

# Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

## 1 Аналитическая геометрия

### 1.1 Элементы векторной алгебры

#### 1.1.1 Основные определения

*Вектор(геометрический)* - направленный отрезок; упорядоченная пара точек пространства

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA}$$

$|\overrightarrow{AB}|$  - длина отрезка АВ

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$  - вектора *коллинеарны*, т.е. лежат на одной прямой или параллельных

$$\forall \vec{a} \parallel \vec{0}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{cases}$$

*Свободные вектора* - вектора, не зависящие от точки приложения

$\vec{a}, \vec{b}, \dots$  - *компланарны*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

$$\vec{a}_0 - \text{орт } \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_0 \uparrow\uparrow \vec{a} \\ |\vec{a}_0| = 1 \end{cases}$$

Операции над векторами:

1.  $\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b}$  - сложение/вычитание
2.  $\vec{c} = \alpha \vec{a}$  - умножение на скаляр

Свойства операций:

1.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  - ассоциативность сложения
2.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  - коммутативность сложения
3.  $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$  - нейтральный элемент относительно сложения
4.  $\exists \vec{-a} : \vec{a} + \vec{-a} = \vec{0}$  - существование противоположного элемента
5.  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \alpha \in \mathbb{R} \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$  - дистрибутивность относительно сложения
6.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{a} (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$  - дистрибутивность
7.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a} = \beta(\alpha \vec{a})$
8.  $\forall \vec{a} 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

- аксиомы линейного пространства

### Определение

Пусть  $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k \in V_3$

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{v}_i, \quad d\alpha_i \in \mathbb{R}$$

$\vec{v}$  - линейная комбинация векторов

Тривиальная линейная комбинация:  $\forall i \ d_i = 0$

### Определение

$\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k$  - линейная независимая система векторов, если любая нулевая линейная комбинация этих векторов тривиальна.

Иначе - линейно зависимая система векторов.

Свойства:

1. Если в системе есть нулевой вектор, то такая система всегда линейно зависима.

2. Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
3. Система векторов линейно зависима  $\Leftrightarrow$  найдется вектор, который является линейной комбинацией других.
4. Если вектора коллинеарны, то они линейно зависимы.

### Определение

*Базисом прямой* называется любой ненулевой вектор на этой прямой  
*Базисом прямой* называется упорядоченная пара любых неколлинеарных вектора.

*Базисом пространства* называется упорядоченная тройка любых некопланарных вектора.

### Определение

Пусть  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  - базис пространства;  
 $\vec{V} = \alpha_1 \cdot \vec{l}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{l}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{l}_3$ .

Тогда  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  - координаты этого вектора.

### Теорема

1. Любой вектор, параллельный плоскости, выражается через ее базис единственным образом.
2. Любой вектор, параллельный плоскости, выражается через ее базис единственным образом.
3. Любой вектор в пространстве выражается через его базис единственным образом.
0. Для любого вектора его координаты относительно базиса определяются однозначно.

Свойства:

1.  $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$  равны координаты этих векторов относительно фиксированного базиса
2.  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \forall i \ c_i = a_i + b_i$

$$3. \vec{b} = \lambda \vec{b} \Leftrightarrow \forall i \ b_i = \lambda b_i$$

#### Определение

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

#### Теорема

Система из более 2 компланарных векторов линейно зависима.

Система из более 3 векторов линейно зависима.

### 1.1.2 Системы координат в пространстве/плоскости

#### Определение

Будем говорить, что в пространстве задана *Декартова система координат*, если зафиксирована точка  $(\cdot)O$  - *начало координат* - и зафиксирован базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , приложенный к точке

$$(\cdot)M = (m_1, m_2, m_3) \Leftrightarrow \vec{OM} = m_1 \vec{e}_1 + m_2 \vec{e}_2 + m_3 \vec{e}_3.$$

Оси координат (прямые, проходящие через  $(\cdot)O$  и направленные в сторону базисного вектора):

- OX - ось абсцисс
- OY - ось ординат
- OZ - ось аппликат

#### Задача

Разделить отрезок  $AB$  точкой  $M$  в отношении  $\lambda$  к  $\mu$

#### Решение

$$\forall i \ m_i = \frac{\lambda b_k + \mu a_k}{\lambda + \mu}$$

В дальнейшем рассматриваем *прямоугольную декартову систему координат* - ортонормированную систему координат:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ - орт.}$$

$$\vec{a}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma), \text{ где } \alpha, \beta, \gamma \text{ - углы между вектором и } OX, OY, OZ.$$

Косинусы называют *направляющими*.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

### Определение

*Полярная система координат* - система координат в плоскости, задаваемая точкой и лучом, где положение точки определяется длиной ее *радиус-вектора* и полярным углом между радиус-вектором и данным лучом.

Зададим полярную системой координат точкой  $O$  и лучом  $OX$ , а д.с.к. - точкой  $O$  и базисом  $OXY$ .

Отсюда

$$(\phi, r) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

$$(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \phi), \text{ где } \phi = \text{atan2}(x, y) \text{ с учетом знака } x, y$$

#### 1.1.3 Основные преобразования д.с.к.

1. Параллельный перенос д.с.к. на  $\overrightarrow{OO'}$  :  $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$
2. Поворот д.с.к в плоскости на  $\phi$  :  $(\alpha - \phi, r) = R_O^\phi((\alpha, r))$ , где  $R_O^\phi$  - поворот д.с.к на  $\phi$ .  

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
 - матрица поворота.
3. Поворот д.с.к. в пространстве(через матрицы).

#### 1.1.4 Скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Свойства:

1. Симметричность  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. Аддитивность по первому аргументу  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$
3. Однородность по первому аргументу  $\forall \lambda \in \mathbb{R} (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$

4. Положительная определенность  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ , причем  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

Из свойств 1-3 - линейность по второму аргументу.

### Замечание

В линейной алгебре любая функция  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая аксиомам 1-4 называется скалярным произведением.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

### Доказательство свойства 2 для данного скалярного произведения

1) Если  $\vec{b} = 0$  - очевидно

2) Если  $\vec{b} \neq 0$ :

Введем д.с.к. таким образом, чтобы  $\vec{i} \parallel \vec{b}$ .

$$\vec{i} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{i}) = |\vec{a}_1 + \vec{a}_2| \cos \alpha =$  первая координата  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) =$  первая координата  $\vec{a}_1 +$  первая координата  $\vec{a}_2 = (\vec{a}_1, \vec{i}) + (\vec{a}_2, \vec{i})$ .

Отсюда  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = |\vec{b}|(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{i}) = |\vec{b}|((\vec{a}_1, \vec{i}) + (\vec{a}_2, \vec{i})) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$ , ч.т.д.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \dots = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

### Определение

$\frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{b}|}$  - проекция  $\vec{a}$  на  $\vec{b}$ .

### 1.1.5 Векторное произведение

#### Определение

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} :$$

1.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$

2.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - правая тройка

3.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

Свойства:

1. Антисимметричность  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

2. Аддитивность по первому аргументу  $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{b}] + [\vec{a}_2, \vec{b}]$

3. Однородность по первому аргументу  $\forall \lambda \in \mathbb{R} [\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$

4.  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$  - площадь параллелограмма, натянутого на  $\vec{a}, \vec{b}$

Из аксиом 1-3 следует линейность по второму аргументу.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \dots = \vec{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \vec{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \vec{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

#### Доказательство

Для  $i$ -ой координаты:

$((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}, \vec{e}_i) = (\vec{a}_1 \times \vec{b}, \vec{e}_i) + (\vec{a}_2 \times \vec{b}, \vec{e}_i)$  (где  $\vec{e}_i$  -  $i$ -ый вектор базиса) - из свойств смешанного произведения. Также это  $i$ -ая координата. Отсюда для всех координат выполняется аддитивность. Тогда векторное произведение аддитивно, ч.т.д.

#### 1.1.6 Смешанное произведение

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Свойства:

1.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V_{\text{параллелепипеда}} \cdot$  + при правой тройке, - при левой

2.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$

3. Аддитивность по первому аргументу  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c}$

4. Однородность  $\forall \lambda \in \mathbb{R} (\lambda \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$

## Доказательство

1. Из геометрии
2. Из пункта 1 (т.к. параллелепипед один)
3.  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{b} \vec{c} \vec{a}_1 + \vec{b} \vec{c} \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c}$   
(Замечание!!! Аддитивность векторного произведения доказывается через этот пункт)
4. Аналогично пункту 3

Из 2-4 следует линейность по всем аргументам.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0 \Leftrightarrow V = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны.}$$
$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

### 1.1.7 Двойное векторное произведение

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

#### Доказательство

Пусть  $\vec{i} \uparrow \vec{b}$

$$\vec{j} \parallel (\vec{b}, \vec{c})$$

$\vec{k}$  - по правилу правой тройки.

$$\vec{b} = (b_1, 0, 0)$$

$$\vec{c} = (c_1, c_2, 0)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Если  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - не коллинеарны

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_2 b_1 c_2, -a_1 b_1 c_2, 0) = (b_1 a_1 c_1 + b_1 a_2 c_2 - c_1 a_1 b_1, -a_1 b_1 c_2, 0) = (b_1, 0, 0)(a_1 c_1 + a_2 c_2) - (c_1, c_2, 0)(a_1 b_1) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}), \text{ ч.т.д.}$$

Если коллинеарны: очевидно.

## 1.2 Прямая на плоскости.

### Плоскость и прямая в пространстве

#### Определение

Уравнение вида  $Ax + By + C = 0$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ ), где  $x, y$  - координаты в



некоторой д.с.к на плоскости, а также уравнение вида  $Ax + By + Cz + D = 0$  ( $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ), где  $x, y, z$  - координаты в некотором д.с.к. в пространстве, называется *алгебраическим уравнением первого порядка (линейным уравнением)*

### Теорема

Любая прямая на плоскости (любая плоскость в пространстве) может быть задана линейным уравнением

Любое линейное уравнение на плоскости (в пространстве) определяет некоторую прямую (плоскость).

### Доказательство прямого утверждения

Докажем для прямой.

Пусть  $L$  - прямая. Введем д.с.к., где ось  $X$  проходит через  $L$ .

$M \in L \Leftrightarrow y = 0$  (линейное уравнение).

### Лемма

Если в какой-то д.с.к. прямая задается линейным уравнением, то и в любой другой д.с.к. она тоже будет задаваться линейным уравнением.

### Доказательство

Любые две д.с.к. могут быть совмещены путем композиции параллельного переноса и сдвига.

Пусть в первой системе координат задана прямая  $Ax + By + C = 0$ .

1. Для переноса:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Тогда в новой системе координат эта же прямая будет задана уравнением  $Ax' + By' + (C + Ax_0 + By_0) = 0$

2. Для поворота:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

Тогда в новой системе координат эта же прямая будет задана уравнением  $(A \cos \alpha + B \sin \alpha)x' + (B \cos \alpha - A \sin \alpha)y' + C = 0$

### Доказательство обратного утверждения

$Ax + By + C = 0$  ( $A^2 + B^2 \neq 0$ )

Пусть  $A \neq 0$ . Возьмем точку  $(-\frac{C}{A}, 0)$ . Она будет лежать на прямой. Аналогично для  $B$ . Тогда уравнение имеет как минимум одно решение.

Возьмем любую точку  $M_0(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (A, B) \perp (x, y).$$
 Получаем, что уравнение задает множество направленных отрезков с началом в  $M_0$ , перпендикулярных  $(A, B)$ . Отсюда это прямая. Такая прямая задается единственным образом.

### Определение

$(A, B)$  в уравнении прямой и  $(A, B, C)$  в уравнении плоскости называется *вектором нормали*.

## 1. Прямая на плоскости

- (a) Общее уравнение  
 $Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$
- (b) Уравнение в отрезках  
 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , если  $L$  не проходит через  $(0, 0)$   
 $a, b$  - отрезки на координатных осях, которые отсекает прямая
- (c) Через нормаль  $\vec{N}(A, B)$  и точку  $M_0(x_0, y_0)$   
 $\vec{N} \cdot (\vec{OM} - \vec{OM}_0) = 0$   
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
- (d) Каноническое и параметрическое уравнение прямой  
 $M_0 \in L$   
 $\vec{S} = (l, m)$   
 $\vec{S} \parallel L$   
 $\vec{M_0M} = t \vec{S}$   
 $\begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \end{cases}$  - параметрическое уравнение прямой  
 $t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$  - каноническое уравнение прямой  
*Замечание*  
 Если знаменатель 0, то от числителя требуется быть 0, а  $\frac{0}{0}$  - любое число
- (e) Нормальное уравнение  
 $\vec{n}_0 \perp L, |\vec{n}_0| = 1, \rho(0, L) = p \geq 0, M \in L$   
 Зададим  $\vec{n}_0$  через направляющие косинусы:  
 В такой записи  $\vec{n}_0$  смотрит в сторону прямой  $L$   
 $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$   
 $\text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{OM} = p \Leftrightarrow (\vec{OM}, \vec{n}_0) = p \Leftrightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

- (f) Полярное уравнение прямой

Рассмотрим полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Отсюда  $r \cos \phi \cos \alpha + r \sin \phi \sin \alpha - p = 0 \Leftrightarrow r \cos(\phi - \alpha) = p$  - полярное уравнение прямой, где  $\phi$  - угол наклона точки,  $\alpha$  - угол наклона нормали,  $r$  - расстояние до точки,  $p$  - расстояние до прямой

$$\cos(\phi - \alpha) = \frac{p}{r}$$

## 2. Плоскость в пространстве

- (a) Общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

- (b) Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ если } \alpha \text{ не проходит через } (0, 0, 0)$$

$a, b, c$  - отрезки на координатных осях, которые отсекает плоскость

- (c) Через нормаль  $\vec{N}(A, B, C)$  и точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{N} \cdot (\vec{OM} - \vec{OM}_0) = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- (d) Через параллельный вектор  $\vec{a}$  и точки  $M_1, M_2$ .

