – очевидно
Переход: Удалим мост uv
Тогда в каждой компоненте связности $\leq n - 1$ компонента реберной двусвязности
Уложим их так, чтобы u и v оказались инцидентны внейшней грани
Проведем ребро uv
Лемма
Если все компоненты вершинной двусвязности G планарны, то G планарен
Доказательство
Докажем по индукции
База ($n = 1$) – очевидно
Переход: Разобьем граф по какой-либо точке сочленения v на два графа
В каждой будет своя копия вершины v – v_i Уложим их так, чтобы v_i лежали во внешней грани
Теперь удалим все v_i, кроме v_1 и «притянем» все ребра из v_i к v_1
Теорема
G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$
Доказательство $\Leftarrow$
Очевидно
Доказательство $\Rightarrow$
слишком сложно описать доказательство, просто поверьте

1.7 Раскраска

Определение
$c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ – раскраска
Раскраска *правильная*, если $\forall\, uv\ c(u) \neq c(v)$
По умолчанию будем говорить о правильный раскрасках
Определение

G раскрашиваемый в k цветов, если существует правильная раскраска в k цветов
$k = 1$ – граф изолированный
$k = 2$ – граф двудольный
Теорема
Граф двудольный $\Leftrightarrow$ любой цикл четный
Определение
Пусть есть граф G
Хроматическая функция $p_G(t)$ – число способов раскрасить G в t цветов (можно использовать не все цвета)
$p_{K_n}(t) = t(t-1)\dots(t-n+1) = t^{\underline{n}} = \dfrac{t!}{(t-n)!}$
Определение
G/uv – стягивание графа по uv
Стягивание означает, что мы заменяем вершины u и v одной вершиной
Если цвета u и v равны, то стягивание не влияет на раскраски
Лемма
Пусть uv – ребро в G
$p_G(t) = p_{G\setminus\{uv\}}(t) - p_{G/uv}(t)$
Теорема о хроматическом многочлене
Пусть G – неориентированный граф с n вершинами, m ребрами, k компонентами связности
Тогда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$ (коэффициенты знакочередуются)
Доказательство
Индукция по числу вершин и ребер
Если $n = n, m = 0$, то $p_G(t) = t^n$
Если $m > 0$
Рассмотрим ребро uv
$p_G(t) = p_{G\setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$
Если uv – не мост
$p_{G\setminus uv}(t) = t^n - (m-1)t^{n-1} + q_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm q_k t^k$
$-p_{G/uv}(t) = -t^{n-1} + r_{n-2}t^{n-2} + \dots \pm r_k t^k$
Отсюда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$
Если u_v – мост, то $q_k = 0$, но это ничего не меняет
Теорема
G – дерево $\Leftrightarrow p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$
Доказательство $\Leftarrow$

$p_G(t) = t^n - (n-1)t^{n-1} + \ldots + t$
Отсюда $n = n, m = n-1, k = 1$ – дерево
Доказательство $\Rightarrow$
Возьмем в графе лист a и удалим его
$p_{\{v\}} = t$
$p_{G\setminus a}(t) = t(t-1)^{n-2}$
$p_G(t) = (t-1)p_{G\setminus a}(t)$
Лемма
В планарном графе $\exists\, u : \deg u \leq 5$
Доказательство
$E \leq 3v - 6$
Пусть это не так
Тогда $6V \leq 2E \leq 6V - 12$
Теорема (super light)
Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов
Доказательство
Рассмотрим вершину степени не более 5
Удалим ее из графа
Планарность не сломается
Остаток раскрасим в 6 цветов
Потом добавим вершину обратно вершину
Для нее всегда можно выбрать какой-то цвет
Теорема Хивуда (medium)
Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов
Доказательство
Рассмотрим вершину степени не более 5
Если степень меньше 5, применим трюк из прошлого доказательства
Если степень ровно 5, удалим ее
Раскрасим граф в 5 цветов
Вернем ее
Если есть 2 соседа одного цвета, то мы победили
Пусть все соседи разных цветов
Пусть по часовой стрелке расположены соседи цветов 1, 2, 3, 4, 5
Возьмем соседа цвета 1, запустим DFS по вершинам цвета 1 и 3
Если мы не дошли до соседа цвета 3, то в дереве DFS'а поменяем всета 1 и 3 местами
Тогда нашу вершину покрасим в цвет 1
Пусть мы дошли до соседа цвета 3 (т.е. нашли цикл)

Тогда повторим аналогичные действия с вершинами цвета 2 и 4

Из планарности цикл в обходе невозможен

Теорема (hard)

Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета

Доказательство слишком сложное

Определение

Регулярный граф – граф, где все степени одинаковые

$\deg G = d$

Лемма

Пусть G – граф, $\deg v \le d, \exists\, u : \deg u < d$

Тогда его можно раскрасить в d цветов

Доказательство

Запустим из u DFS

Построим остовное дерево с корнем в u

Будем раскрашивать вершины с листьев к корню

Вершину будем красить, если все ее дети уже покрашены

У каждой вершины всегда есть один непокрашенный сосед – ее родитель

Тогда мы сможем покрасить дерево

Теорема (Брукс)

Пусть G – связный граф

$\deg v \le d$

$G \ne K_n$

$G \ne C_{2n+1}$ (цикл)

Тогда $\exists$ раскраска G в d цветов

Доказательство

Какая-то глина