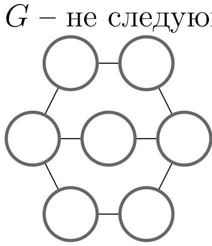
Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

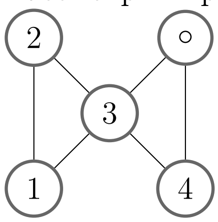
1 Friends and strangers graph

Рассмотрим связный неориентированный граф G из n вершин
В $n-1$ вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)
Для каких графов G можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?
Теорема Уилсона
Если граф G:

- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины $n \geq 4$
- G – не следующий граф:


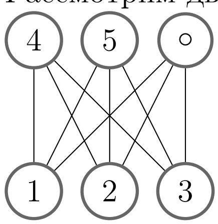
то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно
Доказательство необходимости

- Рассмотрим граф

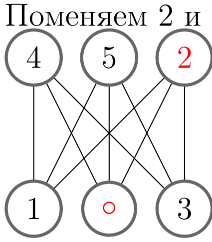


Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

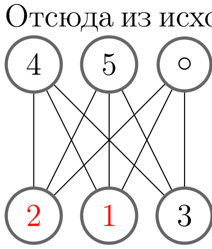
- Рассмотрим двудольный граф



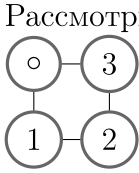
Рассмотрим его как перестановку
Поменяем 2 и $\circ$ местами



Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится $\circ$) не изменилась
Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку



- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

Доказательство достаточности
Отсутствует...
Рассмотрим обобщение предыдущей игры:
Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"
Т.е. теперь у нас два графа: "географический"граф X и граф дружбы Y
В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка"с $\circ$ в центре (т.е. $\circ$ дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)
Построим граф $FS(X, Y)$ – граф друзей и врагов
В нем будет $n!$ вершин
Каждая вершина графа – биекция $\sigma : V(X) \to V(Y)$
Получается, что σ – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к. $V(x)$ – множество вершин, а $V(Y)$ – множество фишек)
Вершины σ и σ' соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским"обменом
Тогда из любой перестановки можно получить любую $\Leftrightarrow$ граф связен
Из теоремы Уилсона: $FS(G, K_{1,n-1}), G$ – из теоремы Уилсона, $K_{1,n-1}$ – звездочка с вершиной n в центре
Ответим на другой вопрос: Для каких G граф $FS(G, C_n), C_n$ – цикл длины n – связен
Лемма
Графы $FS(X, Y)$ и $FS(Y, X)$ – изоморфны
Т.е. можно построить биекцию $u \overset{\theta}{\leftrightarrow} u'$ такую, что ребра uv и $\theta(u)\theta(v)$ существуют одновременно
Доказательство
Построим биекцию $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$
Теперь рассмотрим граф $FS(C_n, G)$
Теперь рассмотрим следующую ситуацию:
По кругу стоят $3n$ человек: n семей вида папа-мама-ребенок
Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой
//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

2 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

2.1 Линейные отображения

Определение
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – множество линейных отображений из X в Y (линейные пространства)
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – линейное пространство
Обозначение
Пусть $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
$\|A\| := \sup\limits_{|x|=1} |A(x)|$
Замечание 1
$\|A\| \in \mathbb{R}$
Доказательство
Было доказано: $|Ax| \leq C_a|x|, C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$
Замечание 2
Из теоремы Вейерштрасса $\sup \leftrightarrow \max$ в конечномерном случае
Замечание 3
$\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $|Ax| \leq \|A\||x|$
Доказательство
Для $x = 0$ очевидно
$\widetilde{x} := \dfrac{x}{|x|}$
$|A\widetilde{x}| \leq \|A\|$
Замечание 4
Если $\exists\, C : \forall\, x$ $|Ax| \leq C|x|$, то $\|A\| \leq C$
Пример

- $m = n = 1$
  A – линейное отображение: $x \mapsto ax$
  $\|A\| = |a|$

- $m = 1, n$ – любое
  $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
  Тогда $\exists\, \overline{v} \in \mathbb{R}^n Ax = x\overline{v}$
  $\|A\| = |\overline{v}|$

- $n = 1, m$ – любое
  $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Тогда $\exists\, l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l\rangle$
$\|A\| = |l|$

- m, n – любые
  $A = (a_{ij})$
  $x \mapsto Ax$
  $\|A\|$ так легко не считается((((

Лемма
Пусть X, Y – нормированные линейное пространство
$A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$
Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A – ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$
2. A – непрерывно в $\mathbb{0} \in X$
3. A – непрерывно на X
4. A – равномерно непрерывное ($\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$)

Доказательство
$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ – очевидно
Докажем $2 \Rightarrow 1$
Возьмем $\varepsilon = 1$
$\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x : |x| < \delta\ |Ax| < 1$
Возьмем $|x| = 1$
$Ax| = \dfrac{1}{\delta}|A(\delta x)| < \dfrac{1}{\delta}$
Тогда $\|A\| \leq \dfrac{1}{\delta}$
Докажем $1 \Rightarrow 4$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{\|a\|} :\ \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$
$|Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \leq \|A\||x_1 - x_2| < \varepsilon$
Теорема о пространстве линейных отображений

- $\|\cdot\|$ – норма в $\mathrm{Lin}(X, Y), X, Y$ – конечномерные нормированные пространства
  Т.е.

1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство
$\|A\| \geq 0$ – тривиально
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$
$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{C} |x| \Rightarrow \|A + B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$
$|BAx| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$
Замечание
В $\mathrm{Lin}(X, Y)$
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup\limits_{|x|<1} |Ax| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X\ |Ax| \leq C|x|\}$
Теорема Лагранжа (для отображений)
$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируема в D – открытом
$a, b \in D, [a, b] \subset D$
Тогда $\exists\, c \in [a, b]$, т.е. $\exists\, \theta \in [0, 1] : c = a + \theta(b - a) :\ \ |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$
Доказательство
$f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$
$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$
$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1 - 0) = |F'(a + \theta(b - a))(b - a)| \leq \|F'(a + \theta(b - a))\| |b - a|$
Лемма
$B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
$\exists\, c > 0 : \forall\, x\ |Bx| \geq c|x|$
Тогда B – обратим и $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$
Доказательство
Обратимость очевидна, т.к. $\mathrm{Ker}\, B = \{\mathbb{0}\}$. Тогда $\exists\, B^{-1}$
$|\underbrace{B^{-1}y}_{x}| \leq \dfrac{1}{c} |BB^{-1}y| = \dfrac{1}{c} |y|$

Замечание
Ω_m – множество обратимых линейных операторов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$|x| = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\||Ax|$
Т.е. $|Ax| \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}|x|$
Теорема об обратимости линейного операторого, близкого к обратимому
$L \in \Omega_m$ – обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
$M \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \le \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$ – M – близкий к L
Тогда

- $M \in \Omega_m$ – т.е. Ω_m – открытое
- $\|M^{-1}\| \le \dfrac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \le \dfrac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}\|L - M\|$

