

# Дифференциальные уравнения. Теория

Александр Сергеев

## 1 Глава про кроликов (Введение)

\*задачи про размножение кроликов\*

## 2 Уравнения первого порядка

### 2.1 Дифференциальное уравнение первого порядка и его решение

#### Определение

$F(x, y, y') = 0$  – обыкновенное д/у первого порядка  
( $F$  – функция от трех параметров)

#### Определение

$\phi$  – решение д/у на  $\langle a, b \rangle$ , если  $\phi \in C^1 \langle a, b \rangle$  и  $F(x, \phi(x), \phi'(x)) \equiv 0$  на  $\langle a, b \rangle$   
(п. 1 необязательный, но нам будет удобнее работать только с такими функциями)

#### Определение

Интегральная кривая уравнения – график его решения

#### Определение

Общее решение – множество всех его решений

#### Определение

Общий интеграл уравнения – уравнение вида  $\Phi(x, y, C) = 0$ , определяющее некоторые решения при некоторых значениях  $C$

**Первый метод решения** – подбор

**Второй метод решения** – интегрирование (для уравнений вида  $y' = Cx$ )

## 2.2 Уравнения в нормальной форме

### Определение

$y' = f(x, y)$  – уравнение, выраженное относительно производной/уравнение в нормальной форме/нормальное уравнение

### Определение

Область определения нормального уравнения – область определения  $f$  (множество точек, через которые могут проходить интегральные кривые)

### Определение

Ломаная Эйлера – ломаная с вершинами  $\{(x_k, y_k)\}$ , где  $x_{k+1} = x_k + h$ ,  $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$

**Третий метод решения (метод Эйлера)** – построение ломаной Эйлера. Метод приближенный

## 2.3 Уравнение в дифференциалах

### Определение

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  – уравнение в дифференциалах

### Определение

Решением  $y = \phi(x)$  – решение уравнения в дифференциалах на  $\langle a, b \rangle$ , если  $\phi \in C^1\langle a, b \rangle$  и  $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0$  на  $\langle a, b \rangle$

Также решениями будут функции  $x = \psi(y)$  (аналогично)

### Определение

Область определения уравнения в дифференциалах  $= D_P \cap D_Q$

### Определение

$P(x) dx + Q(y) dy = 0$  – уравнение с разделенными переменными

### Замечание

Общий интеграл уравнения с разделенными переменными имеет вид

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = 0$$

### Определение

Вектор-функция  $(\phi, \psi) : \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$  – параметрическое решение у.д., если  $\phi, \psi \in C^1\langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $(\phi', \psi') \neq (0, 0)$  (кривая гладкая) и  $P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t) \equiv 0$  на  $\langle \alpha, \beta \rangle$

### Определение

Интегральная кривая уравнения в дифференциалах – годограф ее параметрического решения

**Определение**

$\gamma = \{r(t) | t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$  – годограф функции  $r(t) = (\phi(t), \psi(t))$

**Утверждение**

Если  $y = \phi(x)$  – решение уравнения в дифференциалах, то  $(t, \phi(t))$  – параметрическое решение

Если  $(\phi(t), \psi(t))$  – параметрическое решение на  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , то  $\forall t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle \exists U(t_0) :$  годограф функции  $(\phi, \psi)$  – график некоторого решения  $y = g(x)$  или  $x = h(y)$

**Геометрический смысл**

Пусть  $(\phi, \psi)$  – параметрическое решение на  $\langle \alpha, \beta \rangle$

Тогда  $P(\phi(t_0), \psi(t_0))\phi'(t_0) + Q(\phi(t_0), \psi(t_0))\psi'(t_0) = 0$  при  $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\square F = \begin{vmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{vmatrix}, r(t) = \begin{vmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{vmatrix}$$

$$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \cdot r'(t_0) = 0$$

$$F(\phi(t_0), \psi(t_0)) \perp r'(t_0)$$

$r'(t_0)$  – вектор касательной к интегральным кривым

Тогда  $F$  – поле перпендикуляров

**Определение**

Поле на плоскости – это отображение  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

**Определение**

Дифференциальные уравнения называют эквивалентными/равносильными на множестве  $D$ , если на этом множестве они имеют одинаковое множество интегральных кривых

**Утверждение**

$$y' = f(x, y) \text{ равносильно } dy = f(x, y) dx$$

**Замечание**

Уравнение в дифференциалах равносильно  $y'_x = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  в областях,

