

# Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

## 1 Линейное отображение

### 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть  $V, U$  - линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$  - *линейное отображение*, если  $\forall \lambda \in K, u_1, u_2 \in U$   $\mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$

**Замечания**

1. Обозначение:  $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2.  $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$  поточечно определены  $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda \mathcal{A}u$

**Примеры**

1.  $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2.  $\epsilon v = v$
3.  $V, U = P_n$  - множество многочленов степени  $\leq n, A = \frac{d}{dt}$  - дифференциальный оператор
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$  - матрица  
 $\mathcal{A}u = B \cdot u$

**Определение**

$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V)$  – множество всех линейных отображений  $U \rightarrow V$

Определим операции

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

$$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$$

$L(U, V)$  – линейное пространство

**Определение**

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$  – образ линейного отображения

**Замечание**

$\text{Im } \mathcal{A} \subset V$  – линейное подпространство

Если  $\text{Im } \mathcal{A}$  – конечномерное, то  $\dim \text{Im } \mathcal{A} =: \text{rg } \mathcal{A}$

**Определение**

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$  – ядро линейного отображения (прообраз  $\mathbb{0}_V$ )

**Замечание**

$$\text{Ker } \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$\mathbb{0}_U \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$\text{Ker } \mathcal{A} \subset U$  – линейное подпространство

Если  $\text{Ker } \mathcal{A}$  конечномерно, то  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$

**Замечание 2**

Изоморфизм – частный случай линейного отображения

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbb{0}_U \text{ (тривиально)} \end{cases}$$

**Следствие**

Если  $U, V$  – конечномерные

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

**Определение**

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

- $\mathcal{A}$  сюръективное  $\Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$  инъективное  $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$  биективно  $\Leftrightarrow$  сюръективно + инъективно  $\Leftrightarrow$  изоморфизм

- $\mathcal{A}$  эндоморфизм  $\Leftrightarrow$  линейный оператор  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in L(V, V) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{End}_K(V)$
- $\mathcal{A}$  автоморфизм  $\Leftrightarrow$  эндоморфизм + изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}_K(V)$

### Примеры

1.  $0 \in L(U, V)$
2.  $\epsilon \in \text{Aut}(V)$  – автоморфизм
3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$   
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$  – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм  
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$  – матрица

#### Определение

$\text{Im } A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$  – образ матрицы

$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$  – ядро матрицы

$\text{def } A = \dim \text{Ker } A$  – дефект матрицы

$\text{rg } A = \dim \text{Im } A$  – согласуется со старыми определениями ранга матрицы

#### Доказательство

Для  $y \in \text{Im } A$

$$y = Ax = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$\text{Im } A = \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\dim \text{Im } A = \text{rg } A$$

#### Утверждение

$\text{Ker } A$  – множество решений  $Ax = 0$

Тогда  $\text{def } A = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg } A$

Отображение  $u = Av$ :

- (a) Сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$
- (b) Инъекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- (c) Биекция  $\Leftrightarrow n = m = \text{rg } A$
- (d) Эндоморфизм  $\Leftrightarrow n = m$
- (e) Автоморфизм  $n = m = \text{rg } A$

**Определение**

$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – композиция

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – линейное отображение

**Свойства**

1.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$   
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$  – дистрибутивность
2.  $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$  – однородность
3.  $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$  – ассоциативность
4.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$  – изоморфизм

**Определение**

Пусть  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  – изоморфизм

$\forall v \in V \exists ! u : \mathcal{A}u = v$

Тогда зададим  $\mathcal{A}^{-1}v = u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

$\mathcal{A}^{-1}$  – изоморфизм, обратный к  $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$

**Замечание**

$\text{End}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\text{Aut}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра с делением

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$  – линейное подпространство

Тогда  $\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow V$  называется сужением на линейное подпространство

$U_0$ , если  $\forall u \in U_0 \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$

Очевидно  $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$

$\mathcal{A}_0 =: \mathcal{A}|_{U_0}$

**Утверждение**

$\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{A}_0$  изоморфизм  $\in L(U_0, \text{Im } \mathcal{A}_0)$

**Доказательство**

$\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$\text{Ker } \mathcal{A}_0 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$  – из изоморфизма

Отсюда  $\text{Ker } \mathcal{A}_0 = \{0_U\}$

Тогда  $\mathcal{A}_0$  инъекция, а значит изоморфизм

**Теорема о ранге и дефекте линейного отображения**

$U, V$  – конечномерные

$A \in L(U, V)$

Тогда  $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$

**Доказательство**

$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$

Дополним  $U_0$  до  $U$ :  $U = U_0 \oplus U_1$

Пусть  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\forall u \in U \ u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$  – единственным образом

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$

Отсюда  $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

Покажем, что  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм:

Сюръекция, т.к. действует в  $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$

Отсюда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{0_U\}$  из дизъюнктивности

Тогда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{0_U\}$  – тривиально

Тогда  $\mathcal{A}_1$  инъективно

Отсюда  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм, т.е.  $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$

Тогда  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$ , ч.т.д.

## 1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные  $U, V$

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1, \dots, \xi_n$  – базис  $U$

$\nu_1, \dots, \nu_m$  – базис  $V$

$$\forall u \in U \ u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$$\forall v \in V \ v = \sum_{i=1}^m v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\forall v \in \text{Im } \mathcal{A} \quad v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i$$

$\mathcal{A}$ , как линейное отображение, полностью определяется значениями  $\mathcal{A}$  на базисных векторах

$$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$A = (A_1 \dots A_n)$  - матрица линейного отображения в базисах  $(\xi, \nu)$

Если  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  - линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадают

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \nu_j$$

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \right) \nu_j$$

Т.к. координаты введены единственным образом, то  $\forall j \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \Leftrightarrow$

$$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$$

**Примеры**

$$1. \quad \epsilon: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow E$$

$$2. \quad \epsilon: \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{V} \rightarrow \underset{\nu_1 \dots \nu_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow T_{\nu \rightarrow \xi} = T_{e \rightarrow e'}$$

**Утверждение**

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$  - пространство всех матриц  $A_{m \times n}$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = m$  (при фиксированных базисах  $U, V$ )

**Доказательство**

Соответствие между  $\mathcal{A}$  и  $A$  взаимнооднозначное

Докажем линейность

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda \mathcal{B}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$$

**Утверждение**

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} \begin{matrix} U \\ \xi_1 \dots \xi_n \end{matrix} & \xrightarrow{B} \begin{matrix} W \\ \theta_1 \dots \theta_r \end{matrix} \xrightarrow{A} \begin{matrix} V \\ \nu_1 \dots \nu_m \end{matrix} \quad (\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^r b_{ki} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^r b_{ki} \mathcal{A}_{\theta_k} = \\ & \sum_{k=1}^r b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}\right) \nu_i = \sum_{j=1}^m AB_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Утверждение**

Пусть  $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

(В одном базисе)

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

**Доказательство**

Пусть  $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon \leftrightarrow AB = E$$

Отсюда  $B = A^{-1}$

**Утверждение**

$A$  изоморфно  $\Rightarrow A_0$  изоморфно

**Доказательство**

$A_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$$\text{Ker } A_0 \subset \text{Ker } A = \{\mathbb{O}_U\}$$

Отсюда  $\text{Ker } A_0 = \{\mathbb{O}_U\}$

Отсюда  $A_0$  – инъективно, а значит изоморфизм

**Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах**

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix} \leftrightarrow A'$$

$T_{\xi \rightarrow \xi'} T_{\nu \rightarrow \nu'}$  – матрицы перехода

$$\text{Тогда } A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Доказательство**

Пусть  $\xi_U : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix}$ ,

$$\xi_V : \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix}$$

$$\mathcal{A} = \xi_V \mathcal{A}_{\xi_U}$$

$$A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

**Следствие**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : V \xrightarrow{e'} V \xleftarrow{e'} A'$$

$$A' = T_{e' \rightarrow e} A T_{e \rightarrow e'}$$

#### Определение

Матрицы  $A_{n \times n}, B_{n \times n}$  *подобны*, если  $\exists C$  невырожденная:  $A = C^{-1} B C$

$A$  и  $A'$  – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны

#### Утверждение

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Ker } A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Im } A$$

#### Доказательство

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{Im } A$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = 0\}$$

$$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } A$$

### 1.3 Инвариантность линейного отображения

#### Определение

Инвариантностью/инвариантом называется свойство, которое не меняется при определенном рода преобразованиях

#### Теорема 1

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\text{rg } A$  и  $\text{def } A$ , где  $A \leftrightarrow \mathcal{A}$ , не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса

#### Доказательство

$$\mathcal{A} : U \xrightarrow{\xi} V \xleftarrow{\nu} A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$$

$$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A$$

$$\text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = n = \text{rg } A + \text{def } A \Rightarrow \text{def } \mathcal{A} = \text{def } A$$

#### Следствие

$$\mathcal{A} \text{ изоморфизм} \Leftrightarrow \exists A^{-1}, \text{ где } A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

#### Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V$$



Тогда  $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$  – определитель системы векторов в базисе  $e_1, \dots, e_n$

### Теорема 2

Значение  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса  $e_1, \dots, e_n$  (т.е. является инвариантом), причем  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе

### Доказательство

Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$

Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A_{n \times n}$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в  $e'_1, \dots, e'_n$  – базисе  $V$  – это тоже верно

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e'} A'$$

$$\det \mathcal{A} = \det A'$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\text{Тогда } \det A' = \det(T^{-1} A T) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$$

### Следствие

$\forall f$  – n-форма на  $V$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \quad f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

### Доказательство

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$g$  – n-форма, т.к.  $f$  – n-форма

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \quad (\text{см. доказательство теоремы})$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

### Следствие 2

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$$

### Следствие 3

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

$$\text{Причем } \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

$$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \in \text{Aut}(V)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$$

$$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$$

## Примеры

1. В  $V_3$

$$f(a, b, c) = (a, b, c) = \text{ориентированный объем} = \det(a, b, c)$$

$$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$$

$\lambda = \det \mathcal{A}$  – коэффициент пропорциональности объемов

(a)  $\mathcal{A}v = \mu v$  – оператор подобия

$$\text{Тогда } \lambda = \mu^3$$

(b) Поворот

Пусть  $i, j, k$  перешли в  $e_1, e_2, e_3$  поворотом

$$\text{Тогда } e_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A} \xleftrightarrow[ijk]{\quad} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

$$f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a, b, c)$$

$$\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1 - \text{смешанное произведение}$$

Отсюда при повороте объем сохраняется

## Определение

$$A_{n \times n}$$

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} - \text{след матрицы}$$

## Теорема 3

Если матрицы подобные, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$

**Доказательство**

$$A, B - \text{подобные} \Rightarrow \exists \text{ невырожденная } C : A = C^{-1}BC = SBC$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A &= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik} \sum_{m=1}^n B_{km} C_{ki} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} \sum_{i=1}^n C_{mi} S_{ik} = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} E_{mk} = \sum_{k=1}^n B_{kk} = \operatorname{tr} B\end{aligned}$$

#### Следствие

$A$  и  $A'$  матрицы  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$  в разных базисах

Тогда  $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$  (из формулы перехода)

#### Определение

$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$ , где  $A$  – матрица  $\mathcal{A}$  в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

#### Определение

$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

$L$  называется инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Если  $L$  – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве

#### Примеры

1.  $\mathbb{O}, V$
2.  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$
3.  $\mathcal{A}$  – вращение пространства вокруг оси  $l$  на фиксированный угол  
Тогда  $l, L \perp l$  – инвариантное пространство ( $L$  – плоскость)  
Линейные многообразия  $P = x_0 + L$  – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

#### Теорема 4

$L \subset V$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда  $\exists$  базис  $V$  такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ \mathbb{O} & A^3 \end{pmatrix}$ , где  $A^1_{k \times k}, k = \dim L$

#### Доказательство

Пусть  $L$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A}$

$\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L$

Дополним его до базиса  $V$ :

$V = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что  $A$  имеет ожидаемый вид

**Следствие 1**

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}, \text{ где } A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$$

**Доказательство**

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L_1$

$e_{k+1}, \dots, e_n$  – базис  $L_2$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_j^1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in k+1 \dots n} \in L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A_{j-k}^2 \end{pmatrix}$$

**Следствие 2**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид (аналогично предыдущему следствию)

Пусть  $A|_{L_j} : L_j \rightarrow L_j$  (эндоморфизм)

Тогда  $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_j$

**Следствие 3**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$\text{Тогда } \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(A|_{L_j})$$

**Доказательство**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$$\forall x \in V \exists ! x_1 \in L_1, \dots, x_m \in L_m : x = \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}x_i$$

$$\mathcal{A}x_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}_i$$

Докажем дизъюнктность

Пусть  $y_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$

Тогда  $\exists x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$$y_1 + \dots + y_m = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \dots + \mathcal{A}x_m = 0$$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$ , т.к.  $L_i$  – инвариант

Т.к.  $L_1 \dots L_m$  – дизъюнкты, то  $\mathcal{A}x_i = 0$

Отсюда  $y_i = 0$

Отсюда  $\text{Im } \mathcal{A}_i$  дизъюнкты

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

$V$  – линейное пространство над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

$\lambda \in K$  – *собственное число*  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \neq 0 \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

$v$  – *собственный вектор*  $\mathcal{A}$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$

$$\text{Отсюда } v - \text{СВ} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)v = 0$$

$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon) = (\text{множество всех СВ } \mathcal{A}, \text{ отвечающих } \lambda) \cup \{0\}$  – собственное подпространство  $\mathcal{A}$ , отвечающее  $\lambda$

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$  – геометрическая кратность числа  $\lambda$

$V_\lambda, \gamma_\lambda$  – инвариантны относительно оператора  $\mathcal{A}$  и выбора базиса

**Примеры**

1. Оператор подобия:

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v := \lambda v$$

У него  $\lambda$  – собственное число,  $V = V_x$

$$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$$

2.  $\mathcal{A}$  – поворот на плоскости относительно начала координат на угол  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
3.  $\lambda = 0$  – собственное число  $\mathcal{A}$   
 $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$   
 $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  – не изоморфизм  
 $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$
4.  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$ , где  $v_j$  – СВ  $\mathcal{A}$  для стационарного числа  $\lambda_j$

Научимся находить СЧ и СВ

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \text{tr } A + \dots + \det A$  – характеристический многочлен  $\mathcal{A}(A)$   $\lambda$  – СЧ  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$

Из основной теоремы алгебры  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)

Если  $\lambda_{i \in 1 \dots n}$  – корни, то  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  (т.к. свободный член  $\chi$ )

Т.о.  $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

Также из теоремы Виета  $\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$ , где  $\alpha(\lambda)$  – алгебраическая кратность СЧ  $\lambda$  (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в  $\mathbb{R}^2$  на  $\alpha \in (-\pi, \pi)$

Найдем характеристический многочлен:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos \alpha - t)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 2t \cos \alpha + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2t \cos \alpha + 1$$

Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ

$$\det A = 1, \text{tr } A = 2 \cos \alpha$$

### Теорема 1

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V), \lambda$  – СЧ  $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

### Доказательство

$1 \leq \gamma(\lambda)$  очевидно, т.к.  $\gamma(\lambda) = \dim V_{\lambda} = \gamma$

Пусть  $v_1, \dots, v_\gamma$  – базис  $V_\lambda$

$V_\lambda$  – инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис  $V_\lambda$  такой, что  $A$  имеет ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

Отсюда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE| |A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \chi_{A^2}(t)$

Пусть  $v_1, \dots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n$  – наш базис

Т.к.  $\mathcal{A}v_{j \in 1 \dots \gamma} = \lambda v_j$ , то  $A^1 = \lambda E_{\gamma \times \gamma}$

$\chi_{A^1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma$ , т.к. возможно  $\lambda$  – корень  $\chi_{A^2}(t)$

### Определение

Набор СЧ  $\mathcal{A}$  с учетом кратности является спектром оператора  $\mathcal{A}$

Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е.  $\forall \lambda$  – СЧ  $\alpha(\lambda) = 1$

### Теорема 2

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

$v_1, \dots, v_m$  – соответствующие СВ

Тогда  $v_1, \dots, v_n$  – линейно независимые

### Доказательство

Методом математической индукции:

1.  $m = 1$  – очевидно (т.к.  $v_1 \neq 0$ )

2. Пусть верно для  $m$

Докажем для  $m + 1$  от противного

Пусть  $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j \in 1 \dots m}$ ,  $v_{m+1}$  – соответствует  $\lambda_{m+1}$

Пусть  $v_1, \dots, v_{m+1}$  линейно зависимые

Тогда  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$

//todo

### Следствие 1

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

Тогда  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$  – дизъюнктные

### Доказательство

$v_1 + \dots + v_m = 0, v_i \in V_{\lambda_i}$

Пусть  $v_i \neq 0$ . Тогда  $v_i$  – СВ для  $\lambda_i$  (т.к.  $v_i \in V_{\lambda_i}$ )

Тогда линейная комбинация СВ  $= 0$ , чего не может быть из теоремы

Тогда  $v_i = 0$ , откуда дизъюнктность

**Следствие 2**

Пусть  $V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \text{End}(V_\lambda)$

Тогда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{\lambda - \text{СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$

**Доказательство**

$V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

$V_\lambda$  – инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис такой, что  $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$

$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$

Тогда  $V = \text{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$ , где  $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$  – базис  $V_{\lambda_k}$

Тогда базис  $V$  – объединение базисов

Отсюда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

## 1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагона- лизируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

**Определение**

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется оператором простой структуры, если существует базис  $V$  такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Замечание**

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow$  в  $V$  существует базис из СВ

**Теорема**

Если все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$ , т.е. являются СЧ (т.е.  $\sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda) = n =$

$\deg \chi_{\mathcal{A}}(t)$ )

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow \forall \lambda - \text{СЧ } \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$

**Доказательство**

$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$



$$\mathcal{A} - \text{ОПС} \Leftrightarrow \exists \text{ базис из СВ} \Leftrightarrow = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda} \Leftrightarrow n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \gamma(\lambda)$$

$$\text{Отсюда } n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$$

### Следствие

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}$  - ОПС

### Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$\exists T$  невырожденная :  $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i$  - СВ

### Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица  $A$  диагонализируема  $\Leftrightarrow A$  - матрица ОПС  $\mathcal{A}$  в некотором базисе

Причем  $T = T_{e \rightarrow v}$ , где  $e_1, \dots, e_n$  - базис, в котором была записана  $A$ ,  $v_1, \dots, v_n$  - базис из СВ  $\mathcal{A}$ , соответствующих  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$  - ОПС

$e_1, \dots, e_n$  - базис  $V$ ,  $v_1, \dots, v_n$  - СВ, соответствующие  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - СЧ, базис  $V$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A \mathcal{A} \xleftrightarrow{v} A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$T = T_{e \rightarrow v}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

Отсюда  $A$  подобна диагональной

**Доказательство**  $\Rightarrow$

//todo

### Определение

Пусть  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  - линейное подпространство

Тогда  $\forall v \in V \exists ! v_1, \dots, v_m : v_i \in L_i, v = \sum_{i=1}^m v_i$

Зададим  $\rho_i \in \text{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

$\rho_i$  - оператор проектирования (проектор) на  $L_i$

Свойства:

$$1. \forall i \neq j \rho_i \rho_j = \mathbb{O}$$

$$2. \sum_{i=1}^m \rho_i = \epsilon$$

3.  $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$  – идемпотентность

4.  $\text{Im } \rho_i = L_i$   
 $\text{Ker } \rho_i = \sum_{j \neq i} L_j$

### Утверждение

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_m \in \text{End}(V)$ , удовлетворяющие свойствам 1 и 2

Тогда  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$  (т.е.  $\rho$  – проектор на  $L_i = \text{Im } \rho_i$ )

### Доказательство

Докажем  $1, 2 \Rightarrow 3$

$$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \sum_{j=1}^m \rho_j = \rho_i^2$$

Докажем, что  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$

$$\forall v \in V \quad v = \epsilon v = \sum_{i=1}^m \rho_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$$

Докажем дизъюнктность

$$0 = v_1 (\in \text{Im } \rho_1) + \dots + v_m (\in \text{Im } \rho_m)$$

$$\forall i = 1 \dots m \quad v_i = \rho_i \omega_i (\exists \omega_i \in V)$$

$$v_i = \rho_i \omega_i = \text{из свойства 3} = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m \rho_j \omega_j \right) = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m v_j \right) = \rho_i 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

### Теорема о спектральном разложении о.п.с.

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  – о.п.с.

