Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Производящие функции

Определение

Формальный степенной ряд(производящая функция) – $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Формальный означает, что вместо t мы ничего не подставляем

Формальный степенной ряд – некоторый способ задавать последовательность

$A(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \dots$

$B(t) = b_0 + b_1 t^1 + b_2 t^2 + \dots$

$C = A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t^1 + \dots$

$C = A - B = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)t^1 + \dots$

$C = A \cdot B = (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1)t^1 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)t^2 \dots$

$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$C = \dfrac{A}{B}$:

$A = C \cdot B$

Потребуем $b_0 \neq 0$

$a_0 = c_0 b_0 \Rightarrow c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$

$a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{a_1 - c_0 b_1}{b_0}$

$c_n = \dfrac{a_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{n-k}}{b_0}$

Если $a_0 \neq 0, b_0 = 0$, то получаем, что числитель не делится на t, а знаменатель делится

Т.о. такая дробь не является степенным рядом

Если $a_0 = 0, b_0 = 0$

Тогда мы можем сократить на t

$B := A'$ – формальная производная
$b_n = (n+1)a_{n+1}$
$(A \pm B)' = A' \pm B'$
$(A \cdot B)' = A' \cdot B + A \cdot B'$
$\frac{A}{B} = \frac{A'B - AB'}{B^2}$

Пример
$\frac{1}{1-t} = \sum t^n$
$(\frac{1}{1-t})'t = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum nt^n$

$A(B(t))$ – возможно только при $b_0 = 0$
$C = A(B(t)) = a_0 + a_1(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots) + a_2(b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 + \dots)^3 + \dots =$
$a_0 + (a_1b_1)t + (a_1b_2 + a_2b_1^2)t^2 + (a_1b_3 + a_2b_1b_2 + a_2b_2b_1 + a_3b_1^3)t^3 + \dots$
$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{n=s_1+\dots+s_k} \prod_{i=1}^{k} b_{s_k}$
$(A(B))' = A'(B)B'$
$B := \int A$ – формальная первообразная
$b_n = \frac{a_{n-1}}{n}$
b_0 – может быть различным

2 Дробно-рациональные производящие функции

Определение

Дробно-рациональная производящая функция $A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, q_0 \neq 0, P, Q$ – конечные многочлены

Определение

Линейное рекуррентное соотношение – $a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$

$a_1, \dots, a_k$ – конкретные значения

Теорема ч.1 (теорема о дробно-рациональных производящих функциях)

$$A(t) = \frac{P(t)}{Q(t)} \Leftrightarrow a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} \land Q(t) = 1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k$$

Доказательство $\Rightarrow$

$Q(t) = q_0 + \ldots + q_k t^k$

$1 + \dfrac{q_1}{q_0} t + \ldots + \dfrac{q_k}{q_0} t^k$

$c_i = -\dfrac{q_i}{q_0}$

$P(t) := \dfrac{P}{q_0}$

Рассмотрим $\dfrac{P}{1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k}$

Для $n > \max(k, \deg P)$

$$a_n = \frac{p_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(-c_{n-i})}{c_0} = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i} c_i$$

Уберем исходное требование

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (c_i \cdot \begin{bmatrix} a_{n-i}, & n \geq i \\ 0, & n < i \end{bmatrix}) + p_n$$

Доказательство $\Leftarrow$

$n \geq m$

$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$

Рассмотрим $A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$

$c_1 t A(t) = c_1 a_0 t + c_1 a_1 t^2 + c_1 a_2 t^3 + \ldots$

$c_2 t^2 A(t) = c_2 a_0 t^2 + c_2 a_1 t^3 + c_2 a_2 t^4 + \ldots$

$c_k t^k A(t) = c_k a_0 t^k + c_k a_1 t^{k+1} + c_k a_2 t^{k+2} + \ldots$

$A(t)(1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k) = P(t), \deg P \leq m$

$$A(t) = \frac{P}{1 - c_1 t - c_2 t^2 - \ldots - c_k t^k}$$

Рассмотрим $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix}$$

Применяя быстрое возведение матрицы в степень, можно найти a_n за $O(k^3 \log n)$

Рассмотрим $\dfrac{P}{Q}$

$\dfrac{P(t)}{Q(t)} \cdot \dfrac{Q(-t)}{Q(-t)} = \dfrac{P(t)Q(-t)}{Q_2(t)}$, где Q_2 – многочлен, где все нечетные коэффициенты нулевые