Доказательство 1 и 2
$Mx = Lx + (M - L)x$
$|Mx| \ge |Lx| - |(M-L)x| \ge \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|M-L\||x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|)|x|$
1 и 2 следуют из леммы
Доказательство 3
$\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{m-l}{lm}$
Аналогично $L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$
$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M - L)L^{-1}\| \le \|M^{-1}\|\|M - L\|\|L^{-1}\| \le$ из пункта 2
Следствие (непрерывность вычисления обратного оператора)
Отображение $L \mapsto L^{-1}$, заданное на Ω_m, непрерывно
Доказательство
Доказательство по Гейне
Рассмотрим последовательность операторов $B_k : B_k \to L$
Проверим, что $B_k^{-1} \to L^{-1}$
Н.С.Н.М. $\|B_k - L\| < \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$

$$\|B_k^{-1} - L^{-1}\| \le \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \underbrace{\|L - B_k\|}_{\to 0}}}_{\text{огр}} \underbrace{\|L - B_k\|}_{\to 0} \to 0$$

Теорема (о непрерывно дифференцируемых отображениях)
$F : \underbrace{D}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, дифф. на D
$F' : D \to \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$
Тогда $1 \leftrightarrow 2$

1. $F \in C^1(D)$ (все частные производные непрерывны на D)
2. $F' : D \to \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ – непрерывно на D
   $\forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| < \varepsilon$

Доказательство $1 \to 2$
Пусть $F \in C^1(D)$
$\forall\, i, j\ \forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$
Тогда $\|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| \leq \sqrt{\sum_{ij} (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}))^2} \leq \varepsilon$
Доказательство $2 \to 1$
Пусть $\forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| < \varepsilon$
$h = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots 0)^T$
$|\underbrace{(F'(x) - F'(\widetilde{x})h)}_{\sum_{i=1}^{l} (\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\widetilde{x}))}| \leq \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\||h| \leq \varepsilon$
Отсюда $\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\widetilde{x}))^2} \leq \varepsilon$
Тогда для $i = i_0$ – $|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(\widetilde{x})| \leq \varepsilon$

3 Экстремумы

Определение
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$a \in D$ – локальный максимум $f \Leftrightarrow \exists\, U(a) : \forall\, x \in U(a) \cap D\ f(x) \leq f(a)$ (нестрогий экстремум)
$a \in D$ – локальный строгий максимум $f \Leftrightarrow \exists\, U(a) : \forall\, x \in U(a) \cap D\ f(x) < f(a)$ (строгий экстремум)

Теорема Ферма
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$a \in \operatorname{Int} D, f$ – дифференцируема
a – экстремум
Тогда $\forall$ направление l $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$
Доказательство
$g(t) = f(a + tl), t \in \mathbb{R}$ – задана в окрестности 0
$g'(0) = 0$
$$g'(t) = f'l = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial l}$$
Следствие (необходимое условие экстремума)
a – локальный экстремум
Тогда $\forall\, 1 \le k \le m$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$
Следствие (т. Ролля)
Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ – компакт
f – дифференцируема в $\operatorname{Int} K$ ($f : K \to \mathbb{R}$, непрерывна)
$f_{\partial K} = \mathrm{const}, \partial K$ – граница компакта
Тогда $\exists\, x_0 \in \operatorname{Int} K : \operatorname{grad} f(x_0) = 0$
Доказательство
По теореме Вейерштрасса f достигает $\max, \min$ на K
Если оба на ∂K, то $f \equiv \mathrm{const}$ на K
Иначе применим теорему Ферма
Определение
$Q(h) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма, если она представляет однородный многочлен 2 степени
т.е. $Q(h) = \sum\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m} a_{ij} h_i h_j, a_{ij} = a_{ji}$
Q – положительно определенная $\Leftrightarrow \forall\, h \ne 0\ Q(h) > 0$
Q – отрицательно определенная $\Leftrightarrow \forall\, h \ne 0\ Q(h) < 0$
Q – незнакоопределенная $\Leftrightarrow \exists\, h : Q(h) > 0, \exists\, h : Q(h) < 0$
Q – полуопределенная (положительно определенная вырожденная) $\Leftrightarrow$ $\forall\, h\ Q(h) \ge 0, \exists\, h \ne 0 : Q(h) = 0$
Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

1. $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – кв. форма, $Q > 0$
   Тогда $\exists\, \gamma_Q > 0 : \forall\, x\ Q(x) \geq \gamma_Q |x|^2$

2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – норма
   Тогда $\exists\, C_1, C_2 > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^m\ C_1|x_1| \leq p(x) \leq C_2|x_2|$

Доказательство

1. $\gamma_Q := \min\limits_{|x|=1} Q(x) > 0$
   Тогда $Q(x) = |x|^2 Q(\dfrac{x}{|x|}) \geq \gamma_Q |x|^2, x \neq 0$

2. Проверим, что $p(x)$ непрерывна, чтобы доказать существование минимума и максимума:
   $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) = p(\sum (x_k - y_k)\overline{e_k}) \leq \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq M|x-y|, M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$ – по КБШ
   $C_1 = \min\limits_{|x|=1} p(x), C_2 = \max\limits_{|x|=1} p(x)$
   $p(x) = |x| p(\dfrac{x}{|x|}) \leq |x| C_2, \geq |x| C_1$

Напоминание
$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}\, f(x,h) + \dfrac{1}{2!}\mathrm{d}^2\, f(x,h) + \ldots$
$\mathrm{d}^2\, f(x,h) = f''_{x_1x_1}(x)h_1^2 + \ldots + f''_{x_nx_n}h_n^2 + 2f''_{x_1x_2}h_1h_2 + \ldots$
Теорема (достаточное условие экстремума)
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in \mathrm{Int}\, D, \mathrm{grad}\, f(a) = 0, f \in C^2(D)$
$Q(h) := \mathrm{d}^2\, f(a,h)$
Тогда $Q > 0 \Rightarrow a$ – локальный минимум
$Q < 0 \Rightarrow a$ – локальный максимум
$Q \lesseqgtr 0$ – не точка локального экстремума
$Q \geq 0$ – информации недостаточно
Доказательство
$\forall\, h\ \exists\, t \in (0,1) : f(a+h) = f(a) + \underbrace{\mathrm{d}\, f(a,h)}_{0} + \dfrac{1}{2!}\mathrm{d}^2\, f(a+th,h)$ – остаток в формуле Лагранжа
$f(a+h) - f(a) = \dfrac{1}{2!}Q(h) + \dfrac{1}{2!}(\underbrace{f''_{x_1x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1x_1}(a)h_1^2}_{|\text{б.м.}\cdot h_i^2| = o(|h|^2)} + \ldots + \underbrace{f''_{x_1x_2}h_1h_2 - f''_{x_1x_2}(a)h_1h_2}_{|\text{б.м.}\cdot h_ih_j| = o(|h|^2)} + \ldots)$

$f(a+h)-f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{2}\gamma_Q|h|^2 - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0, \alpha(h)$ – б.м., при достаточно малых $|h|$
Пункт 1 доказан
Пункт 2 доказывается заменой $f \to -f$
Пункт 3: $h : Q(h) > 0, \widetilde{h} : Q(\widetilde{h}) < 0$
Аналогично п.1. $f(a + s \cdot h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{1}{2}Q(h)s^2 - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h) \cdot s^2$
С другой стороны $f(a + s \cdot \widetilde{h}) < 0$ по аналогичным соображениям
Пункт 4: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, a = (0,0)$
$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$
$Q(h) = 2h_1^2$ – полуопределенный
Тут нет экстремума
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ – в нуле экстремум