где  $Q(x, y) \neq 0$

и  $x'_y = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$  в областях, где  $P(x, y) \neq 0$

**Определение**

Если  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ , то  $(x_0, y_0)$  – особая точка уравнения в дифференциалах

## 2.4 Уравнения с разделяющимися переменными

### Определение

$P(x) dx + Q(y) dy = 0$  – Уравнение с разделенными переменными

### Определение

Функция  $y = \phi(x)$  задана неявно уравнением  $F(x, y) = 0$  при  $x \in E$ , если  $F(x, \phi(x)) \equiv 0$  при  $x \in E$

### Теорема (общее решение уравнения с разделенными переменными)

Пусть  $P \in C\langle a, b \rangle, Q \in C\langle c, d \rangle$

$P^{(-1)}, Q^{(-1)}$  – некоторые первообразные  $P, Q$

Тогда  $y = \phi(x)$  – решение уравнения на  $\langle \alpha, \beta \rangle \Leftrightarrow$

- $\phi \in C^1\langle \alpha, \beta \rangle$
- $\exists C \in \mathbb{R} : y = \phi(x)$  неявно задана уравнением  $P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(y) = C$

### Доказательство $\Rightarrow$

Пусть  $y = \phi(x)$  – решение на  $\langle \alpha, \beta \rangle$

1 – по определению

Выберем  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle, y_0 = \phi(x_0)$

Заметим, что  $\exists A : P^{(-1)}(x) = \int_{x_0}^x P(t) dt + A$

$\exists A_2 : Q^{(-1)}(y) = \int_{y_0}^y Q(t) dt + A_2$

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + A + \int_{y_0}^y Q(t) dt + A_2 \equiv C$$

Сделаем замену  $t \rightarrow \phi(t)$  справа

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + A + \int_{x_0}^x Q(\phi(t))\phi'(t) dt + A_2 \equiv C$$

$$\int_{x_0}^x P(t) dt + \int_{x_0}^x Q(\phi(t))\phi'(t) dt \equiv C - A - A_2$$

$$\int_{x_0}^x \underbrace{(P(t) + Q(\phi(t))\phi'(t))}_{0 \text{ по определению решения}} dt \equiv C - A - A_2$$

Отсюда  $C := A + A_2$

Т.о. 2 доказано

### Доказательство $\Leftarrow$

Проверим  $P(x) + Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$  на  $\langle \alpha, \beta \rangle$

$$P^{(-1)}(x) + Q^{(-1)}(\phi(x)) \equiv C$$

Продифференцируем

$$P(x) = Q(\phi(x))\phi'(x) = 0$$

**Определение**

$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0$  – уравнение с разделяющимися переменными

## 2.5 Задача Коши

Рассмотрим  $y' = f(x, y)$

**Определение**

Задачей Коши (ЗК) для нормального уравнения называют задачу нахождения его решения, удовлетворяющего начальному условию  $y(x_0) = y_0$

**Теорема Пиано (частный случай) – существование решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка**

Пусть  $f \in C(G)$ ,  $G$  – область (открытое связное множество)

Возьмем  $(x_0, y_0) \in G$

Тогда  $\exists E = \langle a, b \rangle$ ,  $x_0 \in E$ ,  $\exists \phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  – решение для задачи Коши

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

**Теорема Пикара о единственности решения задачи Коши для нормального уравнения 1 порядка**

$f, f'_y \in C(G)$ ,  $G$  – область,  $(x_0, y_0) \in G$

Пусть  $\psi, \phi$  – решения задачи Коши

Тогда  $\phi = \psi$  на  $D_\phi \cap D_\psi$

## 2.6 Линейное уравнение 1-ого порядка

**Определение**

$y' = p(x)y + q(x)$  – линейное уравнение

$y' = p(x)y$  – однородное линейное уравнение

**Теорема (общее решение линейного уравнения первого порядка)**

$$E = \langle a, b \rangle, p, q \in C(E), \mu = e^{-\int p}$$

Тогда  $y = \frac{C + \int(q\mu)}{\mu}$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $D_y = E$  – общее решение ЛУ

**Доказательство**

Пусть  $S$  – множество всех решений ЛУ

$$F := \{\phi : \underbrace{\tilde{E}}_{\text{промежуток}} \subset E \rightarrow \mathbb{R}\}, \phi = \frac{C + \int(q\mu)}{\mu}, C \in \mathbb{R}$$