Выберем произвольную точку  $M$ .

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_1M_2M_1M} \vec{a} = 0$$

- (e) Нормальное уравнение

$$\vec{n}_0 \perp \alpha, |\vec{n}_0| = 1, \rho(0, \alpha) = p \geq 0, M \in \alpha$$

В такой записи  $\vec{n}_0$  смотрит в сторону плоскости  $\alpha$

Зададим  $\vec{n}_0$  через направляющие косинусы:

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\text{Пр}_{\vec{n}_0} \vec{OM} = p \Leftrightarrow (\vec{OM}, \vec{n}_0) = p \Leftrightarrow x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

## 3. Прямая в пространстве

- (a) Первый способ задания

$$\text{i. } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$$

$$(A_1, B_1, C_1) \nparallel (A_2, B_2, C_2)$$

(b) Из первого способа

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0, & \vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0, & \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$$

$$(A_1, B_1, C_1) \nparallel (A_2, B_2, C_2)$$

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

Точку  $M_0$  находим путем подстановки одной из координат в систему.

(c) Каноническое и параметрическое уравнение прямой

$$M_0 \in L$$

$$\vec{S} = (l, m, n)$$

$$\vec{S} \parallel L$$

$$\overrightarrow{M_0M} = t \vec{S}$$

$$\begin{cases} x = tl + x_0 \\ y = tm + y_0 \\ z = tn + z_0 \end{cases} \text{ - параметрическое уравнение прямой}$$

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \text{ - каноническое уравнение прямой}$$

*Замечание*

Если знаменатель 0, то от числителя требуется быть 0, а  $\frac{0}{0}$  - любое число

## 1. Расстояние от точки до прямой в плоскости

$L : x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  - нормальное уравнение

$M' = (x', y')$  - точка

$$d = \rho(M', L)$$

$$\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\delta = \text{Pr}_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM'} - p$$

$$d = |\delta| = |x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p| = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 2. Расстояние от точки до плоскости

$L : x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$  - нормальное уравнение

$M' = (x', y', z')$  - точка

$$\begin{aligned}
d &= \rho(M', L) \\
\vec{n}_0 &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\
\delta &= \text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{OM'} - p \\
d = |\delta| &= |x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma - p| = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{aligned}$$

### 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве

$$\begin{aligned}
L(\vec{S}, N_0) \\
M' = (x', y', z') \\
d = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{S}|}{|\vec{S}|}
\end{aligned}$$

### 4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$d(L_1, L_2) = \frac{V_{\text{параллелепипеда } \vec{S_1}\vec{S_2}\vec{M_1M_2}}}{S_{\text{плоскости } \vec{S_1}\vec{S_2}}} = \frac{|\vec{S_1}, \vec{S_2}, \vec{M_1M_2}|}{|\vec{S_1} \times \vec{S_2}|}$$

## Взаимное расположение прямой и плоскости

#### 1. $L \parallel \alpha$ или $L \subset \alpha$

Условие параллельности:

$$\begin{aligned}
L(\vec{S}, M_0) \\
\alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \\
\vec{S} \perp \vec{N} \Leftrightarrow (\vec{S}, \vec{N}) = 0 \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0 \\
M_0 \in \alpha \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Leftrightarrow L \subset \alpha \\
\rho(L, \alpha) = \rho(M_0, \alpha)
\end{aligned}$$

#### 2. $L \cap \alpha = P$

Пересечение возможно найти, решая систему уравнений.

## Взаимное расположение

#### 1. прямых на плоскости

$$\begin{aligned}
L_1 \parallel L_2 \text{ или } L_1 = L_2 \\
\text{при } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \vec{N_1} \parallel \vec{N_2} \Leftrightarrow \vec{S_1} \parallel \vec{S_2} \Leftrightarrow \frac{S_{1x}}{S_{2x}} = \frac{S_{1y}}{S_{2y}} \\
\text{Причем } L_1 = L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}
\end{aligned}$$

#### 2. плоскостей в пространстве

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \text{ или } \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\text{при } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$$

$$\text{Причем } \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

### 3. прямых в пространстве

- (а)  $L_1 \parallel L_2$  или  $L_1 = L_2$   
 при  $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \Leftrightarrow \frac{S_{1x}}{S_{2x}} = \frac{S_{1y}}{S_{2y}} = \frac{S_{1z}}{S_{2z}}$   
 Причем  $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2$
- (б)  $P = L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \vec{S}_1 \nparallel \vec{S}_2 \wedge \vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{компланарны} \Leftrightarrow$   

$$\begin{cases} \vec{S}_1 \nparallel \vec{S}_2 \\ (\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) = 0 \end{cases}$$
- (с)  $L_1, L_2 - \text{скрещиваются} \Leftrightarrow \vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{не компланарны} \Leftrightarrow$   

$$(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \overrightarrow{M_1 M_2}) \neq 0$$

### Задача о поиске общего перпендикуляра $L$ к $L_1$ и $L_2$

Пусть  $\alpha_1(L_1, L)$   
 $\alpha_2(L_2, L)$

Найдем  $\vec{S} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2$ .

$$\vec{N}_1 = \vec{S}_1 \times \vec{S}$$

$$\vec{N}_2 = \vec{S}_2 \times \vec{S}$$

Отсюда  $\alpha_1(\vec{N}_1, M_1), \alpha_2(\vec{N}_2, M_2)$

Тогда  $L = \alpha_1 \cap \alpha_2$

### Задача о поиске точки $P'$ , симметричной данной точке $P$

#### 1. Относительно плоскости $\alpha$

Возьмем вектор нормали  $\vec{N} = (A, B, C)$

$$\vec{N} \parallel PP'.$$

Отсюда  $PP' : \frac{x - p_x}{A} = \frac{y - p_y}{B} = \frac{z - p_z}{C} = t \in \mathbb{R}$ . Решая систему,

найдем  $Q = \alpha \cap PP'$

$$P' = P + 2\vec{PQ}$$

#### 2. Относительно прямой $L(\vec{S}, M_0)$ в пространстве

Пусть  $\alpha(P, \vec{S})$

$$Q = \alpha \cap L$$

$$P' = P + 2\overrightarrow{PQ}$$

### 1.3 Кривые второго порядка на плоскости

#### Определение

*Алгебраические уравнения второго порядка* - это уравнения вида  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$  ( $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ ), где  $x, y$  - координаты точек в д.с.к.

Кривые второго порядка:

#### 1. Невырожденные

- (a) Эллипс
- (b) Гипербола
- (c) Парабола

#### 2. Вырожденные

- (a) пара пересекающихся прямых
- (b) пара параллельных прямых
- (c) пара совпадающих прямых(прямая)
- (d) точка
- (e)  $\emptyset$

#### 1.3.1 Канонические уравнения невырожденных кривых второго порядка и их основные свойства

##### 1. Эллипс

- (a) Определение 1:

Геометрическое место точек, для которых сумма расстояний для двух данных точек  $F_1$  и  $F_2$  - величина постоянная и равная  $2a$

$$F_1M + F_2M = 2a > F_1F_2$$

- (b) Каноническое уравнение:

*Эллипс рассматривается в канонической д.с.к*

$$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$$

Тогда эллипс задается уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где

$a$  - большая полуось

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$  - малая полуось

$F_1, F_2$  - фокусы

$r_1 = MF_1, r_2 = MF_2$  - фокальные радиусы

- (c) Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

Если эллипс - окружность, то  $\varepsilon = 0$

- (d) Фокальные радиусы:

$$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$$

- (e) Директрисы:

$$D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c}$$

$$D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon, \text{ где } d_i = \rho(M, D_i)$$

- (f) Определение 2:

Геометрическое место точек, для которых отношение  $\frac{r}{d} = \text{const} < 1$ , где  $r$  - расстояние до данной точки  $F$  на плоскости,  $d$  - расстояние до данной прямой  $D$  на плоскости

## 2. Гипербола

- (a) Определение 1:

Геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  - величина постоянная и равная  $2a$

$$|F_1M - F_2M| = 2a < F_1F_2$$

- (b) Каноническое уравнение:

*Гипербола рассматривается в канонической д.с.к.*

$$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), c > a$$

Тогда гипербола задается уравнением  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , где



$a$  - действительная полуось

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$  - мнимая полуось

$F_1, F_2$  - фокусы

$r_1 = MF_1, r_2 = MF_2$  - фокальные радиусы

$y = \pm \frac{b}{a}x$  - асимптоты

Если  $a = b$ , то гипербола называется *равнобочной*

(с) Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

(d) Фокальные радиусы:

Левая вервь:  $r_{1,2} = -\varepsilon x \mp a$

Правая вервь:  $r_{1,2} = \varepsilon x \pm a$

(e) Директрисы:

$$D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{a^2}{c}$$

$$D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon, \text{ где } d_i = \rho(M, D_i)$$

(f) Определение 2:

Геометрическое место точек, для которых отношение  $\frac{r}{d} = \text{const} >$

1, где  $r$  - расстояние до данной точки  $F$  на плоскости,  $d$  - расстояние до данной прямой  $D$  на плоскости

### 3. Парабола

(a) Определение 1:

Геометрическое место точек, для которых расстояние до фиксированной точки плоскости  $F$  и до прямой  $D$  равны

$$\rho(M, D) = MF$$

(b) Каноническое уравнение:

*Эллипс рассматривается в канонической д.с.к.*

$\rho(F, D) = p$  - фокальный параметр

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$D : x = -\frac{p}{2}$$

$y^2 = 2px$  - каноническое уравнение, где

$r = MF$  - фокальный радиус

$D$  - директриса

(с) Эксцентриситет:

$$\varepsilon = 1$$

(d) Фокальные радиусы:

$$r = x + \frac{p}{2}$$

(e) Директрисы:

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1$$

(f) Определение 2 = Определение 1

## Определение

*Касательная* - предельное положение секущей

### 1. Эллипс

(a) Касательная:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \text{ где } (x_0, y_0) - \text{точка касания}$$

(b) Полярная система координат:

Начало координат выбрано в одном из фокусов  $F$ , ось задана в сторону соответствующей директрисы  $D$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$

$p = q\varepsilon$  - фокальный параметр

$q$  - расстояние от  $F$  до  $D$

$$q = \frac{a}{\varepsilon} - c \Rightarrow p = a - c\varepsilon = \frac{b^2}{a}$$

(с) Полярная система координат 2:

Начало координат выбрано в одном из фокусов  $F$ , ось задана в сторону, противоположную соответствующей директрисе  $D$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi + \pi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$

(d) Оптические свойства:

Луч, выпущенный из одного фокуса, попадает во второй

### 2. Гипербола

- (а) Касательная:  
 $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ , где  $(x_0, y_0)$  - точка касания
- (b) Полярная система координат:  
Начало координат выбрано в одном из фокусов  $F$ , ось задана в сторону соответствующей директрисы  $D$   
Для первой ветви:  

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi}$$
Для второй ветви:  

$$r = \frac{-p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$
 $p = q\varepsilon$  - фокальный параметр  
 $q$  - расстояние от  $F$  до  $D$   

$$q = c - \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow p = c\varepsilon - a = \frac{b^2}{a}$$
- (c) Полярная система координат 2:  
Начало координат выбрано в одном из фокусов  $F$ , ось задана в сторону, противоположную соответствующей директрисе  $D$   

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi + \pi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \phi}$$
- (d) Оптические свойства:  
Луч, выпущенный из одного фокуса, отражается так, как если бы он шел из второго фокуса (мнимый источник света).
- (e) Асимптоты гиперболы:  
Пусть асимптота  $y = kx + c$  левой верхней части гиперболы  

$$y = y(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\begin{cases} k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \dots = \frac{a}{b} \\ c = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - kx = \dots = 0 \end{cases}$$
Из симметрии асимптоты  $y = \pm \frac{b}{a}x$

### 3. Парабола

- (а) Касательная:  
 $yy_0 = p(x + x_0)$ , где парабола  $y^2 = 2px$ , где  $(x_0, y_0)$  - точка касания

- (b) Полярная система координат:

Начало координат выбрано в фокусе  $F$ , ось задана в сторону директрисы  $D$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi} = \frac{p}{1 + \cos \phi}$$

$p = q\varepsilon = q$  - фокальный параметр

$q$  - расстояние от  $F$  до  $D$

- (c) Полярная система координат 2:

Начало координат выбрано в фокусе  $F$ , ось задана в сторону, противоположную директрисе  $D$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \phi + \pi} = \frac{p}{1 - \cos \phi}$$

- (d) Оптические свойства:

Луч, выпущенный из фокуса, идет параллельно оси.

### 1.3.2 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0; (a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0)$$

Заметим, что если применить параллельный перенос и поворот, то тип уравнения не изменится.