4 Функциональные последовательности и ряды

4.1 Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение
Последовательность функций – отображение $N \rightsquigarrow$ множество функций
Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots : X \to \mathbb{R}, X$ – любое множество
Последовательность (f_n) сходится поточечно на E – существует функция $f(x)$
$f_n \underset{E}{\to} f$
$\forall x \in E \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Последовательность (f_n) сходится равномерно на E к функции f
$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; \underbrace{\forall x \in E \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| = \rho(f_n, f) \leq \varepsilon}$

Замечание
$f \rightrightarrows f$ на $E, E_0 \subset E$
Тогда $f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows}$
Замечание
$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$

Тогда $f_n \underset{E}{\to} f$

Замечание

$\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}, f$ – огр.$\}$

Тогда $\to (f, g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ является метрикой на $\mathcal{F}$

Доказательство

Первые две аксиомы очевидны

Докажем неравенство треугольника

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 : \rho(f, g) - \varepsilon < |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

Отсюда $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

Замечание

$f_n \rightrightarrows f$ на E_1 и на E_2

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $E_1 \cup E_2$

Теорема 1 (Стокса - Зайдля)

X – метрическое пространство

$f_n, f : X \to \mathbb{R}$

$c \in X, f_n$ – непрерывная в c

$f_n \rightrightarrows f$ на X

Тогда f – непрерывна в c

Доказательство

Дано утверждение о равномерной сходимости

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$

Начиная с некоторого большого n :

$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{<\varepsilon}$

Т.к. f_n непрерывна, то $\exists U(c) : \forall x \in U(c) \; |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$

Отсюда $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists U(c) : \forall x \in U(c) \; |f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Замечание

Вместо метрических пространств можно рассматривать топологические пространства(без изменения доказательства)

Следствие

$f_n \in C(X), f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда $f \in C(X)$

Следствие 2

$f_n \in C(X), \forall c \; \exists W(c) : f_n \rightrightarrows f$ на $W(c)$. Тогда $f \in C(X)$

Замечание

$f_n \rightrightarrows f$ на $X \not\Leftarrow \forall\, c\, \exists\, W(c) : f_n \rightrightarrows f$

Пример: $f_n = x^n, x \in (0,1)$

$f \equiv 0$

Рассмотрим точку x в $(\alpha, \beta), \beta \neq 1$

$\rho(f_n, f) = \beta^n \to 0$

$f_n(x) \rightrightarrows f$ на (α, β)

Но $\rho(f_n, f) = 1$ на $(0,1)$

$f_n \not\rightrightarrows f$ на $(0,1)$

Теорема

X – компакт

$\rho(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ в $C(X)$

Тогда $(C(X), \rho)$ – полное метрическое пространство

(фунд. – это $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, m, n > N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$)

Доказательство

Пусть f_n – фундаментальная последовательность в $C(X)$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, n, m > N\ \rho(f_n, f_m) = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Тогда $\forall\, x_0 \in X$ последовательность $n \mapsto f_n(x_0)$ – фунд. вещ. посл.

Тогда $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ – конечная

Проверим, что $f_n \rightrightarrows f, f \in C(X)$

$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N : \forall\, n, m > N\ \forall\, x\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N : \forall\, n > N\ \forall\, x\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (предельный переход $m \to \infty$)

Т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на X

$f \in C(X)$ по теореме 1

Замечание

$\mathcal{F}(X) =$ пространство ограниченных функций на X

$(\mathcal{F}(X), \rho)$ – полное м.п.

Доказательство

Аналогичное

Теорема (критерий Больцано-Коши)

$f_n \in C(X)$

$\exists\, f \in C(x) : f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, n, m > N\ \forall\, x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

4.2 Предельный переход под знаком интеграла

Подумаем о следующем правиле: $f_n \to f \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Анти-пример

$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n), x \in [0,1], f_n \to f \equiv 0$

$\int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n)\,\mathrm{d}\,x \underset{t=x^n}{=} \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}$

Теорема 2

$f_n \in C[a,b]$

$f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Тогда $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

(по т.1. f – непрерывна)

Доказательство

$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| = |\int_a^b f_n - f| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup|f_n - f|(b-a) \to 0$

Следствие (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)

$f : \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \to \mathbb{R}$

$\forall\, x, y \exists\, f'_y(x,y)$ и f, f'_y – непрерывные на $[a,b] \times [c,d]$

Тогда для $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ верно, что Φ – дифференцируема на $[c,d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

Доказательство

$\frac{\Phi(y+t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \int_a^b \frac{f(x,y+t_n) - f(x,y)}{t_n}\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{по т.Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, t + \Theta_x t_n)\,\mathrm{d}\,x \overset{(*)}{\to} \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

Проверим $(*)$:

Вспомним теорему Кантора о равномерной непрерывности

$f \in C(K)$. Тогда f – равномерно непрерывная

Т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists\,\delta > 0}_{\exists\, N : \forall\, n > N \;\; |t_n| < \delta} \quad : \forall\, x, \overline{x} : \rho(x, \widetilde{x}) < \delta \;\; |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$

Тогда $\rho((x, y + \Theta_x t_n), (x,y)) < \delta$

И значит $|f(x, y + \Theta_x t_n) - f(x,y)| < \varepsilon$

Т.е. $|\int_a^b f'_y(x, y+\Theta_x t_n) - \int_a^b f'_y(x,y)| \le \varepsilon(b-a)$

Теорема 3 (о предельном переходе по знаку производной)

Пусть $f_n \in C^1\langle a,b\rangle$

$f_n \to f_0$ поточечно на $\langle a,b\rangle$

$f'_n \rightrightarrows \phi$ на $\langle a,b\rangle$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a,b\rangle, f'_0 = \phi$ на $\langle a,b\rangle$

Пояснение

$\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))'$

Доказательство

$[x_0, x_1] \subset \langle a,b\rangle$

$f'_n \rightrightarrows \phi$ на $[x_0,x_1]$ (отсюда ϕ непрерывна)

Тогда по т.2 $\int_{x_0}^{x_1} f'_n \to \int_{x_0}^{x_1} \phi$

$\underbrace{f_n(x_1) - f_n(x_0)}_{\to(f_0(x_1)-f_0(x_0))} \to \int_{x_0}^{x_1} \phi$

Т.о. f_0 – первообразная ϕ

ϕ – непрерывна по т.1

Отсюда $f'_0 = \phi$

Определение

$u_n(x) : E \to \mathbb{R}$

$\sum u_n(x_0)$

$S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x), S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

$S_N \rightrightarrows S$ на $E \Leftrightarrow$ ряд равномерно сходится в E

$\Leftrightarrow M_N = \sup\limits_{x\in E} |\sum\limits_{n>N} u_n(x)| \underset{N\to+\infty}{\to} 0$

Теорема (признак Вейерштрасса)

$\sum u_n(x), x \in E$

Пусть $\exists\, (c_n) \in R : \forall\, x \in E |u_n(x)| \le c_n$

и $\sum c_n$ – сходится

Тогда u_n равномерно сходится на E

Доказательство

Рассмотрим $M_N = \sup\limits_{x\in E} |\sum\limits_{n>N} u_n(x)| \le \sum\limits_{n>N} c_n \underset{N\to\infty}{\to} 0$

Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N : \forall n > N \, \forall k \in \mathbb{N} \, \forall x \in E \; |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| < \varepsilon$
эквивалентно равномерной сходимости
(если нет равномерной сходимости, то нет и критерия Больцано-Коши)
Пример
$\sum \dfrac{x}{1+n^4x^2}, x \in (0, +\infty)$
Есть ли равномерная сходимость?
$c_n = \max\limits_x \dfrac{x}{1+n^4x^2} = \dfrac{1}{2n^2}$
$\sum c_n = \sum \dfrac{1}{2n^2}$ – сходится (т.е. есть равномерная сходимость)
Пример 2
$\sum \dfrac{xn}{1+n^4x^2}, x \in (0, +\infty)$
$c_n = \dfrac{1}{2n}, \sum \dfrac{1}{2n}$ – расходится
Применим критерий Больцано-Коши
$\exists \varepsilon = \dfrac{1}{17} : \forall N \; \exists n > N, m = n, x = \dfrac{1}{n^2} : |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{2n}(x)| \geq$

$$\frac{(n+1)\frac{1}{n^2}}{1+(n+1)^4\frac{1}{n^4}} + \ldots + \frac{2n\frac{1}{n^2}}{1+(2n)^4\frac{1}{n^4}} \geq n\frac{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{нижняя оценка числителя}}}{\underbrace{17}_{\text{верхняя оценка знаменателя}}} = \frac{1}{17}$$

Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов)
$u_n : X \to \mathbb{R}, X$ – метрическое пространство
u_n – непрерывно в $x_0 \in X$
$\sum u_n$ – равномерно сходится в X
Тогда $S(x) = \sum u_n$ – непрерывно в x_0
Доказательство
$f_n \leftrightarrow S_n, f \leftrightarrow S$ + теорема Стокса-Зайдля для функций
Пример
$\sum \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ – непрерывно
Пример 2
$\sum \dfrac{nx}{1+n^4x^2}$
Возьмем $x_0 > 0$ и окрестность $(a, b) : 0 < a < x < b$
$|\dfrac{nx}{1+n^4x^2}| \leq \dfrac{nb}{1+n^4a^2} =: c_n$
$\sum c_n$ – сходится

Тогда наш ряд равномерно сходится в (a, b)
Тогда он непрерывен
Теорема 2'
$u_n \in C[a.b]$
$\sum u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$
$S(x) = \sum u_n(x)$
Тогда $\int_a^b S(x) \, \mathrm{d}\, x = \sum (\int_a^b u_n(x) \, \mathrm{d}\, x)$
Доказательство
Применим теорему 2
$\int_a^b S(n) \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b S$
$\int_a^b (\sum_{k=1}^n u_k) = \sum_{k=1}^n (\int_a^b u_k)$
Пример
$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ – равномерно сходится на $[-q, q]$, где $0 < q < 1$
$|(-1)^n x^n| \leq q^n, \sum q^n$ – сходится (т. Вейерштрасса)
$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x} \int_0^q \frac{1}{1+x} \, \mathrm{d}\, x = \ln(1+q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1}$
$\ln(1+q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \ldots, q \in (-1, 1)$
Заметим, что формула верна и при $q = 1$, но исходный ряд не будет сходиться, т.к. слагаемые не будут бесконечно малыми нснм
Пример 2
Ряд $q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \ldots$ равномерно сходится на $[0, 1]$
по секретному приложению к признаку Лейбница
$|\sum_{n>N} (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n}| \leq \frac{q^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \to 0$ (тогда равномерно сходится)
Тогда сумма в правой части непрерывна на $[0, 1]$ по Т.1'
Тогда формула из примера 1 «продолжается» по непрерывности на точку 1

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру)

$u_n \in C^1\langle a, b\rangle$

1. $\sum u_n(x) = S(x)$ – поточечная сходимость на $\langle a, b\rangle$
2. $\sum u_n'(x) = \phi(x)$ – равномерная сходимость на $\langle a, b\rangle$

Тогда $S(x) \in C^1$ и $S' = \phi$ на $\langle a, b\rangle$

Другими словами, $(\sum u_n(x))' = \sum u_n'(x)$, если исходный ряд <u>равномерно сходится</u>

Доказательство

Применим Т.3:

$f_n = S_n, f_0 = S$

$f_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x), \phi = \phi$

Пример

$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{x}{n})e^{-\frac{x}{n}}$

$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$

$(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})' = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$

$\sum -\frac{x}{n(n+x)}$ – сходится

Проверим, что ряд равномерно сходится при больших x

$m > 0, x \in (0, m)$

$|-\frac{x}{n(n+x)}| \leq \frac{M}{n(n+M)}$

$\sum \frac{M}{n(n+M)} \leq +\infty$

По признаку Вейерштрасса $\sum -\frac{x}{n(n+x)}$ – равномерно сходится на $(0, M)$

$\sum(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$ – дифференцируемо при $x > 0$

$\Gamma(x) = xe^{\gamma x}\exp(\sum(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}))^{-1}$ – дифференцируемо при $x > 0$ и ее производная непрерывна

На самом деле $\Gamma \in C^\infty$

Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах)
$u_n : E \subset X \to \mathbb{R}, X$ – м.п.
$x_0 \in E, x_0$ – предельная точка в E
Пусть

1. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$
2. $\sum u_n(x)$ – равномерно сходится на E

Тогда

1. $\sum a_n$ – сходится
2. $\sum a_n = \lim\limits_{x\to x_0} \sum u_n(x)$

Доказательство п.1
Докажем сходимость
$S_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$
$S_n^a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
Проверим фундаментальность S_n^a
Возьмем $\varepsilon > 0$
$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0\text{, чтобы } \ldots < \frac{\varepsilon}{3}} + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0\text{, чтобы } \ldots < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$
Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$:
$\exists\, N : \forall\, n > N\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, x\ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$
Отсюда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N : \forall\, n > N\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ |S_{n+p}^a - S_n^a| < \varepsilon$
Доказательство п.2
Результат следует из теоремы Стокса-Зайдля
$\widetilde{u}_n(x) = \left[\begin{array}{ll} u_n(x), & x \in E \\ a_n, & x = x_0 \end{array}\right.$
$\widetilde{u}_n(x)$ – непрерывная в x_0
$\sup\limits_{E\cup\{x_0\}} |\sum\limits_{n\geq N} \widetilde{u}_n(x)| \leq \underbrace{\sup\limits_{E} |\sum\limits_{n\geq N} u_n(x)|}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|\sum\limits_{n\geq N} a_n|}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

$\sum \widetilde{u}_n$ – равномерно сходится на $E \cup \{x_0\}$

Теорема 4 (перестановки в предельных переходах)

$f_n : E \subset X \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка E

1. $f_n(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A_n$ – конечный
2. $\exists\, S : E \to \mathbb{R} :\ f_n \underset{n \to +\infty}{\rightrightarrows} S$ на E

Тогда

1. $\exists \lim A_n = A$ – конечный
2. $S(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A$

Т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

Доказательство

Применим теорему 4'

