

Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

1 Интеграл

1.1 Неопределенный интеграл

Определение

$f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

F – первообразная функции f , если F дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ и $\forall x \in \langle a, b \rangle F'(x) = f(x)$

Теорема 1

Если f непрерывна на $\langle a, b \rangle$, то первообразная существует

Теорема 2

Пусть F – первообразная f на $\langle a, b \rangle$

Тогда

1. $\forall c \in \mathbb{R} F + c$ – тоже первообразная
2. Если G – первообразная, то $G - F = \text{const}$

Определение

Неопределенный интеграл на $\langle a, b \rangle$ – множество всех первообразных

$$\int f(x) dx = \{F : F' = f\}$$

Таблица первообразных

$$\int x^P dx = \frac{x^{P+1}}{P+1} + C, P \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \operatorname{tg} x + C \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\operatorname{ctg} x + C \\
\int \frac{dx}{x^2 + 1} &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{dx}{1 - x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{arcth} x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{arcsin} x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C = \operatorname{arcsh} x + C - \text{"длинный логарифм"}
\end{aligned}$$

Гиперболические функции

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ - из ряда Тейлора

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{гиперболический синус}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть f, g - имеют первообразные на $\langle a, b \rangle$

Тогда

$$\begin{aligned}
1. \quad \int f + g &= \int f + \int g \\
\int af &= a \int f
\end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Пусть } \phi : \langle p, q \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx|_{x:=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C$$

Замечание

Пусть ϕ обратима

$$\text{Тогда } F(x) = \int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt|_{t:=\phi^{-1}(x)}$$

3. $\forall \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int f(\alpha x + \beta) \, dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$$

4. f, g – дифференцируемы и $f'g$ имеет первообразную

Тогда fg' имеет первообразную

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Определение

Дифференциал $d\phi(x) = \phi'(x) \, dx$

1.2 Правило Лопиталья

Лемма об ускоренной сходимости

$f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \bar{\mathbb{R}}$ – предельная точка D

Пусть $\exists U(a) : f, g \neq 0$ в $\overset{\bullet}{U}(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Тогда } \forall x_k : \begin{array}{l} x_k \rightarrow a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{array} \exists y_k : \begin{array}{l} y_k \rightarrow a \\ y_k \in D \\ y_k \neq a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Доказательство

Выберем y_k как подпоследовательность x_k

$$\forall k \frac{f(x_l)}{f(x_k)}, \frac{f(x_l)}{g(x_k)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Тогда } \exists l_0 : \left| \frac{f(x_{l_0})}{f(x_k)} \right|, \left| \frac{f(x_{l_0})}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$$

Отсюда $y_k := x_{l_0}$

Правило Лопиталья

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемы на (a, b) , $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ – неопределенность

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Доказательство

По Гейне

$$x_k \rightarrow a$$

Возьмем $x_k : x_k \in (a, b)$

$$x_k \neq a$$

$$y_k \rightarrow a$$

Из леммы берем $y_k : y_k \in (a, b)$

$$y_k \neq a$$

По т. Коши $\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$, ξ – между x_k и y_k (т.е. $\xi_k \rightarrow a$)

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(x_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} = A$$

Замечание

Работает только на неопределенностях

Следствие

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\frac{x^a}{e^x} = \left(\frac{x}{e^n}\right)^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема Штольца

$x_n, y_n \rightarrow 0$, y_n – строго монотонная

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow a$

Замечание

При $a = 0$ требуем монотонность x_n

Замечание

При $x_n, y_n \rightarrow \infty$ теорема тоже верна

Доказательство

1. $a > 0, a \in \mathbb{R}$

Утверждение

$$p < \frac{a}{b}, \frac{c}{d} < q \Rightarrow p < \frac{a+c}{b+d} < q$$

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$$

\vdots

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

$$\text{Отсюда } \forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Устремим n к ∞

$$\text{Тогда } a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon, \text{ т.е. } \frac{x_N}{y_N} \rightarrow a$$

2. $a < 0$ – аналогично

3. $a = \pm\infty$

$$\text{Аналогично } \frac{x_N}{y_N} \rightarrow a$$

4. $a = 0$ (потребуем монотонность x_n)

$$\text{Пусть } \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$$

Перевернем дробь. Через доказанное выше

Упражнение

Посчитаем $1^k + 2^k + \dots + n^k$

$$\text{Рассмотрим функцию } f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$x \frac{d}{dx} f(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = x + 2^2 x^2 + \dots + n^2 x^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^k f(x) = x + 2^k x^2 + \dots + n^k x^n$$

Отсюда $1^k + 2^k + \dots + n^k = ((x \frac{d}{dx})^k f)(1)$

Заметим, что в результате дифференцирования мы получим дробь, знаменатель которой при подстановке 1 обращается в 0

Но данный дефект возникает лишь из-за формы записи. На самом деле функция непрерывна, поэтому можно взять ее предел в 1

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \lim_{x \rightarrow 1} (x \frac{d}{dx})^k f$$

Применим правило Лопиталя

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = (\frac{1}{(k+1)!} (\frac{d}{dx})^k (x-1)^{k+1} (x \frac{d}{dx})^k \frac{x^{n+1}-1}{x-1})(1)$$

1.3 Определенный интеграл

Определение

Пусть ε - множество ограниченных плоских фигур

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ - *площадь*, если

1. Аддитивность - $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$, где \sqcup - дизъюнктное объединение (объединение непересекающихся фигур)
2. Нормировка - $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b-a)(d-c)$

Замечание

1. $A \subset B \in \varepsilon \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$

Доказательство

$$B = A \sqcup (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$$

2. A - вертикальный отрезок $\Rightarrow \sigma(A) = 0$

Доказательство

Впишем отрезок в прямоугольник с шириной ε

Для любого ε это возможно. Отсюда площадь стремится к 0

3. Мы не доказываем, что такая функция существует

Определение

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$ - *ослабленная площадь*, если

1. Монотонность:

$$E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$$

2. Нормировка

3. Ослабленная аддитивность:

Если $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 \subset$ вертикальный отрезок, A_1, A_2 лежат в разных полуплоскостях, то $\sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$

UPD

Позже предыдущее утверждение было заменено на следующее:

Если вертикальная прямая l делит фигуру на A на части A_r и A_l (части могут иметь общие точки на l), то $\sigma A = \sigma A_l + \sigma A_r$

Примеры

1. $\sigma A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n S(P_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \right\}$, где P_k - прямоугольник

2. $\sigma A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S(P_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$, где P_k - прямоугольник

Эти площади разные

К примеру, рассмотрим $C = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\sigma_1(C) = 1$$

$$\sigma_2(C) = 0$$

Определение

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

Положительная срезка $f^+ = \max(f, 0)$

Отрицательная срезка $f^- = \max(-f, 0)$

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$\text{Подграфик } (F, E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Определенный интеграл

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - \text{непрерывная}$$

Тогда *определенный интеграл* f по $[a, b]$ - $\int_a^b f(x) dx = \sigma(\text{ПГ}(f^+, [a, b])) -$

$\sigma(\text{ПГ}(f^-, [a, b]))$, где σ - ослабленная площадь

Замечания

1. $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$$2. f \equiv C \Rightarrow \int_a^b f = C(b-a)$$

$$3. \int_a^b -f = - \int_a^b f$$

$$4. \text{ Можно считать, что } \int_a^a f = 0$$

Свойства

1. Аддитивность по промежутку

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Монотонность

$$f \leq_{[a,b]} g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

$$3. (b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{[a,b]} f$$

$$4. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Теорема о среднем

Пусть $f \in C[a, b]$

Тогда $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

Доказательство

Если $a = b$ – тривиально

Иначе по утверждению 3: $\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f$

Т.к. f принимает все значения между минимумом и максимумом, то

$$\exists c : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Определение

Пусть $f \in C[a, b]$

$\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_a^x f$ – интеграл с переменным верхним пределом

$\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Psi(x) = \int_x^b f$ – интеграл с переменным нижним пределом

Теорема Барроу

$f \in C[a, b], \Phi$ – интеграл с переменным верхним пределом

Тогда Φ дифференцируема на $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$

Доказательство

Пусть $x \in (a, b), y > x$

$$\Phi'_+ = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_x^y f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c), c \in [x, y] = f(x)$$

Аналогично $\Phi'_- = f(x)$

Тогда $\Phi'(x) = f(x)$

Замечание

$$\Psi'(x) = -f(x)$$

Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть F – первообразная f на $[a, b], f \in C[a, b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство

По т. Барроу Φ – первообразная

Тогда $F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

Замечание

Теорема Барроу – это теорема о существовании первообразной у непрерывной функции

Также площадь под графиком непрерывной функции не зависит от σ

Соглашение

$$\text{При } c > d \int_c^d f := - \int_d^c f$$

Свойства

1. Линейность

$$f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Пример (неравенство Чебышева)

$f, g \in C[a, b]$ – монотонно возрастающие/убывающие

$$I_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f \text{ – среднее значение функции}$$

Тогда $I_f I_g \leq I_{fg}$

Доказательство

$x, y \in [a, b]$

Тогда $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ – из монотонности

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Проинтегрируем по x по $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) - f(y) \int_a^b g(x) - g(y) \int_a^b f(x) - f(y)g(y)(b-a) \geq 0$$

Поделим на $b-a$:

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Проинтегрируем по y по $[a, b]$ и поделим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_f I_g + I_{fg} \geq 0$$

$$I_{fg} \geq I_f I_g$$

2. Интегрирование по частям

$f, g \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b g f'$$

Пример

$$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - x^2 \right)^n \cos x \, dx = F_n(\pi^2) - \text{какой-то многочлен степени } n$$

Пример – полный треш. Если вам надо, смотрите видео:

https://www.youtube.com/live/7ZQr_0Khuq4?feature=share&t=7020

Таймкод: 1:57:00

3. Замена переменных в интеграле

$f \in C\langle a, b \rangle$

$\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, \phi \in C^1$

$[p, q] \in \langle a, b \rangle$

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) \, dx$$

Доказательство

F – первообразная f

$F(\phi(t))$ – первообразная $f(\phi(t))\phi'(t)$

$$\int_p^q f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt = F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) \, dx$$

Замечание

- (а) Может оказаться, что $\phi(p) > \phi(q)$
 (б) $\phi[p, q]$ может быть крупнее $[\phi(p), \phi(q)]$

Пример (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C^{n+1}\langle a, b \rangle, x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Тогда
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Доказательство

Индукция по n :

- (а) $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

- (б) Интегрирование по частям

Пусть доказано для n

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \left[\begin{array}{ll} f = f^{(n+1)} & g' = (x - t)^n \\ f' = f^{(n+2)} & g = -\frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{n!} \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt = \\ &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Замечание

Формулу Тейлора можно интегрировать

F – первообразная f

Проинтегрируем слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} &= \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} \Big|_{x=x_0}^{x=x} = \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} = \\ &= \frac{F^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} \end{aligned}$$

Пример

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Тогда $\arctan x = F(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + o(x^{2n+1})$

Утверждение

π – иррациональное (даже π^2 – иррациональное)

Доказательство

Пусть $\pi^2 = \frac{k}{m}$

Тогда $m^n F(\frac{k}{m})$ – целое число, где F – из примера к интегрированию по частям

Отсюда $m^n F(\frac{k}{m}) = \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx$ – положительное целое число

Отсюда выражение ≥ 1

$$|\frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx| \leq \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |(\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x| \, dx \leq \frac{m^n 3^n \pi}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

1.4 Продолжение свойств интеграла**Определение**

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – кусочно непрерывная, если функция непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, где у нее разрыв 1 рода
2. f – кусочно непрерывная функция
 $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ – точки разрыва (a, b могут и не быть разрывными)

$$\int_a^b f(x) \, dx := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$$

3. Пусть f – кусочно непрерывная на $[a, b]$
 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – почти первообразная функции f , если

(а) F – непрерывна на $[a, b]$

(б) $F'(x) = f(x)$ при $x \in [a, b]$, кроме конечного числа точек

Если F_i – первообразная f на $[x_{i-1}, x_i]$

$$\text{Тогда } F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ F_2(x) + c_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ F_n(x) + c_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

где $c_i = F_i(x_i) - F_{i+1}(x_i)$

Утверждение

Если f – кусочно непрерывная на $[a, b]$

F – первообразная

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Доказательство

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - F_i(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

Пример

Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

$$\text{Тогда } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} - \text{неравенство Чебышева (ч.с.)}$$

Доказательство

$$\text{Определим функции как } F_a(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} a_i, F_b(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} b_i$$

Тогда неравенство выполняется по неравенству Чебышева

Замечание

Утверждается, что все доказанные свойства интеграла выполняются и для кусочно-непрерывных функций

1.5 Приложение определенного интеграла

Общая схема

Пусть фиксирован $\langle a, b \rangle$

Обозначения: $\text{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$

Определение

Отображение $\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – функция промежутка