Докажем, что  $F = S$

Возьмем  $\phi \in S$

Тогда  $\phi' \equiv p\phi + q$  на  $\tilde{E}$

$$\phi'\mu = p\phi\mu + q\mu$$

$$\phi'\mu - p\phi\mu = q\mu$$

$$\phi'e^{-\int p} - p\phi e^{-\int p} = (\phi e^{-\int p})' = (q\mu)'$$

$$(\phi\mu)' = q\mu$$

$$\phi\mu = \int q\mu + C$$

$$\phi = \frac{\int(\phi\mu) + C}{\mu}$$

Отсюда  $\phi \in F$

Возьмем  $\phi \in F$

$$\phi = \frac{C + \int(\mu q)}{\mu} \text{ на } \tilde{E}$$

$$\phi \in C^1$$

Подставим в уравнение

$$\phi' = p\phi + q$$

$$\frac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \frac{p(C + \int(\mu q))}{\mu} + q$$

$$\text{Л.ч.: } \frac{\mu q + \mu'(C + \int(\mu q))}{\mu^2} = \frac{\mu^2 q - (-\pi)\mu(C + \int(pq))}{\mu^2} = q + \frac{p}{\mu}(C + \int pq)$$

$$\text{П.ч.} = \text{Л.ч.}$$

Ч.Т.Д.

**Следствие (общее решение ЛОУ)**

$$p \in C^1(E), E = \langle a, b \rangle$$

$$\text{Тогда } y = Ce^{\int p}, C \in \mathbb{R}, D_y = E$$

**Доказательство**

$$q = 0$$

**Метод Лагранжа (метод вариации постоянной)**

1. Для ЛУ  $y' = p(x)y + q(x)$  запишем соответствующее ЛОУ

$$y_2' = p(x)y_2$$

$$y_2 = Ce^{\int p}$$

2. Заменяем  $C$  на  $C(x)$  и подставим в исходное уравнение

$$y = C(x)e^{\int p}$$

$$p(x)(C(x)e^{\int p}) + q(x) = (C(x)e^{\int p})'$$

3. Находим  $C(x)$  из полученного уравнения

4. Запишем общее решение  $y = C(x)e^{\int p}$

### Доказательство

В общем виде мы получим ту же формулу, что и в предыдущем методе

### Определение

$P dx + Q dy = 0$  – однородное уравнение, если

$P, Q$  – однородные функции одинаковой степени

### Определение

$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y) \Rightarrow P$  – однородная функция степени  $\alpha$

## 2.7 Уравнение в полных дифференциалах

### Определение (УПД)

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  – уравнение в полных дифференциалах, если

$\exists u : u'_x = P, u'_y = Q$

$u' = (P, Q) = (u'_x, u'_y)$  – матрица Якоби – градиент

Его решение имеет вид  $du = 0$

$$du = u'_x dx + u'_y dy$$

### Определение

$u$  – потенциал уравнения

Тогда  $u = \text{const}$

### Теорема (общее решение УПД)

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  – область,  $P, Q \in C(G)$

$$u' = (P, Q)$$

Тогда функция  $y = \phi(x), x \in E, E = \langle a, b \rangle$  – решение уравнения  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi \in C^1(E), \exists C \in \mathbb{R} : \phi$  – неявно задана уравнением  $u(x, y) = C$  на  $E$

### Напоминание

$$(f \circ g)' = f'(g(x))g'(x), g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow b \subset \mathbb{R}^m, f : B \rightarrow \mathbb{R}^k$$

### Доказательство $\Rightarrow$

По определению  $\phi \in C^1(E)$

По определению решения:  $P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$

$$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$$

$$(u(x, \phi(x)))'_E \equiv 0$$

Значит  $\exists C : u(x, \phi(x)) \equiv_E C$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Имеем  $\phi \in C'(E)$

$$u(x, \phi(x)) \equiv_E C$$

$$u'_x(x, \phi(x)) + u'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E 0$$

$$P(x, \phi(x)) + Q(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv_E E$$

По определению  $\phi$  – решение

**Пример**

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0$$

$$P \in C(a, b), Q \in C(c, d)$$

$$u(x, y) = \int P + \int Q - \text{потенциал}$$

Тогда  $\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C$  – неявно задает все решения