Тогда  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$ , где  $\rho_\lambda$  – проектор на  $V_\lambda$

### Доказательство

Обозначение: Пусть все  $\lambda$  – С.Ч.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$

$$v = \sum_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v = \mathcal{A} \left( \sum_{\lambda} v_\lambda \right) = \sum_{\lambda} (\mathcal{A}v_\lambda) = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda(v) = \left( \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda \right) v$$

Отсюда  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$  – спектральное разложение

### Следствие

$A$  – диагонализируема  $\Rightarrow \exists \rho_\lambda, \lambda - \text{С.Ч. } A : A = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

### Определение

$(A_m)_{m=1}^\infty$  – последовательность матриц  $A_{n \times n} = (a_{ij}^m)_{n \times n}$ ,  $m$  – индекс, а не степень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A = (a_{ij})_{n \times n} \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \ a_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^m$$

### Немного про ряды

$\sum_{m=1}^\infty a_m$  – числовой ряд ( $a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ )

$S_m = \sum_{i=1}^m a_k$  – частичная сумма ряда

Если  $S_m$  сходится, то ряд называется сходящимся

### Определение

$\sum_{m=1}^\infty A_m$  – ряд из матриц

$\sum_{m=1}^\infty A_m$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \ \sum_{m=1}^\infty a_{ij}^m$  – сходится

### Далее про ряды

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x), u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функциональный ряд

При фиксированном  $x$  – числовой ряд

Множество  $x$  таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда  $= E$

$\sum_{m=1}^\infty C_m(x - x_0)^m$  – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при  $|x - x_0| < R$ , где  $R$  – радиус сходимости

В  $\mathbb{C}$  – круг сходимости

В  $\mathbb{R}$  – интервал сходимости

Для  $\mathbb{R}$  :  $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum_{m=1}^\infty \frac{x^m}{m!}$ , сходится при  $|x - x_0| \leq \infty$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \text{ сходится при } |x| \leq \infty$$

На окружности (при  $|x - x_0| = R$ ) ряд может как сходиться, так и расходиться

### Определение

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

$$\text{Тогда } f(A) := \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \text{ (если ряд сходится)}$$

### Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}, \text{ где } \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

### Доказательство

$A_{n \times n}$  диагонализируема, а значит  $\exists T : \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k, R = \infty$$

$$A^k = (T \Lambda T^{-1})^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}$$

Отсюда  $S_m = T \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^m C_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m C_k \lambda_n^k) T^{-1}$  (т.к.  $R = \infty$ , то все ряды

сойдутся)

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}$$

### Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$f(A) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$ , где  $A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$  – спектральное разложение

### Доказательство

$A$  – диагонализируема  $\Rightarrow A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$

Тогда  $A^k = (\sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda)^k = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda$

Отсюда  $S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k = \sum_{k=0}^m C_k \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} (\sum_{k=0}^m C_k \lambda^k) \rho_\lambda \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$

### Следствие

$A$  – диагонализируема,  $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall \lambda - \text{CЧ} \quad |\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall \lambda - \text{CЧ} \quad |t\lambda| < R$

Тогда  $f(At) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \dots, f(\lambda_n t)) T^{-1}$

или  $f(At) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda t) \rho_\lambda$

### Пример

$\exp At = e^{At} = \sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}$

### Свойства

1.  $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
2.  $e^{A0} = E$
3.  $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At} A$

### Доказательство

$$(e^{At})' = (\sum_{\lambda} f(\lambda t) \rho_\lambda)' = \sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t} \rho_\lambda = (\sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) (\sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At} A$$

### Поиск обратной матрицы

Пусть  $A$  диагонализируема

$\forall \lambda \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}) T^{-1}$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_{\lambda}$$

**Определение**

$\sqrt[m]{A}$  – арифметический корень

Если  $\forall \lambda \lambda \geq 0$ , то результат определен однозначно

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$$

## 1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

$V$  – линейное пространство над полем  $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$   
Т.е. все корни являются С.Ч.  $\mathcal{A}$   
 $\forall \lambda \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)
2. Все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$   
Т.е. все корни являются С.Ч.  $\mathcal{A}$   
 $\exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)
3. При  $K = \mathbb{R}$  не все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$   
Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией

**Определение**

$V$  – вещественное линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$$

$$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$$

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \text{ в } V$$

$$0 = 0 + i0 \text{ – нулевой в } V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall x \in V \quad V_{\mathbb{C}} \ni x + 0i = x$$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \quad \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

**Утверждение**

$V_{\mathbb{C}}$  – линейное пространство

**Теорема (о вещественном базисе  $V_{\mathbb{C}}$ )**

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$ ,  $e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V_{\mathbb{C}}$  ( $\dim V = \dim V_{\mathbb{C}}$ )

**Доказательство**

$\forall z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

Отсюда  $z = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$ , т.е.  $e_1, \dots, e_n$  – порождающая

//todo Отсюда  $e_1, \dots, e_n$  – линейно независимые

**Определение**

$$z = x + iy$$

Тогда  $\bar{z} = x - iy$  – сопряженный вектор

**Утверждение**

$z_1, \dots, z_m$  – линейно независимые в  $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$  – линейно независимые

$$(\Rightarrow \text{rg}(z_1, \dots, z_m) = \text{rg}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m))$$

**Доказательство**

$$c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m = 0$$

$$\overline{c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m} = \bar{0} = 0 = \bar{c}_1 z_1 + \dots + \bar{c}_m z_m \text{ – линейно независимые}$$

$$\text{Отсюда } \bar{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$$

**Определение**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

Продолжением  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  называется  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$  такой, что

$$\forall z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$$

**Свойства**

1.  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n \times n}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \dots = \mathcal{A} e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

$$\text{Отсюда } A_{\mathbb{C}} = A$$

2.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$  (т.к. матрицы равны)
3.  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\bar{z})$
4.  $\alpha \pm i\beta$  – пара сопряженных корней  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  – СЧ для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   
 Тогда  $z$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \bar{z}$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha - i\beta$

**Доказательство**

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\bar{z}$$

Тогда:

Т.о. если  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

**Определение**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

*Нормализованный многочлен* – многочлен, старший коэффициент которого 1

Нормализованный многочлен  $\psi(t)$  называется *аннулятором* элемента  $x \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0 = \prod_{\lambda - \text{корень многочлена}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) -$$

кратность корня

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_0\epsilon = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

**Определение**

Минимальный аннулятор  $x$  – аннулятор минимальной степени

**Теорема о минимальном аннуляторе элемента**

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

1.  $\forall x \in V \exists!$  минимальный аннулятор  $x$
2. Любой аннулятор  $x$  делится на минимальный

**Доказательство 1**

(алгоритм)



$$1. \ x = \mathbb{O}, \psi \equiv 1$$

$$\epsilon = \psi(\mathcal{A})$$

$$2. \ x \neq \mathbb{O}$$

Пусть  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$  – линейно независимые и  $m$  – максимальное

$$\exists ! \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$$

$$(\mathcal{A}^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{O}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i \text{ – минимальный и определен единственным образом}$$

### Доказательство 2

Пусть  $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$ ,  $\deg r < \deg \phi$  – аннулятор

$$\mathbb{O} = \psi'(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})x}_{\mathbb{O}} + r(\mathcal{A})x$$

Отсюда  $r(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$

Но т.к.  $\psi$  – минимальный, то  $r \equiv \mathbb{O}$

### Определение

Нормализованный многочлен  $\phi(t)$  называется аннулятором  $\mathcal{A}$ , если  $\forall v \in V \ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$  (т.е.  $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$ )

Аннулятор  $\mathcal{A}$  минимальной степени – *минимальный многочлен*

### Теорема о минимальном многочлене

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$1. \ \forall \mathcal{A} \exists ! \text{ минимальный многочлен}$$

$$2. \ \text{Любой аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$$

### Доказательство

(алгоритм)

$$1. \ e_1, \dots, e_n \text{ – базис } V$$

По теореме 1  $\forall e_i \exists ! \psi_i(t)$  – минимальный аннулятор  $e_i$

$$\phi(t) := \text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

$$\text{Тогда } \forall j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$$

Докажем, что  $\phi(t)$  – аннулятор

$$\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^m v_j e_j = \sum_{j=1}^m \phi(\mathcal{A})v_j e_j = \sum_{j=1}^m a_j(t) \psi_j(t) v_j e_j =$$

$\emptyset$

Т.о.  $\phi$  – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на  $\phi$

Пусть  $\phi_1(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$\forall v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow \forall j = 1 \dots n \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset$  – тогда  $\phi_1(\mathcal{A})$  – аннулятор  $e_j$

Т.к.  $\psi_j(t)$  – минимальный аннулятор  $e_j$ , то  $\phi_1(t)$  делится на  $\psi_j(t)$

Отсюда  $\phi_1(t)$  делится на  $\text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$

Отсюда  $\deg \phi$  – минимальная из возможных, а значит  $\phi$  – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный

Пусть  $\phi_2(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  такой, что  $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$

Тогда  $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$  – степень меньше  $m$

Но тогда  $\delta$  – аннулятор,  $\deg \delta < m$  – противоречие

Отсюда  $\phi_2 = \phi$

### Теорема Кэли-Камильтона

$\forall \mathcal{A} \in V$

$\chi_{\mathcal{A}}$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  (т.е.  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$ )

#### Доказательство

Пусть  $\mathcal{A} \xleftrightarrow[e_1, \dots, e_n]{} A$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$$

Пусть  $\mu$  не корень  $\chi$

Тогда  $\det(A - \mu E) \neq 0$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (b_{ij} := A_{ji})$$

$b_{ij}$  – многочлен  $n - 1$  степени от  $\mu$

Отсюда  $(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0)$ , где  $B_i$  – матрица

$n \times n$

$$\text{Отсюда } \det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

$$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

Отсюда  $\alpha_0 E = AB_0$

$$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$$

$\vdots$

$$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$$

$$\alpha_n E = -B_{n-1}$$

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \dots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = 0$$

**Следствие**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$   $\chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}$

**Следствие 2**

$$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$$

**Теорема (о корнях минимального многочлена)**

Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $\lambda$  – корень  $\chi(t)$

1. Пусть  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$  – С.Ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0$

Отсюда  $\psi(t) = (t - \lambda)$  – минимальный аннулятор элемента  $v$

Т.к.  $\phi$  – минимальный многочлен, то  $\phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$  аннулятор  $v$

Тогда по теореме 1  $\phi$  делится на  $\psi \Rightarrow \lambda$  – корень  $\phi$

2. Пусть  $\lambda \notin K$ , т.е.  $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V \rightarrow \text{базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[V, e]{V_{\mathbb{C}}, v} A \xleftrightarrow[V_{\mathbb{C}}, v]{V, e} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda - \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda - \text{корень } \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена

$$\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Отсюда  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$  – корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

**Замечание**

Получаем второй способ получения С.Ч.  $\mathcal{A}$

$$m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t), \phi_{\lambda}(t) :=$$

$$\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\deg \phi = m = \sum_{\lambda} m(\lambda)$$

**Определение**

$I_{\lambda} := \{p \in P_{m-1} : p \text{ делится на } \phi_{\lambda}\}$  – главный идеал, порождающий многочлен  $\phi_{\lambda}$

$I_{\lambda}$  – линейное подпространство  $P_{m-1}$

$$I_{\lambda} \ni p(t) = a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$m - 1 \geq \deg p = \deg a_{\lambda} + \deg \phi_{\lambda} = \deg a_{\lambda} + m - m_{\lambda}$$

$$\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$$

$$I_{\lambda} \cong P_{m(\lambda)-1}$$

$$p \leftrightarrow a_{\lambda}$$

$$\dim I_{\lambda} = m(\lambda)$$

**Теорема**

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

**Доказательство**

1. Проверим, что  $I_{\lambda}$  дизъюнкты

$$0 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t) \underbrace{\phi_{\lambda}(t)}_{\text{не делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} a_{\mu}(t) \phi_{\mu}(t)}_{\text{делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}}$$

Отсюда  $a_{\lambda}(t)$  делится на  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ , но  $\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$

Тогда  $a_{\lambda}(t) = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda}(t) \equiv 0 \Rightarrow$  дизъюнкты

$$\begin{aligned}
2. \quad & \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m \\
& \dim \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \\
& \text{Отсюда } P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}
\end{aligned}$$

### Следствие

$$\forall p \in P_{m-1} \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$$

В частности, для  $p \equiv 1 \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, 1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$  — полиномиальное

разложение единицы (порожденное многочленом  $\phi$ )

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t)\phi_{\lambda}(t)$$

### Замечание

1.  $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_{\lambda}p_{\mu}$  делится на  $\phi$

#### Доказательство

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)$$

$$p_{\mu}(t) = a_{\mu}\phi_{\mu}(t)$$

$$p_{\lambda}(t)p_{\mu}(t) = a_{\lambda}(t)a_{\mu}(t)\phi_{\lambda}(t)\phi_{\mu}(t) = b(t)\phi(t)$$

2. Пусть все корни  $\phi$  взаимно-простые, т.е.  $\forall \lambda m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\deg a_{\lambda}(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$$

$$\text{Отсюда } a_{\lambda}(t) = \text{const}$$

### Теорема Лагранжа

Пусть все корни  $\phi(t)$  взаимно простые

$$\text{Т.е. } \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \quad \phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\text{Тогда } \forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$(a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$$

#### Доказательство

$$\exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p(t) = \sum_{\lambda} \underbrace{a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)}_{\phi_{\lambda}(t) \in I_{\lambda}}$$

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = a_{\lambda} \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi_{\lambda}(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu) = (t - \lambda) \underbrace{\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)}_{\phi_{\lambda}(t)}$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\xi \neq \mu} (t - \xi)$$

$$\phi'(\lambda) = \prod_{\xi \neq \lambda} (\lambda - \xi) = \phi_{\lambda}(\lambda)$$

Отсюда  $a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

### Следствие

Пусть  $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Тогда  $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow p(t) = t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

### Доказательство

$$1 = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$$

Пусть  $\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Построим полиномиальное разложение 1, порождающее многочлен  $\phi$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \underbrace{p_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\rho\text{- спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \text{ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)}$$

**Спектральный оператор действует не на собственное подпространство**

---

### Свойства

Пусть  $\lambda \neq \mu$

Проверим, что  $\rho_{\lambda} \rho_{\mu} = 0$

$$\rho_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\rho_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = a_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

$$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = 0$$

Если  $\lambda$  единственный корень  $\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$$

Если все корни взаимно простые:

$$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$$

По следствию из т. Лагранжа:

$$\epsilon = \sum_{\lambda} p_\lambda$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

Далее покажем, что  $p_\lambda$  – проекторы на  $V_\lambda$ , т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с

Т.е.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.

**Определение**

$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$  называется корневым подпространством  $\mathcal{A}$

$\lambda$  – СЧ  $\mathcal{A}$

Очевидно, что  $V_\lambda \subset K_\lambda$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

**Теорема о корневом подпространстве**

1.  $K_\lambda$  – инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

$$2. \text{Im } \rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V)$$

$$3. (t - \lambda)^{m(\lambda)} \text{ минимальный многочлен для } \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

**Доказательство**

$$1. x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \mathcal{A} x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} x = 0$$

перестановочные, т.к. многочлены

$$\text{Отсюда } \mathcal{A} x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{k-1}$$

$$2. \forall x \in V \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\text{Im } \rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A}) x}_{\phi(\mathcal{A})=0} =$$

$\mathbb{O}$

Отсюда  $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда  $\text{Im } \rho_\lambda \subset K_\lambda$

**Обратно**

$x \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть  $\mu \neq \lambda$

$$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = \mathbb{O}$$

$$x = \epsilon x = \sum_{\mu} \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \text{Im } \rho_\lambda$$

Отсюда  $K_\lambda \subset \text{Im } \rho_\lambda$

$$3. \mathcal{B} = \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

Проверим, что  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен  
 $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – аннулятор  $\mathcal{B}$

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть  $(t - \lambda)^k$  – минимальный многочлен,  $k < m(\lambda)$

$$\phi_1(t) := (t - \lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg \phi_1 \leq \deg \phi$$

Покажем, что  $\phi_1$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V = \bigoplus_{\mu} K_{\mu} v = \sum_{\mu} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} - \text{раскладывается единственным об-}$$

разом

$$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum_{\mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} = \sum_{\mu \neq \lambda} (\mathcal{A} -$$

$$\lambda\epsilon)^k b_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_{\mu} + (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) v_{\lambda} = \mathbb{O}$$

Отсюда  $\phi_1$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем степени меньше, чем  $\phi$ , что противоречит минимальности  $\phi$

Отсюда  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен  $\mathcal{B}$

**Следствие 1**

$\forall \lambda \ m(\lambda) \leq \dim K_{\lambda}$  (очевидно из п.3 теоремы)

**Следствие 2**

$\mathcal{A}$  – о.п.с  $\Leftrightarrow \forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$



Пусть  $\phi(t) := \prod_{\lambda - \text{СЧ}} (t - \lambda)$

Очевидно аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем минимальный

$\forall v \in V \ v = \sum_{\lambda} \underbrace{v_{\lambda}}_{\in V_{\lambda}}$  – раскладывается единственным образом

$$\phi(\mathcal{A}) = \prod_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \underbrace{v_{\mu}}_{\in V_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \epsilon)} = \prod_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) (\mathcal{A} - \mu \epsilon) v_{\mu} = 0$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\forall \lambda \ K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^1 = V_{\lambda}$$

$$\text{Отсюда } \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} - \text{о.п.с.}$$

## 1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

**Определение**

$\mathcal{B} \in \text{End}(V)$  называется *нильпотентным*, если  $\chi_{\mathcal{B}} = t^{\nu}, \nu \geq 1$

$\nu$  – индекс нильпотентности ( $\nu \leq n$ )

(Т.е.  $\mathcal{B}^{\nu} = 0$ )

**Теорема (разложение Жордана)**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\exists \mathcal{D}$  – оператор простой структуры  $\in \text{End}(V)$ ,  $\mathcal{B}$  нильпотентный  $\in \text{End}(V)$  :

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ , причем  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$

**Доказательство**

$\phi(t)$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A}$  (все корни  $\in K$ )

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}$$

Проверим, что  $\mathcal{D}$  – о.п.с.

Достаточно убедиться, что  $\lambda$  – СЧ  $\mathcal{D}$ ,  $\text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$  – собственное подпространство для  $\mathcal{D}$

Пусть  $v_{\lambda} \in \text{Im } \rho_{\lambda}$

$$\mathcal{D}v_\lambda = \sum_{\mu} \mu \rho_\mu \underbrace{v_\lambda}_{\substack{\in \text{Im } \rho_\lambda \\ \mu \neq \lambda \Rightarrow \dots = 0}} = \lambda \rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda - \text{с.ч. } \mathcal{D}$$

$$V = \bigoplus_{\mu} \text{Im } \rho_\mu - \text{дизъюнкты}$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_\lambda \subset V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } \rho_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda} V_\lambda^{\mathcal{D}} \subset V$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

$$\mathcal{D} - \text{о.п.с.}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda^{\mathcal{D}}$$

$$D = \sum_{\lambda} \rho_\lambda - \text{спектральное разложение } \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\nu := \max_{\lambda} m(\lambda)$$

$$\text{Покажем, что } \mathcal{B}^\nu = \mathbb{O}$$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{D})^\nu = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda)^\nu = (\mathcal{A} \sum_{\lambda} \rho_\lambda - \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda)^\nu = \left( \sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \rho_\lambda \right)^\nu =$$

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^\nu \rho_\lambda = \sum_{\lambda} b_\lambda(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) \left( \sum_{\mu} \mu \rho_\mu \right) = \left( \sum_{\mu} \mu \rho_\mu \right) (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) = \mathcal{D}\mathcal{B}$$

**Теорема (единственность разложения Жордана)**

Разложение Жордана  $\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{D}}_{\text{о.п.с.}} + \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{нильпот.}}$  возможно единственным образом

**Доказательство**

$$\text{Пусть } \mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{D}'}_{\text{о.п.с.}} + \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{нильпот.}}$$

$$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_\mu - \text{спектральное разложение}$$

Достаточно доказать, что

$$1. \text{ множество } \mu \text{ с.ч. } \mathcal{D}' \text{ совпадает с множеством с.ч. } \mathcal{A}$$

$$2. \text{ Im } Q_\lambda = K_\lambda(D = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda, \text{Im } \rho_\lambda = K_\lambda) \\ \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$$

$$3. \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$$

$$(\mathcal{A} - \mu\epsilon)Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon\right)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

Покажем, что  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$$\exists \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)Q_\lambda C Q_\mu = \lambda Q_\lambda C Q_\mu - Q_\lambda C \mu Q_\mu = Q_\lambda D' C Q_\mu - Q_\lambda C D' Q_\mu = Q_\lambda (D' C - C D') Q_\mu = 0$$

Отсюда  $Q_\lambda C Q_\mu = 0 = Q_\mu C Q_\lambda, \lambda \neq \mu$

$$\sum_{\lambda} Q_\lambda C Q_\mu = \sum_{\mu} Q_\lambda C Q_\mu$$

При  $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

Пусть  $m(\mu)$  – минимальное  $k : (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{m(\mu)} = 0$

Такой  $k$  найдется, т.к.  $\mathcal{C}$  нильпотентный и при каком-то  $k$  дает  $= 0$

$$\psi_\mu(t) = (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\forall x \in \text{Im } Q_\mu \quad \psi_\mu(\mathcal{A})x = 0$$

Тогда  $\psi_\mu(\mathcal{A})$  – минимальный аннулятор элементов  $\text{Im } Q_\mu$

$\phi$  – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и  $\text{Im } Q_\mu$

Тогда  $\phi$  делится на  $\psi_\mu$

Тогда  $\forall \mu \quad \mu$  – корень  $\phi$

Рассмотрим  $\psi = \prod_{\mu} \psi_\mu(t)$ . Покажем, что это аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{\mu} \underbrace{v_\mu}_{\in \text{Im } Q_\mu}$$

$$\psi(\mathcal{A})v = \sum_{\xi} \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum_{\xi} b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = 0$$

Отсюда  $\psi$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

Тогда  $\psi$  делится на  $\phi$

Т.о.  $\psi \equiv \phi$

Докажем пункт 2

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = 0$$

$$\text{Im } Q_\lambda \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } Q_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

$$\text{Im } Q_\lambda = K_\lambda = \text{Im } p_\lambda$$

**Теорема 3**

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  – разложение Жордана

$$\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{D} = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}, \nu = \max m(\lambda)$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$  – попарно перестановочные

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\text{Im } p_{\lambda} = K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = (\det \mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} = \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu}$$

$$t \in K, (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} - t^{\nu} \mathcal{B}^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

$$\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})}_{\text{не зависит от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$$

$$\text{Отсюда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \text{ и } \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

не зависят от  $t$

$$\text{Тогда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - \mathcal{B}) = \det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)$$

$$\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1})$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$$

$$\text{Отсюда } \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$$

**Следствие 1**

$$\det \mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0) = \det \mathcal{D}$$

**Следствие 2**

$$\dim K_{\lambda} = \alpha(\lambda)$$

**Доказательство**

$\alpha(\lambda)$  – кратность корня в  $\chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow$  в  $\chi_{\mathcal{D}}$ . А т.к.  $\mathcal{D}$  – о.п.с., то  $\dim K_{\lambda}^{\mathcal{D}} = \dim V_{\lambda}^{\mathcal{D}} = \alpha(\lambda)$

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис.