1.  $a_{12} \neq 0$

Сделаем поворот, чтобы в новом уравнении отсутствовало слагаемое  $x'y'$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Подставим в уравнение и найдем коэффициент при  $x'y'$ :

$$-2a_{11} \cos \alpha \sin \alpha + 2a_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2a_{22} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

Отсюда:

$$\tan^2 \alpha + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \tan \alpha - 1 = 0$$

Отсюда находим  $\alpha$

2.  $a_{12} = 0$

- (a)  $a_{11} \neq 0; a_{22} \neq 0$ :

$$a_{11}x^2 + 2a_1x = a_{11}\left(x^2 + \frac{2a_1}{a_{11}}x\right) = a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_1^2}{a_{11}}$$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}} \\ y' = y + \frac{a_{12}}{a_{22}} \end{cases}$$

и получаем уравнение вида  $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a'_0 = 0$

i.  $a_0 \neq 0$

$$\frac{x'^2}{\frac{-a'_0}{a_{11}}} + \frac{y'^2}{\frac{-a'_0}{a_{22}}} = 1 - \text{парабола или гипербола}$$

ii.  $a_0 = 0$

Точка или скрещивающиеся прямые

(b)  $a_{11} \neq 0; a_{22} = 0$

Сделаем параллельный перенос:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_1}{a_{11}} \\ y' = y \end{cases}$$

и получаем уравнение вида  $a_{11}x'^2 + 2a_2y' + a'_0 = 0$

i.  $a_2 \neq 0$

Парабола

ii.  $a_2 = 0$

Пустое множество, пара скрещивающихся или параллельных прямых

(c)  $a_{11} = 0; a_{22} \neq 0$ :

Аналогично

## 1.4 Поверхности второго порядка

### Определение

Множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют алгебраическим уравнениям второго порядка, называются *поверхностями второго порядка*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0 = 0$$

$$(a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0)$$

### Определение

*Метод сечений* - метод изучения формы поверхности, заданной уравнением в д.с.к., построением сечений фигуры плоскостями (в нашем случае  $x = 0; y = 0; z = 0$ )

Всего 15 типов:

1. Невырожденные

- (a) Эллипсоид
- (b) Двуполостной гиперboloид
- (c) Однополостной гиперboloид
- (d) Параболоиды эллиптические
- (e) Параболоиды гиперболические
- (f) Конус

2. Вырожденные

- (a) Эллиптический цилиндр
- (b) Гиперболический цилиндр
- (c) Параболический цилиндр
- (d) Пара пересекающихся плоскостей
- (e) Пара параллельных плоскостей
- (f) Плоскость
- (g) Прямая
- (h) Точка
- (i)  $\emptyset$

**1.4.1 Невырожденные уравнения второго порядка**

1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Сечения:

- (a)  $x = h \in (-a, a); y = h \in (-b, b); z = h \in (-c, c)$  - эллипс
- (b)  $x = \pm a; y = \pm b; z = \pm c$  - точки
- (c)  $x = h \notin [-a, a]; y = h \notin [-b, b]; z = h \notin [-c, c]$  -  $\emptyset$

2. Гиперboloид

(a) Однополостной

Каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Горловое сечение - сечение в  $z = 0$  (Самое маленькое)

(b) Двуполостной

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Рассмотрим сечение  $z = h$ :

Сечение  $\emptyset$  при  $h < c$

Сечение - точка при  $h = c$

3. Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Если  $a = b$ , то конус - *конус вращения*

В таком случае поверхность образована прямыми, проходящими через  $(0, 0)$

Сечения:

(a)  $z = 0$  - точка

(b)  $z = h \neq 0$  - эллипс

(c)  $mx + ny = 0$  - скрещивающиеся прямые

(d)  $z = \pm \frac{c}{a}x$  - гипербола

(e) Секущая прямая, параллельная прямой на поверхности - парабола

4. Параболоиды

(a) Эллиптический

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$$

$p = q$  - параболоид вращения

Сечения:

i.  $z = h \geq 0$  - эллипс

ii.  $x = h; y = h$  - параболы

(b) Гиперболический

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

Сечения:

- i.  $z = h \neq 0$  - гиперболы
- ii.  $z = 0$  - скрещивающиеся прямые-асимптоты гипербол
- iii.  $x = h; y = h$  - параболы

#### 1.4.2 Цилиндрические поверхности

##### Определение

Поверхность, образованная всеми прямыми  $L$ , проходящими через точку пространственной кривой  $l$  параллельно заданному вектору  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , называется *цилиндрической поверхностью*

$L$  - образующая поверхность

$l$  - направляющая

##### Утверждение

Множество точек пространства, удовлетворяющих заданному уравнению  $F(x, y) = 0$ , образуют цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной  $OZ$ , и направляющей плоской кривой, задаваемой уравнением  $F(x, y) = 0$  в плоскости, параллельной  $OXY$

#### 1.4.3 Цилиндрические поверхности второго порядка

1. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. Параболический цилиндр

$$y = 2px^2$$

4. Пара пересекающихся плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$



5. Пара параллельных плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

6. Плоскость

$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$

## 2 Линейная алгебра

### 2.1 Алгебраические структуры

#### 2.1.1 Алгебраическая структура. Группа

##### Определение

Пусть у нас есть множества  $A, B, C$ .  $*$  :  $A \times B \rightarrow C$  - закон внешней композиции

Если при этом  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$  - закон внутренней композиции - алгебраическая операция - бинарная операция

##### Определение

1.  $a * b = b * a$  - коммутативность (симметричность)

2.  $(a * b) * c = a * (b * c)$  - ассоциативность

##### Определение

$(A, \Omega, S)$ , где  $A$  - множество,  $\Omega$  - множество отношений,  $S$  - множество алгебраических операций называется алгебраической структурой

$S = \emptyset$  - модель

$\Omega = \emptyset$  - алгебра (возможна коллизия имен с будущими "алгебрами")

##### Определение

$(A, *)$  - группа, если

1.  $(a * b) * c = a * (b * c)$  - ассоциативность \*

2.  $\exists e : e * a = a * e = a$

3.  $\exists a^{-1} : a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

(считаем, что во всех множествах определено отношение равенства)

### Определение

Группа называется *Абелевой*, если  $a * b = b * a$  (умножение коммутативно)

### Уточнение

*Исторические обозначения*

1.  $*$  иногда обозначают  $+$  в Абелевых группах. Нейтральный элемент обозначают  $0$  и называют *нулем*. Обратный элемент называют *противоположным*. Группу называют *аддитивной*
2.  $*$  иногда обозначают  $\cdot$  в группах. Нейтральный элемент обозначают  $1$  и называют *единицей*. Обратный элемент называют *обратным*. Группу называют *мультипликативной*

### Свойства Абелевых групп

1.  $a + x = b + x \Leftrightarrow a = b$

#### Доказательство

$a + x + (-x) = b + x + (-x)$ , т.к. если к равным элементам прибавить другие равные элементы, то результаты действий равны

$a + (x + (-x)) = b + (x + (-x))$ , т.к.  $+$  ассоциативен

$$a + 0 = b + 0$$

$$a = b, \text{ ч.т.д.}$$

2.  $a + x = b \Rightarrow \exists!$  решение  $x$  уравнения;  $x = b + (-a)$

#### Доказательство

Докажем, что  $x = b + (-a)$  - решение

$$a + (b + (-a)) = b$$

$$a + b + (-a) = a + (-a) + b = b, \text{ ч.т.д.}$$

Докажем, что  $x$  - единственный

Пусть  $x_1, x_2$  - решения:

$$a + x_1 = b = a + x_2$$

$$\text{Тогда } a + x_1 + (-a) = a + x_2 + (-a)$$

$$a + (-a) + x_1 = a + (-a) + x_2$$

$$x_1 = x_2. \text{ Отсюда существует одно решение, ч.т.д.}$$

3.  $0$  и  $-a$  - единственные

#### Доказательство

Пусть  $\mathbb{O}'$  - нейтральный элемент

$$a + \mathbb{O}' = a$$

Из второго свойства  $\mathbb{O}' = a + (-a) = \mathbb{O}$ . Тогда нулевой элемент единственный

Пусть  $(-a)'$  - противоположный элемент

$$a + (-a)' = \mathbb{O}$$

$(-a)' = \mathbb{O} + (-a) = -a$ . Отсюда противоположный элемент единственный, ч.т.д.

### 2.1.2 Кольцо и поле

#### Определение

Рассмотрим  $(K, +, \cdot)$ :

1.  $+$  ассоциативно
2.  $+$  коммутативно
3. Существует нейтральный элемент  $\mathbb{O}$  по  $+$
4. Существует противоположный элемент по  $+$
5.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  - правая дистрибутивность  
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  - левая дистрибутивность
6.  $\cdot$  ассоциативно
7.  $\cdot$  коммутативно
8. Существует нейтральный элемент  $\mathbb{1} \neq \mathbb{O}$  по  $\cdot$
9. Существует противоположный элемент по  $\cdot$  для всех элементов кроме элемента  $\mathbb{O}$

Если выполняются аксиомы:

1. 1-5 - *кольцо* (тогда аксиомы 1-4 - *аддитивная группа кольца*)
2. 1-6 - *ассоциативное кольцо*
3. 1-7 - *ассоциативное коммутативное кольцо*
4. 1-8 - *ассоциативное коммутативное кольцо с единицей*

5. 1-9 - *Поле* (тогда аксиомы 6-9 - Абелева группа для ненулевых элементов по умножению - *мультипликативная группа кольца*)

### Свойства

1.  $K$  - ассоциативное коммутативное кольцо

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

**Доказательство**

$$a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$$

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$$

$$a \cdot 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

2.  $K$  - ассоциативное коммутативное кольцо с единицей

Тогда  $1$  единственное

**Доказательство**

Пусть есть  $1'$  - нулевой элемент по умножению

Тогда  $1' = 1 \cdot 1' = 1$ . Отсюда  $1$  единственная

3. **Определение**

$K$  называется *областью целостности*, если  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Всякое поле является областью целостности

**Доказательство**

Пусть  $a \neq 0$ . Тогда для него есть противоположный элемент  $a^{-1}$

$$ab = 0$$

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$$

$$(a^{-1}a)b = 0$$

$$1b = 0$$

$$b = 0, \text{ ч.т.д.}$$

### 2.1.3 Линейное пространство. Алгебра

Рассмотрим  $(V, +, \cdot)$ , где

$$+ : V \times V \rightarrow V,$$

$$\cdot : V \times K \rightarrow V (\text{операция умножения на скаляр}), K - \text{поле}$$

$$\cdot : V \times V \rightarrow V$$

$$a, b, c \in V; \alpha, \beta \in K$$

1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$

2.  $a + b = b + a$
3.  $\exists 0 \in V : a + 0 = a$
4.  $\exists -a \in V : (-a) + a = a + (-a) = 0$
5.  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$  - дистрибутивность
6.  $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$
7.  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
8.  $\exists 1 \in K : 1a = a1 = a$
9.  $(a + b)c = ac + bc$  - правая дистрибутивность  
 $a(b + c) = ab + ac$  - левая дистрибутивность
10.  $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$
11.  $(ab)c = a(bc)$
12.  $ab = ba$
13.  $\exists! e \in V : ea = ae = a$
14.  $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} \in V : a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Если выполняются аксиомы:

1. 1-4 - Абелева аддитивная группа
2. 1-4,9 - кольцо
3. 1-8 - линейное пространство над полем  $K$
4. 1-10 - *алгебра*
5. 1-11 - ассоциативная алгебра
6. 1-12 - ассоциативная коммутативная алгебра
7. 1-13 - ассоциативная коммутативная унитарная алгебра
8. 1-14 - ассоциативная коммутативная унитарная алгебра с делением

### Свойства

Все свойства кольца переносятся на алгебру

Все свойства абелевой группы переносятся на линейное пространство

1.  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

**Доказательство**

$$\exists -a \cdot 0$$

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$$

$$0 = a \cdot 0, \text{ ч.т.д.}$$

2.  $\alpha \cdot 0 = 0$

Доказательство аналогично

### Примеры линейных пространств

1.  $\mathbb{R}^n$

2.  $V_3$  - пространство векторов (направленных отрезков)

3. Пространство функций  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

4.  $P_n$  - пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не более  $n$

#### 2.1.4 Нормированное и метрическое пространство

##### Определение

Норма  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  :, где  $V$  - линейное пространство

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  - невырожденность

2.  $\forall \lambda \in K \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  - однородность

3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  - неравенство треугольника

$(V, \|\cdot\|)$  - нормированное пространство

##### Свойства

1.  $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$$\|0\| = \|0 \cdot 0\| = 0 \cdot \|0\| = 0$$

$$2. \|x\| \geq 0$$

**Доказательство**

$$0 = \|\emptyset\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$$

$$0 \leq \|x\|$$

### Определение

Пусть  $X$  - множество

Метрика  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  :

$$1. \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y - \text{ невырожденность}$$

$$2. \rho(x, y) = \rho(y, x) - \text{ симметричность}$$

$$3. \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) - \text{ неравенство треугольника}$$

В метрическом пространстве норма  $\|\cdot\|$  порождает метрику  $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Нормы

1. Евклидова норма:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Сфера - привычная

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\| \cdot \|y\| - \text{ неравенство Коши-Буняковского (Шварца)}$$

2. Октаэдрическая норма

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Сфера - октаэдр

3. Кубическая норма

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$$

Сфера - куб

### Определение

Пусть  $V$  - алгебра над полем  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$(V, \|\cdot\|)$  - называется нормированной алгеброй, если норма согласована с операцией умножения аргументов:

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Если алгебра с единицей  $e$ , то требуется  $\|e\| = 1$

### Определение

Отношение эквивалентности  $\sim$  - рефлексивное симметричное транзитивное отношение

Примеры

1. Равенство
2. Параллельность
3. Подобие
4. Эквивалентность функций  $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1)$

### Определение

Два элемента принадлежат одному классу эквивалентности, если между ними выполняется отношение эквивалентности

$M_a = \{b \in M : b \sim a\}$ , где  $\sim$  - отношение эквивалентности

### Свойства

1.  $\forall a \ M_a \neq \emptyset$ , т.к.  $a \in M_a$  по рефлексивности
2.  $\forall a, b \ (M_a = M_b) \oplus (M_a \cap M_b = \emptyset)$