$f_n(x) \leftrightarrow S_n(x)$

$u_n \leftrightarrow f_n - f_{n-1}$ (за исключением $u_1 = f_1$)

$a_k \leftrightarrow A_k - A_{n-1}$ (кроме $a_1 = A_1$)

$\sum u_n(x) \leftrightarrow S(x)$

Замечание

$f_n \rightrightarrows S$ на E

Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N : \forall\, n > N\ \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Определим равномерный предел при $t \to t_0$

$f : E \times D \to \mathbb{R}, E$ – множество, $D \subset Y$ – м.п., t_0 – предельная тока D

$f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} h(x)$, где $h : E \to \mathbb{R}$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U(t_0) : \forall\, t \in U(t_0)\ \sup\limits_{x \in E} |f(x,t) - h(x)| < \varepsilon$

Теорема 4"

$f : E \times D \to \mathbb{R}, E \subset X$ – м.п., $D \subset Y$ – м.п., x_0 – предельная точка E, t_0 – предельная точка D

1. $\forall\, t\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x,t) = A(t)$ – конечный
2. $f(x,t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} S(x)$, где $S : E \to \mathbb{R}$

Тогда

1. $\exists$ конечный $\lim\limits_{t\to t_0} A(t) = A$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$

Теорема (признак Дирихле равномерной сходиости ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x), x\in X$
Пусть

1. $\exists\, C_A : \forall\, N\ \forall\, x\ |\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| \le C_A$
   (частичные суммы ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены)

2. $b_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на X и $\forall\, x$ b_n монотонна при каждом фиксированном X

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ – равномерно сходится на X
Доказательство
$\sum\limits_{N\le k\le M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1}b_{N-1} + \sum\limits_{N\le k\le M-1} (b_k - b_{k+1})A_k$
$A_k = a_1 + \ldots + a_k$
Из равномерной сходимости: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, T : \forall\, M, N > T\ \ \sup|b_M(x)| < \varepsilon; \sup|b_{N-1}(x)| < \varepsilon, \sup|b_{M-1}(x)| < \varepsilon, \sup|b_N(x)| < \varepsilon$
$|\sum\limits_{N\le k\le M} a_k(x)b_k(x)| \le |A_M||b_M| + |A_{N-1}||b_{N-1}| + \sum |b_k - b_{k+1}||A_k| \le C_A(|b_M| + |b_{N-1}| + |b_{N-1}| + |b_N|) < 4C_A\varepsilon$
Следствие (признак Абеля)
$\sum a_n(x)b_n(x), x\in E$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на E

2. b_n монотонно по n при каждом x
   $b_n(x)$ – равномерно ограничена: $\exists\, C_B : \forall\, x\ \forall\, n\ |b_n(x)| \le C_B$

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x), x\in E$ равномерно сходится на E
Пример
$f(x) = \sum \dfrac{\sin nx}{n^3}, x\in\mathbb{R}$

f – непрерывно по признаку Вейерштрасса: $|\dfrac{\sin nx}{n^3}| \leq \dfrac{1}{n^3}, \sum \dfrac{1}{n^3}$ – сходится
f – дифференцируемо: $f' = \sum \dfrac{\cos nx}{n^2}$ – это выполнено по теореме 3', т.к. ряд равномерно сходится
Но дважды не дифференцируемо, т.к. нет равномерной сходимости
$\exists \varepsilon = \dfrac{1}{100} : \forall N \ \exists n > N : \exists m = n \ \exists x = \dfrac{1}{n} : |\dfrac{\sin(n+1)x}{n+1} + \ldots + \dfrac{\sin(n+m)x}{n+m}| > \varepsilon$
$\dfrac{\sin \frac{n+1}{n}}{n+1} + \ldots + \dfrac{\sin \frac{2n}{n}}{2n} > \dfrac{1}{20}$
Тогда докажем локальную равномерную сходимость (в окрестности некоторой точки)
В окрестности не должно быть $2\pi k$, иначе аналогично доказательству
Рассмотим окрестность $(\alpha, \beta), 2\pi k \notin (\alpha, \beta)$
$a_n = \sin nx, b_n(x) = \dfrac{1}{n}$ – монотонно, $b_n \rightrightarrows 0$
$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| \leq |\operatorname{Im}(e^{ix} + \ldots + e^{inx})| \leq |e^{ix} \dfrac{|}{|e^{inx} - 1|}|e^{ix} - 1| \leq \dfrac{2}{|e^{ix} - 1|} \leq \dfrac{2}{d}, d = \min(|e^{i\alpha} - 1|, |e^{i\beta} - 1|)$
Т.о. $\forall x_0 \in (0, 2\pi) \ \exists U(x_0)$ на которой имеется равномерная сходимость
Таким образом $f''(x) = \sum -\dfrac{\sin nx}{n} \ \forall x \in (0, 2\pi)$
Спойлер: $\sum \dfrac{\sin nx}{x}$ – не непрерывна в 0 – там имеется скачок
$\nexists f''(0)$

4.3 Степенные ряды

Определение
$B(z_0, r) \in \mathbb{C} := \{z : |z - z_0| < r\}$
Степенной ряд: $\sum a_n(z - z_0)^n, z_0 \in C, a_n$ – комплексная последовательность
Теорема (о круге сходимости степенного ряда)
$\sum a_n(z - z_0)^n$
Тогда выполнено ровно одно из трех

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$

2. Ряд сходится только при $z = z_0$

3. $\exists\, R \in (0, +\infty)$: при $|z - z_0| > R$ – расходися; $|z - z_0| < R$ – ряд сходится абсолютно

Утверждение
$\sum a_n$ – сходится $\Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_n, \sum \operatorname{Im} a_n$ – сходятся
Доказательство
Изучим ряд на абсолютную сходимость
Применим признак Коши: изучим $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n} = \overline{\lim}\, |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$:
При $\ldots < 1$ – абсолютно сходится
При $\ldots > 1$ – расходится, т.к. слагаемые $\not\to 0$
Рассмотрим $|z - z_0|\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ – всегда сходится (случай 1)

2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ – тогда сходится при $z = z_0$, иначе расходится (случай 2)

3. $|z - z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} =: R$ – сходится в $B(z_0, R)$ (случай 3)

R – *радиус сходимости*
$R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ – формула Коши-Адамара
Если применим признак Даламбера, то $R = \lim |\dfrac{a_n}{a_{n+1}}|$

Пример

1. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$
   $S_n = 1 + z + \ldots + z^n = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \to \dfrac{1}{1 - z}$
   Сходится при $|z| < 1$
   При $|z| = 1$ ряд расходится
   $R = 1$

2. $\sum \dfrac{z^n}{n}, R = 1$
   Рассмотрим $|z| = 1$: $z = 1$ – расходится; $z = -1$ – сходится

$z = e^{i\phi}$: $\sum \frac{e^{in\phi}}{n} = \sum \frac{\cos n\phi}{m} + i \sum \frac{\sin n\phi}{n}$, – сходится при $\phi \in (0, 2\pi)$
Т.е. сходимость при $|z| \leq 1$, кроме $z = 1$

3. $\sum \frac{z^n}{n^2}, R = 1$
   Рассмотрим $|z| = 1$
   $|\frac{z^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n}^2$ – сходится при $|z| \leq 1$