### Функция от матрицы

Пусть все корни  $\chi(t) \in K$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}$$

$$K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

Построим в каждом  $K_\lambda$  такой базис, что матрица оператора в нем будет иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть  $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть  $K_j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{B}^r = \text{Ker } \mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \text{rg } \mathcal{B}^r + \dim K_r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда  $\text{rg } \mathcal{B}^r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1}$

$\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} \subset \text{Im } \mathcal{B}^r$

Т.о.  $\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \text{Im } \mathcal{B}^r$

Тогда  $\text{Im } \mathcal{B}^r = \text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{B}^m = \mathbb{O}$ , что противоречит минимальности  $m$

Рассмотрим  $K_1 \dots K_m$

Найдем  $j_m$  – компоненту, которая лежит в  $K_m$ , но не лежит в  $K_{m-1}$

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1} \quad j_r := \mathcal{B} j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что  $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \text{Ker } \mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B} j_r$

$\mathcal{B}^{r-1} j_{r-1} = \mathcal{B}^r j_r = \mathbb{O}$

Отсюда  $j_{r-1} \in K_{r-1} = \text{Ker } \mathcal{B}^{r-1}$

$\mathcal{B} j_1 = \mathbb{O}$

$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$  – циклический базис, порожденный вектором  $j_m$

Далее повторяем это для всех векторов  $K_m, K_{m-1}, \dots$

Максимальная длина циклического базиса, порожденного  $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$  – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора (фундамент башни) – вектора  $j_m$

Крыша башни – вектора  $j_1$

Крыша башни – собственное подпространство

Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу

Если  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то  $V_\lambda = K_\lambda$ , то замок будет состоять из одной башни высоты 1

$K = K_\lambda = \text{span}(\dots, j_1, j_2, \dots, j_m, \dots)$  – линейная оболочка всех векторов всех башен

$$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$$

$$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)j_{r+1}$$

$$\mathcal{A}j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}j_1 &= \lambda j_1 \\ \mathcal{A}j_2 &= j_1 + \lambda j_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}j_m &= j_{m-1} + \lambda j_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана}$$

$m$ -ого порядка (блок нижнего уровня)

Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера  $m$

Рассмотрим теперь блочную матрицу  $\text{diag}(\underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \dots, \underbrace{J_m, \dots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$

– блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству  $K_\lambda$

Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты

Объединим все блоки верхнего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу

Получим жорданов базис пространства  $V$

Матрица  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы

$$T_{e \rightarrow j} = T = (\dots, j_1, \dots, j_m, \dots)$$

$$T^{-1}AT = J$$

$$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$$

**Обоснование алгоритма**

Пусть  $\mathcal{B}K = \text{Im } \mathcal{B}$

$$Z_0 = \mathcal{B}K$$

$$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \dots m$$

$$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$$

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_m$$

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1 &\subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1 \\
\overline{K}_2 &\subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2 \\
\overline{K}_r &\subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K \\
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1) \\
\overline{K}_j &- \text{ опорные подпространства}
\end{aligned}$$

**Теорема**

$$1 \leq r \leq m$$

$$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$$

**Доказательство**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1)$$

$$\forall x \in K : \exists ! (x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \dots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^m \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \text{Ker } \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^r \left( \underbrace{\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j}}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} + \mathcal{B}x' \right) &= 0 \\
\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' &= \sum_{j=1}^m x_j + \mathcal{B}y'
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности  $\overline{K}_j$  и  $\mathcal{B}K \forall j x_j = 0$   
 $0 + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$  – дизъюнктность

$$\begin{aligned}
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \\
\mathcal{B}K &= \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K \\
&\vdots \\
\mathcal{B}^{m-1} K &= \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=0}
\end{aligned}$$

Отсюда следствие

**Следствие**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$$

Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & \overline{K}_m & \\
& & & & & \overline{\mathcal{B}}K_m & \\
& & & & & \vdots & \\
& & \ddots & & \ddots & & \\
& & \overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m & \\
\overline{K}_1 & \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m & & 
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \text{Ker } \mathcal{B} = V_\lambda$$

$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset, \text{ то } J_r = \overline{K}_r \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$$

$\overline{K}_r$  – основание башни (опорное пространство, порожденное  $J_r$ )

$$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m \text{ – основание (1 этаж – крыша)}$$

Верхние клетки каждого этажа – основание

$$l\text{-ый этаж: } \overline{K}_l \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$$

$$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \emptyset, j = 0 \dots m-l$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

Первые  $j$  этажей соответствуют  $K_j$

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

**Теорема (о размерности башни)**

Все этажи башни имеют одинаковую размерность  $d_r = \dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \dots r-1$

**Доказательство**

Рассмотрим  $\mathcal{B}^j$  (очевидно, что  $\mathcal{B}^j$  – эндоморфизм)

Докажем, что  $\mathcal{B}^j$  – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е.  $\dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

$$\text{Пусть } x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \emptyset$$

$$\text{Тогда } x \in \text{Ker } \mathcal{B}^j = K^j$$

$$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \dots r-1$$

$$K_1, \dots, K_{r-1} \text{ дизъюнкты с } \overline{K}_r$$

$$\text{Т.о. } x = \emptyset$$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

**Следствие**

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^m d_r$$



$$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum_{r=1}^m r d_r$$

**Следствие 2 (теорема Фробениуса)**

$\forall r = 1 \dots m \ d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$   
(при  $r = m \ d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$ )

**Доказательство**

$$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$$

$$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$$

$$\rho_j = d_{j+1} + \dots + d_m + \rho_{j+1}$$

$$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \dots + d_m$$

$$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$d_1 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$\vdots$

$$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$$

$$\text{Отсюда } d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$$

**Замечание**

На практике удобнее

$$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$$

Рассмотрим башню

$$\dim \overline{K}_r = d_r = d$$

$$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \dots, g_d)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \mathcal{B} \overline{K}_r & \mathcal{B} g_1 & \mathcal{B} g_2 & \dots & \mathcal{B} g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1} \overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1} g_1 & \mathcal{B}^{r-1} g_2 & \dots & \mathcal{B}^{r-1} g_d \end{array} \quad \mathcal{B}^j - \text{изоморфизм, т.е. базис пе-}$$

реходит в базис

$\mathcal{B}^j g_1 \dots \mathcal{B}^j g_d$  – базис  $\mathcal{B}^j \overline{K}^r$  – циклический базис

$$\text{Тогда } J_r = \bigoplus_{i=1}^d \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i)$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda \epsilon) \mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow J_r - \text{клетка Жордана размерности } r \times r - \\ \text{в цикл. базисе} \\ \text{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i, \dots, \mathcal{B}g_i, g_i) \\ \text{блок нижнего уровня} \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\underbrace{J_r(\lambda), \dots, J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda) \\ J_i \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda), \dots, \mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda) \\ K = \bigoplus_{r=1}^m J_r \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J} \\
// \text{todo 13:11 16.03}
\end{array}$$

### 1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

$$\sqcap T(j_1, \dots, j_n), A = T \mathcal{J} T^{-1}$$

Пусть  $\mathcal{J} = \text{diag}(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$  Тогда  $\mathcal{J}^k = \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$$A^k = T \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k) T^{-1}$$

$$f(A) = T \text{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)), \dots, f(\mathcal{J}(\lambda_n))) T^{-1}$$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r \times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } J_r^k &= (\lambda E_{r \times r} + I_r)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + \\ & C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ // \text{todo 23.03 10:27} \end{aligned}$$

## 2 Черная магия

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{Отсюда } (\ln |y|)' = \frac{y'}{y}$$

$$y' = y(\ln |y|)' \text{ (удобно)}$$

## 3 Тензоры

### 3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

$V$  – линейное пространство над  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

Линейная функция  $f : V \rightarrow K$  называется *линейной формой* (линейным функционалом)

Т.е.  $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$

### Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор

2.  $A_{n \times n}, f : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$   
 $f(A) = \text{tr } A$

3.  $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$

Пусть  $f^j = P_n \rightarrow \mathbb{R}, f^j(p) = \frac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$

Тогда  $f^0, f^1, \dots$  – линейная форма

4.  $f : \underbrace{C}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\delta(f) := f(0)$  –  $\delta$ -функция Дирака

$\delta(f)$  – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$

$V^* = \{f : V \rightarrow K, f \text{ – линейная форма}\}$

$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$

$\forall f \in V^* (-f) \in V^*$

Тогда  $V^*$  – линейное пространство над полем  $K$

$V^*$  – сопряженное (дуальное) к  $V$

Вспоминаем правило Эйнштейна

Выражение  $\alpha^i \beta_i := \sum_i \alpha_i \beta_i$

иначе:  $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$

$\forall x \in V \quad f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$

$a := f(e_i)$  называется коэффициентами линейной формы  $f$

Тогда  $f(x) = x^i a_i - f$  полностью описывается значениями на базисных элементах

Тогда  $f \leftrightarrow a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  – зависит от выбора базиса

Сопоставление – изоморфизм

### Факт

*Естественный изоморфизм* – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай

$V^* \cong K_n(K^n)$  – пространство  $n$ -мерных строк

**Определение**

$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$

$\forall x \in V \omega^i(x) = x_i$  – координатные функции

(очевидно, что  $\omega^i \in V^*, \omega^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$ )

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{если } i=j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

**Доказательство**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – линейно независимые

$$\alpha_i \omega^i = 0$$

$$\alpha_i \in K$$

$$j = 1 \dots n \quad \alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

$$\dim V^* = n \Rightarrow \text{базис}$$

**Следствие**

$a_i$  – координаты  $f$  в базисе  $\omega^1 \dots \omega^n$

**Доказательство**

$$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$$

**Определение**

$\omega = (\omega^1 \dots \omega^n)$  называется *сопряженным (дуальным)* базисом к базису  $e$  пространства  $V$

Вопрос: есть другой базис в  $V^*$ . Будет ли он сопряженным к некоторому базису  $V$

**Теорема**

$\omega'^1, \dots, \omega'^n$  – базис  $V^*$

Тогда  $\exists e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$  такой, что  $\omega'$  сопряжен с  $e'$

**Доказательство**

Пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$

Базис  $V$   $\omega^1, \dots, \omega^n$  сопряжен с  $e$

$$\omega'^1, \dots, \omega'^n \text{ – базис } V^* \Rightarrow (\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = \underbrace{T_{\omega \rightarrow \omega'}^T}_{=: S_{\omega \rightarrow \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис  $e'$

$$T_{e \rightarrow e'} = S^{-1} = T$$

$$(e'_1 \dots e'_n) := (e_1 \dots e_n) T - \text{тоже базис по определению}$$

Покажем, что  $\omega'$  сопряжен к  $e'$ , т.е.  $\omega'^i$  – координатные функции по отношению к  $e'$

$$\text{Пусть } s_j^i = s_{ij}, t_j^i = t_{ij}$$

$$\forall x \in V \quad \omega'^i(x) = s_k^i \omega^k(x) = s_k^i x^k = \underbrace{s_k^i t_j^k}_{(ST)_{j= \delta_j^i}^i} x'^j = x'^i$$

Отсюда  $\omega'^i$  – координатная функция  $\Rightarrow$  базис сопряженный

### Замечание

Вообще говоря, базис  $e'$  существует и единственный (очевидно из доказательства)

### Следствие

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$$

$$\text{Тогда } a' = aT$$

$$T = S^{-1} = T_{e \rightarrow e'}$$

$$x' = Sx$$

### Доказательство

$$X' = SX \text{ очевидно } (X = TX' = S^{-1}X')$$

$$(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$a^T = T_{\omega \rightarrow \omega'}(a')^T \quad a = a' T_{\omega \rightarrow \omega'}^T = a' S \Leftrightarrow a' = a S^{-1} a T$$

### Определение

Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону (т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным (согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*

Элементы  $V^*$  – это ковекторы (линейная форма  $\equiv$  ковектор)

В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, противоположному (т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контрвариантным* или про-

сто вектором

Элементы  $V$  – контрвариантные векторы

Принято писать индекс координаты контрвектора сверху, а ко вектора – снизу

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = x^i a'_i = s_k^i x^k a_m t_i^m = \underbrace{t_i^m s_k^i}_{\delta_k^m} x^k a_m = x^k a_k$$

Т.о. форма записи  $f$  – инвариант относительно замены базиса

### Определение

$$V^{**} = (V^*)^*$$

$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$  – можем построить изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$

### Теорема 3 (естественный изоморфизм $V$ и $V^{**}$ )

Вместо обозначения " $x$ " буду использовать  $\langle x \rangle$

Пусть  $\langle \cdot \rangle : V \rightarrow V^{**} : \langle x \rangle(f) = f(x)$

Отсюда  $x \leftrightarrow \langle x \rangle$

$$V \cong V^{**}$$

### Доказательство

$$\forall f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K \quad \langle x \rangle(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = \langle x \rangle(f_1) + \lambda \langle x \rangle(f_2)$$

Отсюда  $\langle x \rangle \in (V^*)^*$

Покажем, что  $V$  линейно вложено в  $V^{**}$ , т.е.  $x \in V \leftrightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$

//todo 12:00 23.03

Покажем, что базис  $V$   $e_1, \dots, e_n$  перейдет в базис  $V^{**}$

$$e_j \rightarrow \langle e_j \rangle$$

$\forall f \in V^* \langle e_j \rangle(f) = f(e_j) = a_j$  – координата  $f$  в базисе  $\omega^1, \dots, \omega_n$ , сопр. с  $e$

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – координатная функция в пространстве  $V^*$  относительно  $\omega^1, \dots, \omega^n$

Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – базис  $V^{**}$

Базис  $V$   $e_1, \dots, e_n \leftrightarrow$  базис  $V^{**}$   $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$

Т.о. отображение линейно, то изоморфизм

### Замечание

1. принято отождествлять элементы  $V$  и  $V^{**}$  с помощью изоморфизма, описанного в теореме 3

Поэтому  $\langle \rangle$  не пишут

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = a_i x^i = f(e_i) x^i = e_i(f) x^i = x(f)$$

$$a_i = f(e_i)$$

$$x^i = x(\omega^i)$$

2.  $\omega^i(e_j) = \delta_j^i = e_j(\omega^i)$   
 Как найти на практике?  
 $e_1, \dots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$  – столбцы

$$w^i(e_j) = \underbrace{(\dots)}_a \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_x = \delta_j^i$$

$$\text{Отсюда } \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}}_{S=T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}}_T = E$$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса  
 дуальны

$\omega$  сопряженный базис к  $e$

$e$  сопряженный базис к  $\omega$

(здесь подразумевается элементы  $V^{**}$ )

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$

$$\forall x \in V \exists ! x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}, x_{\lambda} \in V_{\lambda}$$

$$\rho_{\lambda} : V \rightarrow V, \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}, \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} = \epsilon$$

$$\forall x \in V \rho x := x_{\lambda}, \underbrace{\rho_{\lambda} \rho_{\mu}}_{\lambda \neq \mu} = 0$$

$v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$  = объединение базисов  $V_{\lambda}$

$$x = x^i v_i = \sum_{\lambda} \underbrace{\sum_{m_{\lambda}} x^{m_{\lambda}} v_{m_{\lambda}}}_{x_{\lambda}} = \omega^1, \dots, \omega^n - \text{сопряженный базис} =$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} \omega^{m_{\lambda}}(x) v_{m_{\lambda}}$$

$$\omega^{m_{\lambda}} \leftrightarrow (a_i^{m_{\lambda}})_i - \text{строка}$$

$$x \leftrightarrow X$$



$$\begin{aligned}
\omega^{m_\lambda}(x) &= a^{m_\lambda} X \\
v_{m_\lambda} &\leftrightarrow (V_{m_\lambda, i})_i - \text{столбец} \\
x &= \sum_{\lambda} \sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda} a^{m_\lambda} X = \sum_{\lambda} \underbrace{\left( \sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda} a^{m_\lambda} \right)}_{\rho_\lambda} X = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m_\lambda} \underbrace{(a^{m_\lambda} x)}_{\omega^{m_\lambda}(x)} V_{m_\lambda} \right)
\end{aligned}$$

### 3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

#### Определение

$V, V^*$  – сопряженные линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K, p, q \geq 0$  – линейная по каждому аргументу

$f$  – тензор порядка  $(p, q)$  или  $p$  раз ковариантом,  $q$  раз контрвариантным

Множество таких функций обозначим  $T_{(p,q)}$

$p, q$  – валентности

$r = p + q$  – полная валентность/ранг тензора (не наш  $\text{rg}$ )

$f \in T_{p,0}$  – ковариантный тензор валентности  $p$

$f \in T_{0,q}$  – контрвариантный тензор валентности  $q$

$r = 0$  – тензор нулевого ранга.  $f = \text{const} \in K$

#### Пример

$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_{V}$  – столбец

$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$  – строка

$f(x, a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1,1)}$

$\mathbb{O}$  – нулевой тензор

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \nu^1, \dots, \nu^p \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^p) = 0$

$\forall f \in T_{(p,q)} \quad f \in T_{(p,q)}$

$T_{(p,q)}$  – линейное пространство

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

$e, \omega$  – сопряженные

Для  $\xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i$

Для  $\nu \in V^* \quad \nu = \nu_i \omega^i$

Тогда  $f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_q})$

$= \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^1, \dots, \omega^{i_q})$  – любой тензор определяется значениями на всевозможных наборах  $e_j, \omega^i$   
 $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$  – коэффициенты тензора  $f$  относительно базисов  $e, \omega$   
 $f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

### Определение

$S$  – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов  $s_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ , где  $i_k, j_m \in (1, \dots, n)$  называется  $p + q$ -мерной матрицей порядка  $n$

### Пример

$n = 3$ , трехмерная матрица

1.  $S^{ijk}$
2.  $S_k^{ij}$
3.  $S_{jk}^i$
4.  $S_{ijk}$

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q})$  – изоморфизм  
 $T_{(p,q)} \cong S_{(p+q)}$

### Правило записи элементов тензора в многомерной записи

В  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы  
 Для двумерных матриц:

1. строка
2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой

Запись:  $\left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$

Для четырехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой
4. срез

Запись: 
$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

//todo 11:59 30.03

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i = \xi^{ij} e_j^i$$

$$\xi^i = t_j^i \xi'^j$$

$$\forall \eta \in V^* \quad \eta = \eta_i \omega^i = \eta'_j \omega'^j$$

$$\eta_i = s_i^j \eta'_j$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots$$

$$\dots \eta_{i_q}^q = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \xi_1^{u_1} \dots t_{u_p}^{j_p} \xi_p^{u_p} \cdot s_{i_1}^{r_1} \eta_{r_1}^1 \dots s_{i_q}^{r_q} \eta_{r_q}^1$$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

$$f(e'_{u_1}, \dots, e'_{u_p}, \omega'^{r_1}, \dots, \omega'^{r_q}) = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

Нижние индексы – ковариантные, т.к. при смене базиса соответствующая координата пересчитывается по ковариантному закону (т.е. через  $T$ )

Верхние индексы – контрвариантные

### Пример

$\forall x \in V \cong V^{**}, x$  – линейное отображение

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \alpha, x \in T_{(0,1)}$$

$$\alpha'^r = \alpha^i s_i^r$$

$$\alpha' = S\alpha \Rightarrow \alpha = T\alpha'$$

$\forall f \in V^*, f$  – линейное отображение

$$f \leftrightarrow a = (a_1 \quad \dots \quad a_n), f \in T_{(0,1)}$$

$$a'_u = a_j t_u^j$$

$$a' = aT \Rightarrow a = a'S$$

### Определение 2

Геометрический объект на линейном пространстве  $V$  над полем  $K$ , описываемый  $p + q$ -мерной матрицей размерности  $n (= \dim V)$  с элементами из поля  $K$ , которая при смене пространства  $V$  пересчитывается по формуле  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q}$ , где  $(t_j^i) = T_{e \rightarrow e'}$ ,  $S = T^{-1}$ , называется тензором типа  $(p, q)$  или  $p$  раз ковариантным и  $q$  раз контрвариантным

Пусть  $\mathbb{O}$  – нулевая матрица,  $-\alpha$  – противоположная матрица, задано умножение на скаляр и сложение

Докажем, что  $+$  и  $\lambda \cdot$  сохраняют свойство тензоров

$$\alpha, \beta \in T_{(p,q)}, \forall \lambda \in K$$

$$(\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} + \lambda\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$$

$$(\alpha + \lambda\beta)_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q} = (\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q} + \lambda\beta_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q} -$$

верно

## 3.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свойства тензоров

### Определение

$$\alpha \in T_{(p_1, q_1)}$$

$$\beta \in T_{(p_2, q_2)}$$

$$\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)}$$

$$\gamma_{j_1, \dots, j_{p_1+p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1+q_2}} = \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \beta_{j_{p_1+1}, \dots, j_{p_1+p_2}}^{i_{q_1+1}, \dots, i_{q_1+q_2}}$$

### Доказательство корректности произведения

$$\gamma_{u_1 \dots u_{p_1+p_2}}^{r_1 \dots r_{q_1+q_2}} = \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1+p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1+q_2}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_{p_1+p_2}}^{j_{p_1+p_2}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_{q_1+q_2}}^{r_{q_1+q_2}}$$

$$= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_{q_1}}^{r_{q_1}} \beta_{j_{p_1+1}, \dots, j_{p_1+p_2}}^{i_{q_1+1}, \dots, i_{q_1+q_2}} t_{u_{p_1+1}}^{j_{p_1+1}} \dots t_{u_{p_1+p_2}}^{j_{p_1+p_2}} s_{i_{q_1+1}}^{r_{q_1+1}} \dots s_{i_{q_1+q_2}}^{r_{q_1+q_2}}$$

$$= \alpha_{u_1, \dots, u_{p_1}}^{r_1, \dots, r_{q_1}} \beta_{u_{p_1+1}, \dots, u_{p_1+p_2}}^{r_{q_1+1}, \dots, r_{q_1+q_2}}$$

### Замечание

1.  $\lambda \in K \leftrightarrow \lambda \in T_{(0,0)}$   
 $\forall \alpha \in T_{(p,q)} \quad \lambda \otimes \alpha = \lambda \alpha$
2.  $\oplus$  ассоциативно, не коммутативно, дистрибутивно по сложению

$\alpha \in T_{(p_1, q_1)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \rightarrow K$  – полилинейная