**Теорема (признак УПД (достаточное условие))**

$$P, Q \in C^1(G), G - \text{область в } \mathbb{R}^2$$

$$P'_y = Q'_x$$

Тогда  $\exists u : (P, Q) = u'$  в области  $G$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} + Q(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{y}) + C,$$

где  $(x_0, y_0) \in G, C \in \mathbb{R}$

$(x_0, y_0), (x, y)$  – концы кусочно-гладкой привой, лежащей в  $G$

**Пояснение**

$$P'_y = (u'_x)'_y$$

$$Q'_x = (u'_y)'_x$$

Тогда  $P'_y = Q'_x$  – это необходимое решение для существования  $u$

Доказательство жди на матане

**Определение**

$$\forall x, y \mu(x, y) \neq 0$$

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 - \text{УПД}$$

Тогда  $\mu$  – интегрирующий множитель для  $P dx + Q dy$

**Замечание**

$$\text{Если } (\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$$

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_y$$

**Пример**

$$y' = p(x)y + q(x)$$

$$(p(x)y + q(x)) dx - dy = 0 - \text{не уравнение в полных дифференциалах}$$

Найдем  $\mu$



$$\mu'_y(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = \mu'_x(-1) + 0$$

Попробуем найти  $\mu : \mu'_y = 0$

$$\mu = \mu(x)$$

$$\mu' = -\mu p(x)$$

$$\mu = Ce^{-\int p}$$

Выберем  $C = 1$

$$\mu = e^{-\int p}$$

## 2.8 Замена переменных

**Пример**

$$y' = \frac{y^3 - x^3}{xy^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}, x > 0$$

$$\text{Пусть } v(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y'_x = v - 1 \frac{1}{v^2}$$

$$y(x) = v(x)x \Rightarrow y' = v'x + v$$

$$v'x + v = v - \frac{1}{v^2}$$

$$v'x = -\frac{1}{v^2}$$

$$v^2 dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^3}{3} = -\ln x + C$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = -\ln x + C$$

**Определение**

Векторным полем уравнения  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$  назовем  $F : D \rightarrow$

$$\text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$D = D_P \cap D_Q$$

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Интегральная кривая векторного поля – интегральная кривая уравнения

**Теорема (замена переменной в уравнении)**

$$D \subset \mathbb{R}_{x,y}^2, \Omega \in \mathbb{R}_{u,v}^2 - \text{область}$$

(внизу указаны координатные оси)

$\Phi : D \rightarrow \Omega$  – диффеоморфизм (такая биекция, что  $\Phi \in C^1(D), \Phi^{-1} \in C^1(\Omega)$ )

$F(x, y)$  – векторное поле исходного уравнения

$$G : \Omega \rightarrow \text{Mat}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

$$G(u, v) := F(\Phi^{-1}(u, v))(\Phi^{-1})'(u, v)$$

Значит  $\Phi$  биективно отображает интегральные кривые уравнения (1)

$$F \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 0 \text{ на интегральные кривые уравнения (2) } G \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0$$

### Доказательство

Докажем, что  $\Phi$  отображает интегральные кривые в интегральные кривые

Возьмем  $\Gamma$  – интегральную кривую уравнения (1)

Ей соответствует некоторое параметрическое решение  $\gamma$  на  $E = \langle a, b \rangle$

$$\Gamma = \gamma(E)$$

$$\gamma \in C^1(E \rightarrow \mathbb{R}^2)$$

$$\gamma'(t) = 0 \text{ при } t \in E$$

$$F(\gamma(t))\gamma'(t) \equiv 0_E$$

Докажем, что  $\Phi(\Gamma)$  – интегральная кривая для уравнения (2)

$$\text{Рассмотрим } \lambda(t) = \Phi(\gamma(t))$$

$$\lambda(E) = \Phi(\gamma(E)) = \Phi(\Gamma)$$

$$\lambda = \Phi \circ \gamma$$

$$\text{Отсюда } \lambda \in C^1(E \rightarrow \mathbb{R}^2)$$

$$\lambda'(t) = \underbrace{\Phi'(\gamma(t))}_{\det \neq 0} \underbrace{\gamma'(t)}_{\neq 0}$$