### Определение

$f_M = \{M_a\}_{a \in M}$  - фактор-множество (фактор-пространство) множества  $M$

## 2.2 Алгебра комплексных чисел

### 2.2.1 Нормированное пространство комплексных чисел

#### Определение

Множеством комплексных чисел  $\mathbb{C}$  назовем элементы линейного пространства  $\mathbb{R}^2$  над полем  $\mathbb{R}$  с евклидовой нормой

$$z \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$$



и выполнены все свойства операций сложения векторов и умножения их на скаляр

Различные формы записи комплексного числа

$$1. \quad z \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \text{декартова форма записи} \\ z = (x, y)$$

$$2. \quad \text{В базисе } \vec{e}, \vec{i} : |\vec{e}| = |\vec{i}| = 1, \vec{e} \perp \vec{i} \\ z = x \cdot e + y \cdot i \\ x \cdot e \leftrightarrow x \\ z = x + yi - \text{алгебраическая форма записи, где } i - \text{мнимая единица}$$

$$x = \operatorname{Re} z - \text{действительная часть} \\ y = \operatorname{Im} z - \text{мнимая часть}$$

$$\text{Если } \operatorname{Re} z = 0, \text{ чисто мнимое} \\ \text{Если } \operatorname{Im} z = 0, \text{ чисто действительное, } z \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad \text{Введем полярную систему координат} \\ \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \\ z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) - \text{тригонометрическая форма записи} \\ |z| = r \\ \arg z = \phi - \text{аргумент, } \arg z \in [0, 2\pi) \text{ или } \arg \in [-\pi, \pi) (\text{возможен любой диапазон шириной } 2\pi) \\ \operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi) - \text{главный аргумент} \\ \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \quad e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \\ |e^{i\phi}| = 1 \\ \arg e^{i\phi} = \phi \\ z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = re^{i\phi} - \text{показательная форма}$$

### 2.2.2 Нормированная алгебра комплексного числа

Введем операцию умножения, согласованную с нормой:  
Заметим, что

$$i^2 = i \cdot i = \lambda + \mu i \in \mathbb{C}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\text{С одной стороны, } \forall x \in \mathbb{R} \quad |i^2 + ix|^2 = |i(i+x)|^2 \leq |i|^2 |i+x|^2 = |i+x|^2 = x^2 + 1$$

$$\text{С другой стороны, } \forall x \in \mathbb{R} \quad |i^2 + ix|^2 = |\lambda + \mu i + ix|^2 = \lambda^2 + (\mu + x)^2 = \lambda^2 + 2\mu x + \mu^2 + x^2$$

$$\text{Отсюда } \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 + 2\mu x + \mu^2 \leq 1$$

Такое возможно только при  $\mu = 0$

$$\text{Тогда } \lambda^2 \leq 1$$

$$\text{Тогда } i^2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2 \leq \sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4} = |(\lambda + 1) + 2i| = |i^2 + 2i + 1| = |(i + 1)^2| \leq |i + 1|^2 = \sqrt{2} = 2$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{(\lambda + 1)^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$i^2 = -1$$

### Определение

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Отсюда  $(1, 0) = e = 1$  - нейтральный элемент относительно умножения

$$z_1 z_2 = (r_1 \cos \phi_1 r_2 \cos \phi_2 - r_1 \sin \phi_1 r_2 \sin \phi_2) + i(r_1 \cos \phi_1 r_2 \sin \phi_2 + r_2 \cos \phi_2 r_1 \sin \phi_1) = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)) = |z_1| |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Отсюда  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  - согласование с умножением

Геометрический смысл умножения: поворот первого вектора на аргумент второго с изменением длины в  $|z_2|$  раз

Проверим аксиомы:

1. Левая и правая дистрибутивность:

Проверяется через декартову форму раскрытием скобок

2. Инвариант порядка умножения на скаляр:

Проверяется через декартову форму раскрытием скобок

$\mathbb{C}$  - нормированная ассоциативная коммутативная алгебра с единицей

## 2.2.3 Операция сопряжения комплексного числа. Поле

### Определение

$$\text{Пусть } z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi \text{ - сопряженное с } z$$

$\bar{z}$  и  $z$  симметричны относительно  $OX$

$$\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}$$

### Свойства

1.  $\overline{\bar{z}} = z$

2.  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

3.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

4.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

5.  $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$

6.  $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

7.  $\forall z \neq 0 \exists z^{-1} : z z^{-1} = z^{-1} z = 1$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)) = \frac{1}{|z|}(\cos \phi - i \sin \phi)$$

Отсюда  $C$  - поле

Тогда введем операцию деления:  $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

8.  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

9.  $|z| = |\bar{z}|$

10.  $z \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

### Замечание

Если  $V$  - конечномерное пространство, то все нормы этого пространства эквивалентны, т.е.  $\rho_1(x) = \Theta(\rho_2(x))$

## 2.2.4 Формула Муавра

Корень  $n$ -ой степени из комплексного числа

### Свойства

1.  $e^{2\pi i k} = 1$

$$2. e^{i(\phi_1+\phi_2)} = e^{i\phi_1}e^{i\phi_2}$$

$$3. |e^{i\phi}| = 1$$

$$4. e^{-i\phi} = \frac{1}{e^{i\phi}}$$

$$5. \cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \text{ - формулы Эйлера}$$

$$6. z^n = |r|^n e^{ni\phi}, n \in \mathbb{Z} \text{ - формула Муавра}$$

Найдем  $z : z = \sqrt[n]{w}$

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\phi = \arg w + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } \begin{cases} |z|^n = |w| \\ \phi = \frac{\arg w + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из основной теоремы алгебры  $w = z^n$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратности

$$z = \sqrt[n]{|w|} e^{i \frac{\arg w + 2\pi k}{n}}, k \in 0 \dots n-1$$

**Следствие**

$$\sqrt{z} = \sqrt{a+bi} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}, b > 0 \\ \pm \sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \mp i \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}, b < 0 \end{cases}$$

### 2.2.5 Применение

1. Пусть  $p(z)$  - многочлен  $n$ -ой степени с действительными коэффициентами,

$$\text{Тогда } p(x) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\text{Отсюда } p(\bar{x}) = \overline{p(x)}$$

$$\text{Отсюда } p(z) = 0 \Leftrightarrow p(\bar{z}) = 0$$

$$2. \sin^3 \phi = \left( \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\phi} - 3e^{i\phi} + 3e^{-i\phi} - e^{-3i\phi}}{-8i} = \frac{e^{3i\phi} - e^{-3i\phi} + 3e^{-i\phi} - 3e^{i\phi}}{-8i} =$$

$$-\frac{1}{4} \sin 3\phi + \frac{3}{4} \sin \phi$$

$$3. \cos 3\phi = \operatorname{Re}(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = \operatorname{Re}((\cos \phi + i \sin \phi)^3) = \cos^3 \phi - 3 \cos \phi \sin^2 \phi$$

$$4. \sum_{k=0}^n \sin kx = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n e^{ikx} \stackrel{q=e^{ix}}{=} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^n q^k = \operatorname{Im} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \operatorname{Im} \frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}} =$$

$$\operatorname{Im} \frac{e^{\frac{ix(n+1)}{2}} (e^{-\frac{ix(n+1)}{2}} - e^{\frac{ix(n+1)}{2}})}{e^{\frac{ix}{2}} (e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}})} = \operatorname{Im} e^{\frac{inx}{2}} \frac{2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{2i \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}$$

### 2.2.6 Экспонента комплексного числа

Пусть  $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy}$ , где  $z = x + iy$

Свойства:

1.  $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$   
 $\arg e^z = y = \operatorname{Im} z$
2.  $e^{2\pi ki} = 1, k \in \mathbb{Z}$
3.  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
4.  $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
5.  $e^{z+2\pi ki} = e^z$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

**Тригонометрические функции**

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

$$2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} 2z$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{1 + \operatorname{ch} z}{2}$$

$$\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{2}$$

$$1 - \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$$

$$\operatorname{cth}^2 z - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$$

$$\operatorname{sh} -z = -\operatorname{sh} z$$

$$\operatorname{ch} -z = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{th} -x = -\operatorname{th} x$$

$$\operatorname{cth} -x = -\operatorname{cth} x$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin z = \frac{\operatorname{sh} iz}{i}$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz$$

### 2.2.7 Логарифм комплексного числа

Пусть  $w = \ln z$ ,  $w = u + iv$

Тогда  $z = e^w = e^u(\cos v + i \sin v)$

$$w = \ln |z| + i \arg z$$

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}$$

**Замечание**

$\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  - с точностью до периода

## 2.3 Линейные пространства

Для всех линейных пространств над полем  $K$ :

$K = \mathbb{R}$  - вещественное линейное пространство

$K = \mathbb{C}$  - комплексное линейное пространство

### 2.3.1 Линейная комбинация

#### Определение

*Линейной комбинацией* векторов  $v_1, v_2, \dots, v_n$  из  $V$  называется вектор

$$\sum_{i=1}^n d_i v_i, d_i \in K$$

#### Определение

Вектора  $u, v$  называются *пропорциональными*, если  $\exists k : u = kv$  или  $v = ku$

#### Определение

Пусть  $v_1, \dots, v_m \in V$

*Линейная оболочка* векторов  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n d_i v_i : d_i \in K \right\}$  - мно-

жество всех линейных комбинаций

#### Определение

Система векторов является *линейно независимой*, если любая линейная комбинация тривиальна, т.е.

$$\sum_{i=1}^n d_i v_i = 0 \Leftrightarrow d_1 = \dots = d_n = 0$$

Иначе система *линейно зависима*

#### Теорема

1. Система линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-то вектор является линейной комбинацией других
2. Если подсистема линейно зависима, то и система линейно зависима
3. Если  $v_1, \dots, v_n$  линейно независима и  $v_1, \dots, v_{n+1}$  линейно зависима, то  $v_{n+1}$  - линейная комбинация  $v_1, \dots, v_n$

#### Следствие

1.  $0 \in V \Rightarrow V$  - линейно зависима
2. Если система линейно независима, то подсистема линейно независима
3. Если в системе есть пропорциональные вектора, то система линейно зависима

### Теорема о прополе

Если в системе есть хотя бы один ненулевой вектор, то всегда можно выделить линейно независимую подсистему с сохранением исходной линейной оболочки

### Алгоритм

Рассмотрим все "префиксы"  $S_i = \{v_1, \dots, v_i\}$  нашей системы нашей системы  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

Пойдем от префикса  $S_n$ . Если  $\text{span } S_i = \text{span } S_{i-1}$ , то  $v_i$  - линейная комбинация. Тогда выкинем его

Т.о. оставшиеся вектора будут линейно независимой подсистемой с исходной линейной оболочкой

## 2.3.2 Порождающая система. Конечномерные пространства. Базис

### Определение

Система  $v_1, v_2, \dots$  называется *порождающей* в пространстве  $V$ , если любой вектор из  $V$  может быть представлен как линейная комбинация этих векторов

Если существует такая конечная система, то пространство  $V$  *конечномерная*

Иначе *бесконечномерная*

### Теорема

Следующие утверждения эквивалентны

1.  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - линейно независимая и порождающая
2.  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - максимальная линейно независимая система из  $V$



3.  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - минимальная порождающая система в  $V$

### Определение

$v$  называют *базисом* пространство  $V$

### Доказательство $1 \Rightarrow 2$

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - линейно независимая и порождающая ( $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ )

Возьмем линейно независимую систему  $u_1, \dots, u_m$

Рассмотрим  $u_1, v_1, \dots, v_n$ . Эта система линейно зависима

Выполним прополку справа и получим  $u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ . Тогда мы получили линейно независимую систему, в которой количество элементов не превосходит  $n$  (т.к. как минимум один мы выкинули)

Будем аналогично последовательно добавлять слева остальные элементы из  $u$ . После прополки  $u$  не уйдут, т.к. они линейно независимы и находятся слева

При этом в получившейся системе количество элементов также не превосходит  $n$ . Тогда  $m \leq n$ , а значит  $v$  - максимальный набор, ч.т.д.

### Доказательство $1 \Leftarrow 2$

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - максимальная линейно независимая система из  $V$

Добавим в нее любой вектор  $u$  из  $V$ . Из максимальной новая система будет линейно зависимой. Отсюда  $u$  - линейная комбинация  $v$ . Т.к. вектор любой, то любой вектор из  $V$  является линейной комбинацией  $v$ . Тогда  $v$  - порождающая, ч.т.д.