$\beta \in T_{(p_2, q_2)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K$  – полилинейная

Тогда  $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2, q_1+q_2)} \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow R$

$\forall \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$

$\forall \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$

$$\begin{aligned} & t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) \\ &= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \theta_{k_1}^{q_2} \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2} \\ &= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \theta_{k_1}^{q_2} \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2} \\ &= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2}) \end{aligned}$$

Отсюда  $\gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow t = fg$

В частности:

$$\forall f^1, \dots, f^p \in V^*, g_1, \dots, g_q \in V \quad f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\eta_1) \dots f^p(\eta_p) g_1(\eta^n) \dots g_q(\eta^q)$$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

$$\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$$

**Теорема о базисе пространства тензоров**

Набор тензоров  $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$  по всем возможным  $i, j$  – базис  $T_{(p, q)}$

**Доказательство**

$\omega^j \in T_{(1, 0)}, e_i \in T_{(0, 1)}$

$\{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\}$  – набор из  $n^{p+q}$

Система порождающая:

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$

$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$

$$\forall f \in T_{(p, q)} \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q}_{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

$$\text{Отсюда } f = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\text{в будущем: координата}} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

Система линейно независимая

Рассмотрим  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

Применим к  $e_{u_1}, \dots, e_{u_p} \in V, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q} \in V^*$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}_{\delta_{u_1}^{j_1} \dots \delta_{u_p}^{j_p} \delta_{i_1}^{r_1} \dots \delta_{i_q}^{r_q}}(e_{u_1}, \dots, e_{u_p}, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q}) = 0$$

Отсюда  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = 0$

Тогда все  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  нули  $\Rightarrow$  линейно независимые

**Следствие**

$$\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}$$

**Замечание**

//todo 14:20 30.03

**Определение**

Пусть  $\alpha \in T(p, q), p, q \neq 0$

Тензор  $\beta \in T_{p-1, q-1}$  называется сверткой тензора  $\alpha$ , если

$$\beta_{j_1, \dots, j_{p-1}}^{i_1, \dots, i_{q-1}} := \sum_{\kappa} \alpha_{j_1, \dots, j_{p-1}, \kappa}^{i_1, \dots, i_{q-1}, \kappa} \quad \text{где } \hat{i}_k - \text{отсутствие } i_k$$

**Доказательство корректности определения**

$$\begin{aligned} \beta_{j_1, \dots, j_{p-1}}^{i_1, \dots, i_{q-1}} &= \alpha_{u_1, \dots, u_{p-1}, \kappa}^{r_1, \dots, r_{q-1}, \kappa} = \alpha_{u_1, \dots, u_{p-1}, \kappa}^{r_1, \dots, r_{q-1}, \kappa} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_{p-1}} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_{q-1}}^{r_{q-1}} s_{i_q}^{r_q} \\ t_{\kappa}^{j_p} s_{i_q}^{r_q} &= \delta_{i_q}^{j_p} \\ \beta_{j_1, \dots, j_{p-1}}^{i_1, \dots, i_{q-1}} &= \underbrace{\alpha_{u_1, \dots, u_{p-1}, \kappa}^{r_1, \dots, r_{q-1}, \kappa}}_{\beta_{j_1, \dots, j_{p-1}}^{i_1, \dots, i_{q-1}}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_{p-1}} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_{q-1}}^{r_{q-1}} s_{i_q}^{r_q} \end{aligned}$$

Свертка может быть по нескольким парам индексов

Если в результате свертки получится тензор  $(0,0)$ , т.е. число, то свертка *полная*

### 3.4 Транспонирование тензоров. Кососимметричные и симметричные тензоры

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \rightsquigarrow A^T = B = (\beta_{ij}), \beta_{ij} = \alpha_{ji}$$

Обобщим операцию транспонирования

Пусть  $\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\alpha_{j_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  — зафиксируем все, кроме  $*$ ,  $\delta$

Т.о. мы извлекли из матрицы тензора слой — двумерную матрицу

Получили матрицу  $\tilde{\alpha}_{*\delta}$

Протранспонируем ее

$$\text{Т.о. } \beta_{j_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$$

### Определение

$\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\beta = \sigma(\alpha)$  называется тензором, полученным транспонированием тензора  $\alpha$  по перестановке  $\sigma$ , если  $\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_p}}^{i_1, \dots, i_q}$

### Замечание

Любая перестановка  $\sigma$  – конечное число транспозиций 2-х элементов

Заметим, что не любая многомерная матрица – тензор

Проверим, что  $\beta$  – тензор

### Корректность

Достаточно проверить для  $\sigma$  – транспозиции двух элементов

Возьмем  $\beta_{m_1, \dots, \underbrace{*}_{r\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\delta}_{l\text{-ая}}, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$

$$\beta_{m_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$$

Т.к.  $\alpha$  – тензор:

$$\alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_r, \dots, j_l, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\beta_{j_1, \dots, j_l, \dots, j_r, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}} t_{m_1}^{i_1} \dots t_{\delta}^{j_r} \dots t_*^{j_l} \dots t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_q}^{k_q}$$

Теперь посмотрим на операцию транспонирования с точки зрения полилинейной функции

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$$

$$\beta = \sigma(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) &= \beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q \\ &= \alpha_{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_p}}^{i_1, \dots, i_q} \xi_{\sigma_1}^{j_1} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q) \end{aligned}$$

### Замечание

1. Транспонирование тензора можно определить по аналогии по верхним индексам, если  $q \geq 2$
2. Тензоры можно транспонировать только по одному типу индексов: либо по верхним, либо по нижним, в отличие от произвольной многомерной матрицы
3. Мы будем работать только с нижними индексами, но все свойства и теоремы работают и для верхних индексов

### Свойства

1. Из определения очевидно, что  $\sigma$  – линейная операция  
 $\sigma(\alpha_1 + \lambda \alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda \sigma(\alpha_2)$

$$\begin{aligned}
2. \quad & \alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \tilde{\alpha} \in T_{(p,q)}, f^i \in V^*, \tilde{\alpha} \in T_{(0,q)} \\
& \text{Тогда } \forall \sigma : \beta = \sigma(\alpha) \forall \xi_i \in V \forall \eta^j \in V^* \beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \\
& \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q) \\
& = f^1(\xi_{\sigma_1}) \dots f^p(\xi_{\sigma_p}) \cdot \tilde{\alpha}(\eta^1, \dots, \eta^q) = f^{\sigma_1^{-1}}(\xi_1) \dots f^{\sigma_p^{-1}}(\xi_p) \alpha(\eta^1, \dots, \eta^q) \\
& \text{Отсюда } \beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \tilde{\alpha}
\end{aligned}$$

$\alpha$  – называется симметричным тензором, если  $\forall \sigma \sigma(\alpha) = \alpha$

$\alpha$  – кососимметричная (антисимметричная / альтернированная), если  $\forall \sigma \sigma(\alpha) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} \alpha$

Заметим, что симметричность  $\Leftrightarrow$  симметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

Заметим, что кососимметричность  $\Leftrightarrow$  кососимметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = -\alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

### Теорема

$\alpha$  кососимметричная  $\Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha(\dots, \mu, \dots, \mu, \dots, \nu^1, \dots) = 0 \Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha_{\dots, i, \dots, i, \dots} = 0$

### Доказательство

Смотри доказательство для полилинейной ассиметричной формы

### Примеры

$$\begin{aligned}
1. \quad & f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) : V_3^3 \rightarrow \mathbb{R} \\
& f \in T_{(3,0)} \\
& f - \text{кососимметричный тензор}
\end{aligned}$$

$$2. \quad \beta \in T_{(3,0)}, n = 3, \beta - \text{кососимметричная}$$

Тогда тензор имеет следующий вид

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), b = \beta(e_1, e_2, e_3)$$

$$3. \quad A = (\alpha_{ij}) \in T_{(2,0)}. \text{ Тогда симметричность и антисимметричность согласуется с свойствами матриц}$$

$$4. \quad (\alpha_{ijk}) \in T_{(3,0)}, n = 3$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} c & a & d & a & x & b & d & b & y \\ a & x & b & x & e & z & b & z & g \\ d & b & y & b & z & g & y & g & f \end{array} \right)$$



### 3.5 Операция sim и alt для тензоров

#### Определение

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{sim } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$  – симметрирование для тензора  $\alpha$  по

нижним индексам

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)$  – альтернирование для тензора

$\alpha$  по нижним индексам

#### Замечание

1. Т.к.  $\sigma$  – линейный оператор, то  $\text{sim}, \text{alt}$  – линейные
2. Для  $\alpha$  – симметричной  $\text{sim } \alpha = \alpha$   
Для  $\alpha$  – кососимметричной  $\text{alt } \alpha = \alpha$
3. Операции  $\text{sim}, \text{alt}$  можно проводить не по всем индексам. Тогда набор индексов, по которым проводится операция, заключается в круглые (для симметрирования) или квадратные (для альтернирования) скобки. Если какие-то индексы внутри скобок не участвуют, их выделяют вертикальными чертами
4. Очевидно, что можно определить аналогичные операции по верхним индексам
5. Пусть  $\gamma = \text{sim } \alpha$   
Тогда  $\forall \sigma \quad \gamma_{i_1, \dots, i_p} = \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$   
Пусть  $\gamma = \text{alt } \alpha$   
Тогда  $\forall \sigma \quad \gamma_{i_1, \dots, i_p} = (-1)^{\text{inv } \sigma} \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$

#### Теорема о перестановочности $\sigma$ и $\text{sim}, \text{alt}$

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \forall \sigma \quad \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{sim}(\alpha)) = \text{sim } \alpha$

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \forall \sigma \quad \text{alt}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{alt}(\alpha)) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$

#### Доказательство

Доказать проще, чем затежать

#### Следствие 1

$\forall \alpha \quad \text{sim } \alpha$  – симметричный,  $\text{alt } \alpha$  – кососимметричный

#### Доказательство

$\forall \alpha \quad \sigma(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$  – симметричный

$\forall \alpha \quad \sigma(\text{alt } \alpha) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$  – кососимметричный

### Следствие 2

$\alpha$  – симметричный  $\Leftrightarrow \alpha = \text{sim } \alpha$

$\alpha$  – кососимметричный  $\Leftrightarrow \alpha = \text{alt } \alpha$

### Следствие 3

$\text{sim}(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$

$\text{alt}(\text{alt } \alpha) = \text{alt } \alpha$

$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = 0$

$\text{alt}(\text{sim } \alpha) = 0$

### Доказательство

$$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = \text{sim}\left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \text{sim } \alpha \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma}}_{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} =$$

0

$\text{alt}(\text{sim}(\alpha))$  – аналогично

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}$  – симметрирование  $T$  по фиксированному набору

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}, T_{(p,q)}^{\text{кососим}}$  – линейные подпространства  $T_{(p,q)}$

Для перестановки  $(k, m)$  (транспозиция):

$$T_{(p,q)}^{\text{сим}} \oplus T_{(p,q)}^{\text{кососим}} = T_{(p,q)}$$

Свойства  $\text{sim}, \text{alt}$  сохраняются, если они производятся не по всем индексам

## 3.6 р-формы. Внешнее произведение р-формы

### Определение

$f$  – р-форма, если  $f \in T_{(p,0)}$ ,  $f$  – кососимметричный (или  $p = 1$ )

$f : V^p \rightarrow K$

$f \in V^*$  – 1-форма

$\underbrace{T_{(p,0)}^{\text{кососим}}}_{\Lambda^p V^*}$  – линейное подпространство  $T_{(p,0)}$

$\Lambda^p V^*$  – пространство р-форм

### Определение

$f$  –  $p_1$  – форма ( $f \in \Lambda^{p_1} V^*$ )

$g$  –  $p_2$  – форма ( $g \in \Lambda^{p_2} V^*$ )

$f \wedge g := \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{alt} \left( \underbrace{f \otimes g}_{\in T_{(p_1+p_2,0)}} \right) \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$  – внешнее произведение

## Свойства

1.  $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$   
В частности  $f, g \in \Lambda^1 V^*(V^*)$   
 $f \wedge g = -g \wedge f$   
 $f \wedge f = 0$

### Доказательство

$$\begin{aligned}
f &\in \Lambda^{p_1} V^* \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}) \\
g &\in \Lambda^{p_2} V^* \leftrightarrow \beta = (\beta_{j_2, \dots, j_{p_2}}) \\
f \otimes g &\leftrightarrow \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}} = \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \\
g \otimes f &\leftrightarrow \theta = \beta \otimes \alpha \leftrightarrow \theta_{m_1, \dots, m_{p_2}, j_1, \dots, j_{p_1}} = \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \\
\text{alt } f \otimes g &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} \sigma(\gamma) \\
\text{alt } g \otimes f &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\tau} \tau(\theta) \\
// \text{todo 13.04 13:12}
\end{aligned}$$

2.  $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$   
 $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$
3.  $(\lambda f) \wedge g = \lambda(f \wedge g) = f \wedge (\lambda g)$
4.  $f \wedge \underbrace{\mathbb{0}}_{p_1\text{-форма}} = \mathbb{0} \wedge f = \underbrace{\mathbb{0}}_{(p_1+p_2)\text{-форма}}$
5.  $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

### Доказательство

$$f \wedge g = \frac{1}{p_1! p_2!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g)$$

$$(f \wedge g) \wedge h = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{(p_1 + p_2)! p_1! p_2! p_3!} \text{alt} \left( \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right)$$

$$\text{Рассмотрим } \text{alt} \left( \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right) = \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt} \left( \underbrace{\sigma(f \otimes g) \otimes h}_{\tau(f \otimes g \otimes h)} \right) =$$

...

Возьмем  $\tau$  – перестановку такую, что первые  $p_1 + p_2$  индексов переставляются, а последние  $p_3$  индекса не меняются

$$(-1)^{\text{inv } \sigma} = (-1)^{\text{inv } \tau}$$

$$\dots = \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt}(f \otimes g \otimes h) = \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} 1 =$$

$$\begin{aligned}
& (p_1 + p_2)! \operatorname{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& (f \wedge g) \wedge h = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \operatorname{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& \text{Аналогично } f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \operatorname{alt}(f \otimes g \otimes h)
\end{aligned}$$

Пусть  $f^i \in V^* = \Lambda^1 V^*$  – 1-форма,  $j = 1 \dots p$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \frac{p!}{1! \dots 1!} \operatorname{alt}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = p! \operatorname{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = 2 \operatorname{alt}(\omega^i \otimes \omega^j) = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = -\omega^j \wedge \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega_i = 0$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^\kappa \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = -\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^\kappa \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^\kappa \wedge \dots \wedge \omega^\kappa \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = 0$$

**Теорема (о базисе пространства внешних форм)**

$\{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} : 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n\}$  – базис пространства  $\Lambda^p V^*$

**Доказательство**

$$\forall f \in \Lambda^p V^* \Leftrightarrow \begin{cases} f \in T_{p,0} \\ \operatorname{alt} f = f \end{cases}$$

$$f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}$$

$$\operatorname{alt} f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \operatorname{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p})$$

$$= \frac{\alpha_{j_1, \dots, j_p}}{p!} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{\sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_p}} \omega^{\sigma_{j_1}} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_{j_p}}$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{\sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_p}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$= \underbrace{\sum_{j_1 < \dots < j_p} \left( \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{\sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_p}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \right) \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}_{\beta_{j_1, \dots, j_p}} - \text{порождающая}$$

Существуют координаты р-формы  $f$  относительно базиса  $\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$ ,  $j_1 < \dots < j_p$

Проверим линейную независимость

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \underbrace{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}_{p! \operatorname{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p})} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \omega^{\sigma_{j_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma_{j_p}} \\
&\quad \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \omega^{\sigma_{j_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma_{j_p}}}_{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}
\end{aligned}$$

Т.к. базис  $T_{(p,0)}$ ,  $\forall \alpha_{j_1, \dots, j_p} = 0$

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = 0$$

Тогда линейно независимые

### Следствие 1

$$\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

### Следствие 2

$$\forall f \in \Lambda^p V^*$$

$$f = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}), j_1 < \dots < j_p$$

### Доказательство

Из доказательства теоремы:

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} = \alpha_{[j_1, \dots, j_p]}, j_1 < \dots < j_p$$

$$f = \text{alt } f \Rightarrow \alpha_{[j_1, \dots, j_p]} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}, \text{ т.к. } j_1 < \dots < j_p$$

### Теорема

$$f^i \in \Lambda^1 V^*, j = 1 \dots p-1 \text{ - формы}$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$$

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix}$$

$$f^j \leftrightarrow a^j = (a_1^j \dots a_p^j) \text{ - координатные строки в } V^* \text{ относительно } \omega^i$$

$$\xi_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix} \text{ - координаты в } V \text{ относительно } e_j$$

$$f^j(\xi_i) = a_k^j \xi_i^k = a^j \xi_i$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \dots \xi_p)$$

### Замечание

$$\text{Если } p = n: f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det A \det \xi$$

### Доказательство

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = p! \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f^1 \otimes \dots \otimes f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1}(\xi_1) \dots f^{\sigma_p}(\xi_p) = \det(f^i(\xi_j))$$

**Следствие 1**

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

**Следствие 2**

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}}_{\beta_{j_1, \dots, j_p} \text{ для } f^1 \wedge \dots \wedge f^p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

**Доказательство**

$$\beta_{j_1 < \dots < j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = (f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{vmatrix} f^1(e_{j_1}) & \dots & f^1(e_{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(e_{j_1}) & \dots & f^p(e_{j_p}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}, \text{ т.к. } a_j^i = f^i(e_j) \text{ по определению коэффициентов формы } f$$

В частности, при  $p = n$ :  $f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$

**Следствие 3**

$$\det \left( \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \quad \dots \quad \xi_p) \right) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

В частности, при  $p = n$ :  $\det(A\xi) = \det A \det \xi$

**Определение**

Пусть  $g \in T_{0,q}$ ,  $\text{alt } g = g$ :

$g$  называется *поливектор* ( $q$ -вектор)

Если  $q \in T_{(0,1)}$  —  $g$  — 1-вектор

Линейное пространство  $q$ -векторов  $\mathcal{V}^q V$

Аналог внешнего произведения:  $g_1 \in \mathcal{V}^{q_1} V, g_2 \in \mathcal{V}^{q_2} V, g_1 \vee g_2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{alt}(g_1 \otimes$

$g_2)$  — по верхним индексам

$\{e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_q}, i_1 < \dots < i_q\}$  — базис  $\mathcal{V}^q V$

Пусть  $p = q$   
 $\forall f^1, \dots, f^p \in V^*$   
 $V \cong V^{**} \forall \xi \in V \xi(f) = f(\xi)$   
 $\xi \in \mathcal{V}^1 V$

$$\xi_1 \vee \dots \vee \xi_p(f^1, \dots, f^p) = \begin{vmatrix} \xi_1(f^1) & \dots & \xi_p(f^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(f^p) & \dots & \xi_p(f^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} =$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

### 3.7 Евклидовы и унитарные пространства

#### 3.7.1 Скалярное и псевдоскалярное произведение. Евклидово и унитарное пространство. Норма в евклидовом и унитарном пространстве

##### Определение

Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (вещественное линейное пространство)

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется скалярным произведением, если

$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $(x, y) = (y, x)$  – симметричность
2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  – аддитивность по первому аргументу
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  – однородность по 1 аргументу
4.  $(x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

##### Следствие

Линейность по второму аргументу

$(V, (\cdot, \cdot))$  – вещественное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением – Евклидово пространство

##### Определение

Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{C}$

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется псевдоскалярным произведением, если

$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$

2.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$  – аддитивность по первому аргументу
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  – однородность по 1 аргументу
4.  $(x, x) = \overline{(x, x)} \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$   
 $(x, x) \geq 0$ , причем  $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

### Следствие

$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$  – аддитивность по второму аргументу  
 $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}(x, y)$

Вместе: полуторелинейность

$(\mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$  – унитарное пространство (псевдоевклидово)

### Замечание

Иногда будем называть псевдоскалярное пространство скалярным (читай контекст)

### Примеры

1.  $V_3, (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$
2.  $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$   
 $(x, y) := \sum x_i y_i$
3.  $\mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}$   
 $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$

### Определение

Норма  $\|\cdot\| : V \rightarrow K, V - V$  – линейное пространство над полем  $K$

1.  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$  – невырожденность
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  – однородность
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



### Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово/унитарное пространство

$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  – евклидова норма

Докажем аксиомы

1. Очевидно

$$2. \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda \bar{\lambda})(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$$

3. К.Б.Ш.