Φ – Аддитивная функция промежутка, если $\forall c \in (p, q) \Phi[p, q] = \Phi[p, c] + \Phi[c, q]$

Определение

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – плотность а.ф.п. Φ , если $\forall \delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad |\delta| \cdot \inf_{\delta} f \leq$

$$\Phi(\delta) \leq |\delta| \cdot \sup_{\delta} f$$

Основной пример

$$\Phi[p, q] := \int_a^b f(x) \, dx$$

Тогда f – плотность

Теорема 1 (о вычислении а.ф.п. по плотности)

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – а.ф.п

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – плотность Φ , непрерывна

$$\text{Тогда } \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi[p, q] = \int_p^q f$$

Доказательство

$$\text{Пусть } F(x) = \begin{cases} 0, & x = p \\ \Phi[p, x] & p < x \leq q \end{cases}$$

Докажем, что F – первообразная f

$$F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\Phi[p, x+h] - \Phi[p, x]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\Phi[x, x+h]}{h}$$

$$\inf_{[p,q]} f \leq \frac{1}{q-p} \Phi[p, q] \leq \sup_{[p,q]} f$$

$$\text{Отсюда } F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f(x + \theta h), \theta \in [0, 1] = f(x)$$

$$\text{Аналогично } F'_-(x) = f(x)$$

$$\Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \int_p^q f(x) \, dx$$

Пример

Пусть $r = f(\phi)$ – функция в полярных координатах

$$\phi \in \langle \phi_0, \phi \rangle$$

Пусть $\Phi : \text{Segm}\langle \phi_0, \phi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ – площадь сектора $(f, \langle \phi_0, \phi \rangle)$

Т.е. Φ – Отображение $[\alpha, \beta] \mapsto \sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta \rangle))$

Это аддитивная функция промежутка

Теорема

$f : \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}_+$ – непрерывна, $\langle \phi_0, \phi_1 \rangle \subset [0, 2\pi]$

$$\text{Тогда } \sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta \rangle)) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi) \, d\phi$$

$$([\alpha, \beta] \in \langle \phi_0, \phi_1 \rangle)$$

Доказательство

Проверим, что $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi) d\phi$ – плотность а.ф.п. Φ

Т.е. проверим неравенство $\forall [\alpha, \beta] \quad \min_{\phi \in [\alpha, \beta]} \left(\frac{1}{2} f^2(\phi) \right) (\beta - \alpha) \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq$

$$\max_{\phi \in [\alpha, \beta]} \left(\frac{1}{2} f^2(\phi) \right) (\beta - \alpha)$$

Рассмотрим произвольный сектор

Круговой сектор $(\min f, [\alpha, \beta]) \subset \text{Сектор}(f, [\alpha, \beta]) \subset \text{Круговой сектор}(\max f, [\alpha, \beta])$ из геометрических соображений

$$\text{Отсюда } \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min f)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max f)^2$$

Пример

$$x = r(t - \sin t)$$

$y = r(1 + \cos t)$ – циклоида (координата точки на поверхности катящегося колеса)

Найдем площадь арки(периода) циклоиды

Происходят геометрические рассуждения, которые плохо конвертируются в конспект, поэтому оставляю ссылку: <https://www.youtube.com/live/CaG68GvecLw?feature=share&t=6813>

Посчитаем площадь через интеграл

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi r} y(x) dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) d(r(t - \sin t)) = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) r(1 - \cos t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 2\pi r^2 + r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \\ &= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

Пример 2

Пусть задана кривая $(x(t), y(t))$ – путь

Научимся считать площадь сектора $[t_0, t_1]$

Перейдем в полярные координаты (считая, что $\phi_0 \leq \phi_1$):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi) d\phi = \left[\begin{array}{l} \phi = \arctan \frac{y(t)}{x(t)} \\ r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{x'y - xy'}{x^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{x'y - xy'}{x^2 + y^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x'y - xy') dt \end{aligned}$$

Пример 3 (Изопериметрическое неравенство)

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая, ограниченная, выпуклая фигура

Пусть $\text{diam}(G) \leq 1$, где $\text{diam}(G) = \sup(\rho(x, y) : x, y \in G)$

(Из компактности G , а значит $\text{diam}(G) = \max(\rho(x, y) : x, y \in G)$)

Тогда $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

Доказательство

Зададим фигуру в полярных координатах

Граница фигуры – выпуклая функция

Выберем на поверхности точку A , где функция дифференцируема (точек недифференцируемости не более чем счетное множество). Проведем в этой точке касательную и повернем фигуру, чтобы касательная стала вертикальной, а фигура была расположена в правой полуплоскости

Зададим функцию $f(\phi)$, $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ следующим образом:

Проведем из точки A прямую под углом ϕ

Она пересечет границу в точке B

Тогда $f(\phi) = |AB|$

$$\sigma G = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi - \frac{\pi}{2}) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2})) d\phi$$

$(f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}))$ – квадрат длины некоторой хорды в G

$$\text{Отсюда } \sigma G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2})) d\phi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\phi = \frac{\pi}{4}$$

1.6 Интегральные суммы

Определение

Пусть $[a, b]$ – отрезок суммирования

Разделим отрезок конечным набором точек x_0, \dots, x_n

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

i -ый отрезок – $[x_{i-1}, x_i]$

$\max |x_i - x_{i-1}|$ = ранг дробления = мелкость

Оснащение – ξ_1, \dots, ξ_n – набор точек таких, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ – Риманова сумма

Теорема об интеграле как пределе Римановых сумм

$$f \in C[a, b]$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ дроблений $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, у которых

$$\text{ранг} < \delta \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

Доказательство

Зафиксируем ε

Для этого $\varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_2 - x_1| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} -$

по т. Кантора

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) dx \right| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| dx < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ &\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

Пример

$$\int_0^1 x dx$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на отрезки по $\frac{1}{n}$

$$\text{Т.е. } \int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Замечание

Пусть $|f'(x)| \leq M$ на $[a, b]$

Разделим отрезок на части $\frac{b-a}{n}$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n} \right| &< \text{ по т. Лагранжа } < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\bar{x}_i)| (x_i - x) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx = \sum_{i=1}^n M \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 n \end{aligned}$$

Обобщенная теорема о плотности

Пусть $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$ заданы m_Δ, M_Δ — неточные минимум и максимум:

1. $m_\Delta \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot |\Delta|$
2. $\forall x \in \Delta \ m_\Delta \leq f(t) \leq M_\Delta$
3. $\forall x \in \langle a, b \rangle \ \forall \Delta \ni x : |\Delta| \rightarrow 0 \ M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$

Тогда $\forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \ \Phi[p, q] = \int_p^q f$

Доказательство

$$F(x) = \begin{cases} \Phi[p, x], & p < x \leq q \\ 0, & x = p \end{cases}$$

$$\Delta := [x, x + h]$$

$$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leq M_\Delta$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\text{Тогда } \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Т.е. } F'_+(x) = f(x)$$

$$\text{Аналогично } F'_-(x) = f(x)$$

$$\text{Т.о. } \Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

Пример

Пусть $a > 0$

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$$

$$\Phi_x, \Phi_y : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Пусть } \Phi_x[p, q] = V_{\Omega^x}$$

$$\Phi_y[p, q] = V_{\Omega^y}$$

$\Omega^x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [p, q], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$ – фигура вращения вокруг OX

$\Omega^y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : p \leq \sqrt{x^2 + z^2} \leq q, 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + z^2})\}$ – фигура вращения вокруг OY

Φ_x, Φ_y – а.ф.п.

Теорема

$$f \in C[p, q], f \geq 0$$

$$\text{Тогда } \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$\Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

Доказательство

Для Φ_x – очевидно (из 1 теоремы о плотности)

Для Φ_y :

Проверим, что $2\pi x f(x)$ – плотность Φ_y

Из геометрических соображений:

$$V(\Omega^y[\alpha, \beta]) \leq \pi(\beta^2 - \alpha^2) \max_{[\alpha, \beta]} f = (\beta - \alpha)\pi(\beta + \alpha) \max_{[\alpha, \beta]} f \leq (\beta - \alpha)\pi \max_{[\alpha, \beta]} 2x \max_{[\alpha, \beta]} f$$

$$V(\Omega^y[\alpha, \beta]) \geq \pi(\beta^2 - \alpha^2) \min_{[\alpha, \beta]} f = (\beta - \alpha)\pi(\beta + \alpha) \min_{[\alpha, \beta]} f \geq (\beta - \alpha)\pi \min_{[\alpha, \beta]} 2x \min_{[\alpha, \beta]} f$$

Отсюда $M_\Delta := \pi \max_{\Delta} 2x \max_{\Delta} f(x)$

$$m_\Delta := \pi \min_{\Delta} 2x \min_{\Delta} f(x)$$

Т.о. условие 1 выполнено

$m_\Delta \leq 2\pi x f(x) \leq M_\Delta$ – условие 2 выполнено

$\max_{\Delta} 2x \max_{\Delta} f(x) - \min_{\Delta} 2x \min_{\Delta} f(x) \rightarrow 0$ по непрерывности f и $2x$ – условие 3 выполнено

Пример

Найдем объем тора с радиусом сечения r и радиусом кольца R

Формула прямой – $y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$

$$\text{Отсюда } V = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} (x - R) \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx +$$

$$4\pi R \int_{R-r}^{R+r} \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = 0 (\text{из симметричности относительно } R) + 4\pi R \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi R \pi r^2$$

1.6.1 Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывная – путь

$\gamma(a)$ – начало пути, $\gamma(b)$ – конец пути

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}, \text{ где } \gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - i\text{-ая координатная функция пути}$$

Путь *гладкий*, если $\forall i \gamma_i \in C^1$

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix} - \text{вектор скорости пути в точке } t$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = v(t) - \text{считается по координатам}$$

Носитель пути — $\gamma([a, b])$

Определение

l — функция на множестве гладких путей называется длиной пути, если

1. $l \geq 0$

2. l — аддитивна:

$$\forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in [a, b] \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$$

3. $\gamma, \bar{\gamma}$ — два пути в \mathbb{R}^m , $C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$ — их носители

Пусть $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$ — сжатие:

$$\forall x, y \quad \rho(T(x), T(y)) \leq \rho(x, y)$$

$$\text{Тогда } l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma)$$

4. $\gamma(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \Rightarrow l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$ — длина прямолинейного пути

Замечание 1

1. Длина дуги \geq длина хорды

(по свойству 3: ортогонально проецируем дугу на хорду)

2. При "расширении" длина дуги растёт

3. При движении пространства (изометрии) длина пути не меняется

Теорема о длине гладкого пути

Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma \in C^1$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Доказательство

Пусть γ — инъекция. Т.е. путь не проходит через одну точку два раза.

Если это не так, разобьём путь на несколько и посчитаем их длины отдельно

Проверим, что $\|\gamma'(t)\|$ — плотность а.ф.п. $\underbrace{[p, q]}_{\subset [a, b]} \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$

$$m_i(\Delta) = \min_{t \in \Delta} \gamma'_i(t)$$

$$M_i(\Delta) = \max_{t \in \Delta} \gamma'_i(t)$$

$$m_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$$

$$M_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$$

Тогда свойства 2 ($m_{\Delta} \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_{\Delta}$) и 3 ($M_{\Delta} - m_{\Delta} \xrightarrow{|\Delta| \rightarrow 0} 0$) очевидны,

$$\text{т.к. } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(t))^2}$$

Докажем, что $m_{\Delta}|\Delta| \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta}|\Delta|$

Зафиксируем $\Delta = [t_0, t_1]$

$\vec{M} = (M_1(\Delta), \dots, M_m(\Delta))$

$\tilde{\gamma}(t) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\tilde{\gamma}(t) := \vec{M}t$

Проверим $T : C_{\gamma} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} : \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$ – растяжение

Пусть $p < q$

$$\rho(\gamma(p), \tilde{\gamma}(q)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(p) - \tilde{\gamma}_i(q))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(\bar{p})(p - q))^2} \leq |p - q| \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_i[p, q])^2} =$$

$$\|\vec{M}[p, q]\| |p - q| = l(\tilde{\gamma}|_{[p, q]}) = \rho(\tilde{\gamma}(p), \tilde{\gamma}(q))$$

Т.е. $l(\gamma|_{[p, q]}) \leq l(\tilde{\gamma}|_{[p, q]}) = \|\vec{M}_{[p, q]}\| |p - q| = \|\vec{M}_{\Delta}\| |\Delta|$

Аналогично $\|\vec{m}_{\Delta}\| |\Delta| \leq l(\gamma|_{\Delta})$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \text{ ч.т.д.}$$

Пример

Посчитаем длину дуги эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Пусть $a > b$

Параметризуем его: $(x, y) = (a \sin t, b \cos t)$

$$\gamma' = (a \cos t, -b \sin t)$$

$$\|\gamma'\| = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = a^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t), t = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Тогда $L[0, T] = a \int_0^T \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$ – не берется(

Формула – Эллиптический интеграл II рода

Следствие

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$

Тогда $l(\Gamma(f, [a, b])) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

Доказательство

$\Gamma(f, [a, b])$ – носитель пути $x \mapsto (x, f(x))$

$\gamma(x) = (x, f(x)), \gamma' = (1, f'), \|\gamma'\| = \sqrt{1 + f'^2}$

Следствие 2

$r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, r \in C^1$ – функция в полярных координатах

$\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)$

Тогда $l(\phi) = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\phi$

Определение (способ определения длины пути)

Разобьем кривую на n частей "точками" $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

Тогда $l(\gamma) = \sup_{n, (t_i)} \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$

Определение

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда *вариация* f на $[a, b]$ $\text{Var}_a^b f = \sup_{n, (t_i)} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$

Если $f \in C^1$, $\text{Var}_a^b f = \text{длина пути} = \int_a^b |f'|$

Теорема о функции ограниченной вариации

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{Var}_a^b f$ – ограничена

Тогда $\exists p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонные такие, что $f \equiv p - q$

Доказательство

$f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$, где

$2p(x) = \text{Var}_a^x f(x) + (f(x) - f(a))$

$2q(x) = \text{Var}_a^x f(x) - (f(x) - f(a))$

Докажем, что p, q – возрастают

$|f(y) - f(x)| \leq \text{Var}_x^y f$

Отображение $\Delta \mapsto \text{Var}_\Delta f$ – а.ф.п.

