Дифференциальные уравнения. Теория

Александр Сергеев

1 Глава про кроликов (Введение)

задачи про размножения кроликов

2 Уравнения первого порядка

2.1 Дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

Определение
$F(x, y, y') = 0$ – обыкновенное д/у первого порядка
(F – функция от трех параметров)
Определение
ϕ – решение д/у на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$
(п. 1 необязательный, но нам будет удобнее работать только с такими функциями)
Определение
Интегральная кривая уравнения – график его решения
Определение
Общее решение – множество всех его решений
Определение
Общий интеграл уравнения – уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее некоторые решения при некоторых значениях C
Первый метод решения – подбор
Второй метод решения – интегрирование (для уравнений вида $y' = Cx$)

2.2 Уравнения в нормальной форме

Определение
$y' = f(x, y)$ – уравнение, выраженное относительно производной/уравнение в нормальной форме/нормальное уравнение
Определение
Область определения нормального уравнения – область определения f (множество точек, через которые могут проходить интегральные кривые)
Определение
Ломаная Эйлера – ломаная с вершинами $\{(x_k, y_k)\}$, где $x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$
Третий метод решения (метод Эйлера) – построение ломаной Эйлера. Метод приближенный

2.3 Уравнение в дифференциалах

Определение
$P(x, y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение в дифференциалах
Определение
Решением $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах на $\langle a, b\rangle$, если $\phi \in C^1\langle a, b\rangle$ и $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$
Также решениями будут функции $x = \psi(y)$ (аналогично)
Определение
Область определения уравнения в дифференциалах $= D_P \cap D_Q$
Определение
$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделенными переменными
Замечание
Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}\,x + \int Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$
Определение
Вектор-функция $(\phi, \psi) : \langle\alpha, , \rangle\beta \to \mathbb{R}^2$ – параметрическое решение у.д., если $\phi, \psi \in C^1\langle\alpha, \beta\rangle, (\phi', \psi') \neq (0, 0)$ (кривая гладкая)
и $P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$ на $\langle\alpha, \beta\rangle$
Определение
Интегральная кривая уравнения в дифференциалах – годограф ее параметрического решения

Определение
$\gamma = \{r(t) | t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$ – годограф функции $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$
Утверждение
Если $y = \phi(x)$ – решение уравнения в дифференциалах, то $(t, \phi(t))$ – параметрическое решение
Если $(\phi(t), \psi(t))$ – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$, то $\forall\, t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle \; \exists\, U(t_0):$ годограф функции (ϕ, ψ) – график некоторого решения $y = g(x)$ или $x = h(y)$
Геометрический смысл
Пусть (ϕ, ψ) – параметрическое решение на $\langle \alpha, \beta \rangle$
Тогда $P(\phi(t_0), \psi(t_0))\phi'(t_0) + Q(\phi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = 0$ при $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$
$\exists F = \begin{vmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{vmatrix}, r(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix}$
$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$
$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \perp r'(t_0)$
$r'(t_0)$ – вектор касательной к интегральным кривым
Тогда F – поле перпендикуляров
Определение
Поле на плоскости – это отображение $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Определение
Дифференциальные уравнения называют эквивалентными/равносильными на множестве D, если на этом множестве они имеют одинаковое множество интегральных кривых
Утверждение
$y' = f(x, y)$ равносильно $\mathrm{d}\, y = f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$
Замечание
Уравнение в дифференциалах равносильно $y'_x = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ в областях, где $Q(x, y) \neq 0$
и $x'_y = -\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ в областях, где $P(x, y) \neq 0$
Определение
Если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, то (x_0, y_0) – особая точка уравнения в дифференциалах

2.4 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение
$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – Уравнение с разделенными переменными
Определение
Функция $y = \phi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ при $x \in E$, если $F(x, \phi(x)) \equiv 0$ при $x \in E$
Теорема (общие решение уравнения с разделенными переменными)
Пусть $P \in C\langle a, b\rangle, Q \in C\langle c, d\rangle$
$P^{(-1)}, Q^{(-1)}$ – некоторые первообразные P, Q
Тогда $y = \phi(x)$ – решение уравнения на $\langle \alpha, \beta\rangle \Leftrightarrow$