$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ , причем  $|(x, y)| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x, y$  линейно зависимые

**Доказательство**

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha} (x, x) + \alpha \bar{\beta} (x, y) + \bar{\alpha} \beta (y, x) + \beta \bar{\beta} (y, y) = \dots$$

Пусть  $\alpha := (y, y) \in \mathbb{R}$

$\beta := -(x, y) \in \mathbb{C}$

$$\dots = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 - \underbrace{(x, y)(x, y)}_{|(x, y)|^2} - (x, y)(y, x) + |(x, y)|^2) = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 -$$

$$(x, y)^2) \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Отсюда  $\|x\| \|y\| \geq |(x, y)|$

Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то левая часть 0

Если  $x, y \neq 0$ ,  $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$

$$\alpha, \beta \neq 0 \text{ Тогда } 0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{(\|y\|^2 \|x\|^2 - |(x, y)|^2)}_0 = 0$$

Тогда  $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \|\alpha x + \beta y\| = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \Leftrightarrow x, y$  линейно зависимые

Пусть  $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \alpha x + \beta y = 0$

$$\begin{cases} \underbrace{\alpha(x, x) + \beta(y, x)}_{\neq 0} = 0 & \Rightarrow \alpha \|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \underbrace{\beta(y, y)}_{\neq 0} = 0 & \Rightarrow \beta \|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \alpha \beta \|x\|^2 \|y\|^2 = \alpha \beta (y, x)(x, y) = |(x, y)|^2$$

**Доказательство выполнения аксиомы**

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}((x, y)) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = \\ &\leq \|x + y\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

### Определение

$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot))$

$\|x\|$  – длина вектора

$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$  – косинус угла между векторами

$|\cos \angle(x, y)| \leq 1$  – по КБШ

### 3.7.2 Процесс ортогональный Грама-Шмидта. О.Н.Б. (ортонормированный базис). Ортогональное дополнение

#### Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово/унитарное

$\forall x, y \in V$  называются ортогональными, если  $(x, y) = 0$

$\mathbb{O}$  ортогонален всем векторам

#### Определение

Система векторов  $v_1, \dots, v_m$  называется ортогональной, если вектора попарно ортогональны

Система векторов называется ортонормированными, если вектора попарно ортогональны и нормированы ( $\|v_i\| = 1$ )

#### Утверждение

Ненулевые  $v_1, \dots, v_m$  ортогональны  $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$  система линейно независимая

#### Доказательство

Пусть  $\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k = \mathbb{O}$

$$v_j \left( \sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \mathbb{O}$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \underbrace{v_j v_k}_{\mathbb{O} \text{ при } k \neq j} = \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\neq 0}$$

Тогда  $\forall i \alpha_i = 0$

Отсюда вектора линейно независимые

#### Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)

Любую систему векторов  $a_1, \dots, a_m$  можно заменить на систему ортого-

нальных векторов  $b_1, \dots, b_k$  таким образом, что  $\text{span}(a_1, \dots, a_m) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$ , причем  $k \leq m$ ,  $k = m \Leftrightarrow$  система линейно независимая

### Доказательство

1. Пусть  $a_1, \dots, a_m$  линейно независимые

Построим  $b$  индукционно:

(a) Возьмем  $a_1, a_2$

$$b_1 := a_1$$

$$b_2 := a_2 - c_1 a_1$$

$$c_1 : (b_2, b_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = (a_2, b_1) - c_1(a_1, a_1) \Leftrightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(a_1, a_1)}$$

$\text{span}(a_1, a_2) = \text{span}(b_1, b_2)$ , т.к.  $b_2$  линейно независим с  $a_1, a_2$

(b)  $a_1, \dots, a_k \rightarrow b_1, \dots, b_k$  — ортогональные

$$\underbrace{\text{span}(a_1, \dots, a_k)}_{\text{линейно независимый}} = \underbrace{\text{span}(b_1, \dots, b_k)}_{\text{попарно орт.}} \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

(c) Покажем для  $k+1$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k c_i b_i$$

$$c_i \text{ такой, чтобы } \forall i = 1 \dots k \ (b_{k+1}, b_i) = 0 \quad c_i := \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$b_{k+1} \in \text{span}(a_1, \dots, a_{k+1})$$

$$b_{k+1} \perp b_j, j = 1 \dots k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$b_{k+1} \text{ линейно независимый с } (a_1, \dots, a_k)$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \text{span}(b_1, \dots, b_{k+1})$$

2. Если  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависимые, предварительно выполним прополку  $a$

Если без прополки, то некоторые  $b_i$  будут 0

### Следствие 1

В  $(V, (\cdot, \cdot))$  всегда существует о.н.б.

### Доказательство

Применим Грама-Шмидта и нормируем

### Следствие 2

В  $(V, (\cdot, \cdot))$  любую ортонормированную систему можно дополнить до ортонормированного базиса

### Определение

$L \subset V$  – линейное подпространство

$L^\perp = \{y \in V : (x, y) = 0 \forall x \in L\}$  – ортогональное дополнение

### Свойства

1.  $L^\perp$  – линейное подпространство

#### Доказательство

$$\forall y_1, y_2 \in L^\perp, \lambda \in K, x \in L \quad (x, \lambda y_1 + y_2) = \underbrace{\bar{\lambda}(x, y_1)}_0 + \underbrace{(x, y_2)}_0$$

Отсюда  $\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$  – линейное подпространство

2.  $V = L \oplus L^\perp$

#### Доказательство

Докажем, что  $L, L^\perp$  – дизъюнктные

$y \in L \cap L^\perp \Rightarrow (y, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$  – дизъюнктные

Пусть  $L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$

Дополним  $a_1, \dots, a_k$  векторами  $a_{k+1}, \dots, a_n$  до базиса  $V$

Тогда  $V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

$$\forall a_{k+j} \quad (a_i, a_{k+j}) = 0$$

$$\text{Тогда } (a_i, \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j a_{k+j}) = 0$$

$$\text{Тогда } (\sum_{i=1}^k \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j}) = 0$$

Отсюда  $\text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n) \subset L^\perp$

$V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n), L, L^\perp$  – дизъюнктные

Тогда  $L^\perp = \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

Тогда  $V = L \oplus L^\perp$

3.  $(L^\perp)^\perp = L$

#### Доказательство

$$L \oplus L^\perp = V = L^\perp \oplus (L^\perp)^\perp$$

$$\forall x \in L, y \in L^\perp \quad (x, y) = 0 \Rightarrow x \in (L^\perp)^\perp \Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$$

Тогда  $L = L^\perp$

4.  $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$   
 $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

#### Доказательство

Докажем 1

Пусть  $y \in (L_1 + L_2)^\perp$

Тогда  $\forall \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2} \in L_1 + L_2 \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$

(a)  $x_2 = 0$

$\forall x_1 \in L_1 \quad (x_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L^\perp$

$(x_2, y) = 0$

Тогда  $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Отсюда  $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp$  Обратно:  $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

$\forall x_1 \quad (x_1, y) = 0$

$\forall x_2 \quad (x_2, y) = 0$

Отсюда  $(x_1 + x_2, y) = 0 \Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp$

$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp$

(b) Из предыдущего пункта

$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$

$L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$

5.  $\mathbb{O}^\perp = V, V^\perp = \mathbb{O}$

### 3.8 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы

$(V, (\cdot, \cdot))$

$e_1, \dots, e_n$  – базис

$\forall x, y \in V \quad x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$

Пусть  $g_{ij} = (e_i, e_j)$

$\Gamma = (g_{ij})$  – матрица Грама базиса  $e_1, \dots, e_n$

$(x, y) = x^\perp \Gamma \overline{y}$  – координатная форма записи скалярного произведения

В частности, если  $e$  – о.н.б., то  $g_{ij} = \sigma_{ij}$

$$\Gamma = E$$

$$(x, y) = x^\perp \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$(x, x) = x^\perp \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

### Замечание

Если  $V$  евклидово пространство, то, очевидно, все комплексные сопряжения можно убрать

### Определение

$A_{n \times n}$

$A^*$  называется сопряженной к  $A$ , если  $A^* = \overline{A^T}$

$*$  – операция сопряжения

$$(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda} B^*$$

### Определение

Матрица  $A_{n \times n}$  – самосопряженная, если  $A^* = A$

Если  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ , то самосопряженная = симметричная

Если  $a_{ij} \in \mathbb{C}$ , то самосопряженная = эрмитова

Очевидно, что  $\Gamma^* = \Gamma$ , т.е. самосопряженная

### Определение

$a_1, \dots, a_k \in V$

$G(a_1, \dots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$  – матрица Грама для системы векторов

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$G = G^*$$

### Теорема об определителе матрица Грама

$$g(a_1, \dots, a_k) := \det G(a_1, \dots, a_k)$$

Применим к векторам алгоритм Грама-Шмидта

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{Тогда } g(a_1, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

### Доказательство

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

Заменим в матрица все  $a_1$  на  $b_1$

2 строка  $\leftarrow$  1 строка  $\cdot c_1$

Тогда  $\forall j = 2 \dots k$   $(a_2, a_j) - c_1(b_1, a_j) = (a_2 - c_1 b_1, a_j) = (b_2, a_j)$   
 $(a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) = (b_2, b_1) = 0$   
 2 столбец  $\leftarrow$  1 столбец  $\cdot c_1$

$\forall j = 3 \dots k$   $(a_j, a_2) - c_1(a_j, b_1) = (a_j, a_2 - c_1 b_1) = (a_j, b_2)$   
 $(b_1, a_2) - c_1(b_1, a_1) = (b_1, b_2) = 0$

Тогда после этих двух шагов в матрице не осталось  $a_2$

Применим аналогичные действия, зная, что  $b_i = a_i - c_1 b_1 - \dots - c_{i-1} b_{i-1}$

Таким образом мы получим матрицу, где вместо  $a_i$  будут  $b_i$

По построению определитель не поменялся

Тогда  $g(a_1, \dots, a_k) = g(b_1, \dots, b_k) = \det \text{diag}(\|b_1\|^2, \dots, \|b_k\|^2) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$

### Следствие 1

$a_1, \dots, a_k$  — линейно независимые  $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0$

### Доказательство

Если  $a_1, \dots, a_k$  линейно независимые  $\xleftrightarrow{\text{Г.Ш.}}$   $b_1, \dots, b_k$  — линейно независимые

$\Leftrightarrow \|b_i\|^2 > 0$

### Следствие 2

$a_1, \dots, a_{k-1}$  — линейно независимые

$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

### Свойства матрицы Грама

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$ ,  $e$  — базис

1 + 2 — положительно определенная матрица ( $\Gamma > 0$ )

1.  $\Gamma = \Gamma^*$

2.  $\forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x > 0$

3.  $\forall \delta_k = g(e_1, \dots, e_k) \quad \delta_k > 0$

$\delta_k$  — угловой минор

В частности, при  $k = n \quad \delta_k = g > 0$ , т.е.  $\Gamma$  невырожденная

### Доказательство

$e_1, \dots, e_k$  — линейно независимые  $\Leftrightarrow g(e_1, \dots, e_k) > 0$

4.  $e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n$  — базисы  $V \quad T = T_{e \rightarrow e'}$

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$\Gamma' = G(e'_1, \dots, e'_n)$$

$$\text{Тогда } \Gamma' = T^T \Gamma T$$

**Доказательство**

$$(x, y) = x'^T \Gamma' \bar{y}' = x^T \Gamma \bar{y}$$

$$\Gamma' = (g'_{ij})$$

$$g'_{ij} = (e'_1, \dots, e'_j) = T_i^T \Gamma T_j \Leftrightarrow \Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$$

В частности, если  $e, e'$  – о.н.б.  $V$

$$\Gamma' = E = \Gamma$$

$$T^T \bar{T} = E \Leftrightarrow \overline{T^T} T = E \Leftrightarrow T^* T = E \Leftrightarrow T^{-1} = T^*$$

**Определение**

Невырожденная матрица  $Q$  вещественная/комплексная называется ортогональной/унитарной, если  $Q^* = Q^{-1}$

**Свойства унитарной/ортогональной матрицы**

1.  $Q$  – унитарна/ортогональна  $\Leftrightarrow$  строки(столбцы) попарно ортогональны в стандартном скалярном произведении пространств  $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

**Доказательство**

$$Q \text{ унитарна/ортогональна} \Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E$$

$$\text{Пусть } Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix}$$

$$Q^* Q = \overline{Q^T} Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \end{pmatrix} = ((Q_i, Q_j)) = E$$

2.  $Q$  унитарна/ортогональна  $\Leftrightarrow Q^{-1}$  унитарна ортогональна

$$\overline{A \cdot (\overline{A})^{-1}} = \overline{A A^{-1}} = \overline{E} = E$$

$$(Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q$$

$$\text{Тогда } Q = (Q^{-1})^{-1} = Q^{-1*}$$

3.  $Q$  унитарна/ортогональна  $\Rightarrow |\det Q| = 1$

В частности, если  $Q$  ортогональная, то  $\det Q = \pm 1$

**Доказательство**

$$Q^* Q = E$$

$$\det Q^* \det Q = 1$$

$$\det Q^* = \det(\overline{Q^*}) = \overline{\det Q}$$

$$\det Q \overline{\det Q} = |\det Q|^2 = 1$$

4.  $Q, R$  унитарная/ортогональная  $\Rightarrow QR$  унитарная/ортогональная

**Доказательство**

$$(QR)^* = \overline{(QR)^T} = \overline{R^T Q^T} = \overline{R^T} \overline{Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$



5.  $e, e' - \text{o.n.b. } V, T = T_{e \rightarrow e'}$

Тогда  $T$  унитарна/ортогональна (см. свойство матрицы  $\Gamma$ )

### 3.9 Теорема Пифагора. Задача о наилучшем приближении и перпендикуляре. Расстояние от точки до линейного подпространства и многообразия. Объем $k$ -мерного параллелепипеда в $n$ -мерном пространстве

#### Теорема Пифагора

$$\forall y, z \in V : (y, z) = 0 \\ \|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

#### Доказательство

$$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \underbrace{(z, y)}_0 + \underbrace{(y, z)}_0 + \|z\|^2$$

#### Следствие

$x_1, \dots, x_k$  попарно ортогональны

$$\|x_1 + \dots + x^k\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$$

Пусть  $L \subset V$  – линейное подпространство

$$V = L \oplus L^\perp$$

$$\forall x \in V \exists! x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$$

$$(y, z) = 0$$

$y$  – ортогональная проекция  $x$  на  $L$

$z$  – ортогональной составляющей  $x$  относительно  $L$  или перпендикуляром, опущенном из  $x$  на линейное подпространство  $L$

#### Теорема о наилучшем приближении

$L \subset V$  – линейное подпространство

$$\forall x \in V \exists! y \in L, z \in L^\perp : x = y + z$$

$$\forall l \neq y \in L \|x - y\| < \|x - l\|$$

Т.е.  $y$  является наилучшим приближением к  $x$  из элементов пространства  $L$

(Любая наклонная длиннее перпендикуляра)

#### Доказательство

$$\forall l \neq y \in L$$

$$\|x - l\|^2 = \|y + z - l\|^2 = \|y - l\|^2 + \|z\|^2 > \|z\|^2 = \|x - y\|^2$$

Как найти перпендикуляр?

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a$  – базис

$x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$

Пусть  $y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$

$$x = \sum_{i=1}^k c_i a_i + z$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_0$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j)$$

$$G^T(a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix} - \text{СЛНУ относительно } c_i$$

$a_1, \dots, a_k$  – линейно независимые  $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0 \Leftrightarrow G(a_1, \dots, a_k) -$

невыврожденная  $\Leftrightarrow \exists!$  решение  $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$  – определен однозначно

**Определение**

$$\text{dist}(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\| = \|x - y\| = \|z\|$$

**Теорема о расстоянии до линейного подпространства**

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a$  – базис

$$\text{dist}^2(x, L) = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

**Доказательство**

$$\text{dist}^2(x, L) = \|z\|^2$$

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$z = x - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i a_i}_z = x - \sum_i \tilde{c}_i b_i$$

$$(z, y) = 0$$

$$a_1, \dots, a_k, x = b_1, \dots, b_k, z =: b_{k+1}$$

$$\|b_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

**Определение**

$P = x_0 + L$  – линейное многообразие

$$\text{dist}(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| = \underbrace{\min_{u=x_0+l, l \in L}}_{= \min_{l \in L}} \|x - x_0 - l\| = \text{dist}(x - x_0, L)$$

Пусть  $P_1, P_2 : P_i = x_i + L_i, L_i \subset V, x_i \in V$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \min_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_1 - u_2\| = \min_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_1 - x_2 - (l_1 + l_2)\| =$$

$$\text{dist}(x_1 - x_2, L_1 + L_2) = \frac{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2)}}{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}} = \frac{V(\Pi(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2))}{V(\Pi(a_1, \dots, a_k))}$$

**Определение**

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово

$a_1, \dots, a_k$  – линейно независимые

$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]\} - k\text{-мерный параллелепипед}$$

(считаем, что все  $a_1, \dots, a_k$  приложены к какой-то одной точке, к  $\mathbb{O}$ , натянутой на векторы  $a_1, \dots, a_k$ )

**Определение**

$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}$  – объем  $k$ -мерного параллелепипеда

$$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = V(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1})) \|h\|$$

$$\|h\| = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

$h \perp \text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$  из алгоритма Г.Ш.

$h$  – перпендикуляр, опущенный из  $a_k$  на подпространство  $\text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – о.н.б  $V$

$\Pi(a_1, \dots, a_k)$  – параллелепипед

$$a_j \xleftrightarrow{e} A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (A_1 \ \dots \ A_k)$$

$$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)}$$

$$(a_i, a_j) = A_i^T A_j$$

$$\text{Тогда } G = A^T A$$

$$\text{Отсюда } V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \underbrace{A^T}_{k \times n} \underbrace{A}_{n \times k}}$$

В частности, если  $k = n$ , то  $V(\Pi(a_1, \dots, a_n)) = |\det A|$

Также можно задать ориентацию базиса: если определитель матрицы перехода из одного базиса в другой  $> 0$ , то базисы в одной ориентации.

Иначе в разных

Тогда  $\det A = +V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$ , если  $a_1, \dots, a_n$  и базис в одной ориентации

Иначе  $\det A = -V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$

Пусть  $\mathcal{B} \in \text{End}(V)$  – невырожденный (изоморфизм)

$$x \in \Pi(a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]$$

$$\mathcal{B}x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{B}a_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i \in \Pi(b_1, \dots, b_k)$$

$$\mathcal{B}(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \Pi(b_1 := \mathcal{B}a_1, \dots, b_k := \mathcal{B}a_k)$$

$$V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = \sqrt{g(b_1, \dots, b_k)} = \sqrt{\det(BA)^T(BA)} = \sqrt{\det A^T B^T B A}$$

$$\text{Если } k = n, \text{ то } V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = |\det A| |\det B| = V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) |\det B|$$

### 3.10 Коэффициенты Фурье. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. Ортогональные проекторы. Полиномы Лежандра

$(V, (\cdot, \cdot))$  – унитарное/евклидово пространство

$e_1, \dots, e_n$  – ортогональный базис

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n \chi_i e_i$$

$$\forall x \in V \quad (x, e_j) = \sum_{i=1}^n \chi_i (e_i, e_j) = \chi_j (e_j, e_j) = \chi_j \|e_j\|^2$$

$\chi_j = \frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$  – коэффициент Фурье элемента относительно ортогонального базиса

$$L_i = \text{span}(e_i), i = 1 \dots n$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n L_i$$

$\forall x \in V \exists!(x_i) : x = \sum_{i=1}^n x_i, x_i$  – ортогональная проекция  $x$  на  $e_i$

$$x_i = \chi_i e_i$$

Тогда по т. Пифагора  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\chi_i|^2 \|e_i\|^2$  – тождество Парсеваля

Неравенство Бесселя:  $\forall k = 1 \dots n \sum_{i=1}^k |\chi_i|^2 \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2$  – квадрат длины

вектора не меньше суммы квадратов длин его проекций

В частности, если  $e$  – ортонормированный базис

$\chi_j = (x, e_j)$  – проекция  $x$  на вектор  $e_j$

$$x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

$x_j = \chi_j e_j$  – проекция  $x$  на вектор  $e_j$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\chi_i|^2$$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\chi_i|^2$$

$\rho_i : V \rightarrow V$  – проектор

$$\forall x \in V \rho x := x_i$$

$$\exists!(x_i) : x = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\in L_i}$$

$\rho_i$  – оператор ортогонального проектирования

$V = \bigoplus_{i=1}^k L_i, L_i \subset V$  – попарно ортогональные линейные подпространства

$V = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$  – о.н.б.

$$\forall x \in V \rho_i x = \sum_{e_j \in L_j} (x_i, e_j) e_j$$

## Примеры ортогональных систем

1. Рассмотрим множество полиномов степени не более  $n$

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t) q(t) dt$$

Рассмотрим многочлены  $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$

Найдем ортогональный базис

$$\underbrace{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, \dots}_{\text{полиномы Лежандра}}$$

$l_k = \lambda_k((t^2 - 1)^k)^{(k)}$ ,  $\deg l_k = k$  – общая формула полиномов Лежандра

Покажем, что  $q_k(t) := ((t^2 - 1)^k)^{(k)}$  ортогональны  $1, \dots, t^{k-1}$

$$(q_k, t^m) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} t^m dt = \int_{-1}^1 t^m d((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} =$$

$$= t^m \underbrace{\left( (t^2 - 1)^k \right)^{(k-1)} \Big|_{-1}^1}_{\pm 1 - \text{корни}} - m \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} t^{m-1} dt = \dots$$

$$= (-1)m! \underbrace{\int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k-m)} dt}_{\left( (t^2 - 1)^k \right)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^1}$$

$$q_k \perp \text{span}(1, \dots, t^{k-1}) \Rightarrow q_k \perp \text{span}(l_1, \dots, l_{k-1}) \Rightarrow l_k \perp \text{span}(l_1, \dots, l_{k-1})$$

$$(uv)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m u^{(m)} v^{(k-m)} - \text{формула Лейбница}$$

$$\begin{aligned} q_k(1) &= \left( (t^2 - 1)^k \right)^{(k)} \Big|_{t=1} = \left( (t - 1)^k (t + 1)^k \right)^{(k)} \Big|_{t=1} = \sum_{m=0}^k C_k^m \left( (t - 1)^k \right)^{(m)} \left( (t + 1)^k \right)^{(k-m)} \Big|_{t=1} \\ &= C_k^k \underbrace{\left( (t - 1)^k \right)^{(k)}}_{k!} \underbrace{\left( (t + 1)^k \right)^{(0)}}_{2^k} \Big|_{t=1} = k! 2^k = \\ &= (2k)!! \end{aligned}$$

$$l_k = \frac{((t^2 - 1)^k)^{(k)}}{k! 2^k}, l_k(1) = 1 - \text{формула многочлена Лежандра в форме Родрига}$$

$$B(x, y) = \int_0^1 (1 - t)^{x-1} t^{y-1} dt$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\|l_k\|^2 = \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} dt = \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} ((t^2 - 1)^k)^{(k)} dt$$

$$\begin{aligned}
1)^k)^{(k)} \, d t &= \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2-1)^k)^{(k)} \, d((t^2-1)^k)^{(k-1)} = -\frac{1}{((2k)!!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2-1)^k)^{(k-1)} ((t^2-1)^k)^{(k+1)} = \dots = \\
&= \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} \int_{-1}^1 (t^2-1)^k \underbrace{((t^2-1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} \, d t = \\
&= \frac{(-1)^k (-1)^k (2k)!}{((2k)!!)^2} 2 \int_0^1 \frac{t(1-t^2)^k}{t} \, d t = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \underbrace{\int_0^1 (1-t)^k t^{-\frac{1}{2}} \, d t}_{B(k+1, \frac{1}{2})} = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\underbrace{\Gamma(k+1+\frac{1}{2})}_{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+\dots+\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}} \\
&= \frac{(2k)! k! 2^{k+1}}{((2k)!!)^2 (2k+1)!!} = \frac{2(2k)!(2k)!!}{(2k+1)!(2k)!!} = \frac{2}{2k+1}
\end{aligned}$$