4. $\sum n! z^n$ – сходится при $z = 0$

5. $\sum \frac{z^n}{n!}, R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\ldots}}} = \frac{1}{\lim \frac{e}{n}} = +\infty$ – сходится при всех $z \in \mathbb{R}$

Теорема (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)
$\sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$
Тогда

1. Для $r : 0 < r < R$ ряд равномерно сходится на $\overline{B}(z_0, r)$

2. $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ – непрерывна на $B(z_0, R)$

Доказательство

1. по признаку Вейерштрасса
   $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$
   $\sum |a_n| r^n$ – сходится: подставим в ряд $z := z_0 + r$ – должен абсолютно сходиться

2. Проверим, что $a_n (z - z_0)^n$ – непрерывная функция:
   Возьмем $z_1 \in B(z_0, R)$
   Возьмем $r : |z_1 - z_0| < r < R$
   В круге $\overline{B}(z_0, r)$ есть равномерная сходимость $\Rightarrow$ есть непрерывность

Определение
Будем считать комплексную функцию дифференцируемой, если $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A = f'(z)$ (двойной предел)

Эквивалентно $f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$ Т.к. мы ввели другое определение производной, не будем пользоваться теоремой 2

Лемма

Пусть $w, w_0 \in \mathbb{C}, r > 0$

$|w| < r, |w_0| < r$

$|w^n - w_0^n| = |(w - w_0)(w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + ww_0^{n-2} + w_0^{n-1})| \leq |w - w_0| n r^{n-1}$

Теорема (о почленном дифференцировании ряда)

Пусть ряд A: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$

Ряд A': $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$

Тогда

1. A' имеет тот же радиус сходимости
2. Если $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$, то $\forall\, z \in B(z_0, R)$ $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$

Доказательство

Множество сходимости ряда A' такое же, как у ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z - z_0)^n$

$$R^{(A')} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n| n}} = \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Возьмем a в окрестности сходимости

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \begin{bmatrix} w = z - z_0 \\ w_0 = a - z_0 \end{bmatrix} = \sum a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \xrightarrow[w \to w_0]{}$$

$\sum a_n n w_0^{n-1}$ – при условии наличия равномерной сходимости в $U(w_0)$

Воспользуемся леммой, взяв $|a - z_0| < r < R$

Тогда при $|w| < r$ (и $|w_0| < r$): $|a_0 \dfrac{w^n - w_0^n}{w - w_0}| \leq n |a_n| r^{n-1}$

$\sum n a_n r^{n-1}$ – ряд A' в точке $z_0 + r$ – абсолютно сходится

Т.о. в $B(z_0, r)$ ряд $\sum a_n \dfrac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)}$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

Следствие 1

$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$

Тогда $f \in C^\infty(B(z_0, R))$
и все производные получаются почленным дифференцированием
Следствие 2
$a_n, x_0 \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n, x \in \mathbb{R}$ при $|x - x_0| < R$
Тогда при почленном интегрировании радиус сходимости сохраняется и
$\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1}$
Теорема (Метод Абеля суммирования рядов)
Пусть $\sum c_n$ сходится
$f(x) := \sum c_n x^n, x \in (-1, 1)$
Тогда $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \sum c_n$
Доказательство
Признак Абеля: $a_n(x) \leftrightarrow c_n$
$b_n(x) = x^n$ – здесь считаем, что $x \in [0, 1)$
Отсюда $\sum c_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1)$
Тогда $R \geq 1 \Rightarrow$ равномерно сходится на $(-1, 1)$
По Т.4' о предельном переходе в сумме предел суммы ($\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$) равен сумме пределов $\sum c_n$
Следствие
$\sum a_n = A$
$\sum b_n = B$
$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$
Пусть ряд $\sum c_n$ сходится и $\sum c_n = C$
Тогда $AB = C$
Доказательство
$f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n$
$x \in (0, 1)$ – ряды сходятся абсолютно
Тогда $f(x)g(x) = h(x)$
Тогда из предельного перехода $x \to 1 - 0$ $AB = C$
Пример
$\sum \frac{1}{n^2}$

$f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$
$xf'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
$(xf')' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$
$xf' = -\ln(1-x) + c$
Из $f(0) : c = 0$
Тогда $f' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$
$\sum \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{1-t}{t} \,\mathrm{d}\, t$
$\sum \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{1-t}{t} \,\mathrm{d}\, t$

5 Ряды Тейлора

Определение
f раскладывается в степенной ряд в окрестности x_0,
если $\exists\, (a_n), U(x_0) : \forall\, x \in U(x_0)\;\; f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$
Замечание
f – раскладывается $\Rightarrow f \in C^\infty(U(x_0))$
Теорема о единственности
f – раскладывается $\Rightarrow$ ряд определен однозначно
$(\exists\, !a_n)$
Доказательство
$\sum a_n (x - x_0)^n = f(x)$
Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
Определение
Пусть $f \in C^\infty((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ – ряд Тейлора функции f в точке(окрестности точки) x_0

Замечание

1. Ряд Тейлора может сходиться «не туда» (не к исходной функции)
   К примеру, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
   $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
   $\underset{x\neq 0}{f^{(k)}(x)} = \underbrace{P_k(\frac{1}{x})e^{e^{-\frac{1}{x^2}}}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}, P_k$ – многочлен степени $\leq 3k$
   По следствию из т. Лагранжа функция k раз дифференцируема и $f^{(k)}(0) = 0$
   Тогда у $f(x)$ ряд Тейлора $\equiv 0$
   Т.е. существуют $f \in C^\infty$, которые не раскладываются в ряд (функции, раскладывающиеся в ряд – *аналитические*)

2. Ряд Тейлора может расходиться при всех $x \neq x_0$
   $f(t) = \int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{1+t^2x}\,\mathrm{d}\,x$
   $//$todo продолжить 00:55:24

6 Диффеоморфизм

Определение
Область в $\mathbb{R}^m$ – открытое связное множество
$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область
f – *диффеоморфизм*, если f – обратимо, f, f^{-1} – дифференцируема
Замечание
Если это так, то $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}$
$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$
Лемма (о «почти» локальной инъективности)
$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область, $x_o \in O, F$ – дифференцируемо в x_0
$\det F'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists\, C > 0, \delta > 0 : \forall\, h : |h| < \delta\ |F(x_0+h) - F(x_0)| \geq c|h|$
Доказательство

1. F – линейное
   Тогда $|h| = |F^{-1} \circ F \cdot h| \leq \|F^{-1}\| |Fh|$
   $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \dfrac{1}{\|F^{-1}\|}|h|$
   δ – любое

2. $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)|h|| \geq \underbrace{C}_{\text{из п.1}}|h| - |\alpha(h)||h|$
   Берем δ, чтобы $|\alpha(h)| \leq \dfrac{C}{2}$