Для $x < y$ $2(p(y) - p(x)) = \text{Var}_x^y f + f(y) - f(x) \geq 0$

Т.е. $p(y) \geq p(x)$, ч.т.д.

Кстати, $p(x) + q(x) = \text{Var}_a^x f$

2 Конечные ε -сети

Упражнение

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $K \subset X$ – компактно $\Leftrightarrow K$ – секвенциально компактно

Определение

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $D \subset X, \varepsilon > 0$

Множество $N \subset X$ – ε -сеть множества D , если $\forall x \in D \exists y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$

Если N – конечное, то N – конечная ε -сеть

Определение

D – свехограниченное в X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть $N \subset X$

Лемма 1

D – свехограниченно в $X \Leftrightarrow D$ – свехограниченно в D (в себе)

Доказательство \Leftarrow – тривиально

Доказательство \Rightarrow

Возьмем $\varepsilon > 0$

Берем $\frac{\varepsilon}{2}$ в $X : N = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall i B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ выберем какую-нибудь $y_i \in D$ (если такая есть)

Тогда $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – ε -сеть D

Лемма 2

$f : D \rightarrow Y, D$ – свехограниченное

f – равномерно непрерывно

Тогда $f(D)$ – свехограниченно

Доказательство

Равномерная непрерывность $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Зафиксируем ε

Возьмем конечную δ -сеть в $D =: N$

$f(N)$ – конечная ε -сеть в Y

Лемма 3

D – свехограниченно \Leftrightarrow любая последовательность в D содержит фундаментальную подпоследовательность

Доказательство \Rightarrow

Возьмем последовательность (x_n)

\exists конечная 1-сеть $\{y_1, \dots, y_k\}$

Тогда $\exists i : B(y_i, 1)$ содержит бесконечно много членов последовательно-

сти

Пусть $x_k \in B(y_i, 1)$

Тогда $n_1 := k$

\exists конечная $\frac{1}{2}$ -сеть D , а значит конечная $\frac{1}{2}$ -сеть $D \cap B(y_i, 1)$

Повторим действия

Получившаяся последовательность x_{n_i} фундаментальна

Доказательство \Leftarrow

Докажем от противного

Пусть $\exists \varepsilon > 0$: не существует конечной ε -сети

Возьмем x_1

Т.к. сети не существует, то $\exists x_2 \in D \setminus B(x_1, \varepsilon)$

$\exists x_3 \in D \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, \varepsilon)$

И т.д.

Построена последовательность $x_n \in D : \forall k, l \rho(x_k, x_l) \geq \varepsilon$ – не фундаментальная

Отсюда противоречие

Теорема

D – метрическое пространство

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. D – компактно
2. D – сверхограниченное и полное

Доказательство $1 \Rightarrow 2$

D – компактно

Если D – неполное, то $\exists (x_n) \in D$ – фундаментальная, но не имеющая предела

Тогда $\forall (n_k) x_{n_k}$ – не имеет предела

(Т.к. фундаментальная последовательность сходится, если ее подпоследовательность сходится)

Это противоречит секвенциальной компактности

Если D – не сверхограниченное

Тогда $\exists (x_n)$, не содержащей фундаментальную

Но тогда нет и сходящейся, что противоречит секвенциальной компактности

Доказательство $2 \Rightarrow 1$

D – сверхограниченное и полное

Тогда любая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность (в силу полноты – сходящуюся)

Это секвенциальная компактность

Следствие

X – полное метрическое пространство $D \subset X$

Тогда эквивалентны следующие утверждения

1. D – компактно
2. D – сверхограниченное и замкнутое

Теорема о формулах центральных прямоугольников и трапеций

Пусть $f \in C^2[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\delta = \max_i (x_i - x_{i-1})$

$$t = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Тогда выполняются две формулы

1. $|\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$
2. $|\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})| < \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$

При равномерном дроблении $\delta = \frac{b-a}{n}$:

$$M := \max |f''(x)|, \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx \leq \frac{M(b-a)^3}{n^2}$$

Доказательство (только 2)

Пусть $dg := g'(x) dx$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - t_i) = f(x)(x - t_i) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x -$$

$$t_i) dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) d\psi, \text{ где } \psi(x) = (x -$$

$$x_{i-1})(x_i - x), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \underbrace{\frac{1}{2} f' \psi \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}}_0 - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi dx$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_a^b \dots - \sum_{i=1}^n \dots \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi \right| = \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \underbrace{\psi}_{\leq \frac{\delta^2}{4}} dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

Подсказка: для прямоугольников $\psi = \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, t_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [t_i, x_i] \end{cases}$

Формула Эйлера-Маклорена

Пусть $f \in C^2[m, n]$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Тогда } \int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m}^n {}^* f(i) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

* – два крайних слагаемых – с коэффициентом $\frac{1}{2}$

$$\text{Т.е. } \sum_{i=m}^n {}^* f(i) = \frac{1}{2} f(m) + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2} f(n)$$

Доказательство

Из доказательства формулы для трапеции, где $\psi = (x - k)(k + 1 - x) = \{x\}(1 - \{x\})$

Пример

$p > -1$, $f(x) = x^p$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 1^p + \dots + n^p &= \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx = \\ &= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1})) \end{aligned}$$

Пояснение:

$$0 \leq \int_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx \leq \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}$$

$$\text{При } p < 1 \quad \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(1)$$

$$\text{При } p > 1 \quad \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$$

Замечание: при $p < -1$ слагаемые будут ограниченными, т.е. вся сумма будет $O(1)$

Пример 2

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$1 + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx}_{=: y_n, \text{возрастающая последовательность}}$$

y_n – возрастает

y_n – ограниченная

$$y_n \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8}$$

$$\text{Тогда } 1 + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + y_n}_{\text{имеет предел } \gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]} = \ln n + \gamma + o(1)$$

$\gamma \approx 0.57 \dots$ – постоянная Эйлера

Пример 3

$$f(x) = \ln x$$

$$\ln 1 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \{x\} (1 - \{x\}) dx}_{x_n} = n \ln n -$$

$$n + \frac{\ln n}{2} + x_n$$

x_n монотонная и ограниченная

Тогда $x_n \rightarrow C$

$$\text{Отсюда } n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C+o(1)} \rightarrow C_1 n^n e^{-n} \sqrt{n}, C_1 = e^C$$

Найдем C_1

Формула Валлиса

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \underbrace{-\sin^{n-1} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 -$$

$$\sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{четное} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим на } [0, \frac{\pi}{2}] : \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем: $\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$

$$\underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1}}_{\alpha_k} \leq \frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2}_{\beta_k}$$

$$\beta_k - \alpha_k = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1}}_{\leq \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2k} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$

Замечание

$$2b_k := (4k+3) \left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2$$

$$2c_k := \frac{4}{4k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2$$

Тогда $\alpha_k < \frac{b_k}{2} < \frac{c_k}{2} < \beta_k$

При этом $b_k \uparrow, c_k \downarrow$

$$c_k - b_k = c_k \frac{1}{4(2k+1)^2}$$

$$\pi = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)}{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}}$$

По формуле Валлиса $\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k^k e^{-k} \sqrt{k})^2 C_1^2}{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k} C_1} = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда $C_1 = \sqrt{2\pi}$

Тогда $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ – формула Стирлинга

3 Выпуклость

Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называется выпуклым, если

$$\forall x, y \in A \quad [x, y] \subset A,$$

где $[x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\} = \{\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}$ – отрезок

прямой, содержащей x, y

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Если $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, то f – выпуклая (выпуклая вниз) на $\langle a, b \rangle$

Если $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, то f – вогнутая (выпуклая вверх) на $\langle a, b \rangle$

Примеры

e^x – выпуклая

x^2 – выпуклая

Замечание

f – выпуклая \Leftrightarrow любая хорда (отрезок, соединяющий две точки графика) расположена нестрого выше графика \Leftrightarrow надграфик выпуклый

Надграфиком f на $\langle a, b \rangle$ называется $\{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

Определение

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Если $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in (0, 1) f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, то f – строго выпуклая/вогнутая на $\langle a, b \rangle$

Лемма о трех хордах

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда эквивалентны:

1. f выпуклая на $\langle a, b \rangle$

$$2. \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b \rangle \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Доказательство \Rightarrow

Докажем первое неравенство

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3$$

$$\text{Тогда неравенство } 1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

При $\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, 1 - \alpha = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ получаем знакомое неравенство

Второе неравенство аналогично

Доказательство \Leftarrow

Очевидно из предыдущего доказательства

Следствие

f строго выпукла \Leftrightarrow строгое неравенство в теореме

Замечание

Если f, g – выпуклые на $\langle a, b \rangle$, то $f + g$ – выпуклая
 f – выпуклая, то $-f$ – вогнутая

Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$

Тогда $\forall x \in (a, b) \exists f'_+(x), f'_-(x)$ – конечные

$$\text{и } \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \leq x_2 \quad f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$

Доказательство

Сделать предельный переход в лемме о 3 хордах

$$g(\xi) := \frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1}, \xi \in (a, b) \setminus \{x_1\}$$

$g(\xi) \uparrow$ по лемме о 3 хордах

При $\xi \in (x_1, x_2)$

Т.к. функция монотонна, $\exists \lim_{\xi \rightarrow x_1+0} g(\xi)$

Возьмем $\xi_0 \leq \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \xi_3 < x_2 < \xi_4 \leq \xi_5$

Из лемм о трех хордах(средние неравенства) и монотонности(крайние неравенства):

$$\frac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1} \leq \frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1} \leq \frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(\xi_3) - f(x_2)}{\xi_3 - x_2} \leq \frac{f(\xi_4) - f(x_2)}{\xi_4 - x_2} \leq \frac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$$

Пусть $\xi_1 \rightarrow x_1 - 0, \xi_2 \rightarrow x_1 + 0, \xi_3 \rightarrow x_2 - 0, \xi_4 \rightarrow x_2 + 0$

$$\text{Отсюда } C_0 \leq f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2) \leq C_5,$$

$$\text{где } C_0 = \frac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1}, C_5 = \frac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$$

Отсюда производные конечные(ограничены C_0 и C_5)

Воспоминания о прошлом семестре

Если $\exists f'_+(x_0)$, то f – непрерывна справа в x_0

Следствие

f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$

Тогда она непрерывна на (a, b)

(т.к. у нее есть левосторонние и правосторонние производные, то она непрерывна слева и справа, т.е. непрерывна)

Контр-пример для $[a, b]$

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) = 2$$

$$f(x) = x^2, x \in (a, b)$$

Функция выпукла, но не непрерывна на $[a, b]$

Теорема

f – дифференцируема на $\langle a, b \rangle$

Тогда f – выпуклая вниз на $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$ график расположен не ниже любой касательной, т.е. $\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Доказательство \Rightarrow

Требуемое неравенство есть в предыдущей теореме

Доказательство \Leftarrow

Возьмем $x_1 < x_0 < x_2$

$$\text{Тогда } \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

По лемме о трех хордах f – выпуклая

Определение

Пусть имеется выпуклая фигура $A \subset \mathbb{R}^2$

$b \in A$ – граничная точка

Прямая $l : b \in l$ – опорная прямая, если A полностью содержится в одной из полуплоскостей, образованных прямой

