Математический анализ. Практика

Александр Сергеев

1 Урок 05.09.2022

Пусть есть функция $f(x)$

Определение
$f(x)$ - Инъекция, если $\forall x_0\ \overline{\exists x : f(x) = f(x_0)}$

Определение
$f(x)$ - Сюръекция, если $\forall y_0\ \exists x : f(x) = y_0$

Определение
$f(x)$ - Биекция, если $\forall y_0\ \exists! x : f(x) = y_0$
(Сюръекция+Инъекция)

Биекция из A в $B \Leftrightarrow |A| = |B|$

Сравним мощности групп чисел:
1) $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$
Доказательство
Получим биекцию, сопоставив значениям $2k$ из $\mathbb{N}$ значения k из $\mathbb{Z}$, а значениям $2k+1$ из $\mathbb{N}$ значения $-(1+k)$ из $\mathbb{Z}$. Ч.т.д.

2) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$
Доказательство
Представим числа из $\mathbb{Q}$ как $\dfrac{p}{q}$, где p - целое, q - положительное. Составим таблицу, отложив по горизонтали p, а по вертикали q:

	0	1	-1	2	-2	3
1	1	2	3	5	8	11
2	.	4	6	.	.	
3	.	7	9			
4	.	10				
5	.					

Мы получили бесконечную таблицу всех значений $\mathbb{Q}$. Пронумеруем ее по диагонали в направлении сверху вниз справа налево, пропуская повторяющиеся значения. Мы получили биекцию из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$. Отсюда два множества равномощны, ч.т.д.

3)$|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$

Доказательство

Выберем $X = [0; 1)$, где все числа $x \in X$ содержат в своей записи только 0 и 1.

Пусть $|X| = |\mathbb{N}|$.

Сопоставим каждому числу из $\mathbb{N}$ число из X.

Мы получили биекцию:

$$\begin{array}{c|l} 1 & 0, r_{11}\ r_{12}\ r_{13}\ r_{14}\ ... \\ 2 & 0, r_{21}\ r_{22}\ r_{23}\ r_{24}\ ... \\ 3 & 0, r_{31}\ r_{32}\ r_{33}\ r_{34}\ ... \\ 4 & 0, r_{41}\ r_{42}\ r_{43}\ r_{44}\ ... \end{array}$$

Возьмем число $0, \overline{r_{11}}\ \overline{r_{22}}\ \overline{r_{33}}\ \overline{r_{44}}\ ...$, где $\overline{x} = 1-x$. Это число отличается как минимум одной цифрой от каждого числа в таблице. При этом в нем нет (9), что гарантирует, что каждое число в X может быть представлено единственным способом. Тогда мы получили число, не содержащееся в таблице. Отсюда $|X| > |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, ч.т.д.

Свойства мощности:

1. $|A| = \infty \Rightarrow |A^2| = |A|$
2. $|2^A| > |A|$, где 2^A - *булеан* - множество всех подмножеств A.
3. $\left.\begin{array}{l} \text{Существует инъекция из } A \text{ в } B \\ \text{Существует инъекция из } B \text{ в } A \end{array}\right\} \Rightarrow |A| = |B|$

2 Урок 12.09.2022 Последовательности

Методы нахождения пределов:

1. Теорема о двух городовых

2. Линейность:
   $x_n \to A, y_n \to B, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \to \alpha A + \beta B$
   \$$x_n \to A, y_n \to B \Rightarrow x_n y_n \to AB$
   \$$x_n \to A, y_n \to B \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0 \wedge \exists N : \ \forall n > N \ y_n \neq 0$

3. Доказательство существование предела:
   Пусть x_n монотонно возрастающая(убывающая) последовательность, ограниченная сверху(снизу). Тогда x_n сходится.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

3 Урок 19.09.2022 Частичный предел

Определение
$x_n \sim y_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$
x_n, y_n - эквивалентные последовательности

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ - первый замечательный предел

Правило Лопиталя:
$f(x), g(x) \to \infty \Rightarrow \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f‘(x)}{g‘(x)}$

Определение
Подпоследовательность - упорядоченное подмножество с индуцированным порядком(т.е. если в последовательности элемента стояли в определенном порядке, то те элементы, которые попали в подпоследовательность, стоят в ней в том же порядке)

Определение
Пусть x_{n_k} - подпоследовательность x_n. Тогда $x_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} a$ - *частичный предел* x_n

Определение
$\sup A$ - наименьшая верхняя граница A
$\inf A$ - наибольшая нижняя граница A
$\sup A, \inf A \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\sup A, \inf A$ всегда существуют.