Подставим в (2)

$$\text{Рассмотрим } F(\gamma(t))\gamma'(t) \equiv 0_E$$

$$\gamma(t) = \Phi'(\lambda(t))$$

$$F(\Phi^{-1}(\lambda(t)))(\Phi^{-1})'(\lambda(t))\lambda'(t) \equiv 0_E$$

$$\Leftrightarrow G(\lambda(t))\lambda'(t) \equiv 0_E$$

Теперь докажем, что  $\Phi$  – инъекция интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)

Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – интегральные кривые (1)

$$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$$

Пусть н.у.о.  $\exists r_1 \in \Gamma_1 : r_1 \notin \Gamma_2$

Докажем от противного

$$\text{Пусть } \Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2) = L$$

$$\forall s \in L \exists r_1 \in \Gamma_1 : s = \Phi(r_1)$$

$$\forall s \in L \exists r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2) \quad (*)$$

Рассмотрим  $s = \Phi(r_1)$

По утверждению  $(*) \exists r_2 \in \Gamma_2 : s = \Phi(r_2)$

Тогда  $\Phi(r_1) = \Phi(r_2)$ , но  $r_1 \notin \Gamma_2, r_2 \in \Gamma_2 \Rightarrow r_1 \neq r_2$

Тогда  $\Phi$  – не инъекция (как отображение множества  $D$ )

Докажем сюръективность интегральных кривых (1) в интегральные кривые (2)

Рассмотрим кривую  $L$  уравнения (2) в области  $\Phi(D)$

Рассмотрим  $H = \Phi^{-1}$

Применим к  $H$  рассуждение из начала доказательства

Т.к.  $H$  – диффеоморфизм, то  $H(L)$  – интегральная кривая

Ч.т.д.

### **Критерий диффеоморфизма**

$\Phi$  – инъекция

$\Phi \in C^1(D)$

$\det \Phi'(r) \neq 0 \forall r \in D$

### **Пример (Уравнение Бернулли)**

$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1$

Пусть  $y > 0$

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{\alpha-1} + q(x)$$

$$v = y^{1-\alpha}$$

$$v'_x = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'_x$$

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{v'_x}{1-\alpha}$$

$$v'_x = (1-\alpha)p(x)v + (1-\alpha)q(x)$$

### **Пример (Уравнение Риккати)**

$$y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичная по } y}$$

квадратичная по  $y$

Утверждение: если  $\phi$  – решение, то подстановка  $y(x) = v(x) + \phi(x)$  сводит уравнение к уравнению Бернулли

### 3 Уравнения, не разрешенные относительно производной

#### 3.1 Уравнения, разрешимые относительно производной

##### Определение

Задача Коши для уравнения  $F(x, y, y') = 0$  задача нахождения его решения удовлетворяет условиям  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$

**Теорема (существование задачи Коши для уравнения, не выраженного относительно производной)**

$G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$  – область,  $(x_0, y_0, y'_0) \in G, y'$  – в данном случае название переменной, а не производная

$F \in C^1(G), F'$

##### Определение

$F \in C^1(G), G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$  – область

Тогда  $D$  – дискриминальная кривая уравнения  $F(x, y, y') = 0$ , если  $D = \{(x, y) : \exists y' \in \mathbb{R} : F(x, y, y') = 0, F'_y(x, y, y') = 0\}$

##### Определение

Решения  $\phi$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называются особыми, если  $\forall x_0 \in \text{dom } \phi \exists \psi$  – решение, такое, что  $\psi(x_0) = \phi(x_0), \psi'(x_0) = \phi'(x_0)$  и при этом  $\forall U(x_0) \phi \neq \psi$  на  $U \cap \text{dom } \psi \cap \text{dom } \phi$

##### Пример

Рассмотрим  $F(x, y') = 0$

Оно неявным образом задает производную

Пусть мы смогли выразить решение параметрически:  $x = \phi(t), y' = \psi(t)$

Т.е.  $F(\phi(t), \psi(t)) \stackrel{E}{=} 0$

Найдем  $y = g(x) : y'(t) = \psi(t)$

Пусть мы нашли такую  $g$

$$dg = g'_x dx$$

$x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in E$  – параметрическое задание функции  $y = g(x)$

$dy = y'_x dx$  – основное соотношение

$$dg = \psi(t)\phi'(t) dt$$

##### Пример

$$e^{y'} + y' = x$$

Пусть  $y' = t$

$$x = t + e^t$$

$$\begin{aligned} \text{Основное соотношение } dy &= y'_x dx \\ dy &= t(t + e^t)' dt = (t + te^t) dt \\ y &= \int (t + te^t) dt = \frac{t^2}{2} + e^t(t - 1) + C \end{aligned}$$