Утверждение

f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$

Тогда $\forall x \in \langle a, b \rangle$ через $(x, f(x))$ можно провести опорную прямую к над-графику f

(для $x \in (a, b)$ есть односторонняя дифференцируемость, можем провести одностороннюю касательную)

(для $x = a$ и $x = b$ можем провести вертикальные прямые или касательные, если односторонние производные есть и конечны)

Утверждение 2

Если $A \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутая и ограниченная выпуклая фигура, то через каждую граничную точку можно провести опорную прямую

Доказательство

Возьмем точку b

Докажем, что для нее можно провести опорную прямую

Для этого выберем оси X, Y так, чтобы проекция b на X была внутренней точкой проекции фигуры на X

Теперь определим функцию $f(x) := \inf(y : (x, y) \in A)$ – нижнюю часть границы фигуры

Данная функция выпуклая, а значит в точке b к ней можно провести опорную прямую

Замечание

f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$

Тогда f дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ всюду, кроме не более чем счетного множества точек (возможно, пустого)

Доказательство

Пусть E – множество точек, где не существует производной

Но существуют $f'_-(x) < f'_+(x)$

Тогда $\forall x_1 < x_2 \in E$ $f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$

Тогда для $x \in E$ построим отображение $q(x) \in (f'_-(x), f'_+(x)) \cap \mathbb{Q}$

$q : E \rightarrow \mathbb{Q}$ – инъекция

Отсюда E не более чем счетно

Теорема (дифференциальный критерий выпуклости)

1. f – непрерывна на $\langle a, b \rangle$, дифференцируема на (a, b)

Тогда f – выпукла (строго выпукла) $\Leftrightarrow f'$ возрастает (строго возрастает)

Доказательство \Rightarrow

По теореме об односторонней дифференцируемости $f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2)$ при $x_1 < x_2$

($f'_- = f'$ из дифференцируемости)

Знак строгий, если f строго выпукла (смотри доказательство теоремы)

Доказательство \Leftarrow

Проверим лемму о трех хордах

$x_1 < x_2 < x_3$

Тогда $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi_1), x_1 < \xi_1 < x_2$ – по т. Лагранжа

$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(\xi_2), x_2 < \xi_2 < x_3$

Из возрастания $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ (при строгом возрастании знак $<$)

2. f – непрерывна на $\langle a, b \rangle$, дважды дифференцируема на (a, b)

Тогда f – выпукла $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

Доказательство

f' – возрастает $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

Пример 1

При $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

При $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$ достигается равенство

Доказательство

$(\sin x)' = \cos x$ — строго убывает на промежутке

Тогда функция строго вогнутая на промежутке

Отсюда значение функции строго выше хорды, соединяющей $(0, 0)$ и

$(\frac{\pi}{2}, 1)$ (ее уравнение $y = \frac{2}{\pi}x$)

4 Верхний и нижний предел

Определение

Частичный предел последовательности = предел вдоль подпоследовательности

Пример

$$x_n = (-1)^n$$

$-1, 1$ — частичные пределы x_n

Пример

$$\forall a \in [-1, 1] \exists n_k : \sin n_k \rightarrow a$$

Определение 2

x_n — вещественная последовательность

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$ — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$ — нижняя огибающая

Верхний предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Нижний предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

Замечание

1. $y_n \geq y_{n+1} \geq \dots, z_n \leq z_{n+1} \leq \dots$
2. $\forall n \ z_n \leq x_n \leq y_n$
3. При изменении конечного числа x_n изменяется конечное число y_n, z_n

Пример

1. $x_n = (-1)^n$
 $\overline{\lim} x_n = 1, \underline{\lim} x_n = -1$

$$2. \ x_n = (1 + (-1)^n)n$$

$$\overline{\lim} x_n = +\infty, \underline{\lim} x_n = 0$$

Свойства

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. $x_n \leq \tilde{x}_n$
Тогда $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n$
 $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3. $\forall \lambda \geq 0 \ (0 \cdot \infty =: 0)$
 $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$
 $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$
4. $\forall \lambda < 0$
 $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$
 $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$
 $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$
(если сумма в правой части имеет смысл)
6. $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
Тогда $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$
Доказательство
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall k > N_0 \ x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$
Возьмем $\sup_{k \geq N}$ для некоего $N > N_0$
 $y_N + l - \varepsilon < \sup_{k \geq N} (x_k + t_k) < y_N + l + \varepsilon$
Возьмем предел $N \rightarrow +\infty$
 $\overline{\lim} x_n + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_k + t_k) \leq \overline{\lim} x_n + l + \varepsilon$
7. $t_n \rightarrow l > 0, l \in \mathbb{R}$
Тогда $\overline{\lim} t_n x_n = l \overline{\lim} x_n$

Техническое описание верхнего предела

1. $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$ – не ограничено сверху
2. $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$

3. $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A + B$
 $A : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n < l + \varepsilon$
 $B : \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N : l - \varepsilon < x_n$

Доказательство 1

Очевидно в обе стороны

Доказательство 2 \Rightarrow

$$x_n \leq y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

Доказательство 2 \Leftarrow

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall A \exists N : \forall n > N x_n < A \text{ (а значит } y_n \leq A)$$

Отсюда $y_n \rightarrow -\infty$

Доказательство 3 \Rightarrow

$$y_n \downarrow, l = \lim y_n = \inf y_n$$

Возьмем $\varepsilon > 0$

$$\text{Тогда } \exists N : y_N < l + \varepsilon \Rightarrow \forall n > N x_n < l + \varepsilon$$

Отсюда A – доказано

$$\forall N y_n > l - \varepsilon \Rightarrow \exists n > N : l - \varepsilon < x_n \leq y_N$$

Доказательство 3 \Leftarrow

$$A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N y_n \leq l + \varepsilon$$

$$B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N l - \varepsilon \leq y_n$$

Отсюда $y_n \rightarrow l$

Теорема

$$(x_n) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n (= \lim x_n)$$

Доказательство \Rightarrow

$$1. \lim x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \leq \overline{\lim} x_n$$

$$2. \lim x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \geq \underline{\lim} x_n$$

$$3. \lim x_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда из А и В } \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$$

Доказательство \Leftarrow

$$z_n \leq x_n \leq y_n$$

$$\text{Тогда } \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

Теорема о характеристизации частичных пределов

$$(x_n) \in \mathbb{R}$$

1. Если l – частичный предел x_n (существует по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса), то $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

Доказательство

$$z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}, k \rightarrow +\infty$$
$$\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$$

$$2. \exists x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n, \exists x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$$

Доказательство для $\underline{\lim} x_n$

Если $\underline{\lim} x_n = +\infty$, то x_n не ограничена сверху

Если $\underline{\lim} x_n = -\infty$, то $\lim x_n = -\infty$

Если $\underline{\lim} x_n = l$, то по А, В:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$$

Будем выбирать $n_{k+1} > n_k$

Тогда $x_{n_k} \rightarrow l$

Пример

$$\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$$

$$\forall l \in (-1, 1) \exists n_k : \sin n_k \rightarrow l$$

Замечание

И множество $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$ плотно на $[-1, 1]$

Доказательство

$$\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \sin n \neq \sin m$$

Т.е. невозможно $n = m + 2\pi k, \pi - m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Будем двигаться по окружности с шагом $l_1 = 1$

Движение с шагом $6l_1$ равносильно движению с шагом $l_2 := |6l_1 - 2\pi|$ в противоположную сторону

Т.о. мы научились двигаться с шагом l_2

Будем по индукции уменьшать l_i

$$\text{Пусть } |ml_i| < 2\pi, |(m+1)l_i| > 2\pi, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } l_{i+1} := \min(2\pi - ml_i, (m+1)l_i - 2\pi)$$

$$\text{Заметим, что т.к. } 2\pi \in (ml_i, (m+1)l_i), \text{ то } l_{i+1} \leq \frac{l_i}{2}$$

Рассмотрим отрезок в $[-1, 1]$

Ему соответствует отрезок $[a, b], a, b \in [0, 2\pi)$ на окружности

$$\text{Пусть } l = b - a$$

Подберем $l_k < l$

$$\text{Тогда для некоторого } q \in \mathbb{N} ql_k \in [a, b]$$

Т.о. $\sin ql_k$ будет лежать в нашем отрезке. Отсюда $\sin n$ плотно в $[-1, 1]$

Докажем, что $\forall \alpha \in [-1, 1] \exists q_i : \lim q_i \rightarrow \alpha$

Возьмем некоторую окрестность α

Будем генерировать последовательность, лежащую в этой окрестности, и сдвигать границу

5 Несобственный интеграл

Определение

1. $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ – допустимая, если $\forall A \in (a, b) f \Big|_{[a, A]}$ – кусочно непрерывная

2. $\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$

Если $\exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$, то он называется несобственным интегралом f на $[a, b)$

Обозначение: $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$

Если $\nexists \lim \Phi(A)$ – несобственный интеграл не существует

Если $\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$ – конечный, то интеграл сходится

Если $\lim_{A \rightarrow b-0} = \infty$ – интеграл расходится

Аналогично определяем $\int_{\rightarrow a}^b f(x) dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^c f + \int_c^{+\infty} f$$

Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty$$

Пример

$$\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +0} \ln A = +\infty$$

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

$$x_1 < \dots < x_n \in (a, b), n - \text{нечетное}$$

Пусть f допустимо на каждом из промежутков $(a, x_1], [x_1, x_2), (x_2, x_3], [x_3, x_4), \dots, [x_n, b)$

Тогда $\int_a^b f = \int_{\rightarrow a}^{x_1} f + \int_{x_1}^{\rightarrow x_2} f + \int_{\rightarrow x_2}^{x_3} f + \dots + \int_{x_n}^{\rightarrow b} f$

Если хотя бы один интеграл не существует или сумма некорректная (есть $+\infty$ и $-\infty$), то интеграл расходится

Пример

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \underbrace{\int_{-1}^{\rightarrow 0} \frac{1}{x} dx}_{-\infty} + \underbrace{\int_{\rightarrow 0}^1 f}_{+\infty}$$

Данный интеграл расходится

Свойства

1. Критерий Больцано-Коши о сходимости несобственного интеграла f – допустимая на $[a, b)$ $-\infty < a < b \leq +\infty$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f$ – сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall A, B \in (\delta, b) \mid \int_A^B f < \varepsilon$

Доказательство

$\exists \lim_{R \rightarrow b-0} \Phi(R) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) \forall A, B \in (\delta, b) \mid |\Phi(A) - \Phi(B)| < \varepsilon$ – критерий Больцано-Коши

$\int f$ – расходится $\Rightarrow \exists A_n, B_n \rightarrow b-0 : \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$

Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx, A_n = n, B_n = 2n$$

Тогда $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{2n}n = \frac{1}{2}$ – расходится

Пример

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx, A_n = \frac{1}{2n}, B_n = \frac{1}{n}$$

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx \geq 2n \frac{1}{2n} = 1$$

2. Аддитивность по промежутку

f – допустима $[a, b), c \in (a, b)$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_c^{\rightarrow b} f$ сходятся/расходятся одновременно

И в случае сходимости $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

Следствие

Если $\int_a^{\rightarrow b} f$ — сходится, то $\int_A^{\rightarrow b} f \xrightarrow{A \rightarrow b-0} 0$

3. f, g — допустимы на $[a, b)$, $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — сходятся, $\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда $\lambda f, f \pm g$ — допустимы $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} (f+g) = \int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$

4. $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ — существуют в $\overline{\mathbb{R}}, f \leq g$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$

5. f, g — дифференцируемые на $[a, b)$
 f', g' — допустимы на $[a, b)$

Тогда* $\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$, где $f g \Big|_a^{\rightarrow b} = (\lim_{B \rightarrow b-0} f g(b)) - f(a)$

* — если здесь существуют два предела из трех, то существует и третье и равенство выполняется

6. $\phi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \phi \in C^1$

Пусть $\exists \phi(\beta-0) \in \overline{\mathbb{R}}$

$f \in C\langle A, B \rangle$

Тогда* $\int_{\phi(\alpha)}^{\beta} (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\rightarrow \phi(\beta-0)} f$

* — если существует один интеграл, то существует и другой

Замечание

Это означает, что мы можем начать вычислять интеграл, не зная, существует ли он. Тогда если посчитать его удалось, то он существует

Т.к. свойства собственных и несобственных интегралов одинаковые, то с этого момента стрелочку писать не будем