Замечание
$\forall\, x \;\det F'(x) \neq 0$, то отсюда не следует инъективность
В далеких точках значения могут совпадать
Пример
$(x_1, x_2) \to (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$
$\det F'(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$
Данное отображение склеивает точки
Теорема о сохранении области
$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – открытое, $\forall\, x \; F$ – дифференцируемый в x и $\det F'(x) \neq 0$
Тогда $F(O)$ – открытое множество
Доказательство
Пусть $x_0 \in O, y_0 = F(x_0)$
Проверим, что y_0 – внутренняя точка $F(O)$
По лемме $\exists\, C, \delta : \forall\, h \in \overline{B(0, \delta)}$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$
$r := \dfrac{1}{2}\operatorname{dist}(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta)}_{\text{сфера}})}_{\text{компакт}})$
$r > 0$ – потому что dist = inf на компакте, а значит inf реализуется
Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$
Т.е. проверим, что $\forall\, y \in B(y_0, r)\; \exists\, x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$
Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, y \in B(y_0, r)$ – функция на $\overline{B(x_0, \delta)}$
(надеемся, что она обращается в 0)
$g(x_0) = |F(x_0) - y| < r^2$
$\forall\, x \in S(x_0, \delta)\; \gamma(x) \geq r^2$
Тогда $\min g$ достигается(т.к. функция на компакте) внутри $B(x_0, r)$
В этой точке все частные производные $= 0$

Пусть в точке x достигается минимум
$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$
$$\begin{cases} 0 & = & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 2(F_1 - y_1)\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + 2(F_m - y_m)\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ 0 & = & \dfrac{\partial g}{\partial x_m} = 2(F_1 - y_1)\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} + \ldots + 2(F_m - y_m)\dfrac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{cases}$$
$(F(x) - y)^T F'(x) = 0$
Т.к. $\det F'(x) \neq 0$, то $g(x) = F(x) - y = 0$
Отсюда $g(x)$ достигает 0
Замечание
F – непрерывное $\Leftrightarrow \forall \underbrace{W}_{\text{откр.}}\ F^{-1}(W)$ – открытое
(из определения)
Замечание
Если O – связное, F – непрерывное
Тогда $F(O)$ – связное
(Отсюда область переходит в область)
Доказательство
Пусть это не так
Тогда $F(O) = W_1 \cup W_2$
Тогда $O = F^{-1}(W_1) \cup F^{-1}(W_2)$, $F^{-1}(W_1)$, $F^{-1}(W_2)$ – открытые и не пересекающиеся
Но это невозможно из связности
Тогда $F(O)$ – связное
Следствие
$F : \underbrace{O}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, l < m$
$F \in C^1(O)$
$\forall\, x \in O\ \ \operatorname{rg} F'(x) = l$ (rg – ранг матрицы)
Тогда $F(O)$ – открытое
Доказательство
Пусть $x_0 \in O$
Проверим, что $F(x_0)$ – внутренняя точка в $F(O)$
$\operatorname{rg} F'(x_0) = l$
Н.у.о. пусть ранг реализуется на первых l столбцах
Т.е. $\det(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j \in 1 \ldots l} \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0)\ \det(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x))_{i,j\in 1\ldots l} \neq 0$
Тогда $F(x_0)$ – внутренняя в $F(U(x_0))$:
Рассмотрим $U_l := \{(t_1, \ldots, t_l) : (t_1, \ldots, t_l, (x_0)_{l+1}, \ldots, (x_0)_m) \in U(x_0)\}$ – l-мерная окрестность
$\widetilde{F} : U_l \to \mathbb{R}^l$
$(t_1, \ldots, t_l) \mapsto F(t_1, \ldots, t_l, (x_0)_{l+1}, \ldots, (x_0)_m)$
$\dfrac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, \ldots, t_l, (x_0)_{l+1}, \ldots, (x_0)_m)\right)$
Теорема о дифференцировании обратного отображения
$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область
$F \in C^r(O), r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
Пусть F – обратимо и невырождено ($\forall x\ \det F'(x) \neq 0$)
Тогда $F^{-1} \in C^r$ (отсюда $(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$)
Доказательство
Индукция по r
База: $r = 1$
Пусть $S = F^{-1}$
S – непрерывна по теореме о сохранении области (по топологическому определению)
Возьмем $x_0 \in O, y_0 = F(x_0) \in O_1, O_1 = F(O)$
По лемме $\exists C, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta)\ |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$
$A = F'(x_0)$
$\underbrace{F(x)}_{y} - \underbrace{F(x_0)}_{y_0} = A(\underbrace{x}_{S(y)} - \underbrace{x_0}_{S(y_0)}) + \alpha(x)|x - x_0|$
$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$
Надо проверить: $\beta(y) = |S(y) - S(y_0)|A^{-1}\alpha(S(y)) = o(|y - y_0|)$
Пусть $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$ – выполнено при y близких к y_0
$|\beta(y)| = |S(y) - S(y_0)||A^{-1}\alpha(S(y))| \leq \dfrac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|\|A^{-1}\||\alpha(S(y))| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{C}|y - y_0||\alpha(S(y))| = o(|y - y_0|)$
Отсюда S – дифференцируемо
Проверим, что в $S \in C^1, S' = A^{-1}$
$y \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} S(y) = x \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} T'(x) = A \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} A^{-1}$
Индукционный переход:
Проведем цепочку вычислений:

$y \mapsto F^{-1}(y) = x \mapsto F'(x) = A \mapsto A^{-1} = (F'(x))^{-1} = (F^{-1})'(y)$
Переходы – композиции непрерывных отображений
Т.о.:
Пусть $F^{-1} \in C^{r-1}$
Лемма
$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \le M|h|$
$M = \sup\limits_{x_1 \in [x_0, x_0+h]} \|F'(x_1) - F'(x_0)\|$
//todo доказать
Теорема о локальной обратимости
Пусть $F \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$ (Т.е. $F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, F \in C^1$)
$x_0 \in O$
$\det F'(x_0) \neq 0$
Тогда $\exists\, U(x_0) : F\Big|_{U(x_0)}$ – диффеоморфизм
Доказательство
$\exists\, V(x_0) : \forall\, x \in V \;\; \det F'(x) \neq 0$
(не представляю, откуда)
По предыдущей теореме достаточно построить окрестность x_0, где F – обратимо
$F'(x_0)$ – невырожденный
Тогда $\exists\, c : \forall\, h \; |F'(x_0)h| \ge c|h|$
Тогда $\exists\, U(x_0) = V(x_0) \cap B(x_0, r) \subset O$ такая, что $\forall\, x \in U(x_0) \; \|F'(x) - F'(x_0)\| < \dfrac{c}{4}$ и попрежнему $\det F'(x) \neq 0$
Проверяем, что F – обратимо на $U(x_0)$
$x \in U(x_0), y = x + h \in U(x_0)$
$F(y) - F(x) = (F(x+h) - F(x) - F'(x)h) + (F'(x)h - F'(x_0)h) + F'(x_0)h$
$|F(y) - F(x)| \ge |F'(x_0)h| - |F(x+h) - F(x) - F'(x)h| - |(F'(x) - F'(x_0))h|$
(неравенство треугольнка)
$F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \le M|h|$
$M = \sup\limits_{x_1 \in [x_0, x_0+h]} \underbrace{\|F'(x_1) - F'(x_0)\|}_{\le \|F'(x_1) - F'(x_0)\| + \|F'(x) - F'(x_0)\|} \le \dfrac{c}{2}$
$|F(y) - F(x)| \ge c|h| - \dfrac{c}{2}|h| - \dfrac{c}{4}|h| = \dfrac{c}{4}|h|$ – т.е. $F(y) \neq F(x)$, а значит точки не склеиваются