### Доказательство $1 \Rightarrow 3$

$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - линейно независимая и порождающая ( $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ )

$u_1, \dots, u_m$  - порождающая система

Рассмотрим последовательность  $v_n, u_1, \dots, u_m$ . Т.к.  $u$  порождающая, то мы получили линейно зависимую систему

Выполним для нее прополку справа

В получившейся системе элементов не больше  $m$

Будем аналогично вводить элементы  $v$  слева. Все  $v$  останутся, т.к. они слева и линейно независимы

Тогда в исходной системе будет не менее  $n$  элементов и не более  $m$ . Отсюда  $v$  - минимальная

### Доказательство $1 \Leftarrow 3$

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  - минимальная порождающая система. Применим прополку

С одной стороны, мы получим линейно независимую систему. Т.к. оболочка сохраняется, то система порождающая  
 С другой стороны, новая система не может быть меньше, т.к.  $v$  - минимальная порождающая система

### Теорема

1. Любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса

#### Доказательство

Пусть  $v_1, \dots, v_n$  - наша система

Если она порождающая, то она является базисом

Если она не порождающая, добавим в нее вектор, не являющийся линейной комбинацией и повторим рассуждения

2. Из любой порождающей системы можно извлечь базис

#### Доказательство

Выполним прополку

### 2.3.3 Координаты вектора в линейном пространстве. Изоморфизм линейных пространств

#### Определение

Пусть  $V$  - линейное пространство над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$

Тогда  $\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, x_i \in K$

$x_1, \dots, x_n$  - координаты вектора  $x$  относительно базиса  $e_1, \dots, e_n$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  - координатный столбец

#### Теорема

Координаты любого вектора относительно фиксированного базиса определяются единственным образом

#### Доказательство

Пусть это не так

Тогда  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e_i$

Тогда  $\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i) e_i = 0$

Но т.к. базис линейно независимый, то  $\forall i = 1 \dots n \ x_i - x'_i = 0$ , т.е.  $x_i = x'_i$

Отсюда базис единственный

### Определение

$V, V'$  - линейные пространства над полем  $K$  называются *изоморфизмом* ( $V \cong V'$ ), если существует взаимнооднозначное соответствие (биекция) между  $V$  и  $V'$ , сохраняющее линейность:

$$\left. \begin{array}{l} x \in V \leftrightarrow x' \in V' \\ y \in V \leftrightarrow y' \in V' \end{array} \right\} \Rightarrow x + \lambda y \leftrightarrow x' + \lambda y'$$

### Свойства изоморфизма

$$1. \ 0 \in V \leftrightarrow 0' \in V'$$

#### Доказательство

$0 = 0 + \lambda 0 \leftrightarrow x' + \lambda x'$  при любых  $\lambda$ . Из биекции  $x' = \lambda x'$ , откуда  $x' = 0$

$$2. \ x \in V \leftrightarrow x' \in V' \Rightarrow -x \in V \leftrightarrow -x' \in V'$$

$$3. \ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i x'_i$$

Доказательство методом математической индукции

$$4. \ x_1, \dots, x_m \text{ - линейно (не)зависимое} \Leftrightarrow x'_1, \dots, x'_m \text{ - линейно (не)зависимое}$$

#### Доказательство

Пусть  $x_1, \dots, x_m$  - линейно зависимое

Тогда существует  $(\alpha_m) : \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$

Отсюда  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x'_i = 0$ , а значит  $x'_1, \dots, x'_m$  линейно зависима

$$5. \ x_1, \dots, x_m \text{ - порождающая в } V \Leftrightarrow x'_1, \dots, x'_m \text{ - порождающая в } V'$$

#### Доказательство

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leftrightarrow x' = \sum_{i=1}^m \alpha_i x'_i$$

$$6. \ x_1, \dots, x_m \text{ - базис} \Leftrightarrow x'_1, \dots, x'_m \text{ - базис}$$

**Теорема**

$V, V'$  - конечномерные линейные пространства над полем  $K$

$V \cong V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Из свойства 6

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$

$e'_1, \dots, e'_n$  - базис  $V'$

Определим сопоставление:  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \leftrightarrow x' = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$

Т.к. координаты разложения по базису определяются единственным образом, то сопоставление взаимнооднозначное

Т.к.  $x + \lambda y = \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) e_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) e'_i = \sum_{i=1}^n x_i e'_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i e'_i = x' + \lambda y'$ ,

то выполняется линейность

Тогда  $V, V'$  изоморфны, ч.т.д.

**Следствия**

1. Любое пространство  $V$  над полем  $K$  размерности  $n$  изоморфно пространству  $K^n$

**Доказательство**

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

2.  $\cong$  - отношение эквивалентности на множестве конечномерных линейных пространств над одним и тем же полем

### 2.3.4 Линейное подпространство. Ранг системы векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма

**Определение**

Пусть  $V$  - линейное пространство над полем  $K$

$L \subset V$  - линейное подпространство, если  $L$  - линейное пространство

**Теорема**

$L$  - линейное подпространство  $V \Leftrightarrow \forall x, y \in L, \lambda \in K \lambda x, \lambda x + y \in L$  (т.е.

$L$  замкнуто относительно операции сложения)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Из аксиом 1-8

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Проверим аксиомы:

1,2 следуют из  $L \subset V$

3:  $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda x = 0 \in L$

4:  $\lambda = -1 \Rightarrow -x \in L$

5-8 следуют из  $L \subset L$

**Замечания**

1.  $L$  - линейное подпространство  $\Rightarrow 0 \in L$

2.  $\dim L \leq \dim V$

**Доказательство**

Пусть  $\dim L > \dim V = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$

Тогда  $\exists e_{n+1}$  такой, что  $e_1, \dots, e_{n+1}$  - линейно независимые, что невозможно в  $V$

**Определение**

Пусть  $v_1, \dots, v_m \in V$

Линейно независимая подсистема  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  называется *базой набора*, если  $L = \text{span}(v_1, \dots, v_m) = \text{span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$

Другими словами,  $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$  - базис линейного подпространства  $L$

**Определение**

$\text{rg}(v_1, \dots, v_m) = \dim(\text{span}(v_1, \dots, v_m))$  - ранг системы векторов

**Определение**

*Элементарными преобразованиями системы векторов* называются следующие операции:

1. Добавление в набор нулевого вектора/удаление из набора нулевого вектора
2. Перестановка векторов
3. умножение любого вектора на  $\lambda \neq 0$
4. замена любого вектора на его сумму с любыми другими векторами набора

### Теорема

Ранг системы векторов не меняется при элементарных преобразованиях этой системы

### Определение

Пусть  $L_1, L_2$  - линейные подпространства  $V$

$$L_1 \cap L_2 = \{x \in V : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$$

$$L_1 + L_2 = \{x + y : x \in L_1, y \in L_2\}$$

Пересечение и сумма являются линейными подпространствами

### Теорема (формула Грассмана)

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

### Доказательство

Пусть  $L_1 \cap L_2 \neq \{\emptyset\}$

Тогда  $L_1 \cap L_2 = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ , где  $e_1, \dots, e_k$  - базис

Дополним  $e_1, \dots, e_k$  векторами  $u_1, \dots, u_m$  до базиса  $L_1$

Тогда  $\dim L_1 = k + m$

Дополним  $e_1, \dots, e_k$  векторами  $v_1, \dots, v_s$  до базиса  $L_2$

Тогда  $\dim L_2 = k + s$

Докажем, что  $L_1 + L_2 = \text{span}(e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_s)$  и система  $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_s$  - базис

1. Система порождающая

2. Система линейно независимая

Докажем  $\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i u_i + \sum \gamma_i v_i = \mathbb{0}$ :

$$A = \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i u_i = \sum -\gamma_i v_i$$

Заметим, что  $A \in L_1, L_2$ . Отсюда  $A = \sum \omega_i e_i$

$$\text{Тогда } \sum \omega_i e_i + \sum \gamma_i v_i = \mathbb{0}$$

$$\text{Отсюда } \sum \omega_i e_i = \sum \gamma_i v_i = \mathbb{0}$$

Тогда  $\forall i \ \omega_i = 0, \forall i \ \gamma_i = 0$

$$\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i u_i = \sum \omega_i e_i = \mathbb{0}$$

$$\text{Тогда } \sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i u_i$$

$$\text{Отсюда } \forall i \ \alpha_i = 0, \forall i \ \beta_i = 0$$

Т.о. система линейно независимая, ч.т.д.

### Определение

Линейные подпространства  $L_1, \dots, L_m$  называют *дизъюнктивными*, если  $\forall x_1, \dots, x_m : x_i \in L_i (x_1 + \dots + x_m = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_m = 0)$

### Определение

$L_1, \dots, L_m$  - дизъюнктивные линейные подпространства

Тогда  $\bigoplus L_i := \sum L_i$  - *прямая сумма*

### Теорема(эквивалентность условия прямой суммы)

$L = \sum_{i=1}^m L_i$  - прямая - эквивалентно следующим утверждениям:

1.  $\forall i = 1 \dots m L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = \{0\}$
2. Базис  $L$  - "объединение"(конкатенация) базисов  $L_i$
3.  $\forall x \in L \exists! x_1, \dots, x_m : x_i \in L_i, x = \sum_{i=1}^m x_i$

### Доказательство

Докажем, что исходное утверждение эквивалентно каждому

1. (а)  $\Rightarrow$ : Пусть  $L = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ , т.е.  $L_1, \dots, L_m$  - дизъюнктивные

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^m x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i x_i = 0$$

$$\text{Пусть } v \in L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j$$

$$v \in L_i \Rightarrow v = x_i$$

$$v \in \sum_{j \neq i} L_j \Rightarrow v = x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_m$$

$$\text{Отсюда } x_i = \sum_{j \neq i} x_j$$

$$\text{Тогда } \sum_{j \neq i} x_j - x_i = 0$$

$$\text{Заметим, что } -x_i \in L_i$$

$$\text{Тогда обозначим за } (x'_m) \text{ последовательность } x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_m$$

Из дизъюнктности  $\sum x'_i = 0 \Leftrightarrow x'_i = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Тогда  $L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = \{0\}$ , ч.т.д.

(b)  $\Leftarrow$ : Пусть  $L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = \{0\}, \forall j \ x_j \in L_j, \sum_{j=1}^m x_j = 0$

Тогда  $-x_i = \sum_{j \neq i} x_j \in \sum_{j \neq i} L_j$

$-x_i \in L_i \cap \sum_{j \neq i} L_j = \{0\}$

Отсюда  $-x_i = 0$

Тогда  $\forall i \ x_i = 0$

Отсюда  $L_1, \dots, L_m$  - дизъюнктивные, ч.т.д.

2. (a)  $\Leftarrow$

Пусть  $L_i = \text{span}(e_1^i, \dots, e_{k_i}^i), L = \sum_{i=1}^m L_i$  - прямая сумма

Докажем, что  $e_1^1, \dots, e_{k_1}^1, \dots, e_1^m, \dots, e_{k_m}^m$  - базис

Система  $e_1^1, \dots, e_{k_1}^1, \dots, e_1^m, \dots, e_{k_m}^m$  порождающая (по очевидным причинам)

Система линейно независимая:

Пусть  $x_i \in L_i$ . Тогда из дизъюнктивности  $\sum_{i=1}^m x_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \ x_i = 0$

$x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i e_j^i = 0 \Leftrightarrow \alpha_j^i = 0$

Тогда  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^i e_j^i = 0 \Leftrightarrow \alpha_j^i = 0$ , ч.т.д.

(b)  $\Rightarrow$

В обратную сторону аналогично доказательству линейной независимости

3. Пусть  $x \in \sum_{i=1}^m L_i$  и  $x = \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m x'_i$

Тогда  $\sum_{i=1}^m (x_i - x'_i) = 0, (x_i - x'_i) \in L_i$



$$y_i := x_i - x'_i, \sum_{i=1}^m y_i = 0$$

Тогда из дизъюнктивности  $\forall i y_i = 0$

Тогда представление единственное, ч.т.д.

### Следствие

$$\dim \bigoplus L_i = \sum \dim L_i$$

### Замечания

1.  $L_1 + L_2$  - прямая  $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$

В таком случае  $\dim L_1 \oplus L_2 = \dim L_1 + \dim L_2$

2.  $V = L_1 \oplus L_2$

Тогда  $L_2$  - прямое дополнение  $L_1$

Тогда  $L_1$  - прямое дополнение  $L_2$

3. Пусть  $V = \bigoplus_i L_i$

Тогда  $\forall x \in V \exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2, \dots, x_m \in L_m : x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ .

$x_i$  - проекция вектора  $x$  на  $L_i$

$\bigoplus_{j \neq i} L_j$  - прямое дополнение  $L_i$

### Утверждение

У каждого линейного подпространства  $L$  существует единственное дополнение до  $V$

### Доказательство

Пусть  $L = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$

Дополним наш базис векторами до базиса  $V$ , добавив  $e_{k+1}, \dots, e_n$

Тогда единственное дополнение  $L' := \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$V = L \oplus L'$$

### Определение

Пусть  $L \subset V$  - линейное подпространство,  $x_0 \in V$

Линейное многообразие (аффинное пространство)  $P = x_0 + L = \{x = x_0 + l : l \in L\}$

### Теорема

Пусть  $P_k = x_k + L_k, k = 1, 2$

Тогда  $P_1 = P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 = L \\ x_1 - x_2 \in L \end{cases}$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$\forall l_1 \in L_1 \exists l_2 \in L_2 :$

$$x_1 + l_1 = x_2 + l_2$$

Тогда  $x_1 - x_2 = l_2 - l_1$

Если  $l_1 = 0$ , то  $x_1 - x_2 = l_2 \in L_2$

Если  $l_2 = 0$ , то  $x_1 - x_2 = -l_1 \in L_1$

Отсюда  $x_2 - x_1 \in L_1 \cap L_2$

$\forall l_1 \in L_1 \exists l_2 \in L_2 : x_1 + l_1 = x_2 + l_2$

Отсюда  $L_1 \subset L_2$

Аналогично  $L_2 \subset L_1$

Тогда  $L_1 = L_2 = L, x_2 - x_1 \in L$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $L = L_1 = L_2$

$$P_1 = x_1 + L$$

$$P_2 = x_2 + L$$

$\forall l \in L \ x = x_1 + l = x_1 - x_2 + x_2 + l = x_2 + (x_1 - x_2 + l) = x_2 + l' \in P_2$  (т.к.

$$x_1 - x_2 + l \in L$$

Отсюда  $P_1 \subset P_2$

Аналогично  $P_2 \subset P_1$

Отсюда  $P_1 = P_2$ , ч.т.д.