Лемма об интегрировании асимптотических равенств

$f, g \in C[a, b), g \geq 0, \int_a^b g(x) dx = +\infty$

$$F(x) := \int_a^x f, G(x) := \int_a^x g, x \in [a, b)$$

Тогда при $x \rightarrow b-0$ из $f = O(g)/f = o(g)/f \sim g$

Следует $F = O(G)/F = o(G)/F \sim G$

Доказательство

1. $f = O(g)$

$$\exists M \exists x_0 : \forall x \in [x_0, b) |f(x)| \leq M|g(x)|$$

$$\text{Пусть } \int_a^{x_0} |f| = C_1$$

Выберем $x_1 \in (x_0, b)$ такую, что $\int_{x_0}^{x_1} |g| = \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \text{При } x > x_1 \quad |F(x)| &= \left| \int_a^x |f| \right| = \int_a^{x_0} |f| + \int_{x_0}^x |f| \leq C_1 + M \int_{x_0}^x g \leq \\ \frac{C_1}{\alpha} \int_{x_0}^{x_1} g + M \int_{x_0}^x g &\leq \left(\frac{C_1}{\alpha} + M \right) \int_{x_0}^x g = \left(\frac{C_1}{\alpha} + M \right) G(x) \end{aligned}$$

2. Аналогично

3. Из эквивалентности $F(x) \rightarrow +\infty$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F}{G} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = 1$$

Лемма

Пусть ϕ_n – шкала асимптотического разложения при $x \rightarrow b-0$ на $[a, b)$

$$\phi_n \in C[a, b), \phi_n \geq 0$$

$$\Phi_n := \int_x^b \phi_n(x) \quad (\text{считаем, что } \forall n - \text{сходится})$$

Тогда

1. Φ_n – шкала

2. $f \in C[a, b), F(x) = \int_x^b f$ – сходится

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(x) + o(\phi_n)$$

$$\text{Тогда } F = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k + o(\Phi_n)$$

Доказательство

1. По правилу Лопиталя

$$\forall n \Phi_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\Phi'_{n+1}}{\Phi'_n} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{-\phi_{n+1}}{-\phi_n} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k}{\Phi_n(x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k}{\phi_n(x)} = 0$$

5.1 Признаки сходимости несобственного интеграла

Теорема

$f \geq 0$

1. f – допустима на $[a, b)$, $f \geq 0$, $\Phi(A) = \int_a^A f$

Тогда $\int_a^b f$ – сходится $\Leftrightarrow \Phi$ – ограничена на $[a, b)$

Доказательство

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) = [\Phi \uparrow] = \sup \Phi(A)$$

2. *Признак сравнения*

f, g – допустимы на $[a, b)$, $f, g \geq 0$

- (а) Пусть $f \leq g$

Тогда если $\int_a^b g$ – сходится, то и $\int_a^b f$ – сходится

Если $\int_a^b f$ – расходится, то и $\int_a^b g$ – расходится

- (б) Пусть $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = l < +\infty$

Тогда если $\int_a^b g$ – сходится, то и $\int_a^b f$ – сходится

- (с) Пусть $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = m > 0$ (вероятно $m = +\infty$)

Тогда если $\int_a^b f$ – сходится, то и $\int_a^b g$ – сходится

Замечание

Если $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} \in (0, \infty)$, то интегралы f, g сходятся одновременно

Доказательство

- (а) $\Phi(A) = \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$
 $f \leq g \Rightarrow \Phi(A) \leq \Psi(A)$, обе \uparrow
 $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \Psi$ — ограничена $\Rightarrow \Phi$ ограничена $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
 $\int_a^b f$ — расходится $\Rightarrow \Phi$ — не ограничена $\Rightarrow \Psi$ не ограничена
 $\Rightarrow \int_a^b g$ — расходится
- (б) $\frac{f}{g} \rightarrow l < L < +\infty$
 Тогда $\exists c \in [a, b) : f \leq Lg$ на $[c, b)$
 Т.е. $\int_a^b g$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b Lg$ — сходится $\Rightarrow \int_a^b f$ — сходится
- (с) Аналогично

Пример

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ — при $p > 1$ сходится, иначе расходится

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ — при $p < 1$ сходится, иначе расходится

(Чтобы не путаться, можно посмотреть, что происходит в $p = 1$)

Метод "удавить логарифм"

Пусть есть интеграл $\int \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

(Нижняя граница не важна)

Определим, сходится ли он

- $\alpha > 1, \alpha = 1 + 2a, a > 0$

Тогда $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$

Утверждается, что $x^a (\ln x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (упражнение на правило Лопиталя)

Тогда $\exists x_0 : \forall x > x_0 \ x^a (\ln x)^\beta > 1$

А значит с некоторого места $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{1+a}}$

Тогда выражение сходится по признаку сходимости

2. $\alpha < 1, \alpha = 1 - 2a, a > 0$

Тогда $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \frac{1}{x^{-a} (\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$

$x^{-a} (\ln x)^\beta \rightarrow +0$

$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$

Тогда выражение расходится по признаку сходимости

3. $\alpha = 1$

$\int_{+\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \int_{+\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^\beta}$

При $b > 1$ – сходится

При $b \leq 1$ – расходится

Определение

Гамма-функция Эйлера $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$

□ $g(t, x) = x^{t-1} e^{-x}$

1. Интеграл сходится при всех $t > 0$:

Определим сходимость $g(t, x)$ в $x \rightarrow +0$

$x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1}$ при $x \rightarrow +0$ – сходится при $t > 0$

Определим сходимость $g(t, x)$ в $x \rightarrow +\infty$

$x^{t-1} e^{-x} = \underbrace{x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

2. $\Gamma(t)$ выпукла на $(0, +\infty)$:

$\forall x > 0 \ g(t, x)$ – выпуклая

$g(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2, x) \leq \alpha g(t_1, x) + (1 - \alpha)g(t_2, x)$

$\int_0^{+\infty} g(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2, x) \leq \alpha \int_0^{+\infty} g(t_1, x) + (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} g(t_2, x)$

Отсюда $\Gamma(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1 - \alpha)\Gamma(t_2)$

Следствие – Γ дифференцируема на $(0, +\infty)$

$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$

$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$3. \Gamma(1) = 1$$

Тогда $\Gamma(n+1) = n!$

4. Следствие

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

$$5. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \underset{x=y^2}{=} 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{\text{интеграл Эйлера-Пуассона, } \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sqrt{\pi}$$

Лемма

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство

$$1 - y^2 \leq e^{-y^2} \leq \frac{1}{1+y^2} - \text{переписанное } e^t \geq 1+t$$

$$\int_0^1 (1-y^2)^n dy \leq \int_0^1 e^{-ny^2} dy \leq \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n}$$

$$\int_0^1 (1-y^2)^n dy \underset{y=\cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt =: w_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n} \underset{y=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2} dt = w_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

$$\text{По формуле Валлиса } \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{\pi}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \underset{z=\sqrt{n}y}{=} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Определение

Пусть f – допустима на $[a, b]$

$\int_a^{\rightarrow b} f$ – абсолютно сходимый, если

1. Он сходится

2. $\int_a^{\rightarrow b} |f|$ – сходится

Теорема

Пусть f – допустима на $[a, b)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится

2. $\int_a^b |f|$ сходится

3. $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся

Доказательство $1 \Rightarrow 2$

Очевидно

Доказательство $2 \Rightarrow 3$

$0 \leq f^+ \leq |f|, 0 \leq f^- \leq |f|$. Тогда по признаку сходимости

Доказательство $3 \Rightarrow 1$

$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$

Примеры

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, p \in \mathbb{R}$$

При каких p сходится, абсолютно сходится?

$|\frac{\sin x}{x^p}| \leq \frac{1}{x^p}, p > 1$ – абсолютно сходится (и сходится)

$$p \leq 0: \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi k)^p} \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin x = \frac{2}{(2\pi k)^p} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

Это же рассуждение и для $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^p}|$ – расходится

$$0 < p \leq 1: \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \begin{bmatrix} f = \frac{1}{x^p} & g' = \sin x \\ f' = -\frac{p}{x^{p+1}} & g = -\cos x \end{bmatrix} = \frac{-\cos x}{x^{p+1}} \Big|_1^{+\infty} -$$

$$p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx - \text{сходится}$$

$$\text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$$

Возможны следующие доказательства:

1. Заметим, что в большинстве точек $|\sin x| \geq 10^{-6}$. Тогда в большинстве точек $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq 10^{-6} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ – расходится
(Другими словами: проинтегрируем по множеству точек, где $|\sin x| \geq 10^{-6}$)

$$2. \quad |\sin x| \geq \sin^2 x \\ \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{сходится}} - \text{расходится}$$

$$3. \quad \int_{2\pi k}^{3\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_{2\pi k}^{3\pi k} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{3\pi k} \int_{2\pi k}^{3\pi k} |\sin x| = \frac{2}{3\pi} \not\rightarrow 0 - \text{отсюда расходится}$$

Замечание

$$\int_a^b f(x) dx \text{ сходится} \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0 \\ \int_a^b |f(x)| dx \text{ сходится} \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$$

6 Несколько классических неравенств

Неравенство Йенсена

f – выпуклая на $\langle a, b \rangle$

Тогда $\forall a_1, \dots, a_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 : \sum_i \alpha_i = 1 \quad f(\sum_i \alpha_i x_i) \leq$

$$\sum_i \alpha_i f(x_i)$$

Доказательство

$$x^* := \sum_i \alpha_i x_i$$

$$\text{Тогда } x^* \leq \sum_i \alpha_i (\max_i x_i) = \max_i x_i$$

Аналогично $x^* \geq \min_i x_i$

Тогда $x^* \in \langle a, b \rangle$

Проведем в x^* опорную прямую $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = k \sum_i \alpha_i x_i + b \sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i) - \text{из}$$

выпуклости

Заметим, что в a, b последний переход может не выполняться, если опорная прямая вертикальная. Но тогда $x^* = \max_i x_i = \min_i x_i \Rightarrow \forall x_i : \alpha_i = 0 \vee x^* = x_i$, что доказывается тривиально

Пример

Неравенство Коши

$$\forall a_1, \dots, a_n > 0 \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

Доказательство

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}(\ln a_1 + \dots + \ln a_n)$$

Применим неравенство для вогнутых функций

Интегральное неравенство Йенсена

f – выпуклая на $\langle A, B \rangle$

$\phi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$ – непрерывная

$\lambda : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\int_a^b \lambda(x) dx = 1$ – непрерывная

$$\text{Тогда } f\left(\int_a^b \lambda(x)\phi(x) dx\right) \leq \int_a^b \lambda(x)f(\phi(x)) dx$$

Доказательство

Докажем для случая $\lambda > 0$ в силу сложности доказательства в общем случае

$$x^* = \int_a^b \lambda(x)\phi(x) dx \leq \max \phi \int_a^b \lambda(x) dx, \geq \min \phi \int_a^b \lambda(x) dx$$

Рассмотрим $y = kx + l$ – опорную прямую в x^*

$$f(x^*) = kx^* + l = \int_a^b \lambda(k\phi + l) \leq \int_a^b \lambda(x)f(\phi(x)) dx$$

Тут существует проблема, аналогичная предыдущей теореме. Но выкинуть все точки, где $\lambda = 0$ мы не можем, т.к. получившееся множество будет сложным

Пример (Продолжение)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \text{среднее арифметическое } f \text{ на } [a, b]$$

Тогда среднее геометрическое – это $\exp(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) \, dx)$

Теорема

$\phi \in C[a, b], \phi > 0$

Тогда $\ln(\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(x) \, dx) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \phi(x) \, dx$

Доказательство

$f(t) = \ln t$ – вогнутая

Применим неравенство Йенсена: ϕ – это ϕ

$$\lambda(x) = \frac{1}{b-a}$$

Неравенство Гельдера

Пусть $a_i, b_i > 0$

Заметим, что $\forall p > 1 \exists q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q$ – сопряженный

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i b_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство

$f(x) = x^p, p > 1$ – выпуклая при $x > 0$

По неравенству Йенсена $(\sum_i \alpha_i x_i)^p \leq \sum_i \alpha_i x_i^p$

$$\alpha_i = \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q}. \text{ Тогда } \alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1$$

$$x_i := a_i b_i^{-\frac{1}{p-1} = 1-q} (\sum_j b_j^q)$$

$$(\sum_i \alpha_i x_i)^p = (\sum_i a_i b_i^{q-\frac{1}{p-1}})^p = (\sum_i a_i b_i)^p$$

$$\sum_i \alpha_i x_i^p = \sum_i \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} (\sum_j b_j^q)^p = \sum_i (a_i^p (\sum_j b_j^q)^{p-1}) = (\sum_i a_i^p) (\sum_j b_j^q)^{p-1}$$

$$(\sum_i a_i b_i)^p \leq (\sum_i a_i^p) (\sum_j b_j^q)^{p-1}$$

Возведем в степень $\frac{1}{p}$

$$\sum_i a_i b_i \leq (\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_j b_j^q)^{\frac{1}{q}}$$

Замечание

В неравенстве Йенсена равенство достигается при $x_1 = \dots = x_n$

Отсюда в неравенстве Гельдера достигается при $\forall i, j \ x_i = x_j \Leftrightarrow x_i^p = x_j^p = \lambda \Leftrightarrow a_i^p b_i^{-q} = a_j^p b_j^{-q} = \lambda \Leftrightarrow a_i^p = \lambda b_i^q$