2.  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, d t$$

$$f \in L^1(-\pi, \pi) \vee f \in L^2(-\pi, \pi)$$

(а) вещественная ортогональная тригонометрическая система

$1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots$  – бесконечномерная ортогональная система

Несложно проверить, что  $(\sin kt, \cos mt) = (\sin kt, \sin mt) = (\cos kt, \cos mt) = 0, k \neq m$

$$\|\cos kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, d t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kt}{2} \, d t = \pi, k \neq 0$$

$$\|1\|^2 = 2\pi$$

$$\|\sin kt\|^2 = \pi$$

Пусть  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$  – ряд Фурье

$$c_j = \frac{(f, e_j)}{\|e_j\|^2} \text{ – коэффициенты Фурье}$$

$$\text{Тогда } a_k := \frac{(f, \cos kt)}{\|\cos kt\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, d t$$

$$b_k := \frac{(f, \sin kt)}{\|\sin kt\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, d t$$

Теперь забудем на сходимость и сопоставим  $f$  с последовательностью коэффициентов

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$  – ряд Фурье по классической тригонометрической системе

(b) комплексная ортогональная тригонометрическая система

$$c_k = \widehat{f(k)} = \frac{1}{\|e^{ikt}\|^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt$$

$$\|e^{ikb}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt = 2\pi$$

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ – комплексный ряд Фурье}$$

(c)  $L^2([-1, 1], \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}})$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$T_n(t) = \cos(n - \arccos t) \text{ – полиномы Чебышева}$$

$$\deg T_n = n$$

### 3.11 Изометрия евклидовых/унитарных пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидова пространства своему сопряженному

$$(V, (\cdot, \cdot)_V), (V', (\cdot, \cdot)_{V'})$$

#### Определение

$V, V'$  изометричны, если  $V, V'$  изоморфны и сохраняется скалярное произведение

$$x, y \in V \leftrightarrow x', y' \in V' \Rightarrow (x, y)_V = (x', y')_{V'}$$

Отсюда  $\|x - y\|_V = \sqrt{(x, y)_V^2} = \sqrt{(x', y')_{V'}^2} = \|x' - y'\|_{V'}$  – расстояния сохраняются

#### Теорема

Любые два конечномерных линейных пространства одной размерности изометричны

#### Доказательство

Пространства изоморфны

Пусть  $e$  – о.н.б.  $V$

$e'$  – о.н.б.  $V'$



$$\begin{aligned}\text{Тогда } x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i e'_i = x' \\ \Gamma = G(e_1, \dots, e_n) &= E = G(e'_1, \dots, e'_n) = \Gamma' \\ (x, y)_v &= \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = (x', y')_{V'}\end{aligned}$$

Зафиксируем  $y \in V$

$$\forall x \in V \quad (x, y) =: f(x) \in V^*$$

$$(\cdot, y) : V \rightarrow V^*$$

**Теорема Рисса**

$$\forall f \in V^* \exists! y \in V : f(x) = (x, y) \forall x \in V$$

Т.е.  $V \leftrightarrow V^*$  – взаимнооднозначное сопоставление

**Доказательство**

Докажем единственность

$$\text{Пусть } y_1, y_2 \in V : f(x) = (x, y_1) = (x, y_2) \forall x \in V$$

$$\text{Тогда } (x, y_1 - y_2) = 0$$

$$\text{Пусть } x = y_1 - y_2$$

$$\text{Тогда } \|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

Докажем существование

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – о.н.б. в  $V$

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\forall f \in V^* \quad f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$$

$$\text{Пусть } y_i = \overline{f(e_i)}$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

$$f(x) = (x, y)$$

Т.о. мы сопоставили  $f$  и  $y$

Если  $V$  – евклидово (вещественное), то  $V \stackrel{P}{\cong} V^*$  (изоморфизм)

**Замечание**

$e_1, \dots, e_n$  – о.н.б.  $V$

$$\forall x \in V \quad \omega^i(x) = \chi^i = (x, e_i)$$

$$x = \chi^i e_i$$

$$\text{Тогда } \omega^i \stackrel{P}{\leftrightarrow} e_i$$

### 3.12 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрические тензоры. Взаимные базисы. Операции опускания и поднимания индексов. Евклидовы тензоры

Пусть  $(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n) = (g_{ij})$

$g_{ij} = (e_i, e_j)$

$\Gamma$  – тензор  $\in T_{(2,0)}$  – 2 раза ковариантный метрический тензор

Покажем, что  $\Gamma$  – тензор

$T = T_{e \rightarrow e'}$

$\Gamma' = T^T \Gamma T$

$g'_{ij} = t_i^k g_{km} t_j^m = g_{km} t_i^k t_j^m$  – действительно тензор

$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) \in T_{(0,2)}$  – 2 раза контрвариантный метрический тензор

$\Gamma^{-1} \Gamma = E$

$(\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = (T^T)^{-1} \Gamma^{-1} T^{-1} = S^T \Gamma^{-1} S$

$g'^{ij} = s_k^i g^{km} s_m^j = g^{km} s_k^i s_m^j$

**Свойства**

1.  $\Gamma = \Gamma^T$   
 $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1})^T$   
 $g^{ij} = g^{ji}, g_{ij} = g_{ji}$
2.  $\Gamma \Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1} \Gamma \Rightarrow g^{ik} g_{kj} = g^{ki} g_{kj} = g^{ki} g_{jk} = g^{ik} g_{jk} = \sigma_i^j$
3.  $\forall x, y \in V (x, y) = g_{ij} x^i y^j, (x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0) \Rightarrow (x \neq 0 \Rightarrow g_{ij} x^i x^j > 0)$

**Определение**

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис евклидова пространства  $V$

$e^1, \dots, e^n$  – базис  $V$

$e_i, e^j$  – взаимные базисы, если  $(e_i, e^j) = \sigma_i^j$

**Теорема**

$\forall e_1, \dots, e_n$  – базис  $V \exists ! e^1, \dots, e^n$  – взаимный базис

**Доказательство**

Пусть  $e^1, \dots, e^n$  – базис  $V$

$T_{e_i \rightarrow e^i} = (x^{km})_{n \times n}$

$(e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n) T_{e_i \rightarrow e^i}$

$$(e_i, e^j) = (e_i, x^{kj} e_k) = x^{kj} \underbrace{(e_i, e_k)}_{g_{ik}} = \sigma_i^j$$

$$g_{ik} x^{kj} = \sigma_i^j \Leftrightarrow \Gamma T_{e_i \rightarrow e^i} = E$$

$$T_{e_i \rightarrow e^i} = \Gamma^{-1}$$

$e^1, \dots, e^n$  – взаимнооднозначное с  $e_1, \dots, e_n$

### Следствие 1

1.  $e_i, e^i$  – взаимные базисы

$$\begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \Leftrightarrow e^j = g^{kj} e_k = g^{jk} e_k$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} \Gamma \Leftrightarrow e_j = g_{kj} e^k = g_{jk} e^k$$

2.  $\Gamma^{-1} = G(e^1, \dots, e^n)$

#### Доказательство

$$(e^i, e^j) = (e^i, g^{jk} e_k) = g^{jk} (e^i, e_k) = g^{jk} \sigma_k^j = g^{ji} \in \Gamma^{-1}$$

### Следствие 2

$e_1, \dots, e_n$  – о.н.б.

Тогда  $e^i = e_i$

#### Доказательство

Очевидно,  $\Gamma = E = \Gamma^{-1}$

### Замечание

1. на практике скалярное произведение, в свою очередь, может быть задано какой-то матрицей Грамма, относительно какого-то другого базиса
2.  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  – имеют один класс ориентации, если  $\det T_{e \rightarrow e'} > 0$   
Отсюда взаимные базисы принадлежат к одному классу ориентации

### Теорема 2

Если  $e_1, \dots, e_n$  – базис пространства  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – сопряженный базис  $V^*$

Тогда  $\omega^i \xrightarrow{P} e^i \in V \Rightarrow e^1, \dots, e^n$  – взаимный с  $e_1, \dots, e_n$

#### Доказательство

$$\forall \omega^i \in V^* \exists ! e^i \in V : \omega^i(x) = (x, e^i) \forall x \in V$$

Пусть  $x = e_j$   $\underbrace{\omega^i(e_j)}_{\sigma_i^j} = (e_j, e^i) \Rightarrow$  взаимный базис

### Замечание

$e$  – о.н.б. из теоремы Рисса такой, что  $\omega^i \xleftrightarrow{P} e_i$

$$\omega^i \xleftrightarrow{P} e^i$$

Отсюда  $e^i = e_i$  (снова следствие 2)

### Определение

$e_1, \dots, e_n$  и  $e^1, \dots, e^n$  – взаимные базисы

$$\forall x = x^i e_i = x_j e^j$$

$x_j$  – ковариантные координаты

$x^i$  – контрвариантные координаты

координатная функция относительно базиса  $e^i \leftrightarrow (x, e_i) = (x_j e^j, e_i) =$

$$x_j (e^j, e_i) = x_j \sigma_i^j = x_i$$

$$\omega^j \leftrightarrow (x, e^j) = (x^i e_i, e^j) = x^i (e_i, e^j) = x^i \sigma_i^j = x^j$$

$$x = (x, e_i) e^i = (x, e^j) e_j \text{ – формула Гибса}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} \text{ – контрвариантный}$$

$$\omega^j \xrightarrow{P} e^j$$

$$x_j \omega^j \cong x_j e^j$$

$$(x_1 \dots x_n) = (x'^1 \dots x'^n) S \text{ – ковариантный}$$

Рассмотрим координаты как тензоры

$$(x^i) \leftrightarrow T_{(0,1)}$$

$$(x_i) \leftrightarrow T_{(1,0)}$$

Рассмотрим свертку с соответствующим метрическим тензором

$$g_{ki} x^i = (e_k, e_i) x^i = (e_k, e_i x^i) = (e_k, x) = (x, e_k) = x_k$$

Свертка контрвариантного тензора с ковариантным метрическим тензо-

ром дает ковариантный тензор – опускание индекса

$$g^{jk} x_j = (e^j, e^k) x_j = (x_j e^j, e^k) = (x, e^k) = x^k$$

Свертка ковариантного тензора с контрвариантным метрическим тензо-

ром дает контрвариантный тензор – поднятие индекса

Определим операции для произвольных тензоров

Рассмотрим  $\alpha \in T_{(p,q)}$

Операцией опускания поднятия индекса называется преобразование мат-

рицы тензора в результате его свертки с ковариантным/контрвариантным метрическим тензором. При этом, чтобы сохранить соответствия записи элементов в матрице тензора применяют следующие правила записи

1. Если опускается крайний правый верхний индекс, он становится крайним левым нижним  

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q-1}, \kappa} g_{\kappa, j_0} = \alpha_{j_0, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q-1}}$$
2. Если поднимается крайний левый нижний индекс, он становится крайним правым верхним  

$$\alpha_{\kappa, j_2, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} g^{\kappa, i_{q+1}} = \alpha_{j_2, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q+1}}$$
3. Если происходит опускание или поднятие остальных индексов, его прежняя позиция обозначается точкой. Сам индекс при этом занимает крайнюю левую нижнюю/правую верхнюю позицию  

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \kappa, \dots, i_q, \kappa} g_{\kappa, j_0} = \alpha_{j_0, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \bullet, \dots, i_q}$$

$$\alpha_{j_1, \dots, \kappa, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} g^{\kappa, i_{q+1}} = \alpha_{j_1, \dots, \bullet, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q+1}}$$
4. Если опускаются/поднимаются несколько индексов то их прежние позиции обозначаются точками, а сами они записываются по тем же правилам с сохранением исходного порядка

Если базис ортонормированный, то поднятие/опускание индексов не меняет тензор

Если  $e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n$  – о.н.б. базисы, то  $T = T_{e \rightarrow e'}$  – ортогональная (т.е.  $T^{-1} = T^T$ )

$$\text{Тогда } \alpha_{m_1, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{j_p} \dots s_{i_q}^{k_q} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_q} \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} t_{j_p}^{i_1} \dots t_{k_q}^{i_q}$$

После приведения к о.н.б. в  $V$  получаем тензоры, которые отличаются только расположением индекса сверху/снизу. Такие тензоры называются *евклидовы* ранга  $r = p + q$

Для них нет разницы, сверху или снизу индексы (пока мы переходим по ортонормированным базисам), поэтому пишем все внизу

## 4 Линейные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

### 4.1 Сопряженные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

#### Определение

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\mathcal{A}^* \in \text{End}(V)$  называется сопряженным к  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x, y \in V \ (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A} x, y)$

#### Замечание

$\mathcal{A}^*$  зависит от скалярного произведения

При фиксированном скалярном произведении  $\mathcal{A}^*$  определен однозначно

Если поменять скалярное произведение, получим другое евклидово/унитарное пространство

Тогда и  $\mathcal{A}^*$  будет другим

#### Свойства сопряженного оператора

1.  $A, A^{\circledast}$  – матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$

Тогда  $A^{\circledast} = \overline{\Gamma^{-1}} A^* \overline{\Gamma} = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$

#### Доказательство

$\forall x, y \in V$

$$(x, \mathcal{A}^* y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n g_{ij} x_i \overline{A^{\circledast} y_j} = x^T \Gamma \overline{A^{\circledast} y}$$

$$(\mathcal{A} x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} (Ax)_i \overline{y_j} = (Ax)^T \Gamma y$$

$$x^T \Gamma \overline{A^{\circledast} y} = x^T A^T \Gamma \overline{y}$$

Пусть  $x = e_i, y = e_j$

$$(\Gamma \overline{A^{\circledast}})_{ij} = (A^T \Gamma)_{ij}$$

$$\Gamma \overline{A^{\circledast}} = A^T \Gamma$$

$$\overline{A^{\circledast}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

В частности, если о.н.б., то  $T = E \Rightarrow A^{\circledast} = A^* = \overline{A^T}$

2.  $\forall \lambda \in K \ (\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \overline{\lambda} \mathcal{B}^*$

Если евклидово пространство, то  $*$  – линейное, если унитарное – полутороллинейное

3.  $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$

4. Если  $\exists \mathcal{A}^{-1}$ , то  $\exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$ , причем  $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

**Доказательство**

$$(\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1})^* = (E)^* = \varepsilon$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^* \mathcal{A}^* = \varepsilon$$

$$\text{Отсюда } \exists (\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$$

5.  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

**Доказательство**

$$(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A} x, y)$$

$$(\mathcal{A}^* y, x) = (y, \mathcal{A} x)$$

$$(\mathcal{A}^* y, x) = (y, \mathcal{A} x)$$

$$\text{Тогда по определению } \mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$$

6.  $\text{Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$

$$\text{Im } \mathcal{A}^* = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp$$

**Доказательство**

Пусть  $y \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$

$$(x, \underbrace{\mathcal{A}^* y}_0) = (\mathcal{A} x, y)$$

$$\text{Тогда } y \perp \mathcal{A} x \Rightarrow y \perp \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A}^* \subset (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$$

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A}^* = \dim \text{Ker } A^\oplus = \dim \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = n - \text{rg}(\Gamma^{-1} A^T \Gamma) = n -$$

$$\text{rg } A^T = n - \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$$

$$\text{Тогда } \text{Im } \mathcal{A}^* = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp$$

7.  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$

**Доказательство**

$$\chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \det(\mathcal{A}^\oplus - tE) = \det(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} - tE) = \overline{\det(\Gamma^{-1} A^T) \Gamma - \underbrace{\bar{t} \Gamma^{-1} \Gamma}_E} =$$

$$\overline{\det(\Gamma^{-1} (A^T - \bar{t} E) \Gamma)} = \overline{\det(A^T - \bar{t} E)} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\bar{t})}$$

8.  $\lambda - \text{с.ч.}, u - \text{с.в. } \mathcal{A}$

$$\mu \neq \bar{\lambda} - \text{с.ч.}, v - \text{с.в. } \mathcal{A}^*$$

$$\text{Тогда } u \perp v$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned}\lambda(u, v) &= (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \mu v) = \bar{\mu}(u, v) \\ (\lambda - \bar{\mu})(u, v) &= 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0\end{aligned}$$

9.  $L \subset V$  – инвариантное относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$  – инвариантное относительно  $\mathcal{A}^*$

**Доказательство**

$$\forall x \in L, y \in L^\perp (x, \mathcal{A}^*y) = (\underbrace{\mathcal{A}x}_{\in L}, \underbrace{y}_{\in L^\perp}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^*y \in L^\perp$$

## 4.2 Нормальные операторы и их свойства

**Определение**

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$

$\mathcal{A}$  – нормальный, если  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Или  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

**Свойства**

1.  $\mathcal{A}$  – нормальный  $\Leftrightarrow A^{\otimes}A = AA^{\otimes}$ , где  $A, A^{\otimes}$  – матрицы операторов в некотором базисе

2.  $\text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$

$$\text{Im } \mathcal{A}^* = \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{Ker } \mathcal{A}^2 = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Тогда } V = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Im } \mathcal{A}$$

**Доказательство**

$$x \in \text{Ker } \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$$

$$(\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp = \text{Im } \mathcal{A}^*$$

$$\text{Пусть } x \in \text{Ker } \mathcal{A}^2 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in \text{Im } \mathcal{A}} \in \text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}x \in \text{Im } \mathcal{A} \cap \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = 0$$

$$x \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A}^2 \subset \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Очевидно также, что } \text{Ker } \mathcal{A}^2 \supset \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Отсюда } \text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{A}^2$$

3. Если  $\mathcal{A}$  – нормальный, то  $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \varepsilon$  – нормальный оператор

**Доказательство**



$$\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\varepsilon$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\varepsilon) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{A} + |\lambda|^2\varepsilon$$

$$\text{Аналогично } \mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\varepsilon$$

Отсюда ч.т.д.

4.  $\lambda$  – с.ч.,  $u$  – с.в.  $\mathcal{A} \Rightarrow \bar{\lambda}$  – с.ч.,  $u$  – с.в.  $\mathcal{A}^*$

**Доказательство**

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$$

$$u \text{ – с.в. } \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}u = \lambda u \Leftrightarrow \mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker } \mathcal{B} = \text{Ker } \mathcal{B}^* \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u =$$

$$0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*u = \bar{\lambda}u \Leftrightarrow u \text{ – с.в. } \mathcal{A}^*$$

5.  $\lambda$  – с.ч.,  $u$  – с.в.  $\mathcal{A}$

$$\mu \neq \lambda \text{ – с.ч., } v \text{ – с.в. } \mathcal{A}$$

Тогда  $u \perp v$

Т.о. собственные подмножества  $V_{\lambda} \perp V_{\mu}$

**Доказательство**

Из предыдущего свойства собственные вектора  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  совпадают

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \bar{\mu}v) = \bar{\mu}(u, v)$$

$$\text{Отсюда } (u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

### Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в унитарном пространстве

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $(V, (\cdot, \cdot))$  – унитарное

$\mathcal{A}$  – нормальный оператор  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. такой, что матрицы оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь диагональный вид  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Причем, матрица  $\mathcal{A}^*$  в этом базисе также будет иметь диагональный вид  $\bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$

**Замечание**

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ – с.ч. } \mathcal{A}$$

$$\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n \text{ – с.ч. } \mathcal{A}^*$$

$\mathcal{A}$  – нормальный  $\Rightarrow \mathcal{A}$  – о.п.с., но не наоборот

о.н.б. – из собственных векторов

**Доказательство**

Пусть  $\lambda_1, v_1$  – с.ч. и с.в.  $\mathcal{A}$

Рассмотрим  $L = \text{span}(v_1)$ ,  $V = L \oplus L^{\perp}$

$L$  – инвариантное относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow L^{\perp}$  – инвариантное относительно  $\mathcal{A}^*$

Также по свойству 4  $v_1$  – с.в.  $\mathcal{A}^* \Rightarrow L$  – инвариантное относительно  $\mathcal{A}^* \Rightarrow L^{\perp}$  инвариантное относительно  $\mathcal{A}$

Тогда  $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}, \mathcal{A}^*\Big|_{L^\perp}$  – остаются взаимосопряженными и нормальными

Применим метод математической индукции:

База:  $n = 1$  – очевидно

Пусть для  $n = k$  выполнено. Докажем для  $k + 1$

Пусть  $\lambda_1, v_1$  – с.ч. и с.в.  $\mathcal{A}$

$L = \text{span}(v_1)$

$V = L \oplus L^\perp, \dim L^\perp = k$

По индукционному предположению для  $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp} \exists$  о.н.б.  $v_2, \dots, v_{k+1}$  в  $L^\perp$

из с.в., матрицы  $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}$  имеет диагональный вид  $\text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$

Т.к.  $V = L \oplus L^\perp$ , матрица  $\mathcal{A}$  имеет диагональный вид  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$   
 $v_1 \perp v_2, \dots, v_{k+1}$

В обратную сторону очевидно

**Следствие 1**

$\mathcal{A}$  – нормальный в унитарном пространстве  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}, V_{\lambda} \perp V_{\mu}, \lambda \neq \mu$

**Следствие 2**

$AA^* = A^*A$  – нормальная матрица

$a_{ij} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$  унитарная матрица  $T : T^*AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$  – с.ч.  $\mathcal{A}$

**Доказательство**

$A^*$  – матрица  $\mathcal{A}^*$  в о.н.б.

$A$  – матрица  $\mathcal{A}$

Тогда по теореме существует базис и о.н.с.в.  $A$

$T = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$  – о.н.с.в.  $= T_{e \rightarrow v}$

$T^{-1} = AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  – т.к.  $v_1, \dots, v_n$  – попарно ортогональны и нормированы

$\Leftrightarrow T$  – унитарная матрица  $\Leftrightarrow T^{-1} = \overline{T^T} = T^*$

Что будет в евклидовом пространстве?