**Следствие**

Пусть  $P = x_0 + L$

Тогда  $\forall x_1 \in P \ x_1 + L = P$

**Определение**

Пусть  $L \subset V$  - линейное подпространство

Тогда  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$

**Определение**

$V|_L = \{P = x + L : x \in V\}$  назовем *фактор-пространством*

Введем линейное пространство над фактор-пространствами

**Определение**

Пусть  $P_{x_1} = x_1 + L, P_{x_2} = x_2 + L$

$$P_{x_1}, P_{x_2} \in V|_L, \lambda \in K$$

Определим операции:

$$P_{x_1} + P_{x_2} = P_{x_1+x_2}$$

$$\lambda P_x = P_{\lambda x}$$

$P_0 = L$  - нейтральный элемент

$-P_x = P_{-x}$  - противоположный элемент

Будут выполняться все аксиомы линейного пространства

### Теорема

Пусть  $\dim L = k, \dim V = n$

Тогда  $\dim V|_L = n - k$

### Доказательство

Пусть  $L = \text{span } l_1, \dots, l_k$ , где  $l_1, \dots, l_k$  - базис  $L$

Дополним базис  $L$  до базиса  $V$ , добавив  $l_{k+1}, \dots, l_n$

Тогда базисом  $V|_L$  будут пространства  $P_i = l_{k+i} + L$

Докажем это

Система порождающая:

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^k \alpha_i l_i + \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{k+j} l_{k+j}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i l_i \in L$$

$$\text{Пусть } y = \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{k+j} l_{k+j}$$

$$x - y \in L$$

$$\text{Отсюда } P_x = P_y$$

$$P_x = P_y = P_{\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{k+j} l_{k+j}} = \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{k+j} P_{l_{k+j}} \in V|_L$$

Отсюда  $P_{l_{k+1}}, \dots, P_{l_n}$  - порождающая система, ч.т.д.

Система линейно независимая:

$$\text{Пусть } \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} P_{l_{n+j}} = P_0 = L$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} P_{l_{n+j}} = P_{\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} l_{n+j}}$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} P_{l_{n+j}} = P_0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} l_{n+j} - 0 \in L$$

$$\text{Тогда } \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} l_{n+j} \in L, \text{ а значит } \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} l_{n+j} = \sum_{i=1}^k \beta_i l_i$$

Отсюда  $\sum_{j=1}^{n-k} \alpha_{n+j} l_{n+j} + \sum_{i=1}^k -\beta_i l_i = 0$   
Т.к.  $l_1, \dots, l_n$  - базис, то  $\alpha_i = 0, \beta_i = 0$   
Т.о.  $\sum_{j=1}^{n-k} P_{l_{n+j}} = P_0 \Rightarrow \alpha_{n+j} = 0$   
Отсюда  $\dim V|_L = n - k$

## 3 Алгебра матриц

### 3.1 Основные понятия

#### Определение

Матрицей размерности  $m \times n$  называется таблица некоторых объектов, занумерованная двумя индексами: номер строки ( $1 \dots m$ ) и номер столбца ( $1 \dots n$ )

Далее говорим только про матрицы чисел

$$A = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{pmatrix}, \text{ где } S_i - i\text{-ая строка} - \text{строчная запись}$$

$\text{span}(S_1, \dots, S_m)$  - пространство строк

$A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n)$ , где  $A_i$  -  $i$ -ый столбец - столбцовая запись  
 $\text{span}(A_1, \dots, A_n)$  - столбцовая запись

Квадратные матрицы:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{диагональная матрица}$$

След диагональной матрицы  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{нижнедиагональная матрица}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{верхнедиагональная матрица}$$

### 3.2 Операции над матрицами

1.  $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$  - сложение матриц одной размерности
2.  $\lambda C = \lambda c_{ij_{m \times n}}$  - умножение на скаляр
3. Нулевая матрица - нейтральный элемент
4.  $-A$  - противоположный элемент

Пространство вещественных матриц - линейное пространство, т.к. все операции выполняются поэлементно

Размерность пространства матриц  $m \times n$  -  $mn$

#### Определение

$A$  и  $B$  согласованы, если  $A_{m \times k}, B_{k \times n}$

$$C = A \cdot B = (c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sj})_{m \times n}$$

Дополнительные аксиомы

9. Если  $A, B, C$  согласованы  
 $(A + B)C = AC + BC$   
 $A(B + C) = AB + AC$

10.  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

11.  $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$

**Доказательство выполнения аксиомы**

Пусть  $A_{mk}, B_{kp}, C_{p*}$

$$(AB)_{is} = \sum_{r=1}^k A_{ir} B_{rs}$$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{s=1}^p (AB)_{is} C_{sj} = \sum_{s=1}^p \left( \sum_{r=1}^k A_{ir} B_{rs} \right) C_{sj} = \sum_{s=1}^p \left( \sum_{r=1}^k A_{ir} B_{rs} C_{sj} \right) =$$

$$\sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^p (A_{ir} B_{rs} C_{sj}) = \sum_{r=1}^k A_{ir} \sum_{s=1}^p (B_{rs} C_{sj}) = \sum_{r=1}^k A_{ir} (BC)_{rj} = (A(BC))_{ij}$$

### 3.3 Операция транспонирования

$$(A_{m \times n})^T = A'_{n \times m} : a_{ij} = a'_{ji}$$

**Свойства**

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

### 3.4 Обратная матрица

**Определение**

$A_{n \times n}^{-1}$  - обратная матрица, если  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

**Свойства**

1. Такая матрица единственная

**Доказательство**

Пусть существует  $B : AB = BA = E$

$$A^{-1}A = E$$

$$A^{-1}AB = B$$

$$A^{-1} = B, \text{ ч.т.д.}$$

2.  $(A^{-1})^{-1} = A$

3. Для  $\alpha \neq 0$ :  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

4.  $E^{-1} = E$

5.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (при существовании обратных матриц и согласованности  $A, B$ )

**Доказательство**

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$$

6.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Доказательство**

$$(AA^{-1})^T = E^T = (A^{-1}A)^T$$

$$(A^{-1})^T A^T = E = A^T (A^{-1})^T$$

Тогда  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

### 3.5 Ранг матрицы

$\text{rg}_{\text{row}} A = \dim \text{span}(S_1, \dots, S_m)$  - *строчный ранг матрицы* (число линейно независимых строк матрицы)

Отрезок строки  $\widetilde{S}_j$  длины  $k$  -  $k$  столбцов строки  $j$

Не умоляя общности, будем считать, что столбцы подряд идущие:  $(a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots, a_{jk}), 1 \leq k \leq n$

Аналогично для столбцов

**Теорема**

$A_1, \dots, A_n$  - линейно зависима

Тогда отрезки длины  $k$   $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  - линейно зависимы

**Доказательство**

Очевидно из определения отрезка

**Следствие**

Пусть отрезки  $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  - линейно независимы

Тогда  $A_1, \dots, A_n$  - линейно зависима

*Аналогично для строк и их отрезков*

**Теорема**

Пусть первые  $S_1, \dots, S_k$  - база пространства строк (т.е.  $S_1, \dots, S_k$  линейно независимы и порождающие пространство строк)

$\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  - отрезки столбцов длины  $k$

$\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  линейно зависимы  $\Rightarrow A_1, \dots, A_n$  линейно зависимы

**Доказательство**

$S_1, \dots, S_k$  - база  $\Rightarrow \forall j = 1 \dots m - k \ S_{k+j} = \sum_{p=1}^k \alpha_{jp} S_p, \alpha_{jp} \in K$

Т.к.  $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  - линейно зависимы, то  $\exists \{\alpha_i\}$  - не все нули :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \widetilde{A}_i = 0$

Покажем, что в таком случае  $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i = 0$

Для первых  $k$  координат верно из выбора  $\alpha_i$

Для  $k + 1$ -ой координаты это тоже верно:

Заметим, что  $S_{k+1}$  порождается базой

**Теорема**

$\forall A : \text{rg}_{\text{row}} A = \text{rg}_{\text{col}} A =: \text{rg } A$  - ранг матрицы

**Доказательство**

Пусть  $\text{rg}_{\text{row}} A = k$

Будем считать, что  $S_1, \dots, S_k$  - база строк

Рассмотрим отрезки  $A_n$  длины  $k$

Пусть  $\text{rg}(\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n) = r$

Т.к.  $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$  отрезки длины  $k$ , то они элементы  $k$ -мерного пр-ва. Тогда  $r \leq k$

Покажем, что  $\text{rg}(\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n) = r$

Пусть  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$  - база  $\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n$

По следствию из теоремы  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$  линейно независимы

$A_{i_1}, \dots, A_{i_r}, \widetilde{A}_j$  - линейно зависима

Тогда  $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}, A_j$  - линейно зависима

Тогда  $\text{rg}_{\text{col}} A = r \leq k = \text{rg}_{\text{row}} A$

Аналогично  $\text{rg}_{\text{col}} A = r \geq k = \text{rg}_{\text{row}} A$

Т.о.  $\text{rg}_{\text{col}} = \text{rg}_{\text{row}}$ , ч.т.д.

**Свойства ранга матрицы**

1.  $\text{rg } A_{m \times n} \leq n, m$
2.  $\text{rg } A^T = \text{rg } A$
3.  $\alpha \neq 0, \text{rg } \alpha A = \text{rg } A$



$$4. \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$$

**Доказательство**

$$\operatorname{rg}(A + B) = \dim \operatorname{span}(A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n)$$

$$\operatorname{span}(A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n) \subset \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) + \operatorname{span}(B_1, \dots, B_n)$$

$$\dim \operatorname{span}(A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n) \leq \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) + \dim \operatorname{span}(B_1, \dots, B_n)$$

$$\text{T.o. } \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$$

$$5. \text{ Пусть } A, B \text{ согласованы. } \operatorname{rg}(AB) \leq \min \operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B$$

**Доказательство**

$$C = A_{m \times k} B_{k \times n} = (C_1 = AB_1 \quad C_2 = AB_2 \quad \dots \quad C_n = AB_n)$$

Заметим, что  $AB_j$  - линейная комбинация столбцов  $A_1, \dots, A_n$

$$\text{Отсюда } \operatorname{span}(C_1, C_2, \dots, C_n) \subset \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\text{Тогда } \operatorname{rg} C \leq \operatorname{rg} A, \text{ т.е. } \operatorname{rg} AB \leq \operatorname{rg} A$$

$$\text{Аналогично } \operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B^{-1} A^{-1} \leq \operatorname{rg} B^{-1} = \operatorname{rg} B$$

$$\text{Тогда } \operatorname{rg} AB \leq \operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B$$

6. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях, проводимых над столбцами и строками

**Определение**

Если  $AB = BA$ , то матрицы *перестановочные*

**Определение**

Матрица имеет *трапецевидную форму*, если она имеет форму

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где  $a_{ii} \neq 0$

**Теорема**

Любая матрица  $A_{m \times n}$  элементарными преобразованиями строк и перестановкой столбцов может быть приведена к трапецевидной форме

Причем число строк в трапецевидной форме совпадет с  $\operatorname{rg} A$

**Доказательство**

$$1. \text{ Если } a_{11} = 0$$

Тогда перестановкой строк и столбцов поставим на позицию  $(1, 1)$  ненулевой элемент (т.к. матрица ненулевая, такой элемент найдется). Затем перейдем к пункту 2

$$2. \text{ Если } a_{22} \neq 0$$

Занулим столбец  $A_1$  и применим алгоритм к матрице  $A[2 : ][2 : ]$

Учтем, что при перестановке столбика в подматрице нужно переставлять столбец исходной матрицы

3. В какой-то момент мы либо попадем в нулевую подматрицу, либо закончатся строки). Если подматрица стала нулевой, удалим строки, соответствующие данной подматрице.
4. В результирующей матрице  $a'_{11} \dots a_{kk} \neq 0$   
Заметим, что в результирующей матрице каждая строка не является линейной комбинацией строк ниже, а значит и никаких любых. Тогда ранг матрицы равен количеству строк

## 4 Системы линейных алгебраических уравнений

### 4.1 Основные понятия. Теорема Кронекера-Капелли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  - матрица коэффициентов СЛАУ

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{столбец неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов}$$

$AX = B$  - матричная форма записи

$\sum_i A_i X_i = B$ , где  $A_i$  - столбец  $A$  - векторная форма записи

Матрица вида  $A|B$  называется расширенной матрицей системы

Если  $B = 0$ , то система называется однородной (СЛОУ)

Если  $B \neq 0$ , то система называется неоднородной (СЛНУ)

Если существует решение, то система называется *разрешимой* (*совместной*)

Если решений нет, то система называется *неразрешимой* (*несовместной*)

Если решение существует и единственное, то система называется *определенной*

Если решения существуют и их много, то система называется *неопределенной*

#### **Замечание**

$AX = 0$  всегда совместна

#### **Теорема Кронекера-Капелли**

Система совместна тогда и только тогда, когда  $\text{rg } A = \text{rg } A|B$

#### **Доказательство**

Запишем систему в векторной форме

Система совместна  $\Leftrightarrow \exists (X_i)$ , что  $\sum_i A_i X_i = B \Leftrightarrow B \in \text{span}(A_1, \dots, A_n) \Leftrightarrow$

$\text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{span}(A_1, \dots, A_n, B) \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } A|B$

При этом разложение единственное

#### **Следствие**

$\text{rg } A|0 = \text{rg } A \Rightarrow$  система  $AX = 0$  совместна всегда

## **4.2 Множество решений СЛОУ. Структура общего решения СЛНУ. Альтернатива Фредгольма**

#### **Теорема**

$AX = 0$

Тогда  $\forall U_1, U_2$  - решения,  $U_1 + \lambda U_2$  - решение

#### **Доказательство**

$AU_1 = 0, AU_2 = 0$ . Тогда  $A(U_1 + \lambda U_2) = AU_1 + \lambda AU_2 = 00$ , ч.т.д.