- $\phi \in C^1\langle \alpha, \beta\rangle$
- $\exists\, C \in \mathbb{R} : y = \phi(x)$ неявно задана уравнением $P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(y) = C$

Доказательство $\Rightarrow$
Пусть $y = \phi(x)$ – решение на $\langle \alpha, \beta\rangle$
1 – по определению
Выберем $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle, y_0 = \phi(x_0)$
Заметим, что $\exists\, A :\ P^{(-1)}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A$
$\exists\, A_2 :\ Q^{(-1)}(y) = \displaystyle\int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2$
$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$$
Сделаем замену $t \to \phi(t)$ справа
$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + A + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t + A_2 \equiv C$$
$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_{x_0}^{x} Q(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$$
$$\int_{x_0}^{x} \underbrace{(P(t) + Q(\phi(t))\phi'(t))}_{\text{0 по определению решения}}\,\mathrm{d}\,t \equiv C - A - A_2$$
Отсюда $C := A + A_2$
Т.о. 2 доказано
Доказательство $\Leftarrow$
Проверим $P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$ на $\langle \alpha, \beta\rangle$
$P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(\phi(x)) \equiv C$

Продифференцируем
$P(x) = Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$
Определение
$p_1(x)q_1(y)\,\mathrm{d}\,x + p_2(x)q_2(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными

2.5 Задача Коши

Рассмотрим $y' = f(x, y)$
Определение
Задачей Коши (ЗК) для нормального уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$
Теорема Пиано (частный случай) – существование решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка
Пусть $f \in C(G), G$ – область (открытое связное множество)
Возьмем $(x_0, y_0) \in G$
Тогда $\exists\, E = \langle a, b\rangle, x_0 \in E, \exists\, \phi : E \to \mathbb{R}$ – решение для задачи Коши
$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$
Теорема Пикара о единственности решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка
$f, f'_y \in C(G), G$ – область, $(x_0, y_0) \in G$
Пусть ψ, ϕ – решения задачи Коши
Тогда $\phi = \psi$ на $D_\phi \cap D_\psi$

2.6 Линейное уравнение 1-ого порядка

Определение
$y' = p(x)y + q(x)$ – линейное уравнение
$y' = p(x)y$ – однородное линейное уравнение
Теорема (общее решение линейного уравнения первого порядка)
$E = \langle a, b\rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$
Тогда $y = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$ – общее решение ЛУ
Доказательство
Пусть S – множество всех решений ЛУ

$F := \{\phi : \underbrace{\widetilde{E}}_{\text{промежуток}} \subset E \to \mathbb{R}\}, \phi = \dfrac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}$
Докажем, что $F = S$
Возьмем $\phi \in S$
Тогда $\phi' \equiv p\phi + q$ на $\widetilde{E}$
$\phi'\mu = p\phi\kappa + q\mu$
$\phi'\mu - p\phi\mu = q\mu$
$\phi' e^{-\int p} - p\phi e^{-\int p} = (\phi e^{-\int p})' = (\phi\mu)'$
$(\phi\mu)' = q\mu$
$\phi\mu = \displaystyle\int q\mu + C$
$\phi = \dfrac{\int(\phi\mu) + C}{\mu}$
Отсюда $\phi \in F$
Возьмем $\phi \in F$
$\phi = \dfrac{C + \int(\mu q)}{\mu}$ на $\widetilde{E}$
$\phi \in C^1$
Подставим в уравнение
$\phi' = p\phi + q$
$\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{p(C + \int(\mu q))}{\mu} + q$
Л.ч.: $\dfrac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \dfrac{\mu^2 q - (-\pi)\mu(C + \int(pq))}{\mu^2} = q + \dfrac{p}{\mu}(C + \displaystyle\int pq)$
П.ч. = Л.ч.
Ч.Т.Д.
Следствие (общее решение ЛОУ)
$p \in C^1(E), E = \langle a, b \rangle$
Тогда $y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$
Доказательство
$q = 0$
Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)