$A$  – вещественная матрица  $\Rightarrow \chi_A$  – вещественные коэффициенты

Не все корни  $\chi_A$  – собственные числа, а только вещественные

**Определение**

$V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово пространство

$V_{\mathbb{C}}$  – комплексификация  $V$

$\forall z = x + iy, w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}, x, y, u, v \in V \quad (z, w) := (x, y) + (y, v) + i(-(x, v) + (y, u))$

$(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$  – унитарное пространство

### Упражнение

$\overline{(z_1, z_2)} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$

$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

### Напоминание

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V \Rightarrow$  базис  $V_{\mathbb{C}}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$

$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\bar{z})$

$\lambda, z$  – с.ч., с.в.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{\lambda}, \bar{z}$  – с.ч., с.в.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}z} = \bar{\lambda}z = \bar{\lambda}\bar{z}$

### Свойства

1.  $\lambda \in \mathbb{R}, V_{\lambda}$  – с.ч. и собственное подпространство  $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda, (V_{\lambda})_{\mathbb{C}}$  – с.ч. и с.п.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

#### Доказательство

//todo 12:10 11.05

2.  $\lambda, z$  – с.ч. и с.в.  $\mathcal{A}$

$\bar{\lambda}, \bar{z}$  – с.ч. и с.в.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$

$z = u + iv, \bar{z} = u - iv$

Тогда  $(z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$

#### Доказательство

$$0 = (z, \bar{z}) = (u + iv, u - iv) = \underbrace{(u, u) - (v, v)}_0 + \underbrace{i(v, u) + i(u, v)}_0$$

3.  $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* = (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}}$

#### Доказательство

$e_1, \dots, e_n$  – о.н.б.  $V \rightarrow e_1, \dots, e_n$  – о.н.б. в  $V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \leftrightarrow A, \mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T \Rightarrow (\mathcal{A}^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^T$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A, (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow A^T$

4.  $(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$

#### Доказательство

$(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{C}}z = (\mathcal{A}\mathcal{B})x + i(\mathcal{A}\mathcal{B})y = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}x + i\mathcal{B}y) = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}z$

5.  $\exists \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow \exists (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1}$ , причем  $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}}$

**Доказательство**

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \exists (\mathcal{A}_{\mathbb{C}})^{-1}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{-1} = \varepsilon = (\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}^{-1})_{\mathbb{C}}$$

6.  $\mathcal{A}$  нормальный  $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  нормальный

**Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве**

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ ,  $(V, (\cdot, \cdot))$  – евклидово пространство

$\mathcal{A}$  – нормальный оператор  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. пр-ва  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1, \dots, \Phi_m)$ , где  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  – с.ч.  $\mathcal{A}$

$\Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ , где  $\alpha_i \pm i\beta_i$  – комплексные сопряженные корни характеристического многочлена  $\mathcal{A}$

Причем, матрица  $\mathcal{A}^*$  имеет вид  $\Lambda^* = \Lambda^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1^T, \dots, \Phi_m^T)$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$\text{Очевидно: } \Phi_i^T \Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 + \beta_i^2 & 0 \\ 0 & \alpha_i^2 + \beta_i^2 \end{pmatrix} = \Phi_i \Phi_i^T$$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Если все корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  вещественные, все очевидно

Иначе применим комплексификацию

$\mathcal{A}$  – нормальный  $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  нормальный,  $V_{\mathbb{C}}$  – унитарное пространство

Тогда по теореме  $\exists$  о.н.б.  $w_1, \dots, w_n$  из с.в.  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  такой, что матрица  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$  будет иметь диагональный вид

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} V_{\lambda} = \bigoplus_{i=1, \lambda_i \in \mathbb{R}}^k V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\mu, \bar{\mu}} \text{span}(z^{\mu}, \bar{z}^{\bar{\mu}})$$

$\mu, \bar{\mu}$  – комплексные сопряженные корни  $\chi_{\mathcal{A}}$

$z, \bar{z}$  – с.в., пусть они нормированные

$$(z, \bar{z}) = 0$$

$$z = u + iv, u, v \in V$$

$$V_{\lambda} \perp V_{\mu}$$

$$V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} = \text{по свойству } 1 = (V_{\lambda_i})_{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \dots, \omega_k)$$

$$(z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$$

$$\text{span}^{\mathbb{C}}(z, \bar{z}) = \text{span}^{\mathbb{C}}(u, v) = (\text{span}(u, v))_{\mathbb{C}}$$

$$\text{Тогда } V_{\mu}^{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_r) \perp V_{\bar{\mu}}^{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r)$$

$$V_{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \dots, \omega_k, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \omega, u, v - \text{вещественные вектора}$$

$$\|z_i\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 + \|v_i\|^2, \|u_i\| = \|v_i\| \Rightarrow \|u_i\| = \|v_i\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \leftrightarrow \mathcal{A}$  – в вещественном базисе

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \mu_i z_i$$

$$\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} u_i = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} (z_i + \bar{z}_i) = \frac{1}{2} (\mu_i z_i + \bar{\mu}_i \bar{z}_i) = \operatorname{Re}(\mu_i z_i) = \operatorname{Re}((\alpha_i + i\beta_i)(u_i + ib_i)) =$$

$$\alpha_i u_i - \beta_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ -\beta_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} v_i = \frac{1}{2i} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} (z_i - \bar{z}_i) = \frac{1}{2i} (\mu_i z_i - \bar{\mu}_i \bar{z}_i) = \Im(\mu_i z_i) = \beta_i u_i + \alpha_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_i \\ \alpha_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Осталось ортогонализировать базис. Заменяем  $u_i$  на  $\sqrt{2}u_i$ ,  $v_i$  – на  $\sqrt{2}v_i$

Т.о. мы получили матрицу из теоремы

**Следствие**

$$AA^* = A^*A (AA^T = A^T A)$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Тогда  $\exists$  ортогональная матрица  $T$  такая, что  $T^T A T = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_i, \dots, \Phi_m)$

**Доказательство**

$$T = (\omega_1 \ \dots \ \omega_k \ u_1 \ v_1 \ \dots)$$

$$T - \text{ортогональная матрица} \Leftrightarrow T^{-1} = T^* = T^T$$

### 4.3 Самосопряженные операторы и их свойства. Изометрические операторы и их свойства

#### Определение

$\mathcal{A}$  – называются самосопряженным, если  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Если  $V$  унитарное, то – эрмитовый

Если  $V$  евклидово, то – симметричный

$$\Leftrightarrow (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$$

#### Замечание

Если  $\mathcal{A}$  – самосопряженный, то  $\mathcal{A}$  – нормальный

#### Свойства

1.  $\mathcal{A}$  – самосопряженный  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. такой, что  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$
2.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  самосопряженные  $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}$  – самосопряженный
3.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – самосопряженные и перестановочные  $\Rightarrow \mathcal{AB}, \mathcal{BA}$  – самосопряженные
4. Если  $\exists \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A}$  – самосопряженный  $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$  – самосопряженный

#### Доказательство

$$(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A})^* = \varepsilon^* = \varepsilon$$

$$\mathcal{A}^* (\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon$$

$$\mathcal{A} (\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{A}^{-1}$$

5.  $\mathcal{A}$  самосопряженный  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  нормальный и все корни  $\chi_{\mathcal{A}}$  вещественные

#### Доказательство для унитарного пространства

По теореме о каноническом виде матрицы

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda}^T = \text{diag} \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda}^T \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda}_i \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство для евклидова пространства

По теореме о каноническом виде матрицы

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda^T$$

$$\Phi_i = \Phi_i^T \Leftrightarrow \beta_i = 0$$

Тогда нет блоков  $\Phi_i \Rightarrow \Lambda$  – диагональная  $\Rightarrow \lambda_i$  вещественные

6.  $L \subset V$  – линейное подпространство  
 $L$  – инвариантно относительно  $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

**Теорема**

$A \in \text{End}(V)$

$A$  самосопряженный  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. такой, что матрица  $\mathcal{A}$  имеет диагональный вид

**Следствие**

$A$  самосопряженный  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}, V_{\lambda} \perp V_{\mu}, \lambda \neq \mu$

**Следствие 2**

$A^* = A \Rightarrow \exists$  унитарная/ортогональная  $T$  такая, что  $T^*AT$  имеет диагональный вид

**Определение**

$Q$  невырожденный  $\in \text{End}(V)$  называется изометрическим, если  $Q^{-1} = Q^*$

Если  $V$  – унитарная, то называется унитарным

Если  $V$  – евклидово, то называется ортогональным

$$\Leftrightarrow (Qx, Qy) = (x, Q^*Qy) = (x, y)$$

**Замечание**

Изометрический  $\Rightarrow$  нормальный

**Свойства**

1.  $Q$  изометрический  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. такой, что  $\overline{Q^T} = Q^* = Q^{-1}$
2.  $Q$  изометрический  $\Leftrightarrow$  переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$e_1, \dots, e_n$  – о.н.б.

$$(Qe_i, Qe_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$e_1, \dots, e_n$  – о.н.б.

$\forall x, y \in V$   $Qe_1, \dots, Qe_n$  – о.н.б.

Тогда  $(Qe_i, Qe_j) = \delta_{ij}$

$$(Qx, Qy) = \sum_{ij} x_i \overline{y_j} (Qe_i, Qe_j) = \sum_i x_i \overline{y_i} = (x, y)$$

3.  $Q, R$  – изометрические  $\Rightarrow QR$  – изометрические
4.  $Q$  – изометрический  $\Rightarrow Q^{-1}$  – изометрический
5.  $Q$  – изометрический  $\Leftrightarrow Q$  – нормальный и все корни  $\chi_Q$  по модулю равны 1

**Доказательство для унитарного пространства**

По теореме о каноническом виде

$\exists$  о.н.б. такой, что  $Q \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$Q^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$

$QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda \overline{\Lambda^T} = E = \text{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_n\|^2) \Rightarrow \|\lambda\| = \pm 1$

**Доказательство для евклидова пространства**

$QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda \overline{\Lambda^T} = E = \text{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_k\|^2, |\Phi_1 \Phi_1^T|, \dots, |\Phi_k \Phi_k^T|)$

$\Phi_i \Phi_i^T = \text{diag}(\alpha_i^2 + \beta_i^2, \alpha_i^2 + \beta_i^2)$

$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$

В частности, если корни  $\chi_Q$  вещественные, то  $\pm 1$

6.  $L \subset V$  – линейное подпространство, инвариантное относительно  $Q$ .

Тогда  $L^\perp$  инвариантно относительно  $Q$

**Доказательство**

Пусть  $x \in L, Qx \in L, y \in L^\perp$

Тогда  $0 = (x, y) = (Qx, Qy) \Rightarrow Qy \in L^\perp$

**Теорема о каноническом виде матрицы изометрического оператора**

$Q \in \text{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$  – унитарное/евклидово

$Q$  – изометрический  $\Leftrightarrow \exists$  о.н.б. такой, что матрица имеет диагональный/блочно-диагональный вид

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) / \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1, \dots, \Phi_m), \lambda_i = \pm 1, \Phi_i =$

$\begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix}, \cos \phi_i \pm i \sin \phi_i$  – корни  $\chi_Q$

**Доказательство**

$\Lambda^{-1} = \overline{\Lambda^T}$

**Замечание**

$Q$  ортогональный в евклидовом пространстве  $\Rightarrow$  композиция поворотов и отражений

**Следствие**

$Q^* = Q^{-1}$  – унитарная/ортогональная матрица

Тогда  $\exists$  унитарная/ортогональная матрица  $T$  такая, что  $T^*QT = \Lambda$  – из теоремы



#### 4.4 Разложение матриц. LU(LDU), Холецкого, QR-разложение, полярное

**Определение**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & e_{ij} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} - \text{нижняя унитарная матрица (левая)}$$

Аналогично верхнетреугольная матрица  $U$

**Определение**

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$1 \leq k \leq n \quad A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} - \text{угловая матрица}$$

$\Delta_k = \det A_k$  – угловой минор

**Теорема**

$\Delta_k \neq 0, \forall k = 1 \dots n-1 \Leftrightarrow \exists!$  унитарная нижняя  $L$ , унитарная верхняя  $U, D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_k \neq 0, k = 1 \dots n-1$  такие, что  $A = LDU$

**Замечание**

$$1. \quad A \text{ невырожденная} \Leftrightarrow \det A = \det L \det D \det U = \det D = \underbrace{d_1 d_2 \dots d_{n-1}}_{\neq 0} d_n \Leftrightarrow d_n \neq 0$$

$$2. \quad A = LDU$$

$$LD = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & * & & \ddots & 0 \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = L \Rightarrow A = LU$$

$$DU = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & * \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = U \Rightarrow A = LU$$

Называется LU-разложением. Оно неоднозначно, в отличие от  $LDU$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$A = LDU \Rightarrow A_k = L_k D_k U_k$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \underbrace{l_{is}}_{s>i \Rightarrow 0} d_{st} \underbrace{u_{ti}}_{t>j \Rightarrow 0} = \sum_{s=1}^i \sum_{t=1}^j l_{is} d_{st} u_{tj} = \underbrace{\sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^k l_{is} d_{st} u_{tj}}_{(L_k D_k U_k)_{ij}}$$

$$\Delta_k = \det A_k = \underbrace{\det L_k}_1 \det D_k \underbrace{\det U_k}_1 = d_1 \dots d_k \neq 0$$

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Методом мат. индукции

1.  $k = 1$

$$a_{11} = \underbrace{1}_L \underbrace{d_1}_D \underbrace{1}_U$$

2. Пусть верно для  $k$

Тогда  $\Delta_1, \dots, \Delta_k \neq 0$

$A_k = L_k D_k U_k$  – единственным образом,  $d_1, \dots, d_k \neq 0$

Докажем для  $k+1$

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ c_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{k+1} = \text{diag}(d_1, \dots, d_k, d_{k+1})$$

Докажем, что  $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$

$$\begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ c_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & d_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_k D_k U_k & L_k D_k y \\ x D_k U_k & x D_k y + d_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Решим систему } \begin{cases} L_k D_k y & = b_{k+1} \\ x D_k U_k & = c_{k+1} \\ x D_k y + d_{k+1} & = a_{k+1, k+1} \end{cases} \\
&\det(L_k D_k) = d_1 \dots d_k \Rightarrow \exists! y \\
&\det(D_k U_k) = d_1 \dots d_k \Rightarrow \exists! x \\
&d_{k+1} = a_{k+1, a_{k+1}} - x D_k y
\end{aligned}$$

### Алгоритм LDU-разложения

Рассмотрим матрицу  $\left( A \mid E \right)$

Методом Гаусса приведем к верхнедиагональному виду  $\left( A' \mid A'' \right)$

Здесь не переставляем строки и столбцы во время преобразований, а также не прибавляем к строке  $i$  значения из строк  $j < i$  (чтобы получить справа нижнедиагональный вид)

Получим  $A'$  – верхнедиагональную и  $A''$  нижнедиагональную

$$A' = DU, A'' = L^{-1}$$

#### Определение

$L_{ij}(\lambda)$  – элементарная унитарная нижняя матрица, если  $\exists! i, j : i > j, L_{ij} \neq 0$ , при этом  $L_{ij} = \lambda$  (единственный ненулевой элемент под диагональю)

$$i > j$$

$$\begin{aligned}
AL_{ij}(\Lambda) &= \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{j1} & a_{jj} & \dots & a_{ji} & a_{jn} \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{ii} & a_{in} \\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \underbrace{\lambda}_{ij} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} = (\dots \ (A_j + \lambda A_i) \ \dots \ A_i \ \dots) \\
L_{ij}(\Lambda)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \underbrace{\lambda}_{ij} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{j1} & a_{jj} & \dots & a_{ji} & a_{jn} \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{ii} & a_{in} \\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (S_j + \lambda S_i) \\ \dots \\ S_i \\ \dots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$L_{ij}(\lambda)$  – невырожденная  $\Rightarrow \exists L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$

Теперь рассмотрим метод Гаусса

Заметим, что прибавление строк друг к другу соответствует умножению на элементарную матрицу

$$\left( \underbrace{L_m \dots L_2 L_1}_{\text{эл. нижн. унитр., соотв. м. Гаусса}} A = DU \mid \underbrace{L_m \dots L_2 L_1 E}_{=: L^{-1}} \right)$$

Тогда  $A = L_1^{-1} \dots L_m^{-1} DU = LDU$

$L_k^{-1} = L_k(-\lambda_k)$

$L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1} = (L_m \dots L_1)^{-1} =: L$

Т.о. мы получили разложение. По теореме оно единственное

**Следствие**

$A^* = A$

$\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists! L, D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), U : d_i \in \mathbb{R}, d_i \neq 0, A = LDL^* = U^*DU$

**Доказательство**

Из теоремы  $\exists! L, D, U$

$LDU = A = A^* = U^*D^*L^* = U^*DL^*$

Из единственности  $L = U^*, U = L^*$

**Определение**

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  – самосопряженный оператор

$V$  – унитарное/евклидово

$\mathcal{A}$  – положительно(отрицательно) определенным ( $\mathcal{A} > 0$ ), если  $\forall x \neq 0$   $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) \geq 0$

$\mathcal{A}$  – положительный(отрицательный) полуопределенный ( $\mathcal{A} \geq 0$ ), если  $\forall x \neq 0$   $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) \geq 0$  и  $\exists x \neq 0 : (\mathcal{A}x, x) = 0$   
 $> 0$  не является ч.с.  $\geq 0$

$\mathcal{A} \geq 0$  – неопределенный, если  $\exists x \in V : (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) > 0$  и  $\exists y \in V : (\mathcal{A}y, y) = (y, \mathcal{A}y) < 0$

$\mathcal{A}$  – самосопряженный  $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$  – о.п.с.

Все корни  $\lambda \in \mathbb{R}$

$V_\lambda \perp V_\mu, \lambda \neq \mu$

**Теорема**

$\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow$  все с.ч.  $\lambda > 0$

$\mathcal{A} \geq 0 \Leftrightarrow$  все с.ч.  $\lambda \geq 0, \exists \lambda = 0$

$\mathcal{A} \geq 0 \Leftrightarrow \exists$  с.ч.  $\lambda > 0, \exists$  с.ч.  $\lambda < 0$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $\mathcal{A} > 0$

$\forall x \in V, x \neq 0 \ (\mathcal{A}x, x) > 0$

$$x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} (\lambda x_{\lambda}, x_{\mu}) = \sum_{\lambda} (\lambda x_{\lambda}, x_{\lambda}) > 0$$

$$\lambda(x_{\lambda}, x_{\lambda}) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

Аналогично для всех остальных случаев

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$\forall x : (\mathcal{A}x, x) = \sum_{\lambda} \lambda(x_{\lambda}, x_{\lambda})$$

$$\text{Пусть все } \lambda > 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 (\mathcal{A}x, x) = \sum_{\lambda} \lambda \|x_{\lambda}\|^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{A} > 0$$

**Замечание**

Для самосопряженных матриц теорема аналогичная

**Теорема (разложение Холецкого или метод квадратного корня)**

$\forall A > 0 : \forall i = 1 \dots n - 1 \ \delta_i > 0 \ \exists! L - \text{нижнетреугольная, } L_{ii} > 0, U - \text{верхнетреугольная, } U_{ii} > 0 : A = LL^* = U^*U$

**Доказательство**

$$\text{Пусть } x \neq 0, A > 0, A = L_0 D_0 U_0 \underset{A=A^*}{=} L_0 D_0 L_0^* = U_0^* D_0 U_0$$

$$0 < (Ax, x) = (L_0 D_0 U_0 x, x) = (D_0 \underbrace{U_0 x}_y, L_0^* x) = (D_0 y, y) = \sum_{j=1}^n d_j y_j^2$$

$U_0 - \text{унитреугольная} \Rightarrow \text{невырожденная} \Rightarrow y \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 0$

Пусть  $y = e_j$

Тогда  $\forall j = 1 \dots n \ d_j > 0$

$$\sqrt{D_0} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$$

$$\sqrt{D_0} \sqrt{D_0} = D_0$$

$$A = \underbrace{L_0 \sqrt{D_0}}_L \sqrt{D_0} L_0^* = U_0^* \sqrt{D_0} \underbrace{\sqrt{D_0} U_0}_U$$

$$L^* = (L_0 \sqrt{D_0})^* = \sqrt{D_0} L_0^* = L_0^* \sqrt{D_0}$$

$$U^* = \sqrt{D_0} U_0$$

**Теорема (QR-разложение)**

$\forall$  невырожд.  $A$  (компл./вещ.)  $\exists$  унит./ортог.  $Q$ , правотреугольная (верхнетреугольная)

$$R : A = QR$$

**Доказательство**

$$A = (A_1 \ \dots \ A_n)$$

Т.к.  $A$  невырожденная, то  $A_1, \dots, A_n$  – линейно независимые

Применим алгоритм Грамма-Шмидта

Получим попарно ортогональные и нормированные столбцы  $q_1, \dots, q_n$

$Q = (q_1 \ \dots \ q_n)$  – унитарная/ортогональная по построению

$Q$  – унитарная/ортогональная по построению

$$q_1 = u_{11}A_1$$

$$q_2 = u_{12}A_1 + u_{22}A_2$$

$\vdots$

$$q_n = u_{1n}A_1 + \dots + u_{nn}A_n$$

$$\underbrace{A}_{\text{невыр.}} U = \underbrace{Q}_{\text{невыр.}}$$

Тогда  $U$  – невырожденная

$$\text{Тогда } \exists U^{-1} = R$$

$R$  – верхнетреугольная

$$A = QU^{-1} = QR$$

**Следствие**

$\forall$  невыр.  $A \exists Q$  – унит./ортог.,  $L$  – левотреугольная(нижнетреугольная)

$$A = LQ$$

**Доказательство**

$$A^* = \tilde{Q}R$$

$$A = (\tilde{Q}R)^* = R^* \underbrace{\tilde{Q}^*}_{\text{унит./орт.}} = R^* \tilde{Q}^{-1} = LQ$$

**Теорема (полярное разложение)**

$$\text{В унитарном: } A = \underbrace{H}_{\text{эрмитова}} \underbrace{U}_{\text{унитарная}}$$

$$\text{В евклидовом: } A = \underbrace{S}_{\text{симметричная}} \underbrace{Q}_{\text{ортогональная}}$$

$\forall A_{n \times n} \exists!$  эрмитова  $H$  (симметричная  $S$ ),  $H \geq 0$  ( $S \geq 0$ ) и  $\exists$  унитарная  $U$  (ортогональная  $Q$ ):  $A = HU$  ( $A = SQ$ )

Причем, если  $A$  невырожденная, то  $U(Q)$  – единственные,  $H > 0$  ( $S > 0$ )

Сформулируем докажем соответствующую теорему для операторов, т.к. в о.н.б. этим матрицам соответствуют матрицам операторов

**Теорема (полярное разложение эндоморфизма в унитарном/евклидовом пространстве)**

$(V, (\cdot, \cdot))$  – унитарное/ортогональное

$\forall A \in \text{End}(V) \exists!$  самосопряженный  $H \geq 0$  ( $S \geq 0$ ),  $\exists U$  – изомерический

$$: \mathcal{A} = HU(\mathcal{A} = SQ)$$

Причем, если  $\mathcal{A}$  невырожденный, то  $\exists !U(Q)$

**Лемма**

Пусть  $\mathcal{A}$  – о.п.с.