Т.е. вектора $(a_i^p)_i \parallel (b_j^q)_j$

Замечание

$|\sum_i a_i b_i| \leq \sum_i |a_i b_i| \leq (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ – общий вид неравенства

Гельдера

$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Равенство при $(a_i^p)_i \parallel (b_j^q)_j$

Интегральное неравенство Гельдера

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$

Тогда $\int_a^b |fg| \leq (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

Доказательство

$x_k := a + k \frac{b-a}{n}, k = 0 \dots n$

$a_k := f(x_k) (\frac{b-a}{n})^{\frac{1}{p}}, b_k := g(x_k) (\frac{b-a}{n})^{\frac{1}{q}}$

$\sum_k a_k b_k = \sum_k |f(x_k) g(x_k)| \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |fg|$

$(\sum_k a_k^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_k |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n})^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

$(\sum_k b_k^q)^{\frac{1}{q}} \rightarrow (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$

Замечание

При $p = 2$ неравенство Гельдера = КБШ

Неравенство Минковского

$p \geq 1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

Тогда $(\sum_i |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Это утверждение о том, что $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ – норма в \mathbb{R}^n

Доказательство

Если $p = 1$, очевидно

Если $p > 1$:

Пусть $a_i, b_i > 0$

$$\text{Тогда } \sum_i a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_i b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\left(\sum_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\left(\sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{Для произвольных } a_i, b_i \text{ заметим, что } \left(\sum_i |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_i (|a_i| + |b_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Неравенство Минковского – интегральный вид

$$f, g \in C[a, b], p \geq 1$$

$$\text{Тогда } \left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство: самостоятельно

7 Ряды

7.1 Простейшие свойства

Пусть (a_n) – вещественная последовательность. Тогда $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ – числовой ряд

$S_N = a_1 + \dots + a_N$ – частичная сумма

Если $S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ – существует и конечен, то говорят, что $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится к S – сумме ряда

Если существует $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \pm\infty$ – ряд расходится, сумма – $\pm\infty$

Если $\nexists \lim S_N$ – ряд расходится

Замечание

1. Суммирование может быть с любой точки

2. $a_n = S_n - S_{n-1}$

Тогда возможно построить последовательность с любой последовательностью частичных сумм

Примеры

$$e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Доказательство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^{c_{n,x}}(n+1)!x^{n+1}$$

$$C_{n,x} \in [0, x]$$

$$\text{Тогда } S_n = e^x - \frac{e^{C_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow{x \text{ - фиксированное}} e^x$$

Теорема о иррациональности e^2

e^2 иррационально

Доказательство

Пусть это не так. Тогда $e^2 = \frac{2k}{n}$ (не требуем несократимости)

$$en = 2ke^{-1}$$

$$en(2k-1) \neq (2k)!e^{-1}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in [0, 1]$$

$$(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!} + \dots)n(2k-1)!$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!})n(2k-1)!}_{\text{целое число}} + \underbrace{n(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k \cdot 2k+1} + \dots)}_{\leq n \frac{1}{2k} + n \frac{1}{(2k)^2} + \dots = \frac{\frac{n}{2k}}{1 - \frac{1}{2k}} = \frac{e^{-2}}{1 - \frac{1}{2k}} \leq 2e^{-2} < \frac{1}{3}}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in [0, 1]$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)!(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!})$$

$$+ \underbrace{\left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \dots \right)}_{\text{целое}}$$

отр. и по модулю не превосходит $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \dots < \frac{1}{3}$

Т.о. слева число чуть больше целого, а справа – чуть меньше целого

Тогда равенство не выполняется. Отсюда e^2 иррациональное

Признаки Абеля и Дирихле

1. (Дирихле) f – допустима на $[a, b]$

$$F(A) := \int_a^A f \, dx, F \text{ – ограничена}$$

$g \in C^1, g(x)$ – монотонна на $[a, b), g(x) \rightarrow 0$

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f g \, dx$ – сходится

2. (Абеля) f – допустима на $[a, b), \int_a^{\rightarrow b} f \, dx$ – сходится

$g \in C^1, g(x)$ – монотонна и ограничена

Тогда $\int_a^{\rightarrow b} f g \, dx$ – сходится

Доказательство 1

Проинтегрируем по частям: $\int_a^A f g = \underbrace{F g \Big|_a^A}_{F(A)g(A) \xrightarrow{A \rightarrow b-0} 0} - \int_a^A F g' =$

Т.к. F ограничена, то для некоторого C $|F(x)| \leq C$

Тогда $|F g'| \leq \underbrace{\pm}_{\text{Зависит от знака } g} C g$

Отсюда $\int_a^A F g'$ абсолютно сходится

Доказательство 2

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} S \in \mathbb{R}$

$\int_a^A f(g - S + S) \, dx = \underbrace{\int_a^A f(g - S)}_{\text{сходится по Дирихле}} + \underbrace{\int_a^A f S \, dx}_{\xrightarrow{A \rightarrow b-0} S \int_a^{\rightarrow b} f}$

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Лемма

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Доказательство

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x)$$

$$\int_0^\pi (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) \, dx = 0 = \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} \, dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} \underset{y=(n+\frac{1}{2})x}{=} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\
& \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} dx = \int_0^\pi \sin(n + \frac{1}{2})x \cdot h(x) dx = \dots, h(x) = \\
& \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ -- бесконечно дифференцируема на } [0, \pi] \\
& \dots = \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})x \cdot h(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos(n + \frac{1}{2})x \cdot h' = O(\frac{1}{n}) \\
& \text{Отсюда } \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} = \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} + O(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n}) \\
& \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Задача

Пусть 5 кузнечиков расположены в вершинах правильного пятиугольника. Один кузнечик сидит в начале координат и не может двигаться. Остальные кузнечики могут совершить прыжок через другого, оказавшись в точке, симметричной относительно данного. Вопрос: могли ли кузнечики оказаться в вершинах правильного пятиугольника большего размера?

Решение

Зададим матрицу кузнечиков:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

Если кузнечик a прыгает через кузнечика b , то он окажется в точке $2b - a$. Тогда матрица перехода имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{-1}_{(a,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{2}_{(b,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Если кузнечик a перепрыгивает через нулевого, то матрица перехода

имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{-1}_{(a,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Свойства матриц:

1. (a) $\det = \pm 1$
(b) На a_{ii} – нечетные, на a_{ij} – четные
2. Любая матрица, удовлетворяющая свойствам (a),(b), может быть разложена в произведение данных
3. $\exists B : KB = K', \det B = \pm 1, K'$ – искомое состояние (более крупный пятиугольник)
Тогда $\exists m : KB^m = K'$ и B^m удовлетворяет условию (b)

Доказательство

Построим отображение π из множества матриц с определителем ± 1 и целыми коэффициентами (назовем множество $SL(n, \mathbb{Z})$), сопоставляющее матрице аналогичную матрицу с элементами по модулю 2 (назовем множество $SL(n, F_2)$)

π – гомоморфизм, т.е. $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$

Заметим, что в $SL(n, \mathbb{Z})$ и $SL(n, F_2)$ у всех элементов есть обратные (т.к. определитель 1)

$SL(n, F_2)$ – конечная

В конечной группе $\forall g \in SL(n, F_2) \exists m : g^m = E$

Это легко проверить: будем выписывать g, g^2, g^3, \dots . Т.к. группа конечна, то у данной последовательности есть период. Тогда $\exists l \neq m > 0 : g^m = g^l$

Тогда $g^m g^{-l} = g^{m-l} = E$ (обратная матрица существует, т.к. определитель 1)

Т.е. $\forall C \in SL(n, \mathbb{Z}) \exists m : (\pi C)^m = E \Leftrightarrow \pi C^m = E$

Заметим, что $KB = \lambda R K, |\lambda| > 1$, где R – поворот

Тогда $KB^m = \lambda^m R^m K$

Отсюда KB^m – переводит пятиугольник в пятиугольник большего размера

Рассмотрим $B_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

B_0 переводит один пятиугольник в другой

K	v_1	v_2	v_3	v_4	Утверждается, что $B_0 +$
KB_0	$v_2 - v_1$	$v_3 - v_1$	$v_4 - v_1$	$-v_1$	
KB_0^2	$v_3 - v_2$	$v_4 - v_2$	$-v_2$	$v_1 - v_2$	
$K(B_0 + B_0^2)$	$v_3 - v_1$	\dots			

B_0^2 дает в результате пятиугольник. Воспользуемся свойством 3 и возведем его в степень m . Теперь $(B_0 + B_0^2)^m$ представима как композиция прыжков

Определение

Пусть есть ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$

Тогда $\sum_{i=m}^{+\infty} a_n$ – m -ый остаток ряда

Свойства

1. Пусть $\sum a_n, \sum b_n$ – сходится
 $\sum (a_n + b_n)$ сходится
 $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
2. Пусть $\sum a_n$ – сходится

$\sum \lambda a_n$ сходится и равен $\lambda \sum a_n$

3. (а) Если ряд сходится, то и любой остаток сходится

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{+\infty} a_i$$

Доказательство

$$N > m : \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^N a_i$$

Левая часть сходится и конечна. Тогда и правая часть тоже

- (б) Если какой-то остаток сходится, то и ряд сходится

Доказательство

Аналогично

- (с) Пусть r_m – m -ый остаток ряда. Тогда $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow r_m \rightarrow 0$

Доказательство \Rightarrow

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} a_i}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i} + r_m$$

Тогда $r_m \rightarrow 0$

Доказательство \Leftarrow

Тривиально

Утверждение (необходимое условие сходимости ряда)

$\sum a_n$ – сходится. Тогда $a_n \rightarrow 0$

Доказательство

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Примеры

1. $\sum_n \frac{1}{n}$ расходится (по асимптотике гармонического ряда)
2. $\sum_n \sin(n\alpha), \alpha \in (0, \pi)$ – расходится

Критерий Больцано-Коши о сходимости ряда

$\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \exists \lim S_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists K : \forall N, M > K |S_N - S_M| < \varepsilon \Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > K \forall m |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$

Примеры

1. $\sum \frac{1}{n}$
 $|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}| > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$
2. $\sum \frac{1}{n^2}$
 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
 $\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} =$
 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$

7.2 Сходимость положительных рядов

Обозначения:

$(a) := (a_n)$

$S_N^{(a)}$ – частичная сумма ряда

$S^{(a)}$ – сумма ряда

Лемма

$a_n \geq 0$

Тогда a_n сходится \Leftrightarrow последовательность $S_N^{(a)}$ ограничена

Доказательство

Очевидно

Теорема (признак сравнения)

$a_n, b_n \geq 0$

1. Если с некоторого места $a_n \leq kb_n, k > 0$, то
 $\sum b_n$ – сходится $\Rightarrow \sum a_n$ – сходится
 $\sum a_n$ – расходится $\Rightarrow \sum b_n$ – расходится
2. $b_n \neq 0, \lim \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$

При $l = 0$ аналогично первой части

При $l \in (0, +\infty)$ $\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \sum b_n$ – сходится

При $l = +\infty$ $\sum a_n$ – сходится $\Rightarrow \sum b_n$ – сходится

$\sum b_n$ – расходится $\Rightarrow \sum a_n$ – расходится

3. $a_n, b_n > 0$

С некоторого места $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Тогда аналогично первой части

Доказательство

1. $\forall n \ a_n \leq kb_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq kS_n^{(b)}$
 $\sum b_n$ – сходится $\Rightarrow S_n^{(b)}$ – ограничена сверху $\Rightarrow S_n^{(a)}$ – ограничена сверху $\Rightarrow \sum a_n$ – сходится. Если $\forall n \geq n_0 \ a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$ – тривиально

2. Если $l \in (0, +\infty)$

Для $\varepsilon = \frac{l}{2} \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}l$

Тогда из п. 1. Если $l = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

Тогда из п.1

Для $l = +\infty$ – аналогично

3. $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$

$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}$

\vdots

$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{b_{n-1}}$

Отсюда $\frac{a_n}{a_{n_0}} < \frac{b_n}{b_{n_0}}$

Тогда $a_n < \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$ – из п.1

Теорема (признак Коши)

$\sum a_n, a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$

Light:

1. $\exists q < 1 : \text{НСНМ } K_n \leq q$

Тогда $\sum a_n$ сходится

2. $K_n \geq 1$ для бесконечного множества n . Тогда a_n расходится

Hard: $\square \exists K := \overline{\lim} K_n$. Тогда

1. $K < 1$ – ряд сходится
2. $K > 1$ – ряд расходится

Замечание

При $K = 1$ признак не работает

Пример: $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}, K = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$, но 1 ряд расходится, а второй сходится