#### **Замечание**

Множество решений СЛОУ является линейным подпространством  $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

#### **Теорема 2**

$AX = 0$ ,  $L$  - общее решение системы

$1 \leq \text{rg } A = k \leq n$

Тогда  $\dim L = n - k = n - \text{rg } A$

#### **Доказательство**

1. Пусть  $\text{rg } A = k < n, \text{rg } A_1 \dots A_n = k$

Не умоляя общности, предположим, что  $A_1, \dots, A_k$  - линейно неза-

висимые

$$\text{Тогда } \forall j = 1 \dots n - k \quad A_{k+j} = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j A_i$$

$$\text{Тогда } \alpha_1^j A_1 + \dots + \alpha_k^j A_k - A_{k+j} = 0$$

$$\text{Тогда } u_j = \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \vdots \\ \alpha_k^j \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{решение} (-1 \text{ в строке } k + j)$$

Докажем, что  $u_1, \dots, u_{n-k}$  - базис  $L$

Очевидно, что  $u_1, \dots, u_{n-k}$  линейно независимые, т.к.  $-1$  стоят в различных местах

Покажем, что  $u_1, \dots, u_{n-k}$  - порождающая система

Пусть  $v$  - решение

$$\text{Тогда } v' = v + \sum_j v_{k+j} u_j - \text{решение}$$

$$Av' = A_1 v'_1 + A_2 v'_2 + \dots + A_k v'_k + 0 + \dots + 0 = 0$$

Из линейной независимости  $A_1 \dots A_k$ :  $v'_1 = \dots = v'_k = 0$ , т.е.  $v' = 0$

Отсюда  $v'$  - линейная комбинация  $u_1, \dots, u_{n-k}$

$\dim u_1, \dots, u_{n-k} = n - k$ , ч.т.д.

2. Если  $k = n$ , то все столбцы линейно независимые

$$\text{Тогда } \sum_{i=1}^n X_i A_i = 0$$

Тогда из линейной независимости  $X = 0$

### Следствие

Если  $1 \leq \text{rg } A < n$ , решений бесконечно много

Если  $\text{rg } A = n$ , единственное решение  $X = 0$

### Теорема(о структуре решения СЛНУ)

СЛОУ 1:  $Ax = 0$

СЛНУ 2:  $Ax + b = 0$

Пусть СЛНУ 2 совместна,  $X_0$  - решение СЛНУ 2

Если  $X$  - решение СЛНУ 2, то  $X = X_0 + U$ , где  $U$  - решение СЛОУ 1

Если  $U$  - решение СЛОУ 1, то  $X = X_0 + U$  - решение СЛНУ 2

**Доказательство**

1. Пусть  $X$  - решение СЛНУ 2.

$$AX = B$$

$$\text{Тогда } A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0$$

Отсюда  $U = X - X_0$  - решение СЛОУ 1

2. Пусть  $U$  - решение СЛОУ 1

Тогда  $AX = A(X_0 + U) = AX_0 + AU = B + 0 = B$ . Тогда  $X$  - решение СЛНУ 2

**Определение**

Базис общего решения СЛОУ 1 называется *фундаментальной системой решений*

$$L = \text{span } u_1, \dots, u_{n-k}$$

**Следствие**

(если СЛНУ 2 совместна)

1. Общее решение СЛНУ 2 является линейным многообразием размерности  $n - \text{rg } A$   
 $P = X_0 + L$ , где  $X_0$  - частное решение СЛНУ 2,  $L$  - общее решение СЛОУ 1

2.  $1 \leq \text{rg } A < n$  - СЛНУ 2 имеет бесконечно много решений

3.  $\text{rg } A = n$ , система имеет единственное решение

**Теорема (Альтернатива Фредгольма)**

Либо система  $A_{m \times n} X = B$  совместна при любом  $B \in \mathbb{R}^m$ , либо  $A^T y = 0$  имеет нетривиальное решение

(но не одновременно)

**Доказательство**

1. Пусть  $\exists B : A_{m \times n} x = B$  - не имеет решений

$$\text{Тогда } \text{rg } A < \text{rg } A|B \leq n$$

$$\text{Тогда } \exists A_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i A_i$$

$$\text{Отсюда } A^T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ -1 \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0 - \text{нетривиальное решение}$$

2. Пусть  $A_{m \times n}^T x = 0$  - не имеет нетривиальных решений  
 Тогда  $\text{rg } A^T = \text{rg } A = n$   
 Тогда  $\text{rg } A = n = \text{rg } A|B$  - система определена при любых  $B$

### 4.3 Метод Гаусса решения СЛАУ

Элементарные преобразования

1. Добавление/удаление уравнения с нулевыми коэффициентами
2. Умножение уравнения на ненулевой коэффициент
3. Перестановка уравнений
4. Замена уравнения на его сумму с другими строками
5. Изменение нумерации неизвестных

**Замечания**

1. Элементарные преобразования заменяют систему на эквивалентную
2. Элементарные преобразования системы эквивалентны элементарным преобразованиям расширенной матрицы

**Теорема**

Элементарными преобразованиями матрицы  $A|B$  систему  $AX = B$  можно заменить на эквивалентную систему с трапециевидной матрицей коэффициентов

Причем число строк в результирующей матрице будет равно  $\text{rg } A = k$

Если  $k = n$ , то матрица будет треугольной

### **Доказательство**

Преобразуем  $A$  в трапециевидную форму, выполняя синхронные преобразования столбца  $B$

(заметим, что вычеркивать строки нельзя, т.к. нельзя терять значение в столбце  $B$ )

### **Метод Гаусса(прямой ход)**

Приведем матрицу коэффициентов системы к трапециевидной форме

Если существуют строки вида  $000 \dots 0|b \neq 0$  то решений нет

(В таком случае  $\text{rg } A \neq \text{rg } A|B = \text{rg } A'|B'$ , где  $A'|B'$  - матрица после преобразований)

Иначе вычеркнем нулевые строки. Тогда мы получим "настоящую" трапециевидную матрицу

### **Метод Гаусса(обратный ход)**

1.  $k = n$

Тогда существует единственное решение

Матрица в таком случае треугольная

Будем последовательно исключать неизвестные, подставляя уже известные значения

Тогда на каждом шаге будем получать систему на ранг меньше

Приведем нашу матрицу к виду  $(E|X_0)$ , где  $X_0$  - частное решение

2.  $k < n$

Тогда множество решений - линейное многообразие  $P = x_0 + L$

Тогда обрежем нашу матрицу до треугольной, занеся лишние столбцы в свободный член, и найдем  $x_0$  и  $L$

Тогда "бывшие неизвестные" станут параметрами, определяющими конкретное решение в множестве решений

Перейдем к первому пункту

### **Нахождение обратной матрицы методом Гаусса**

$$AA^{-1} = E \Leftrightarrow AX = E \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = E_1 \\ AX_2 = E_2 \\ \vdots \\ AX_n = E_n \end{cases}$$

Найдем  $X$ , решив системы уравнений

$X$  существует тогда и только тогда, когда все системы совместны, т.е.  
 $\text{rg } A|E_1 = \text{rg } A|E_2 = \dots = \text{rg } A|E_n = \text{rg } A = n$

Заметим, что мы будем решать  $n$  систем с одной матрицей коэффициентов. Вместо одного столбца выпишем сразу  $n$  столбцов свободных членов  $E_1, \dots, E_n$ . Применим метод Гаусса и получим  $E|A_1^{-1}A_2^{-1} \dots A_n^{-1}$

Докажем, что  $A^{-1}A = E$

Пусть  $B : BA = E$

Тогда  $BA A^{-1} = BE = EA^{-1}$

Отсюда  $B = A^{-1}$

### Теорема

Для матрицы  $A_{n \times n}$  существует матрица  $A^{-1}$  тогда и только тогда, когда  $\text{rg } A = n$

### Следствие

Пусть есть система  $A_{n \times n}X = B$

Существует единственное решение тогда и только тогда, когда  $A$  обратима, причем  $X = A^{-1}B$

### Доказательство

Единственное решение существует при  $\text{rg } A = n$ , а тогда существует  $A^{-1}$  и наоборот

### Теорема (о ранге произведения матриц)

Пусть  $A_{n \times n}$ ,  $\text{rg } A = n$

Тогда  $\forall B_{m \times n} \text{ rg } B = \text{rg}(BA)$

$\forall B_{n \times m} \text{ rg } B = \text{rg}(AB)$

### Доказательство

1.  $\text{rg } AB \leq \min \text{rg } A, \text{rg } B$  - было доказано  
 $\text{rg } B = \text{rg } A^{-1}AB$  (обратная матрица существует, т.к.  $\text{rg } A = n$ )  
Тогда  $\text{rg } B = \text{rg } A^{-1}AB \leq \text{rg } AB \leq \text{rg } B$   
Тогда  $\text{rg } B = \text{rg } AB$
2.  $\text{rg } BA = \text{rg}(BA)^T = \text{rg } A^T B^T = \text{rg } B^T = \text{rg } B$  (из предыдущего пункта)

## 4.4 Геометрический смысл СЛАУ

### Определение

Множество точек пространства  $\mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих уравнению  $A_1x_1 + \dots + A_nx_n + B = 0$  называется *гиперплоскостью*

Тогда система - пересечение  $m$  гиперплоскостей



Тогда система совместна тогда и только тогда, когда пересечение не пусто

Пусть  $n = 3$ :

1.  $\text{rg } A = \text{rg } A|B = 1$  (система совместна)

Тогда у нас одна плоскость

2.  $\text{rg } A = \text{rg } A|B = 2$  (система совместна)

Тогда у нас два независимых линейных уравнения, т.е. две неравных непараллельных плоскости, а остальные плоскости являются их линейной комбинацией

Получаем прямую пересечения этих плоскостей

3.  $\text{rg } A = \text{rg } A|B = 3$  (система совместна)

Тогда у нас три независимых линейных уравнения, т.е. три неравных непараллельных плоскости, а остальные плоскости являются их линейной комбинацией

Получаем единственную точку пересечения

4.  $1 = \text{rg } A \leq \text{rg } A|B = 2$

Тогда есть две параллельные плоскости, а остальные параллельны им или совпадают

Тогда пересечение пусто

5.  $2 = \text{rg } A \leq \text{rg } A|B = 3$

Тогда мы получаем пересекающиеся прямые без общей линии пересечения

Общее пересечение пусто

## 4.5 Матрица перехода от старого базиса к новому

### Связь координат вектора в новом и старом базисе

Пусть  $V$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  - старый базис

$e'_1, \dots, e'_n$  - новый базис

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$$

Свяжем  $x_i$  и  $x'_i$

Пусть  $e'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$  - координаты нового базиса в старом

$$e'_j \leftrightarrow T_j = \begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix}$$

Тогда матрица перехода от старого базиса к новому:

$$T_{e \rightarrow e'} = (T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n) \\ (e'_1 \dots e'_n) = (e_1 \dots e_n) T_{e \rightarrow e'}$$

Свойства матриц перехода

1.  $\text{rg } T = n$  (т.к. все столбцы линейно независимы)
2.  $\exists T^{-1}$  - матрица перехода от нового базиса к старому

**Доказательство**

Т.к.  $\text{rg } T = n$ , то обратная матрица существует

$$e' = eT$$

$$\text{Тогда } e'T^{-1} = eTT^{-1} = e$$

3. Связь координат в старом и новом базисе

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x'_j t_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n e_i \left( \sum_{j=1}^n t_{ij} x'_j \right)$$

$$\text{Отсюда } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_{e \rightarrow e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

## 5 Определители

### 5.1 Полилинейная антисимметричная форма Определитель числовой матрицы

Пусть  $V$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$f : V^p \rightarrow K$$

**Определение**

Отображение называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому аргументу, т.е.  $f(\dots, a + \lambda b, \dots) = f(\dots, a, \dots) + \lambda f(\dots, b, \dots)$

При  $p = 1$  - линейная форма

При  $p = 2$  - билинейная форма

### Правило Эйнштейна

Будем обозначать за  $x^i e_i$  сумму  $\sum_{i=1}^n x^i e_i$

(Т.е. в случае, если у двух объектов записаны одинаковые индексы, при этом у одного - сверху, у другого - снизу)

Договоримся для векторов из  $V$  писать у координат индекс сверху, а у векторов индекс - снизу

Т.е.  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Leftrightarrow x = x^i e_i$

Пусть  $\xi_i \in V$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p) = f(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, \xi_p^{i_p} e_{i_p}) = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_p^{i_p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$$

$\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_p} := f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  - компоненты полиномиальной формы  $f$  относительно базиса  $e_1, \dots, e_n$

Т.о.  $f$  однозначно определяется своими значениями на всевозможных наборах базисных векторов, т.е. всеми  $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_p}$

### Определение

Полилинейная форма называется *антисимметричной*, если она равна 0 при совпадении любых двух аргументов

### Теорема

$f$  антисимметрична тогда и только тогда, когда  $f(\dots, a, \dots, b, \dots) = -f(\dots, b, \dots, a, \dots)$

### Доказательство

$$f(\dots, a + b, \dots, a + b, \dots) = 0 = f(\dots, a, \dots, b, \dots) + f(\dots, a, \dots, a, \dots) + f(\dots, b, \dots, a, \dots) + f(\dots, b, \dots, b, \dots)$$