$Q_2 = \widetilde{Q}(t^2)$

Это следует из того, что $Q(t)Q(-t)$ – четная функция

$\deg Q = \deg \widetilde{Q}$

$\dfrac{P(t)}{Q(t)} = \dfrac{P(t)Q(-t)}{\widetilde{Q}(t^2)} = \dfrac{\widetilde{P}(t^2) + t\overline{P}(t^2)}{\widetilde{Q}(t^2)}$ (разбили на четные и нечетные степени)

Заметим, что нечетная подпоследовательность и четная подпоследовательность не связаны

У последовательности четных членов производящая функция – $\dfrac{\widetilde{P}}{\widetilde{Q}}$, у нечетных – $\dfrac{\overline{P}}{\widetilde{Q}}$

Т.о. мы можем каждый раз уменьшать последовательность в два раза

Итого асимтотика $O(k^2 \log n)$

Теорема ч.2 (о линейных рекуррентных соотношениях)

Тогда эквивалентны:

1. $n \geq m \ a_n = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$
2. $A(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}, Q(t) = 1 - c_1 t - \ldots - c_k t^k$

3. $a_n = \sum\limits_{i=1}^{s} p_i(n) r_i^n, p_i$ – многочлен, $r_i \in \mathbb{C}$

Доказательство $2 \Rightarrow 3$

Пусть $Q = \prod\limits_{i=1}^{s} (1 - r_i t)^{d_i}$

$t_i = \dfrac{1}{r_i}$ – корни кратности d_i

$\deg p_i = d_i - 1$

Лемма (о разложении на простые дроби)

$Q(t) = \prod\limits_{i=1}^{s} (1 - r_i t)^{d_i}$

Тогда $\dfrac{P(t)}{Q(t)} = \sum\limits_{i=1}^{s} \dfrac{P_i(t)}{(1 - r_i t)^{d_i}}$

$\dfrac{P(t)}{Q(t)} = \sum\limits_{i=1}^{s} \dfrac{P_i(t)}{(1 - r_i t)^{d_i}} = \sum\limits_{i=1}^{s} A_i(t)$

$a_n = \sum\limits_{i=1}^{s} a_{i,n}$

Лемма

$\dfrac{1}{(1 - rt)^d} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_d(n) r^n t^n$

$\deg p_d = d - 1$

Доказательство

1. База $d = 1$:
   $\dfrac{1}{1 - rt} = 1 + rt + r^2 t^2 + \ldots; a_n = r^n$

2. переход
   $(\dfrac{1}{(1 - rt)^d})' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) p_s(n+1) r^{n+1} t^n$

   $\dfrac{1}{(1 - rt)^{s+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{s} p_s(n+1) r^n t^n$

   $p_{s+1}(n) = p_s(n+1) \dfrac{n+1}{s} = \sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{s,i} (n+1)^i \dfrac{n+1}{s}$

   $p_{s,i} = \dfrac{a_{s,i}}{s!}, a_{s,i} \in \mathbb{Z}$

Доказательство $3 \Rightarrow 2$

Достаточно доказать, что если $a_n = n^{d-1} r^n$, то $A(t) = \dfrac{P(t)}{(1-rt)^d}$

1. $d = 1$
   Слева:
   $a_n = r^n$
   Справа:
   $A(t) = \dfrac{1}{1-rt}$

2. $A_d(t) = \dfrac{P_d(t)}{(1-rt)^d}$
   Справа:
   $\dfrac{1}{r} A'_d(t) = \dfrac{1}{r} \dfrac{P'_d(t)(1-rt)^d + rd(1-rt)^{d-1} P_d(t)}{(1-rt)^{2d}} = \dfrac{1}{r} \dfrac{P'_d(t)(1-rt) + rP_d(t)}{(1-rt)^{d+1}}$
   Слева:
   $a_n = (n+1)^{d-1}(n+1) r^{n+1} \dfrac{1}{r} = (n+1)^d r^n = n^d r^n + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} n^{d-i} r^n$
   $A(t) = \dfrac{1}{r}(A'_d(t)) - \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \dfrac{P_{d-i}(t)}{(1-rt)^{d-i+1}}$

Попробуем найти производящую функции чисел Каталана

$c_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$

Пусть $C(t) = c_0 + c_1 t + \dots$

$C(t)C(t)t = C(t) - 1$

$C^2(t)t + 1 = C(t)$

$C^2(t)t - C(t) + 1 = 0$

$C(t) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}$

$\sqrt{1-4t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4t)^k$

$C(t) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4t}}{2t}$ – некорректная дробь, т.к. на t делить нельзя

$C(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t} = \dfrac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4t)^k}{2t} = \dfrac{-\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4t)^k}{2t}$

$C(t) = \dfrac{2^n(2n+1)!!}{n!}$ (почему-то численно не сходится)