Доказательство

Сравнить с прогрессией:

Light:

1. Пусть $K_n \leq q$ при $n \geq n_0$
Н.У.О. $n_0 = 1$
 $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n$
Т.к. q^n сходится, то и a_n сходится
2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1$ для бесконечного количества n
Тогда $a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд расходится

Hard:

1. $q := \frac{K+1}{2}$

Из технического описания $\overline{\lim}$: $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 K_n < q$

2. Из технического описания $\overline{\lim}$: \exists бесконечного много $n : \sqrt[n]{a_n} > 1$

Примеры

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2023} e^{-n}$$

$$K := \lim \sqrt[n]{n^{2023} e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$$

Теорема (признак Даламбера)

$$\sum a_n, a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Light:

1. $\exists q < 1$: НСНМ $D_n \leq q$
Тогда $\sum a_n$ сходится
2. $D_n \geq 1$ НСНМ. Тогда a_n расходится

Hard: $\square \exists D := \lim D_n$. Тогда

1. $D < 1$ – ряд сходится
2. $D > 1$ – ряд расходится

Замечание

При $D = 1$ признак не работает

Доказательство

Сравнить с прогрессией

Light:

1. Н.У.О. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ при $n \geq 1$
Т.е. $a_2 \leq qa_1$
 $a_3 \leq qa^2$
 \vdots
 $a_n \leq qa_{n-1}$
 $a_k \leq q^{k-1}a_1 = q^k(q^{-1})a_1$
Тогда по признаку сравнения ряд расходится
2. Н.У.О. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ при $n \geq 1$
Т.е. $a_2 \geq a_1 > 0$
 $a_3 \geq a_2$
 \vdots
 $a_n \geq a_{n-1}$
Отсюда $a_n \geq a_1$, т.е. $a_n \not\rightarrow 0$

Hard:

1. $q = \frac{D+1}{2}$
Тогда по определению \lim : $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 D_n < q$
Дальше по Light 1

$$2. \exists n_0 : \forall n > n_0 \ D_n > 1$$

Далее по Light 2

Теорема (признак Раабе)

$$\sum a_n, a_n > 0$$

Если $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq p > 1$ НСНМ, то ряд сходится

Если $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ – расходится

Доказательство

Сравните a_n с $\frac{1}{n^p}$

Доказательство

$$1. \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{p}{n}$$

Возьмем $1 < S < p$

$$\text{Заметим, что } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^S - 1}{\frac{1}{n}} = S < p$$

$$\text{Т.е. НСНМ } \frac{(1 + \frac{1}{n})^S - 1}{\frac{1}{n}} < p$$

$$\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(1+n)^S}} = (1 + \frac{1}{n})^S < 1 + \frac{p}{n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(1+n)^S}}$$

$$\sum \frac{1}{n^S} - \text{сходится}$$

Тогда $\sum a_n$ – сходится

$$2. \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

Тогда $\sum a_n$ – расходится

Следствие

Пусть $\exists \lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$

При $p > 1$ – ряд $\sum a_n$ сходится

При $p < 1$ – ряд $\sum a_n$ сходится

Теорема (интегральный признак Коши)

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, непрерывная, монотонная

Тогда $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k), \int_1^{+\infty} f(x) dx$ – сходятся/расходятся одновременно

Доказательство

Если $f \not\equiv 0$, возрастает, то тривиально:

НСНМ $f \geq \varepsilon$

Тогда $\int_1^{+\infty} f \geq \int_a^{+\infty} \varepsilon dx = +\infty$ – расходится

Сумму также расходится

Если f убывает:

$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx$ – из графика

$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx$ – из графика

Отсюда они сходятся/расходятся одновременно

Определение

$\sum a_n$ – абсолютно сходящийся, если

1. $\sum a_n$ – сходится

2. $\sum |a_n|$ – сходится

$\sum a_n$ – сходится $\not\Rightarrow \sum a_n$ – абсолютно сходится

Теорема

Утверждения эквивалентны:

1. $\sum a_n$ – абсолютно сходится

2. $\sum |a_n|$ – сходится

3. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ – сходятся

7.3 Ряды со слагаемыми произвольного знака

Теорема(признак Лейбница)

$\sum (-1)^n C_n$, где $C_n \geq 0, C_n \rightarrow 0, C_n$ – монотонный

Тогда ряд сходится

Доказательство

Н.У.О. пусть первое слагаемое положительно

$$S_{2n} = (C_1 - C_2) + \dots + (C_{2n-1} - C_{2n})$$

$$S_{2n} \geq 0, \uparrow$$

$$S_{2n} = C_1 - (C_2 - C_3) - \dots - (C_{2n-2} - C_{2n-1}) - C_{2n} \leq C_1$$

Пусть $\exists \lim S_{2n} = S$

$$\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + C_{2n+1} = S$$

Т.о. ряд сходится

Следствие (секретное приложение к признаку Лейбница)

В условии теоремы $\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^n C_n \right| \leq C_N$

Замечание

1. $a_n \sim b_n$ (знаки меняются)
 $\sum a_n$ – сходится $\not\Rightarrow \sum b_n$ – сходится
2. $\sum a_n$ – сходится, $b_n = o(a_n) \not\Rightarrow \sum b_n$ – сходится

Определение (преобразование Абеля)

$A_k = a_1 + \dots + a_k$ – аналог "первообразной"

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Теорема (признаки Дирихле и Абеля)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

1. (Дирихле)
 A_k – ограниченное, $b_n \rightarrow 0, b_n$ – монотонное
Тогда ряд сходится
2. (Абеля)
 a_k – сходится ($\lim A \in \mathbb{R}$)

b_n ограниченное и монотонное
Тогда ряд сходится

Доказательство 1

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$A_n b_n \rightarrow 0$$

$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ – частичная сумма некоторого ряда. Изучим на абсолютную сходимость

Т.к. A_n ограниченное, $|A_n| \leq C_A$

Т.к. b_n сходится, то $|b_n| \leq C_B$

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = \pm C_A (b_1 - b_n) \leq 2C_A C_B$$

Доказательство 2

Т.к. последовательность монотонна и ограничена, то $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$

$$\sum a_n b_n = \underbrace{\sum a_n (b_n - b)}_{\text{сходится по Дирихле}} + \underbrace{\sum b a_n}_{\text{сходится}}$$

7.4 Свойства сходящихся рядов

1. Группировка слагаемых

$$\sum a_n = \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2})}_{b_2} + \dots$$

Теорема

$$(a) \quad \sum a_n \text{ — сходится} \Rightarrow \sum b_k = \sum a_k \text{ — сходится}$$

$$(b) \quad a_n \geq 0 \Rightarrow \sum a_n = \sum b_k \text{ — вместе сходятся и расходятся}$$

Доказательство

$$S_m^{(b)} = S_{n_m}^{(a)} \rightarrow S^{(a)}$$

Замечание

$$(a) \quad \sum b_k \text{ — сходится} \not\Rightarrow \sum a_k \text{ — сходится (пример: } 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

- (b) $\sum b_k$ – сходится, $a_n \rightarrow 0$, скобки – ограниченного размера (т.е. $\exists M : \forall k \ n_k - n_{k-1} \leq M$)

Тогда $\sum a_k$ – сходится

Доказательство

$$S_N^{(a)} = S_K^{(b)} + \delta_k, \text{ где } n_k \leq N < n_{k+1}, \delta_k = a_{n_k+1} + \dots + a_N$$

$$|\delta_k| \leq |a_{n_k+1}| + \dots + |a_N| \leq |a_{n_k+1}| + \dots + |a_{n_k+M}| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Примеры

$$\sum \frac{1}{n(n+1)}$$

Неправильное использование правила:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{0}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \dots = 0$$

Правильное использование правила:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Перестановка слагаемых

$$\sum a_n$$

$\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – биекция

$$b_k := a_{\omega(k)}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{ – перестановка ряда } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Теорема

$\sum a_n$ – абсолютно сходится

Тогда $\sum b_k$ – абсолютно сходится к той же величине

Доказательство

- (a) $a_n \geq 0$

$$S_k^{(b)} = a_{\omega(1)} + \dots + a_{\omega(k)} \leq S_M^{(a)}, M = \max_{1 \leq i \leq k} \omega(i)$$

$$k \rightarrow +\infty \Rightarrow M \rightarrow +\infty$$

Тогда $S^{(b)} \leq S^{(a)}$

Используя ω^{-1} , получаем, что $S^{(a)} \leq S^{(b)}$

$$\text{Тогда } S^{(a)} = S^{(b)}$$

- (b) Рассмотрим a_n^\pm, b_n^\pm (срезки)

Ряд $\sum b_k^\pm$ – перестановка $\sum a_k^\pm$, т.е. их суммы равны

Тогда суммы исходных рядов равны

Теорема Римана

$\sum a_n$ – сходится, но не абсолютно

Тогда

(а) \exists перестановка, не имеющая суммы

(б) $\forall S \in \mathbb{R} \exists$ перестановка: $\sum b_k = S$

Определение

C – счетное множество, $\forall \gamma \in C$ задано число a_γ

Семейство чисел $(a_\gamma)_{\gamma \in C}$ – суммируемое, если $\sum_\gamma |a_\gamma|$ – конечная

Тогда $\sum_\gamma |a_\gamma| = \sum_\gamma a_\gamma^+ + \sum_\gamma a_\gamma^-$

Введем линейное отображение (линейный оператор)

ввели

Оператор $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается матрицей $A_{n \times m}$

Рассмотрим $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Данные утверждения эквивалентны

1. A – обратимый

2. $\det A \neq 0$

3. $A(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$

Определение

Пусть $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – биекция

$k \mapsto (\phi(k), \psi(k))$

$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{+\infty} b_j =: \sum_{k=1}^{+\infty} a_{\phi(k)} b_{\psi(k)}$ – произведение рядов

Теорема Коши

Пусть $\sum a_i, \sum b_i$ – абсолютно сходятся к $S^{(a)}, S^{(b)}$

Тогда $\forall \gamma$ – биекция произведение $\sum a_i \sum b_i$ абсолютно сходится и равно $S^{(a)} S^{(b)}$

Доказательство

$\sum |a_i| = S_*^{(a)}$

$\sum |b_i| = S_*^{(b)}$

Исследуем произведение на абсолютную сходимость

$$n := \max_{i=1 \dots N} (\phi(i))$$

$$m := \max_{i=1 \dots N} (\psi(i))$$

$$\sum_{k=1}^N |a_{\phi(k)}| |b_{\psi(k)}| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \left(\sum_{k=1}^m |b_k| \right) \leq S_*^{(a)} S_*^{(b)}$$

Заметим, что сумма не зависит от выбора γ , т.к. перестановка слагаемых не меняет сумму

Возьмем следующую γ ("нумерация по квадратам"):

$$(1, 1)$$

$$(1, 2), (2, 2), (2, 1)$$

$$(1, 3), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (3, 1)$$

...

$$\text{В этом случае } \sum_{k=1}^{n^2} a_{\phi(k)} b_{\psi(k)} = \left(\sum_{k=1}^n a_i \right) \left(\sum_{k=1}^n b_i \right) \rightarrow S^{(a)} S^{(b)}$$

$$\text{Пусть } \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

$\sum c_k$ – отсортированное произведение

7.5 Бесконечные произведения

Определение

$$P_n = \prod_{k=1}^n a_k$$

Если $\exists \lim P_n \in (0, +\infty)$, то произведение сходится

Если $\exists \lim P_n = 0$ – расходится к нулю

Если $\exists \lim P_n = +\infty$ – расходится

Если $\nexists \lim P_n$ – расходится

Замечание

Сходимость возможна только при $a_k > 0$

Примеры

$$\frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \dots = \frac{\pi}{2} - \text{формула Валлиса}$$

Свойства

$$\Pi_n = \prod_{k=n}^{+\infty} a_k$$

$$1. \prod_{k=1}^{+\infty} a_k - \text{сходится} \Leftrightarrow \Pi_n - \text{сходится (любой)}$$

$$2. \prod_{k=1}^{+\infty} a_k - \text{сходится} \Rightarrow \Pi_n \rightarrow 1$$

$$\Pi_n = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} a_k}{P_{n-1}}$$

$$3. \prod_{k=1}^{+\infty} a_k - \text{сходится} \Rightarrow a_k \rightarrow 1$$

$$a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$$

$$4. \underbrace{\prod_{k=1}^{+\infty} a_k}_{e^L} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \ln a_k}_L - \text{сходится}$$

Теорема

Рассмотрим $\prod_{k=1}^{+\infty} (1 + a_k)$ (a_k может быть отрицательным)

$$1. \text{НСНМ } a_k > 0, \text{ тогда } \prod - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum a_k - \text{сходится}$$

$$2. \sum a_k - \text{сходится}, \sum a_k^2 - \text{сходится} \Rightarrow \prod - \text{сходится}$$