$\sup\{$ частичные пределы $x_n\}$ - верхний предел
$\inf\{$ частичные пределы $x_n\}$ - нижние предел

4 Урок 17.10.2022 Предел функии

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall x : \; 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) < 0$
$f(x)$ - непрерывна в a, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
Для непрерывной $f(x)$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall x : \; \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) < 0$ (в том числе при $x = a$)

Если F непрерывна, то $\lim\limits_{x \to a} F(f(x)) = F(\lim\limits_{x \to a} f(x))$
$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots$
Определение
Пусть $a : a$ - предельная в D_f и не содержится там
Тогда a - *особая точка*
a - *устранимая*, если существует предел в точке a. Тогда определим
$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & x = a \end{cases}$ - устранение особенностей
$f'(x) = \lim\limits_{\partial x \to 0} \dfrac{f(x + \partial x) - f(x)}{\partial x}$
$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + g(h)$, где $g(h) = f(x + h) - f(x) - hf'(x)$
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow g(h) = o(h)$(на самом деле $g(h) \in o(h)$, но так не пишут)

Тогда $\exists f'(x) \to f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$
Отсюда $e^{x+h} = e^x + he^x + o(h)$
$e^h = 1 + h + o(h)$

$\sin h = \sin(0+h) = \sin 0 + h\sin' x + o(x) = x + o(x)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + o(x)}{x} = 1$

5 Урок 24.10.2022

1. $o(x) + o(x) = o(x)$
2. $o(o(x)) = o(x)$
3. $xo(x) = o(x^2)$
4. $o(1) = \{f : f \to 0\}$
5. $o(x^3) = o(x)$, но не наоборот
6. $\dfrac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1)$
7. $o(x) + o(x^2) = o(x)$

$f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Если функция дифференцируема:
$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, где $o(x-a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

6 Урок 14.11.2022

Определение
Функция f называется *дифференцируемой* в точке x, если $f(x+\delta x) - f(x) = A\delta x + o(\delta x)$, где A - константа
Если f дифференцируема, то $A = f'(x)$
$A\delta x$ - *дифференциал* в точке x
Свойства дифференциала $\mathrm{d}\,x$

1. $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \,\mathrm{d}\, f + \beta \,\mathrm{d}\, g$

2. $\mathrm{d}(fg) = f\,\mathrm{d}\,g + g\,\mathrm{d}\,f$ - Формула Лейбница

3. $\mathrm{d}\,1 = \mathrm{d}\,1 \cdot 1 = 1\,\mathrm{d}\,1 + 1\,\mathrm{d}\,1$
   $\mathrm{d}\,1 = 0$

4. $\mathrm{d}(\mathrm{d}\,x) = 0$

$\mathrm{d}(\mathrm{d}\,f) = \mathrm{d}^2\,f = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}\,x) = (\mathrm{d}\,x)\,\mathrm{d}\,f'(x) + f'(x)\,\mathrm{d}(\mathrm{d}\,x) = f''(x)(\mathrm{d}\,x)^2$
Определение
f - *гладкая*, если она дифференцируема до бесконечности (на практике - дифференцируема столько, сколько нужно)

7 Урок 5.12.2022

Функция *возрастает* в x_*, если в некоторой выколотой окрестности x_*
$\dfrac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \geq 0$
Тогда $f'(x_*) \geq 0$
Если $f'(x_*) > 0$, то функция возрастает