3 Конструируемые комбинаторные объекты

Мы будем говорить о непомеченных комбинаторных объектах

Представим, что $A(t) \leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

a_n – количество комбинаторных объектов размера n

Комбинаторные объекты размеров n и m можно сложить в комбинаторный объект размера $n+m$ единственным способом

$A \sqcup B \leftrightarrow A + B$ – объединение дизъюнктных множество

$A \times B \leftrightarrow AB$

$C = List(A) = \sqcup_{k=0}^{\infty} A^k$

$C(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k(t) = \frac{1}{1 - A(t)}$

$List(A) = \underbrace{1}_{[\,]} + A \times List(A)$

Пример (натуральные числа)

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$U = \{0\}$

$U(t) = t$

$\mathbb{N}_0 = List(U) = \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$

$\mathbb{N} = \dfrac{1}{1-t} - 1 = \dfrac{t}{1-t}$

Пример (натуральные числа)

$B = \{\circ, \bullet\}$

$B(t) = 2t$

$List(B) = \dfrac{1}{1-2t}$

Пример (замощение)

$D = \{-^2, |\}$

$D(t) = t + t^2$

$List(D) = \dfrac{1}{1 - t - t^2}$

$Set(A) = \displaystyle\prod_{x \in A} (1 + x)$ – каждый объект либо берем, либо нет

$//w(x)$ – количество объектов в x | вес x

$Set(A) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{x \in A, w(x)=k} (1+x)$ – сгруппируем по весу

$Set(A) = \prod_{k=0}^{\infty} (1+t^k)^{a_k} = B$

$//[t^n]A$ – возвращает множитель при t^n

$b_n = [t^n] \prod_{k=0}^{\infty} (1+t^k)^{a_k} = [t^n] \prod_{k=0}^{n} (1+t^k)^{a_k}$

$Set(U) = 1 + t$

$Set(B) = 1 + 2t + t^2$

$Set(N) = \prod_{k=1}^{n} (1+t^k) = 1 + t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 3t^5 + 4t6 + \ldots$ – количество разбиений на различные слагаемые

$Multiset(A) = \prod_{x \in A} (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = \prod_{x \in A} \frac{1}{1-x} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)^{a_k}}$

$MSet(U) = \frac{1}{1-t}$

$MSet(B) = (\frac{1}{1-t})^2$

$MSet(N) = \sum_{k=0}^{\infty} p_n t^n, p_n$ – число разбиений n на слагаемые

$Cyc(A) = List(A)/_{\sim}, \sim$ – равенство с точностью до перестановки

C_n – циклы веса n

$C_n = \bigcup_{l=1}^{n} C_{n,l}$

$//$todo продолжить

4 Регулярные языки

Напоминание

Регулярный язык – язык, который можно задать регулярным выражением

Регулярный язык – язык, который можно задать детерменированным конечным автоматом

Язык $L \subset \Sigma^*$
$\Sigma^m \leftrightarrow\leftrightarrow \dfrac{1}{1-|\Sigma|t}$
Казалось бы, $| \leftrightarrow \cdot, \cup \leftrightarrow Seq, + \leftrightarrow \dfrac{1}{1-\bullet}$
Но бывают проблемы
Определение
Регулярное выражение – однозначное, если любая строка однозначно «метчится» с регулярным выражением
К примеру, $(a|b)^*a(a|b)^*$ неоднозначное, поэтому для него производящие функции будут работать неверно
Его можно перестроить в $b^*a(a|b)^*$
Теорема
L – регулярное $\Leftrightarrow \exists\, S$ – регулярное выражение для L

Пусть L – язык
A – ДКА для L
Для вершины $u : L_u = \{x : x \overset{x}{\rightsquigarrow} t, t \in T\}$
$L = L_s, s$ – стартовая
$u \notin T : L_u = c_1 L_{\sigma(u,c_1)} \cup \ldots \cup c_m L_{\sigma(u,c_m)}$
$u \in T : L_u = c_1 L_{\sigma(u,c_1)} \cup \ldots \cup c_m L_{\sigma(u,c_m)} \cup \varepsilon$
$u \notin T : L_u(t) = \sum t L_{\sigma(u,c_i)}(t)$
$u \in T : L_u(t) = \sum t L_{\sigma(u,c_i)}(t) + 1$
$\overrightarrow{L(t)} = \begin{pmatrix} L_1(t) \\ \vdots \\ L_q(t) \end{pmatrix}$ $\Delta_{i,j} =$ число ребер$i \to j$
$\overrightarrow{L(t)} = t\Delta\overrightarrow{L(t)} + \overrightarrow{f}$
$\overrightarrow{f}_i = \begin{cases} 1, & i \in T \\ 0, & i \notin T \end{cases}$
$(I - t\Delta)\overrightarrow{L(t)} = \overrightarrow{f}$
$\overrightarrow{L(t)} = (I - t\Delta)^{-1}\overrightarrow{f}$
$\det I - t\Delta = \sum\limits_{\sigma}\prod\limits_{i}(I - t\Delta)_{i,\sigma_i} = \prod\limits_{i}(I - t\Delta)_{i,i} + \sum\limits_{\sigma \neq id}\prod\limits_{i}(I - t\Delta)_{i,\sigma_i} =$