Пояснение: если $a_k > 0$, то $\sum a_k - \text{сходится} \Rightarrow \sum a_k^2 - \text{сходится}$,
но для знакопеременных это не так

Доказательство

$$\prod (1 + a_k) - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum \ln(1 + a_k) - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum a_k - \text{сходится}$$

$$\sum \ln(1 + a_k) = \sum \underbrace{a_k}_{\text{сход.}} - \underbrace{\frac{a_k^2}{2}}_{\text{абс.сход.}} + \underbrace{o(a_k^2)}_{\text{сход.}}$$

Лемма

$$\Pi(n, x) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\text{Тогда } \Pi(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{x(x+1) \dots (x+n)} n^x$$

Доказательство

$$\Pi(n, x) \underset{t:=ns, dt=nds}{=} n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds = n^x \left(\left(1-s\right)^n \frac{s^x}{x} \right) \Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-s)^{n-1} s^x ds$$

Лемма 2

При $0 \leq t \leq n$

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} t^2 e^{-t}$$

Доказательство

$$1 + y \leq e^y \leq \frac{1}{1-y}, y \in [0, 1] - \text{выпуклость } e^y$$

(было где-то ранее)

$$y := \frac{t}{n}$$

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} \left(1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leq \text{неравенство}$$

$$\text{Бернулли} \leq e^{-t} \frac{t^2}{n}$$

Теорема (формула Эйлера)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{x(x+1) \dots (x+n)} n^x = \Gamma(x)$$

Доказательство

$$\Gamma(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Pi(n, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_0^n (e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n) t^{x-1} dt}_{\leq \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}} + \underbrace{\int_n^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{\rightarrow 0 (\text{ост. сход. инт.})} \right) =$$

0

Теорема (формула Вейерштрасса)

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right), \gamma - \text{постоянная Эйлера} - \text{отсюда должно}$$

быть видно, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Доказательство

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_n (n^{-x} x(1+x) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right))$$

$$= \lim_n x n^{-x} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{x}{k}) = \lim_n x \underbrace{e^{x(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)}}_{\rightarrow e^{\gamma x}} \prod_{k=1}^n \underbrace{(1 + \frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}}}_{1 - \frac{x^2}{2k^2} + o(\frac{1}{k^2})} = x e^{\gamma x} 1 +$$

$$\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}}$$

Произведение сходится по лемме (при $x \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$)

Пример(Вычисление произведений с рациональными сомножителями)

$$u_n = A \frac{(n+a_1) \dots (n+a_k)}{(n+b_1) \dots (n+b_l)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = ?$$

Необходимо $u_n \rightarrow 1 : k = l, A = 1$

$$\text{Тогда } u = \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_k}{n})} = [\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots] = 1 + \frac{\sum_{i=1}^k a_k - \sum_{i=1}^k b_k}{n} +$$

$$O(\frac{1}{n^2})$$

Для сходимости необходимо $\sum a_i = \sum b_i$

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} u_n &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) \dots (1 + \frac{a_k}{n})}{(1 + \frac{b_1}{n}) \dots (1 + \frac{b_k}{n})} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{a_1}{n}) e^{-\frac{a_1}{n}} \dots (1 + \frac{a_k}{n}) e^{-\frac{a_k}{n}}}{(1 + \frac{b_1}{n}) e^{-\frac{b_1}{n}} \dots (1 + \frac{b_k}{n}) e^{-\frac{b_k}{n}}} = * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod (1 + \frac{a_i}{n}) e^{-\frac{a_i}{n}} &= \frac{1}{\Gamma(a_i) a_i e^{\gamma a_i}} = \frac{1}{\Gamma(a_i + 1) e^{\gamma a_i}} \\ * &= \frac{\Gamma(b_1 + 1) \dots \Gamma(b_k + 1)}{\Gamma(a_1 + 1) \dots \Gamma(a_k + 1)} \end{aligned}$$

Пример-Пример

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod \frac{(n-0)(n-0)}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\Gamma(\frac{1}{2}))}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \frac{1}{2}(\Gamma(\frac{1}{2}))^2 = \frac{\pi}{2}$$

Лемма о представлении синуса в виде конечного произведения

$$\sin x = (2n+1) \sin \frac{x}{2n+1} \prod_{k=1}^n (1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}})$$

Доказательство

$$m = 2n + 1$$

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^m = \cos m\phi + i \sin m\phi$$

$$\sin m\phi = m(\cos \phi)^{\overbrace{m-1}^{\text{чет}}} \sin \phi - C_m^3 (\cos \phi)^{\overbrace{m-3}^{\text{чет}}} \sin^3 \phi + \dots = \sin \phi + P(\sin^2 \phi)$$

– многочлен степени m

При $\phi = \frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m} \dots \frac{n\pi}{m}$ левая часть 0

Значит $u_1 = \sin^2 \frac{\pi}{m}, \dots, u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{m}$ – корни $P(n)$

Тогда $P(x) = P(0)(1 - \frac{x}{x_1}) \dots (1 - \frac{x}{x_n})$

$$P(0) = \lim_{\phi \rightarrow 0} P(\sin^2 \phi) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin m\phi}{\sin \phi} = m$$

$$\sin(2n+1)\phi = (2n+1) \sin \prod_{k=1}^n (1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \frac{\pi k}{m}})$$

$$(2n+1)\phi =: x$$

//todo continue <https://www.youtube.com/live/9KZRjeVTXNY?feature=share&t=2962>

Теорема (о единственности)

$$f, g : \underbrace{\Omega}_{\text{открытое}} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

f, g – комплексно дифференцируема

Если $\forall x \in A f(x) = g(x)$, A – "достаточно большое" (счетное множество, содержащее хотя бы одну предельную точку)

То $f = g \in \Omega$

8 Функции и отображения в \mathbb{R}^m

$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i, \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} \leftrightarrow |x|$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

$$B(a, r) = \{x : |x - a| < r\}$$

$$S(a, r) = \{x : |x - a| = r\}$$

$$\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$$

G – открытое множество $\Leftrightarrow \forall a \in G \exists \varepsilon_a : B(a, \varepsilon_a) \subset G$

$$G = \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$$

a – предельная точка F , если $\forall \varepsilon > 0 \overset{\bullet}{B}(a, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$
 $x^{(n)} \rightarrow a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x^{(n)} - a| < \varepsilon$$

$$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

a – предельная точка D

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta, x \neq a, x \in D |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{Или } \forall (x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \in D, x_n \neq a \quad f(x_n) \rightarrow L$$

$$x^{(n)} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad x_k^{(n)} \rightarrow a_k$$

Доказательство

$$|x_k^{(n)} - a_k| \leq |x^{(n)} - a| \leq \sqrt{m} \max_k |x_k^{(n)} - a_k|$$

$$\text{Или } f = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \forall k \in \{1 \dots m\} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \rightarrow L_k$$

$$[a, b] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

$$K - \text{компактно, если } \forall (G_\alpha) : G_\alpha - \text{открытое, } K \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n :$$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

В \mathbb{R}^m : компактное \Leftrightarrow замкнутое и ограниченное \Leftrightarrow секвенциально компактное $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть + замкнутое

Определение (повторный предел)

Рассмотрим \mathbb{R}^2

$$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$$

$$a_1 - \text{п.т. } D_1, a_2 - \text{п.т. } D_2$$

$$D \supset (D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\})$$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

1. Если $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \exists \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) =: \phi(x_1)$ (конечный)
то $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \phi(x_1)$ – повторный предел

2. Аналогично $1 \Leftrightarrow 2$

3. "Двойной предел" $\lim_{x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) = L$

$$\forall U(L) \exists V_1(a_1), V_2(a_2) : \forall x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D, x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D \quad f(x_1, x_2) \in U(L)$$

$U(L)$

4. Предел по направлению

Пусть v – некий ненулевой вектор

$\lim_{t \rightarrow +0} f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = \lim_{x \rightarrow a} f|_L$, где L – луч с началом в a , параллельный вектору

5. $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывный путь

$\forall t \ \gamma'(t) \neq 0$ (избегаем "изломов возможных при остановке в определенной точке)

$\gamma(0) = a$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f|_{C_\gamma}$ – предел по пути

Заметим, что у функции по разным направлениям могут быть разные пределы

Утверждение

Если $\forall C^1$ -гладкой кривой $C : a \in C \ \lim_{x \rightarrow a} f|_C = L$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Если $\forall C^2$ -гладкой кривой $C : a \in C \ \lim_{x \rightarrow a} f|_C = L$, то НЕ СЛЕДУЕТ

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Теорема о двойном и повторном пределах

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (как в определении)

1. $\exists \lim_{x_1 \rightarrow a_1, x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2) = A \in \overline{\mathbb{R}}$

2. $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \ \exists \phi(x_1) \in \mathbb{R} = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$

$\Leftrightarrow \lim_{x_1 \rightarrow a_1} \phi(x_1) = A$

Доказательство

1. $A \in \mathbb{R}$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_1(a_1) : \forall x_1 \in \overset{\bullet}{V}_1 \cap D_1 \ |\phi(x_1) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

2. $A = \infty$

Аналогично

Определение

1. $\phi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

ϕ – бесконечно малое в точке $x_0 \in \text{Int } E$, если $\phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \mathbb{O}$

2. $\phi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, 0 \in \text{Int } E$
 $\phi(h) = o(h)$, если $\frac{\phi(h)}{|h|} \rightarrow 0$ б.м. при $h \rightarrow 0$

3. $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, a \in \text{Int } E$
 F дифференцируема в точке a , если

(а) $\exists L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор

(б) \exists б.м. $\alpha(h), h \rightarrow 0$

(с) $F(a+h) = F(a) + Lh + \alpha(h)|h|$

Или $F(x) = F(a) + L(x-a) + \phi(x)|x-a|, \phi(x) = o(1)$ – б.м. в $x \rightarrow a$

L – производный оператор F в точке a

$L = F'(a)$

Матрица оператора L – матрица Якоби

Дифференциал оператора F в точке a :

(а) То же, что и производный оператор
 $h \mapsto F'(a)h$

(б) $E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(x_0, h) \mapsto F'(x_0)h$

Определение

$f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, a \in \Omega$

f – комплексно дифференцируемая в a , если $\exists L \in \mathbb{C} : f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(h), h \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lambda$

$F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, a \in \Omega$

F – вещественно дифференцируема в a , если $\exists L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный оператор, $F(a+h) = F(a) + Lh + o(h), h = h_1 + ih_2 = (h_1, h_2)$

$\lambda h = (a+bi)(h_1 + ih_2) = (ah_1 - bh_2) + i(ah_2 + bh_1)$

$h \mapsto \lambda h$

$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ah_1 - bh_2 \\ ah_2 + bh_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Заметим, что $\forall L \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \exists F, a : F'(a) = L$

Однако, отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – вещественно дифференцируемое – будет как отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ комплексно дифференцируемым, если матрица

L имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Теорема о единственности производной

$F : \underbrace{\Omega}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, a \in \Omega$

F – дифференцируема в a , тогда $F'(a)$ – определен однозначно

Доказательство

$u \in \mathbb{R}^m$

$h := tu, t \in \mathbb{R}, t \rightarrow 0$

Тогда $F(a + tu) = F(a) + tLu + o(t), t \rightarrow 0$

$$Lu = \frac{F(a + tu) - F(a)}{t} + \frac{o(t)}{t} \rightarrow \frac{F(a + tu) - F(a)}{t}$$

При $n = 1: f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$L = (l_1, \dots, l_m)$

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(a_1, \dots, a_m) + l_1(x_1 - a_1) + \dots + l_m(x_m - a_m) + \underbrace{\phi(x)}_{\text{б.м.}} |x - a|$$

Если F – дифференцируема в a , то F – непрерывна в a

Лемма (о дифференцируемости отображения и дифференцируемости его координатных функций)

$F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, F = (f_1, \dots, f_n), a \in \text{Int}(\Omega)$

Тогда

1. F – дифференцируема $\Leftrightarrow \forall i \ f_i$ – дифференцируемая
2. строки матрицы Якоби F – это матрицы Якоби отображений f_i

Замечание

1. $F = \text{const}$ – дифференцируемая
 $F' \equiv 0, o(h) \equiv 0$
2. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный оператор
Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m \ \mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}$ (как матрицы)
3. Отображение $x \mapsto u_0 + \mathcal{A}x$ – аффинное отображение

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Зафиксируем $k : 1 \leq k \leq m$

$\phi_k(u) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, a_m)$ – функция от переменной $u \in U(a_k)$

$$\phi'_k(a_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_k(a_k + t) - \phi_k(a_k)}{t}$$

Если этот предел существует, то предел называется *частной производной* (в значении частичная) f по k -ой переменной

Обозначение: $\frac{\partial f}{\partial x_k}, f'_k(a), f'_{x_k}(a), D_k f$