1. Для ЛУ $y' = p(x)y + q(x)$ запишем соответствующее ЛОУ
   $y_2' = p(x)y_2$
   $y_2 = Ce^{\int p}$

2. Заменим C на $C(x)$ и подставим в исходное уравнение
   $y = C(x)e^{\int p}$

$p(x)(C(x)e^{\int p}) + q(x) = (C(x)e^{\int p})'$

3. Находим $C(x)$ из полученного уравнения

4. Запишем общее решение $y = C(x)e^{\int p}$

Доказательство
В общем виде мы получим ту же формулу, что и в предыдущем методе
Определение
$P \,\mathrm{d}\, x + Q \,\mathrm{d}\, y = 0$ – однородное уравнение, если
P, Q – однородные функции одинаковой степени
Определение
$P(tx, ty) = t^{\alpha} P(x, y) \Rightarrow P$ – однородная функция степени α

2.7 Уравнение в полных дифференциалах

Определение (УПД)
$P(x, y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y) \,\mathrm{d}\, y = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, если
$\exists\, u : u'_x = P, u'_y = Q$
$u' = (P, Q) = (u'_x, u'_y)$ – матрица Якоби – градиент
Его решение имеет вид $\mathrm{d}\, u = 0$
$\mathrm{d}\, u = u'_x \,\mathrm{d}\, x + u'_y \,\mathrm{d}\, y$
Определение
u – *потенциал* уравнения
Тогда $u = \text{const}$
Теорема (общее решение УПД)
Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, $P, Q \in C(G)$
$u' = (P, Q)$
Тогда функция $y = \phi(x), x \in E, E = \langle a, b \rangle$ – решение уравнения $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \phi \in C^1(E), \exists\, C \in \mathbb{R} : \phi$ – неявно задана уравнением $u(x, y) = C$ на E
Напоминание
$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x), g : A \subset \mathbb{R}^n \to b \subset \mathbb{R}^m, f : B \to \mathbb{R}^k$
Доказательство $\Rightarrow$
По определению $\phi \in C^1(E)$
По определению решения: $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} E$
$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} 0$
$(u(x, \phi(x)))' \underset{E}{\equiv} 0$
Значит $\exists\, C : u(x, \phi(x)) \underset{E}{\equiv} C$

Доказательство $\Leftarrow$
Имеем $\phi \in C'(E)$
$u(x, \phi(x)) \underset{E}{\equiv} C$
$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} 0$
$P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \underset{E}{\equiv} E$
По определению ϕ – решение
Пример
$P(x)\,\mathrm{d}\,x + Q(y)\,\mathrm{d}\,y = 0$
$P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$
$u(x, y) = \displaystyle\int P + \int Q$ – потенциал
Тогда $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}\,x + \int Q(y)\,\mathrm{d}\,y = C$ – неявно задает все решения
Теорема (признак УПД (достаточное условие))
$P, Q \in C^1(G), G$ – область в $\mathbb{R}^2$
$P'_y = Q'_x$
Тогда $\exists\, u : (P, Q) = u'$ в области G
$u(x, y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (P(\widetilde{x}, \widetilde{y})\,\mathrm{d}\,\widetilde{x} + Q(\widetilde{x}, \widetilde{y})\,\mathrm{d}\,\widetilde{y}) + C,$
где $(x_0, y_0) \in G, C \in \mathbb{R}$
$(x_0, y_0), (x, y)$ – концы кусочно-гладкой привой, лежащей в G
Пояснение
$P'_y = (u'_x)'_y$
$Q'_x = (u'_y)'_x$
Тогда $P'_y = Q'_x$ – это необходимое решение для существования u
Доказательство жди на матане
Определение
$\forall\, x, y\ \mu(x, y) \neq 0$
$\mu P\,\mathrm{d}\,x + \mu Q\,\mathrm{d}\,y = 0$ – УПД
Тогда μ – интегрирующий множитель для $P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y$
Замечание
Если $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$
$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_y$
Пример
$y' = p(x)y + q(x)$
$(p(x)y + q(x))\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,y = 0$ – не уравнение в полных дифференциалах
Найдем μ