**Пример**

$$F(x, y, y') = 0$$

**Пример**

$\sigma$  – параметризуется так:  $x = \phi(u, v), y = \psi(u, v), y' = \xi(u, v)$

Далее подставим  $\phi, \psi, \xi$  в основное соотношение

$$dy = \psi'_u du + \psi'_v dv$$

$$y'_x = \xi$$

$$dx = \phi'_u du + \phi'_v dv$$

Если  $u = g(v, C)$  – решение, то  $x = \phi(g(v, C), v), y = \psi(g(v, C), v)$  – решение исходного

## 4 Уравнения высших порядков

### 4.1 Основные понятия

**Определение**

(дуп)  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  – дифференциальное уравнение  $n$ -ого порядка

**Определение**

Функция  $\phi \in C^n(E), E = \langle a, b \rangle$  – решение уравнения, если  $F(x, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}) \equiv_E 0$

**Определение**

(кду)  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  – каноническое уравнение  $n$ -ого порядка

**Определение**

Задача Коши для (кду) – задача нахождения его решения, удовлетворяющего начальным условиям (ну)  $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

**Теорема Пеано**

$G \in \mathbb{R}^{n+1}, f \in C(G), G$  – область

$(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$

Тогда задача Коши для данных данных условий имеет решение на некотором интервале

**Теорема Пикара**

$G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x, y, y', \dots, y^{(n-1)}}, G$  – область

$f, f'_y, \dots, f'_{y^{(n-1)}} \in C(G)$   
 $(x_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in G$   
 $\phi_1, \phi_2$  – решения  
 Тогда  $\phi_1 \equiv \phi_2$  на  $D_{\phi_1} \cap D_{\phi_2}$

## 4.2 Методы понижения порядка

### Метод 1

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, k > 1$$

Пусть  $p = y^{(k)}$

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$$

### Метод 2

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

### Утверждение

$\psi$  – решение уравнения  $F(y, z, z'z) = 0$

$$(z = \psi(y))$$

$\phi$  - решение уравнения

$$\psi(y) = y'$$

$$\psi(y) = y'$$

$$(y = \phi(x))$$

Тогда  $\phi$  – решение уравнения

$$F(y, y', y'') = 0$$

### Доказательство

Надо показать, что  $F(\phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$

Имеем:

$$1. \psi(\phi(x)) \underset{E}{=} \phi'(x)$$

$$2. F(y, \psi(y), \psi'(y)\psi(y)) \underset{D}{=} 0$$

$$D_\phi = E$$

$$D_\psi = D$$

$$\psi(\phi(x)) \underset{E}{=} \phi'(x) \Rightarrow E_\phi \subset D$$

Подставим  $y = \psi(x)$  в 2

$$F(\phi(x), \psi(\phi(x)), \psi'(\phi(x))\psi(\phi(x))) \underset{E}{=} 0$$

$$(\psi(\phi(x)))' = \phi''(x)$$

$$\Rightarrow F(\phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots) \underset{E}{=} 0$$

Будем искать такую функцию, что  $z(y(x)) = y'(x)$

Получим уравнение для  $z$ , исходя из уравнения  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

$$y''(x) = (y'(x))' = (z(y(x)))' = z'(y(x))y'(x) = z'(y(x))z(y(x))$$

$$y'''(x) = (y''(x))' = (z'(y(x))z(y(x)))' = z''(y(x))z^2(y(x)) + (z'(y(x)))^2 z(y(x))$$

$$\Rightarrow F(y, z, z'z, z''z^2 + z'^2z, \dots) = 0$$

//todo 20.10

### Метод 3

#### Определение

Если  $\exists \Phi = \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, \dots, y^{(n)})$ , то  $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  – уравнение в точных производных

#### Утверждение 4.2.2

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, \dots, y^{(n)})$$

Тогда  $\phi$  – решение  $F = 0 \Leftrightarrow \exists C : \phi$  – решение  $\Phi = C$

### Метод 4

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , где  $F$  – однородная по  $y, y', \dots, y^{(n)}$

Т.е.  $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^\alpha F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

Замена  $z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}$  понимает порядок уравнения на 1