Все с.ч.  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$

Тогда  $\exists !\mathcal{B}$  – о.п.с такой, что с.ч.  $\mu \in \mathbb{R}, \mu \geq 0, \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$

$$\mathcal{B} := \sqrt{\mathcal{A}}$$

**Доказательство существования**

$\mathcal{A}$  – о.п.с.,  $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} = \text{span}(v_1, \dots, v_n), v_n$  – с.в.

Определим  $\mathcal{B}$ :

$$\forall v_j \quad \beta v_j = \sqrt{\lambda_j} v_j$$

$$\mathcal{B}^2 v_j = \sqrt{\lambda_j} \sqrt{\lambda_j} v_j = \lambda_j v_j = \mathcal{A} v_j$$

$\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ , т.к. их значения совпадают на базисных векторах

Очевидно из определения  $\mathcal{B}$ , что  $\beta$  – о.п.с.,  $\sqrt{\lambda_j} = \mu_j$  – с.ч.  $\mathcal{B}$

$v_j$  – с.в.  $\mathcal{B}$

$$V_{\lambda}^{\alpha} = V_{\mu}^{\beta} \text{ – с.в. } \beta$$

**Доказательство единственности**

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$  – о.п.с.

$\nu \geq 0$  – с.ч.  $\mathcal{C}$

$$V = \bigoplus_{\nu} V_{\nu}^{\mathcal{C}} = \text{span}(\omega_1, \dots, \omega_n) \text{ – с.в. } \mathcal{C}$$

$$\mathcal{A} \omega_j = \mathcal{C}^2 \omega_j = \nu_j^2 \omega_j \Rightarrow \lambda_j^2 \text{ – с.ч. } \mathcal{A}$$

$$V_{\nu}^{\mathcal{C}} = V_{\lambda}^{\mathcal{A}} = V_{\mu}^{\mathcal{C}}$$

$$\mathcal{C} \omega_i = \mathcal{C} \omega_i, \mu \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$$

**Доказательство теоремы**

$\mathcal{A} \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^* \mathcal{A}$  – самосопряженные

$$(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A} \mathcal{A}^*$$

$$\forall x \neq 0 \quad (\mathcal{A} \mathcal{A}^* x, x) = (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* x) \geq 0, (\mathcal{A}^* \mathcal{A} x, x) = (\mathcal{A} x, \mathcal{A} x) \geq 0$$

Тогда  $\mathcal{A} \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^* \mathcal{A} \geq 0$

Рассмотрим  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$

Он самосопряженный  $\Leftrightarrow$  он о.п.с. и его собственные подпространства попарно ортонормированы

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}, V_{\lambda} \perp V_{\mu}, \forall \lambda \neq \mu$$

$V = \text{span}(v_1, \dots, v_n)$  – попарно ортогональные и нормированные с.в.  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$

$$(\mathcal{A} v_j, \mathcal{A} v_k) = \underbrace{(\mathcal{A}^* \mathcal{A} v_j, v_k)}_{\geq 0} = (\lambda_j v_j, v_k) = \lambda_j \sigma_{jk}$$

$$1. \lambda_j \neq 0 \quad (\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j) = \lambda > 0, \|\mathcal{A}v_j\|^2 \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}v_j \neq 0$$

$$2. \mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_k \neq 0, \lambda_j, \lambda_k \neq 0, \mathcal{A}v_j \perp \mathcal{A}v_k$$

Тогда  $\mathcal{A}$  переводит попарно ортогональную нормированную систему с.в. в попарно ортогональную, но, возможно, неполную

Дополним получившуюся систему до базиса

$$\text{Пусть о.н.б. } z_1, \dots, z_n \text{ такой, что } \forall \lambda_j \neq 0, z_j = \frac{\mathcal{A}v_j}{\sqrt{\lambda_j}}$$

$$(z_j, z_j) = \frac{(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j)}{\lambda_j} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j} = 1$$

Определим  $H \in \text{End}(V)$

$$Hz_j := \sqrt{\lambda_j} z_j$$

Очевидно,  $H$  – о.п.с.,  $\sqrt{\lambda_j}$  – с.ч.

$$H \geq 0$$

Определим  $U \in \text{End}(V)$

$$U \underbrace{v_j}_{\text{о.н.б.}} := \underbrace{z_j}_{\text{о.н.б.}}$$

Тогда  $U$  – изометрический

$$HUv_j = Hz_j = \sqrt{\lambda_j} z_j = \mathcal{A}v_j$$

Т.к. совпадает на базисных векторах, то  $HU = \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}^* = U^* H^* = U^* H = U^{-1} H$$

$$\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\text{о.п.с., все с.ч.} \geq 0} = HUU^{-1}H = H^2$$

о.п.с., все с.ч.  $\geq 0$

Отсюда  $\exists! H$  – о.п.с., все с.ч.  $\geq 0$

$$H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*} \text{ – левый модуль } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \text{ – невырожденный} \Rightarrow \mathcal{A}^* \text{ – невырожденный} \Rightarrow \mathcal{A}^* \mathcal{A} > 0, \mathcal{A}\mathcal{A}^* >$$

$$0 \Rightarrow \text{все } \lambda_j > 0 \Rightarrow H > 0 \text{ – невырожденный}$$

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{невыр.}} = \underbrace{H}_{\text{невыр.}} U \Rightarrow U \text{ – невырожденный} \Rightarrow U = H^{-1} \mathcal{A} \text{ – ед.образом}$$

Аналогично для вещественного случая

### Следствие

Аналогично для разложений  $\mathcal{A} = UH$  ( $\mathcal{A} = QS$ )

### Доказательство

Построим разложение  $\mathcal{A}^* = H_0 U_0$

$H_0 = \sqrt{\mathcal{A}^* \mathcal{A}}$  – правый модуль

$$\mathcal{A} = (H_0 U_0)^* = U_0^* H_0^* = \underbrace{U_0^{-1}}_{\text{изометрия}} \quad H_0 = U_0' H_0$$



## 5 Квадратичные формы

### 5.1 Основные понятия

#### Определение

Квадратичной формой называется  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ ,

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = a_{ji}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$A^T = A$$

$f(x) = x^T A = (x, Ax) = (Ax, x)$  – в стандартном скалярном произведении в  $\mathbb{R}^n$

#### Определение

$$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$$

#### Определение

Говорят, что к квадратичной форме  $f$  применили линейное преобразование  $Q$ , если  $x = Qy, y \in \mathbb{R}^n$

$$g(y) = f(Qy) = (Qy)^T A (Qy) = y^T Q^T A Q y \text{ – снова квадратичная форма}$$

$$A_g = Q^T A_f Q$$

Если  $Q$  невырожденное, то  $\operatorname{rg} A_g = \operatorname{rg} A_f$

Мы будем рассматривать только невырожденные преобразования

Если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, то говорят, что форма приведена к каноническому виду

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2$$

$\sigma^+$  – положительный индекс инерции – число  $a_{ii} > 0$  в каноническом виде

$\sigma^-$  – отрицательный индекс инерции – число  $a_{ii} < 0$  в каноническом виде

$\sigma^0$  – число  $a_{ii} = 0$  в каноническом виде

$(\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$  – сигнатура квадратичной формы

$$\operatorname{rg} f = \sigma^+ + \sigma^- = n - \sigma^0$$

Нормальный вид квадратичной формы – канонический, где все  $a_{ii} = \pm 1$  или 0

## 5.2 Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду

$$1. \underbrace{A}_{=A^T} \Rightarrow \underbrace{\Lambda}_{Q^T A Q} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad // \text{todo когда-то 18.05 между 14:00 и 15:30}$$

2. Метод Лагранжа (метод выделения полного квадрата)

$$f(x) = x^T A x, A = A^T, x = \underbrace{Q}_{\text{невыр.}} y$$

$$g(y) = y^T B y = \sum_{i=1}^n b_{ii} y_i^2, B = Q^T A Q$$

(а) Пусть  $i = 1 \dots n, a_{ii} = 0$  (в квадратичной форме нет квадратов)

Пусть  $a_{ij} \neq 0, i \neq j$

$$x_i = y_i + y_j$$

$$x_j = y_i - y_j$$

$$x_k = y_k, k \neq i, j$$

$$f(x) = \dots + 2a_{ij}x_i x_j + \dots = \dots + 2a_{ij}y_i^2 - 2a_{ij}y_j^2 + \dots = g(y) - \text{есть ненулевые слагаемые с квадратами}$$

(б)  $\exists a_{ii} \neq 0$  (есть слагаемые с квадратом, тогда предыдущий шаг не нужен)

Выпишем из  $f$  все слагаемые, содержащие  $x_i$ :

$$a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{j \neq i} a_{ij}x_i x_j = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii}^2 x_i^2 + 2 \sum_{j \neq i} a_{ij}a_{ii}x_i x_j) = \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)^2 -$$

$$\frac{1}{a_{ii}} \underbrace{\left(\sum_{j \neq i} a_{jj}^2 x_j^2 + 2 \sum_{j,k \neq i} a_{ij}a_{ik}x_j x_k\right)}_{\text{нет } x_i}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{кв. форма от } x_1 \dots x_n \text{ без } x_i}$$

$$f(x) = \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_j a_{ij}x_j\right)^2 + \underbrace{\tilde{f}(x_1, \dots, \underbrace{\hat{x}_i}_{\text{без}}, \dots, x_n)}_{\text{кв.форма}}$$

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j, y_k = x_k, k \neq i, y = Q^{-1}x$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \neq 0 & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \text{ невырожденная}$$

$$x = Qy, g(y) = \frac{1}{a_{ii}} y_i^2 + \underbrace{\tilde{g}(y_1, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_n)}_{\text{кв. форма} \Rightarrow \text{повторим алгоритм}}$$

Метод универсальный: можно применить ко всем квадратичным формам, но заранее неизвестен канонический вид в отличие от ортогонального преобразования

### 3. Метод Якоби

$\Delta_k \neq 0, k = 1 \dots n-1, \Delta_i$  – угловые миноры (возможно,  $\delta_n = 0$ )

$$f(x) = x^T A x$$

Если  $A = A^* = A^T, \exists!$  унитарная нижняя  $L$ , верхнетреугольная  $U, D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n), d_i \in \mathbb{R}$

$L, U$  – унитар.  $\Rightarrow U, L$  – невырожденные

$$L^* = L^T, U^T = U^*$$

$$D = L^{-1} A (L^{-1})^T = (U^{-1})^T \underbrace{A}_{\text{матр. кв. формы}} U^{-1}$$

$x = Qy, Q = U^{-1} = (L^{-1})^T$  – верхнетреугольная матрица (матрица Якоби)

См. алгоритм  $LDU$  преобразования

$d_1, \dots, d_n$  – из алгоритма (числа на диагонали слева)

$$f(x) = g(y) = d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2, \text{rg } f \geq n-1$$

### Теорема Якоби

$\forall$  кв.ф.  $f \exists!$  верхнетреуг. преобр.  $Q: x = Qy$  такое, что кв. форма будет приведена к каноническому виду  $g(y) = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2$

Причем  $Q = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} & q_{13} & \dots & q_{1n} \\ 0 & 1 & q_{23} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$q_i = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{i-1,i} \end{pmatrix}$$

$$b_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{i-1,i} \end{pmatrix}$$

$$A_{k-1}q_k = -b_k, k = 2 \dots n$$

### Доказательство

Методом мат. индукции

1.  $k = 2$

$$a_{11} = \Delta_1 \neq 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & q_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^T A Q = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}q_{12} = -a_{12}$$

$$q_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$Q^T A Q = \text{diag}(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1})$$

2. Пусть верно для  $k : A_{j-1}q_j = -b_j, j = 1 \dots k, Q_k^T A_k Q_k = \text{diag}(d_1, \dots, d_k)$

$$\Delta_1, \dots, \Delta_k \neq 0$$

Покажем для  $k+1$

$$Q_{k+1} = \begin{pmatrix} Q & q_{k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть  $q_{k+1}$  – решение СЛНУ  $A_k q_{k+1} = -b_{k+1}$

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ b_{k+1}^T & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$$Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1} = \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ b_{k+1}^T & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} Q_k^T A_k & Q_k^T b_{k+1} \\ q_{k+1}^T A_k + b_{k+1}^T & q_{k+1}^T b_{k+1} + a_{k+1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_k^T & 0 \\ q_{k+1}^T & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{Q_k^T A_k Q_k}_{D_k} & \underbrace{Q_k^T A_k q_{k+1} + Q_k^T b_{k+1}}_{Q_k^T (A_k q_{k+1} + b_{k+1}) = 0} \\ 0 & q_{k+1}^T b_{k+1} q_{k+1} + a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_{k+1}^T A_{k+1} Q_{k+1}) = \underbrace{(\det Q_{k+1})^2}_1 \underbrace{\det A_{k+1}}_{\Delta_{k+1}} = d_1 \dots d_k x = \Delta_k x$$

$$x = \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = d_{k+1}$$

То индукционный переход доказан, нигде не использовано, что  $\Delta_{k+1} \neq 0$

Отсюда можно применить до  $k = n - 1 \rightsquigarrow n$

Метод Якоби не универсальный, но позволяет сразу записать канонический вид, не находя самого преобразования

### 5.3 Закон инерции кв. форм. Критерий Сильвестра

#### Теорема (Закон инерции кв. форм)

Каким бы линейным невырожденным преобразованием кв. ф.  $f$  не была приведена к канон. виду, сигнатура этого вида будет одна и та же

$$f(x) = x^T A x$$

$$\text{Пусть } x = \underbrace{Q_1}_{\text{невыр}} y, g(y) = y^T B y$$

$$x = \underbrace{Q_2}_{\text{невыр}} z, t(z) = z^T C z$$

$$\sigma(g) = \sigma(t) \text{ (сигнатуры)}$$

#### Доказательство

$$g(y) = \sum_{i=1}^p \underbrace{b_{ii}}_{>0} y_i^2 + \sum_{j=p+1}^r \underbrace{b_{jj}}_{<0} y_j^2, r = \text{rg } f = \text{rg } g$$

$$\sigma(g) = (p, r - p, n - r)$$

$$t(z) = \sum_{i=1}^s c_{ii} z_i^2 + \sum_{j=s+1}^r c_{jj} z_j^2$$

$$\sigma(t) = (s, r - s, n - r)$$

Пусть  $p < s$

Т.к.  $Q_1, Q_2$  невырожденные, рассмотрим системы:

$y = Q_1^{-1}x$  – по любому  $y$  однозначно находится  $x$

$z = Q_2^{-1}x$  – по любому  $z$  однозначно находится  $x$

Возьмем первые  $p$  строк системы  $Q_1^{-1}x$  и приравняем к нулю

$$(Q_1^{-1})_{1\dots p}x = 0$$

Возьмем последние  $n - s$  строк системы  $Q_2^{-1}x$  и приравняем к нулю

$$(Q_2^{-1})_{n-s\dots n}x = 0$$

Рассмотрим систему

$$(Q_1^{-1})_{1\dots p}x = 0$$

$$(Q_2^{-1})_{n-s\dots n}x = 0$$

Мы получили СЛОУ

Уравнений  $p+n-s < n$ . Тогда существует нетривиальное решение  $x_0 \neq 0$

Подставим  $x_0$  в наши системы

$y_0 = Q_1^{-1}x_0$  – первые  $p$  координат решения – нули, но сам он  $\neq 0$  в силу невырожденности  $Q_1^{-1}$

Аналогично с  $z_0 = Q_2^{-1}x_0$

$$f(x) = g(y) = t(z)$$

$$f(x_0) = \underbrace{g(y_0)}_{\leq 0} = \underbrace{t(z_0)}_{> 0} \text{ – противоречие}$$

### Определение

$f > 0$  – положительно определенная, если  $\forall x \neq 0 f(x) > 0$

Тогда  $f(x) = x^T A x > 0 \Leftrightarrow A > 0, A^T = A$

Аналогично  $f < 0$

$$f \geq 0 \Leftrightarrow \forall x : f(x) \geq 0, \exists x \neq 0 : f(x) = 0 \Leftrightarrow A \geq 0$$

$$f \geq 0 \Leftrightarrow \exists x : f(x) > 0, y : f(y) < 0 \Leftrightarrow A \not\geq 0$$

$$f > 0 \Leftrightarrow \forall \text{ с.ч. } > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 = g(y) > 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (n, 0, 0)$$

$$f < 0 \Leftrightarrow \forall \text{ с.ч. } < 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (0, n, 0)$$

$$f \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (r, 0, n-r), r < n$$

$$f \leq 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (0, r, n-r), r < n$$

$$f \geq 0 \Leftrightarrow \sigma(f) = (r, s, n-r-s), r, s > 0$$

### Замечание

$f > 0 \Rightarrow -f < 0$  и т.д.

### Теорема (критерий Сильвестра)

Если  $\Delta_k \neq 0, k = 1 \dots n$

Тогда  $f > 0 \Leftrightarrow \Delta_k > 0 \forall k$

Тогда  $f < 0 \Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0 \forall k$

$(\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots)$

### Доказательство

Берем метод Якоби

## 5.4 Приведение уравнения ПВП к каноническому виду

$i, j, k$  - о.н.б.

$V_3$  - лин.пр-во геом. векторов

$$\underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0}_{\text{лин.форма}} = 0$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = v^T A v + 2a^T v + a_0 = 0$$

$$i, j, k \xrightarrow{Q \text{ орт}} e'_1, e'_2, e'_3 - \text{о.н.б.}$$

$$Q = T_{ijk \rightarrow e'} - \text{поворот}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3)$$

Т.к. ориентация не меняется,  $\det A = 1 > 0$

$A \xrightarrow{Q}$  диагональная (канонический вид)

$$v = Qv'$$

$$v^T A v = v'^T Q^T A Q v$$

Для кв.ф.  $f$  построим ортогональное преобразование  $f$  такое, что  $f \xrightarrow{Q}$  канонический вид

$Q$  - матрица поворота  $\det Q = 1 \Rightarrow$  столбцы  $Q$  - координаты нового базиса  $\Rightarrow$  оси

$$\text{После преобразования получим } \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \underbrace{2a'^T Q v'}_{2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z} + a_0 = 0$$

1.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_1 x' = \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{a_1^2}{\lambda_1}$$

Аналогично с  $y, z$

Получили параллельный перенос.  $O' = (-\frac{a'_1}{\lambda_1}, -\frac{a'_2}{\lambda_2}, -\frac{a'_2}{\lambda_2})$

Получили  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 x''^2 + \lambda_3 x''^2 + a'_0 = 0$  Если  $a'_0 \neq 0$

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 + \gamma z''^2 = 1$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$  – эллипсоид

$\alpha, \beta, \gamma < 0$  –  $\emptyset$

$\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$  – однополостной

$\alpha, \beta < 0, \gamma > 0$  – двуполостной

Если  $a'_0 = 0$

$\alpha, \beta > 0$  – конус

$\alpha \cdot \beta < 0$  – конус

$\alpha, \beta$  – точка

2.  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$

Выполним перенос

$$x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$$

$$y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$$

Если  $a'_3 \neq 0$

$$z'' = z' + \frac{a_0}{2a'_3}$$

$$2a'_3 z' + a_0 = 2a'_3 (z + \frac{a_0}{2a'_3})$$

Получили  $\alpha x''^2 + \beta y''^2 = z''$

$\alpha \cdot \beta > 0$  – эллиптический парабороид

$\alpha \cdot \beta < 0$  – гиперболический парабороид

Если  $a'_3 = 0$

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$$

Если  $a_0 \neq 0$

$$\alpha x''^2 + \beta y''^2 = 1$$

$\alpha, \beta > 0$  – эллиптический цилиндр

$\alpha, \beta < 0$  –  $\emptyset$

$\alpha \cdot \beta < 0$  – гиперболический цилиндр

Если  $a_0 = 0$

$$y''^2 = \alpha x''^2$$

$\alpha > 0 \Rightarrow + \pm \sqrt{\alpha} x''$  – пересекающиеся плоскости

$\alpha < 0 \Rightarrow x = y = 0$  – прямая



$$3. \lambda_1 \neq 0, \lambda_2, \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 x''^2 + 2a'_2 y'' + 2a'_3 z'' + a'_0 = 0$$

$$\text{Если } a'_2, a'_3 \neq 0$$

Выполним поворот в плоскости  $O''Y''Z''$  на  $\alpha : \operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha'_3}{\alpha'_2}$

Получили  $\lambda_1 x''^2 + 2a''_2 y''' + a'_0 = 0$  – параболический цилиндр

$$\text{Если } a'_3 = 0, a'_2 \neq 0$$

Аналогично

$$a'_2 = a'_3 = 0$$

$$\lambda_1 x''^2 \neq a'_0 = 0$$

$$x''^2 = \alpha$$