$\mu'_y(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = \mu'_x(-1) + 0$
Попробуем найти $\mu : \mu'_y = 0$
$\mu = \mu(x)$
$\mu' = -\mu p(x)$
$\mu = Ce^{-\int p}$
Выберем $C = 1$
$\mu = e^{-\int p}$

2.8 Замена переменных

Пример
$y' = \dfrac{y^3 - x^3}{xy^2} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}, x > 0$
Пусть $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
$y'_x = v - 1\dfrac{1}{v^2}$
$y(x) = v(x)x \Rightarrow y' = v'x + v$
$v'x + v = v - \dfrac{1}{v^2}$
$v'x = -\dfrac{1}{x^2}$
$v^2 \,\mathrm{d}\, v = -\dfrac{\mathrm{d}\, x}{x}$
$\dfrac{v^3}{3} = -\ln x + C$
$\dfrac{1}{3}(\dfrac{y}{x})^3 = -\ln x + C$
Определение
Векторным полем уравнения $P(x, y) \,\mathrm{d}\, x + Q(x, y) \,\mathrm{d}\, y = 0$ назовем $F : D \to \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$
$D = D_P \cap D_Q$
$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$
Интегральная кривая векторного поля – интегральная кривая уравнения
Теорема (замена переменной в уравнении)
$D \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ – область
(внизу указаны координатные оси)
$\Phi : D \to \Omega$ – диффеоморфизм (такая биекция, что $\Phi \in C^1(D), \Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$)

$F(x, y)$ – векторное поле исходного уравнения
$G : \Omega \to \mathrm{Mat}_{1\times 2}(\mathbb{R})$
$G(u, v) := F(\Phi^{-1}(u, v))(\Phi^{-1})'(u, v)$
Значит Φ биективно отображает интегральные кривые уравнения (1) $F\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,x\\ \mathrm{d}\,y\end{pmatrix} = 0$ на интегральные кривые уравнения (2) $G\begin{pmatrix}\mathrm{d}\,u\\ \mathrm{d}\,v\end{pmatrix} = 0$
Доказательство
Докажем, что Φ отображает интегральные кривые в интегральные кривые
Возьмем Γ – инегральную кривую уравнения(1)
Ей соответствует некоторое параметрическое решение γ на $E = \langle a, b\rangle$
$\Gamma = \gamma(E)$
$\gamma \in C^1(E \to \mathbb{R}^2)$
$\gamma'(t) = 0$ при $t \in E$
$F(\gamma(t))\gamma'(t) \underset{E}{\equiv} 0$
Докажем, что $\Phi(\Gamma)$ – интегральная кривая для уравнения (2)
Рассмотрим $\lambda(t) = \Phi(\gamma(t))$
$\lambda(E) = \Phi(\gamma(E)) = \Phi(\Gamma)$
$\lambda = \Phi \circ \gamma$
Отсюда $\lambda \in C^1(E \to \mathbb{R}^2)$
$\lambda'(t) = \underbrace{\Phi'(\gamma(t))}_{\det\neq 0}\underbrace{\gamma'(t)}_{\neq 0}$
Подставим в (2)
Рассмотрим $F(\gamma(t))\gamma'(t) \underset{E}{\equiv} 0$
$\gamma(t) = \Phi'(\lambda(t))$
$F(\Phi^{-1}(\lambda(t)))(\Phi^{-1})'(\lambda(t))\lambda'(t) \underset{E}{\equiv} 0$
$\Leftrightarrow G(\lambda(t))\lambda'(t) \underset{E}{\equiv} 0$
Теперь докажем, что Φ – инъекция интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)
Пусть Γ_1, Γ_2 – интегральные кривые (1)
$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$
Пусть н.у.о. $\exists\, r_1 \in \Gamma_1 : r_1 \notin \Gamma_2$
Докажем от противного
Пусть $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2) = L$
$\forall\, s \in L\ \exists\, r_1 \in \Gamma_1 : s = \Phi(r_1)$
$\forall\, s \in L\ \exists\, r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2)$ (*)