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{q}(1-\sigma_{i,i}t)}_{1+tP(t)}+\underbrace{\sum_{\sigma\neq id}\prod_{i}(I-t\Delta)_{i,\sigma_i}}_{tQ(t)}=1+t(P(t)+Q(t))$$

$$(I-t\Delta)^{-1}=\frac{Q(t)}{1+t(P(t)+Q(t))}$$

Теорема

L – регулярный $\Rightarrow L(t)$ – дробно-рациональное

$L(t)=\overrightarrow{S}^t(I-t\Delta)^{-1}\overrightarrow{f}$

$$\overrightarrow{S}_i=\begin{cases}1, & i=s\\ 0, & i\neq s\end{cases}$$

Определение

Бордер строки s – одновременный префикс и суффикс s

$$c_i=\begin{cases}1, & s[i:]=s[:-i]\\ 0\end{cases}$$

$c(t)$ – автокорреляционный многочлен s

S – не содержит подстроки s

T – содержит s, единственное вхождение как суффикса

$S+T=\varepsilon+S\times\Sigma$

$S(t)+T(t)=1+mtS(t)$

$S(t)t^k=T(t)c(t)$

Отсюда $S(t)=\dfrac{c(t)}{(1-mt)c(t)+t^k}$

Пентагональная теорема Эйлера

Разбиения на слагаемые:

$$P(t)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^i}=\frac{1}{Q(t)}$$

$$Q(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)=1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+\dots$$

$R(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i)$ – разбиения на различные слагаемые

$q_n=e_n-o_n, e_n$ – число разбиений на четное число различных слагаемых, o_n – на нечетное число различных слагаемых

Лемма

$$n\neq\frac{3k^2\pm k}{2}$$

Тогда $e_n = o_n$
$n = \dfrac{3k^2 \pm k}{2}$
$e_n - o_n = (-1)^k$
$Q(t) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k (t^{\frac{3k^2+k}{2}} + t^{\frac{3k^2-k}{2}})$

5 Экспоненциальные производящие функции и помеченные комбинаторные объекты

$a_0, a_1, \ldots \leftrightarrow A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$
$b_0, a_2, \ldots \leftrightarrow B(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b_n}{n!} t^n$
$a_n + b_n \leftrightarrow A(t) + B(t)$
$\dfrac{c_n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a_k b_{n-k} \leftrightarrow A(t)B(t) = C(t)$
$A \times B \leftrightarrow A(t)B(t)$ – количество пар с различными нумерациями
$a_n = n! \leftrightarrow \dfrac{1}{1-t}$
$b_n = a_{n+1} \leftrightarrow B = A'$
$a_n = 1 \leftrightarrow e^t$
Найдем $B = Seq(A) : B = 1 + A \times B$
$B = \dfrac{1}{1-A}$
$Set = MSet = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{k!} = e^{A(t)}$
$Set(U = \{\circ\}) = e^t \leftrightarrow a_n = 1$
$B = \{\circ, \bullet\}$
$Set(B) = e^{2t}$
Числа Белла – количество способов разбить множество на какие-то множества
$B = Set(\underbrace{Set(U) - 1}_{\mathbb{N}}) = e^{e^t - 1}$
$A(t) = t^k e^t$ (размещения по k)

$a_n = \frac{n!}{(n-k)!}$
$C(t) = \frac{t^k}{k!}e^t$ (сочетания по k)
$C_n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
Числа Стирлинга по k
$\frac{(e^t-1)^k}{k!}$ – число Стирлинга 2 рода по k

$$Cyc(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k} = -\ln(1-A(t)) = \ln(\frac{1}{1-A(t)}) = \ln(Seq(A(t)))$$

$Cyc(U)$ – перестановки с точностью до циклического сдвига
$Set(Cyc(U)) = Seq(U)$
Числа Стирлинга 1 рода по k
$\frac{Cyc(U)^k}{k!}$
Деревья
$T = U \times Seq(T)$ – деревья с порядком на детях
$T = U \times Set(T)$ – деревья без порядка на детях