Отсюда  $f(\dots, a, \dots, b, \dots) = -f(\dots, b, \dots, a, \dots)$

### Следствие

$$\alpha_{\dots, m, \dots, k, \dots} = -\alpha_{\dots, k, \dots, m, \dots}$$

$$\alpha_{\dots, m, \dots, m, \dots} = 0$$

### Следствие

$$p > n \Rightarrow f = 0$$

### Обозначение

Полилинейная антисимметричная форма =  $p$ -форма

Рассмотрим  $n$  форму для  $V : \dim V = n$ :

$$\alpha_{i_1 \dots i_n} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Если хотя бы два индекса совпали, то  $\alpha_{i_1 \dots i_n} = 0$

В остальных случаях  $i_1, \dots, i_n$  - перестановка  $n$  чисел

### Определение

*Подстановка* - биекция  $\phi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$

Перестановка - образ  $\phi(\{1, 2, \dots, n\})$

### Теорема

Любую перестановку можно привести к тривиальной  $(1, \dots, n)$  за конечное число транспозиций (перестановок 2-х элементов)

### Определение

Четностью перестановки назовем четность числа транспозиций, с помощью которых она приводится к тривиальной

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка нечетная} \\ 0, & \text{если перестановка четная} \end{cases}$$

*Знаком перестановки* назовем  $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$

$$\alpha_{i_1, \dots, i_n} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_{1, 2, \dots, n}$$

Пусть  $\alpha_f = \alpha_{1, 2, \dots, n}$

$$\alpha_{i_1, \dots, i_n} = (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha_f$$

$$\text{Т.о. } f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \alpha_f \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}, \text{ где } (i_1, \dots, i_n) = \sigma$$

### Определение

D-н-форма - n-форма такая, что  $\alpha_f = 1$

$$D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}, \text{ где } (i_1, \dots, i_n) = \sigma$$

$$\forall f \quad f(\xi_1, \dots, \xi_n) = \alpha_f D(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Такая форма единственная

### Определение

*Определителем* системы векторов  $\xi_1, \dots, \xi_n \in V$  называется  $D(\xi_1, \dots, \xi_n) =:$

$\det(\xi_1, \dots, \xi_n)$  относительно фиксированного базиса  $e_1, \dots, e_n$

### Определение

Пусть  $V = \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 - j\text{-ая строка} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{базис}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \det(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}$$

#### Замечания

1. Матрица не обязательно числовая
2.  $\det E = 1$
3.  $f(A) = f(E) \det A$

## 5.2 Некоторые сведения из теории перестановок

### Определение

*Произведением перестановок* называется результат действия композиции соответствующих подстановок

*Обратной перестановкой* называется  $\phi = \sigma^{-1} : \phi\sigma = id$

### Определение

Инверсией в перестановке назовем два элемента  $\alpha, \beta$  такие, что  $\alpha$  стоит до  $\beta$  и  $\alpha > \beta$

### Теорема

1.  $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$

**Доказательство**

\*TODO\*

2. Транспозиция любых двух элементов может быть получена нечетным числом транспозиций соседних элементов

### Доказательство

Пусть у нас есть элементы  $\alpha, \beta$ , которые мы ходим поменять  
Сделаем  $m$  шагов, чтобы переместить  $\alpha$  к  $\beta$ . Затем за шаг поменяем их местами. Теперь сделаем еще  $m$  шагов, чтобы поставить  $\beta$  на бывшее место  $\alpha$ . Тогда всего  $2m + 1$  шаг

3. Транспозиция двух соседних элементов перестановки меняет четность числа инверсий на противоположную

### Доказательство

Пусть мы поменяли  $\alpha$  и  $\beta$  местами

Заметим, что в результате перестановки все инверсии, образованные  $\alpha$  и  $\beta$  с остальными элементами, сохранились. Тогда появилась или исчезла инверсия между  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда число инверсий изменилось на 1, ч.т.д.

4.  $(-1)^{\epsilon(\sigma)} = (-1)^{\text{inv } \sigma}$

### Доказательство

Пусть у нас была четная перестановка  $\sigma$

Тогда за четное число транспозиций получим тривиальную перестановку

Каждая транспозиция - это нечетное число транспозиций соседних

Значит суммарно четное число транспозиций соседних

А значит четность числа инверсий не поменяется

Т.е. в тривиальной перестановке число инверсий четное, то и в исходной было четное

Отсюда в четной перестановке четное число инверсий

Аналогично для нечетной перестановки

### Следствие

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv } \sigma} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}$$

## 5.3 Свойства определителя

1.  $\det A^T = \det A$

### Доказательство

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv } \sigma} a_{1 i_1} \dots a_{n i_n}$$

Упорядочим  $a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$  по второму параметру. Тогда в первом параметре мы получим перестановку, обратную  $\sigma$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv } \sigma} a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv } \sigma^{-1}} a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Заметим, что  $\sigma^{-1}$  пробегает все множество. Отсюда мы получили исходную формулу, ч.т.д.

### **Замечание**

Все свойства определителя, доказанные для столбцов, верны и для строк

### 2. Линейность определителя

$$\det(\dots, A_i + \lambda B_i, \dots) = \det(\dots, A_i, \dots) + \lambda \det(\dots, B_i, \dots)$$

#### **Доказательство**

Из полилинейности определителя

### 3. Следствие

$$\det(\dots, 0, \dots) = 0$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

### 4. Антисимметричность

$$\det(\dots, B, \dots, B, \dots) = 0$$

$$\det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) \text{ (столбцы поменяли местами)}$$

$$5. \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = \det(\dots, A_i + \lambda A_j, \dots, A_j, \dots)$$

$$6. \begin{vmatrix} A^1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & A^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & A^n \end{vmatrix} = \prod \det A^i, \text{ где } A^i - \text{подматрицы нашей матрицы}$$

Такая матрица называется *ступенчатой*

#### **Доказательство**

Методом мат. индукции

$$(a) \text{ База. Докажем, что } \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = \det A \det B$$

$$\text{i. } \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix} = 1 = \det E \det E$$

$$\text{ii. } \begin{vmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ * & E \end{vmatrix}$$

Занулим \* линейными преобразованиями.

$$\text{Пусть } f(A_1, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{vmatrix}$$

$f$  -  $n$ -форма по очевидным соображениям

Заметим, что  $f(A_1, \dots, A_n) = f(E_1, \dots, E_n)D(A_1, \dots, A_n) = 1 \cdot \det A = \det A$

$$\text{iii. Аналогично для матрицы } \begin{vmatrix} A_{n \times n} & 0 \\ * & B_{m \times m} \end{vmatrix} \text{ введем } m\text{-форму}$$

$$f(B_1, \dots, B_m) = f(E_1, \dots, E_m)D(B_1, \dots, B_m) = \det A \det B$$

(b) Индукционный переход очевиден

$$7. \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \text{ где } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} - \text{ алгебраическое дополнение}$$

ние,  $M_{ij}$  - минор,  $j$  фиксированный

**Доказательство**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Поднимем свапами  $a_{i1}$  на первые строки в каждой матрице

Тогда в матрицах, где  $i$  - нечетное, знак определителя не сменится

(т.к. свапов будет четное число), а в матрицах, где  $i$  - нечетное, поменяется

$$\text{Т.о. мы получим } \det A = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

Теперь применим свойство о ступенчатых матрицах. Тогда для пер-



вого столбца формула работает

Докажем для  $j$ -ого столбца. Для этого свапами переместим  $j$  на первую позицию знак поменяется  $j - 1$  раз, получив матрицу  $A'$ , для которой формула доказана

$$8. \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ij} = 0, k \neq j$$

Рассмотрим матрицу, полученную из  $A$  заменой  $k$ -ого столбца на  $j$ -ый. Тогда данная формула будет формулой ее определителя. Но т.к. в этой матрице два одинаковых столбца, то ее определитель 0

$$9. \det(A \cdot B) = \det A \det B$$

**Доказательство**

Зафиксируем  $A$  и рассмотрим функцию  $f(B_1, \dots, B_n) = \det(C_1 = AB_1, \dots, C_n = AB_n)$

$f$  является  $n$ -формой

$$\det AB = f(B_1, \dots, B_n) = f(E_1, \dots, E_n) D(B_1, \dots, B_n) = \det A \det B$$

## 5.4 Формула для обратной матрицы

**Определение**

Матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен 0

**Теорема Крамера**

Матрица обратима тогда и только тогда, когда матрица невырожденная

$$\text{Причем матрица может быть найдена по формуле } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где  $A_{ij}$  - алгебраическое дополнение

Матрица дополнений называется *союзной/взаимной/присоединенной*

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Т.к. матрица  $A$  обратима, то существует  $A^{-1}$

$$AA^{-1} = E$$

$$\det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} = 1$$

Отсюда  $\det A \neq 0$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Т.к. матрица невырожденная, то ее определитель не 0

Из вышедоказанных свойств произведение исходной матрицы на матрицу из формулы(и наоборот) равно единичной матрице  
Тогда формула верна. А значит исходная матрица обратима

**Замечание**

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

**Следствие (теорема Крамера)**

Пусть у нас есть система  $A_{n \times n} X = B$

Единственное решение существует тогда и только тогда, когда определитель  $A$  не равен 0

Причем  $X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ ,  $\Delta_i = \det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)$ ,  $\Delta = \det A$

**Доказательство**

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

## 5.5 Теорема Лапласа

**Определение**

Выберем  $k$  строк  $i_1 < \dots < i_k$  и  $k$  столбцов  $j_1 < \dots < j_k$

Тогда *минором  $k$ -ого порядка* назовем определитель матрицы  $M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ , полученной вычеркиванием всех остальных строк и столбцов

*Дополнительным минором* нашего минора  $k$ -ого порядка назовем определитель матрицы  $\overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$ , полученной вычеркиванием выбранных строк

*Алгебраическое дополнение*  $A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_n} \overline{M}_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$

**Теорема Лапласа**

Выберем  $k$  строк  $i_1 < \dots < i_k$

Тогда  $\det A = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$

**Доказательство**

Методом математической индукции

- База (для 1 строки):  
Зафиксируем  $i$ . Получаем известную формулу
- Пусть верно для  $k - 1$  строки

//todo

### Замечание

Формулу для ступенчатой матрицы можно получить из теоремы Лапласа

## 5.6 Второе определение ранга матрицы

### Определение

Ранг матрицы - это наибольший порядок минора, отличного от нуля  
 $\det A_{m \times n} = \max k : \exists i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_k : M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$

Такой минор называется *базисным*, его строки и столбцы - базисные

### Теорема

Определения эквивалентны

### Доказательство

Пусть  $\text{rg}^1 A$  - ранг по первому определению,  $\text{rg}^2 A$  - по второму

Пусть  $\text{rg}^1 A = k$

$A_{j_1} \dots A_{j_k}$  - база столбцов

$S_{i_1} \dots S_{i_k}$  - база строк

$M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} = \det(A'_{j_1} \dots A'_{j_k})$ , где  $A'_{j_k}$  - отрезок столбца  $A_{j_k}$

Т.к.  $A_{j_1} \dots A_{j_k}$  - линейно независимые. Тогда по теореме  $A'_{j_1} \dots A'_{j_k}$  - линейно независимые

Теперь возьмем столбцы  $j'_1 \dots j'_s, s > k$

Т.к.  $s > \text{rg}^1 A$ , то  $A_{j'_1} \dots A_{j'_s}$  линейно зависимы

Тогда и  $A'_{j'_1} \dots A'_{j'_s}$  линейно зависимы

Тогда  $\det(A_{j'_1} \dots A_{j'_s}) = M_{j'_1 \dots j'_s}^{i_1 \dots i_s} = 0$

Отсюда  $\text{rg}^2 A = k$ , ч.т.д.

### Метод окаймляющих миноров

1. Если  $a_{ij} \neq 0$

Если все миноры второго порядка, содержащие  $a_{ij}$ , равны 0, то ранг - 1

2. Если  $\exists M_{j_0}^{i_0} \neq 0$

Если все миноры третьего порядка, содержащие строки  $i, i_0$  и столбцы  $j, j_0$ , равны 0, то ранг - 2

3. Аналогично

### Теорема

Метод окаймляющих миноров работает:)

### Доказательство

Пусть  $M_{j_1 \dots j_k}^{j_1 \dots j_k} \neq 0$ , а все миноры  $k + 1$ -го порядка, окаймляющие его, равны 0

Рассмотрим определитель 
$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} & a_{i_1 j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} & a_{i_k j} \\ a_{i j_1} & \dots & a_{i j_k} & a_{i j} \end{pmatrix} = X.$$

Заметим,  $X = 0$ :

Если  $i$  совпадает с  $i_1 \dots i_k$ , то определитель 0

Иначе по условию

$$X = \sum_{s=1}^k a_{i j_s} A'_{is} \pm a_{i j} M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k},$$
 где  $A'$  - дополнение матрицы из определителя  $M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} \neq 0$

Тогда 
$$a_{i j} = \sum_{s=1}^k a_{i j_s} \frac{\mp A'_{is}}{M_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}} = \sum_{s=1}^k \lambda_s a_{i j_s}$$

Отсюда 
$$A_j = \sum_{s=1}^k \lambda_s A_{j_s}$$

Т.о. любой столбец является линейной комбинацией  $A_{j_1} \dots A_{j_k}$

Т.о.  $\text{rg } A = k$

## 5.7 Методы вычисления определителей n-ого порядка

1. Приведение к треугольному виду  
//TODO
2. Метод выделения линейных множителей  
//TODO
3. Метод рекуррентных соотношений  
//todo
4. Разложение в сумму определителей  
//todo

5. Метод изменения элементов на константу  
//todo