Рассмотрим $s = \Phi(r_1)$
По утверждению (*) $\exists\, r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2)$
Тогда $\Phi(r_1) = \Phi(r_2)$, но $r_1 \notin \Gamma_2, r_2 \in \Gamma_2 \Rightarrow r_1 \neq r_2$
Тогда Φ – не инъекция (как отображение множества D)
Докажем сюръективность интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)
Рассмотрим кривую L уравнения (2) в области $\Phi(D)$
Рассмотрим $H = \Phi^{-1}$
Применим к H рассуждение из начала доказательства
Т.к. H – диффеоморфизм, то $H(L)$ – интегральная кривая
Ч.т.д.
Критерий диффеоморфизма
Φ – инъекция
$\Phi \in C^1(D)$
$\det \Phi'(r) \neq 0 \; \forall\, r \in D$
Пример (Уравнение Бернулли)
$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \alpha \neq 0, 1$
Пусть $y > 0$
$\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)y^{\alpha-1} + q(x)$
$v = y^{1-\alpha}$
$v'_x = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'_x$
$\dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{v'_x}{1-\alpha}$
$v'_x = (1-\alpha)p(x)v + (1-\alpha)q(x)$
Пример (Уравнение Риккати)
$y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичная по у}}$
Утверждение: если ϕ – решение, то подстановка $y(x) = v(x) + \phi(x)$ сводит уравнение к уравнению Бернулли

3 Уравнения, не разрешенные относительно производной

3.1 Уравнения, разрешимые относительно производной

Определение
Задача Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ задача нахождения его решения удовлетворяет условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$
Теорема (существование задачи Коши для уравнения, не выраженного относительно производной)
$G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область, $(x_0, y_0, y'_0) \in G, y'$ – в данном случае название переменной, а не производная
$F \in C^1(G), F'$
Определение
$F \in C^1(G), G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область
Тогда D – дискриминальная кривая уравнения $F(x, y, y') = 0$, если $D = \{(x, y) : \exists\, y' \in \mathbb{R} : F(x, y, y') = 0, F'_y(x, y, y') = 0\}$
Определение
Решения ϕ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называются особыми, если $\forall\, x_0 \in \operatorname{dom}\phi\ \exists\, \psi$ – решение, такое, что $\psi(x_0) = \phi(x_0), \psi'(x_0) = \phi'(x_0)$ и при этом $\forall\, U(x_0)\ \phi \neq \psi$ на $U \cap \operatorname{dom}\psi \cap \operatorname{dom}\phi$
Пример
Рассмотрим $F(x, y') = 0$
Оно неявным образом задает производную
Пусть мы смогли выразить решение параметрически: $x = \phi(t), y' = \psi(t)$
Т.е. $F(\phi(t), \psi(t)) \underset{E}{\equiv} 0$
Найдем $y = g(x) : y'(t) = \psi(t)$
Пусть мы нашли такую g
$\mathrm{d}\, g = g'_x \,\mathrm{d}\, x$
$x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in E$ – параметрическое задание функции $y = g(x)$
$\mathrm{d}\, y = y'_x \,\mathrm{d}\, x$ – основное соотношение
$\mathrm{d}\, g = \psi(t)\phi'(t) \,\mathrm{d}\, t$
Пример
$e^{y'} + y' = x$
Пусть $y' = t$
$x = t + e^t$

Основное соотношение $\mathrm{d}\, y = y'_x \,\mathrm{d}\, x$
$\mathrm{d}\, y = t(t+e^t)' \,\mathrm{d}\, t = (t+te^t) \,\mathrm{d}\, t$
$y = \int (t+te^t) \,\mathrm{d}\, t = \dfrac{t^2}{2} + e^t(t-1) + C$
Пример
$F(x, y, y') = 0$
Пример
σ – параметризуется так: $x = \phi(u,v), y = \psi(u,v), y' = \xi(u,v)$
Далее подставим ϕ, ψ, ξ в основное соотношение
$\mathrm{d}\, y = \psi'_u \,\mathrm{d}\, u + \psi'_v \,\mathrm{d}\, v$
$y'_x = \xi$
$\mathrm{d}\, x = \phi'_u \,\mathrm{d}\, u + \phi'_v \,\mathrm{d}\, v$
Если $u = g(v, C)$ – решение, то $x = \phi(g(v,C), v), y = \psi(g(v,C), v)$ – решение исходного

4 Уравнения высших порядков

4.1 Основные понятия

Определение
(дуn) $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – дифференциальное уравнение n-ого порядка
Определение
Функция $\phi \in C^n(E), E = \langle a, b\rangle$ – решение уравнения, если $F(x, \phi, \phi', \ldots, \phi^{(n)}) \underset{E}{\equiv} 0$
Определение
(кду) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ – каноническое уравнение n-ого порядка
Определение
Задача Коши для (кду) – задача нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям (ну) $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$
Теорема Пеано
$G \in \mathbb{R}^{n+1}, f \in C(G), G$ – область
$(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$
Тогда задача Коши для данных данных условий имеет решение на некотором интервале
Теорема Пикара
$G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}}, G$ – область

$f, f'_y, \ldots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$
$(x_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$
ϕ_1, ϕ_2 – решения
Тогда $\phi_1 \equiv \phi_2$ на $D_{\phi_1} \cap D_{\phi_2}$

4.2 Методы понижения порядка

Метод 1
$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, k > 1$
Пусть $p = y^{(k)}$
$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$
Метод 2
$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$
Утверждение
ψ – решение уравнения $F(y, z, z'z) = 0$
$(z = \psi(y))$
ϕ - решение уравнения
$\psi(y) = y'$
$\psi(y) = y'$
$(y = \phi(x))$
Тогда ϕ – решение уравнения
$F(y, y', y'') = 0$
Доказательство
Надо показать, что $F(\phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$
Имеем:

1. $\psi(\phi(x)) \underset{E}{\equiv} \phi'(x)$

2. $F(y, \psi(y), \psi'(y)\psi(y)) \underset{D}{\equiv} 0$

$D_\phi = E$
$D_\psi = D$
$\psi(\phi(x)) \underset{E}{\equiv} \phi'(x) \Rightarrow E_\phi \subset D$
Подставим $y = \psi(x)$ в 2
$F(\phi(x), \psi(\phi(x))), \psi'(\phi(x))\psi(\phi(x)) \underset{E}{\equiv} 0$
$(\psi(\phi(x)))' = \phi''(x)$
$\Rightarrow F(\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \ldots) \underset{E}{\equiv} 0$

Будем искать такую функцию, что $z(y(x)) = y'(x)$
Получим уравнение для z, исходя из уравнения $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
$y''(x) = (y'(x))' = (z(y(x)))' = z'(y(x))y'(x) = z'(y(x))z(y(x))$
$y'''(x) = (y''(x))' = (z'(y(x))z(y(x)))' = z''(y(x))z^2(y(x)) + (z'(y(x)))^2 z(y(x))$
$\Rightarrow F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2 z, \ldots) = 0$
//todo 20.10
Метод 3
Определение
Если $\exists\, \Phi = \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Phi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = F(x, y, \ldots, y^{(n)})$, то $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ – уравнение в точных производных
Утверждение 4.2.2
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Phi(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = F(x, y, \ldots, y^{(n)})$
Тогда ϕ – решение $F = 0 \Leftrightarrow \exists\, C : \phi$ – решение $\Phi = C$
Метод 4
$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где F – однородная по $y, y', \ldots, y^{(n)}$
Т.е. $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) \equiv t^\alpha F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$
Замена $z(x) = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ понимает порядок уравнения на 1