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируема, O – открытое

$$\mathrm{d}\, F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} =: (F'_x, F'_y)$$

Теорема о неявном отображении

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n, F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Пусть $(a, b) : F(a, b) = 0$

$\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда

1. $\exists\, P \subset \mathbb{R}^m, a \in P, \exists\, Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$
   $\exists\, !\phi : P \to Q \in C^r$ – гладкое
   $\forall\, x \in P\ \ F(x, \phi(x)) = 0$
2. $\phi'(x) = -(F'_y(x, \phi(x)))^{-1} F'_x(x, \phi(x))$

Доказательство

Построим $\Phi : O \to \mathbb{R}^{m+n}$

$(x, y) \to (x, F(x, y))$

$\Phi(a, b) = (0, 0)$

$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$

$\det \Phi'(a, b) \neq 0$

$\exists\, \widetilde{U}(a, b) : \Phi\Big|_{\widetilde{U}}$ – диффеоморфизм

Можно считать, что $\widetilde{U} = P_1 \times Q$

$\widetilde{V} = \Phi(\widetilde{U})$ – открытое

$\exists\, \Psi : \widetilde{V} \to \widetilde{U}, \Psi = \Phi^{-1} \subset C^r$

Φ, Ψ не меняют первые n координат

$\Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : \widetilde{V} \to \mathbb{R}^m, H \in C^r$

Пусть $P = \widetilde{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{\mathbb{0}_n\})$ (подмножество $\widetilde{V}$, где последние n координат – нули)

$\phi(x) := H(x, 0)$

Что $F(x, \phi(x)) = 0$ – тривиально

$F(x, \phi(x))' = (F'_x, F'_y) \begin{pmatrix} E_m \\ \phi' \end{pmatrix} = 0$

$F'_x + F'y\phi' = 0$
Докажем единственность
$x \in P, y \in Q$
$F(x, y) = 0$
$\Phi(x, y) = (x, 0)$
$(x, y) = \Psi\Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \phi(x))$
Замечание
Пусть есть система
$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \end{cases}$
$\operatorname{rg} F'(x_0) = m$
Н.у.о. пусть ранг реализуется на n последних переменных
Обозначим последние n переменных x_i как y_j
Пусть $a = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$
Тогда для $\exists\, U(a), V(b)$
$\forall\, x \in U(a)\ \exists\, y \in V(b)$ – решение, которое гладко зависит от x
Определение
Пусть $k < m$
$M \subset \mathbb{R}^m$ – *простое k-мерное многообразие в* $\mathbb{R}^m$, если
$\exists\, O \subset \mathbb{R}^k$ – область
$\exists\, \Phi : O \to M$ – биекция, гомеоморфизм ($\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \to O$ – непрерывно)
Φ – *параметризация*
Определение
Пусть $k < m$
$M \subset \mathbb{R}^m$ – *простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в* $\mathbb{R}^m$, если
$\exists\, O \subset \mathbb{R}^k$ – область
$\exists\, \Phi : O \to M$
$\Phi \in C^r$ – гомеоморфизм ($\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \to O$ – непрерывно)
$\forall\, t \in O\ \ \operatorname{rg} \Phi'(t) = k$
Пример

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$
  $(x, y) \overset{\Phi}{\mapsto} (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$
  $$\mathrm{d}\,\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

- Цилиндр
  $x = R\cos t, y = R\sin t, z = z$
  $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
  $(t, z) \overset{F}{\mapsto} (R\cos t, R\sin t, z)$
  $\mathrm{d}\, F = \begin{pmatrix} -R\sin t & 0 \\ R\cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Шар – не является
  Возьмем какую-то точку a в исходном множестве
  На шаре ей будет соответствовать точка A
  Удалим точку a и A из исходного множества и шара соответственно
  В исходном множестве возьмем петлю вокруг точки a
  Она не может быть стянута в одну точку
  С другой стороны, петля вокруг a на шаре – может

Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений
$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \le k < m$
$1 \le r \le +\infty$
Тогда $\forall\, p \in M$ эквивалентно:

1. $\exists\, U = U(p) \subset \mathbb{R}^m$ (откр. множество)
   $M \cap U(p)$ – простое k-мерное C^r-гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

2. $\exists\, \widetilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists\, f_1, \ldots, f_{m-1} : \widetilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$
   $x \in M \cap \widetilde{U}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_{m-k}(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{cases}$
   и $\operatorname{grad} f_1(p), \ldots, \operatorname{grad} f_{m-k}(p)$ – линейно независимые

Доказательство $1 \Rightarrow 2$
$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r$ – параметризация $M \cap U$
$\phi_1, \ldots, \phi_m$ – координатные функции Φ
$p = \Phi(t^0)$
Н.у.о. пусть $(\dfrac{\partial \phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\ldots k}$ – невырожденная матрица
(по непрерывности можно считать, что выполнено на всем O)
$L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ – проекция $x \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$
Посмотрим на $L \circ \Phi$:

$(L\circ\Phi)' = (\dfrac{\partial\phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\dots k}$
$\det(L\circ\Phi)' \neq 0$ на O
При необходимости сузим O на окрестность точки t^0, чтобы $L\circ\Phi$ было диффеоморфизмом
$W\subset O$ – область определения $L\circ\Phi$
$V = L\circ\Phi(W)\subset\mathbb{R}^k$
$\exists\,\Psi = (L\circ\Phi)^{-1}, \Psi\in C^r$
Для $x\in V$ однозначно задано $\Phi(\Psi(x))\in M\cap U$
Т.е. множество $\Phi(W)$ – график некоторого $H: V\to\mathbb{R}^{m-k}$
Для $x'\in V$ $\Phi(\Psi(x)) = (x', H(x'))\Rightarrow H\in C^r$
$\Phi(W)$ – множество, открытое в M, т.к. Φ – гомеоморфизм
Значит $\exists\,\widetilde{U}$ – открытое в $\mathbb{R}^m : \Phi(W) = M\cap\widetilde{U}$ (теорема об открытых множествах в пространствах и подпространствах)
Можно считать, что $\widetilde{U}\subset \underbrace{V\times\mathbb{R}^{m-k}}_{\text{открытое в } \mathbb{R}^m}$
(пусть это не так. Тогда возьмем $U' := U\cap V\times\mathbb{R}^{m-k}$)
Определим $f_j:\widetilde{U}\to R$
$f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}, f_j\in C^r$
Тогда $x\,\mathrm{Im}\,M\cap\widetilde{U}\Leftrightarrow\forall\,j\ \ f_j(x) = 0$
$\begin{pmatrix}\operatorname{grad} f_1\\ \vdots\\ \operatorname{grad} f_{m-k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_{(m-k)\times k} & \operatorname{diag}(-1,\dots,-1)\end{pmatrix}$ – градиенты(строки) линейно независимые
Доказательство $2\Rightarrow 1$
$(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1,\dots m-k, j=1\dots m}$ – матрица, у которогой строки – градиенты f_i
Можно считать, что $\det(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{i=1,\dots m-k, j=k+1\dots m}\neq 0$
Тогда из теоремы о неявном отображении:
$\exists\,P((p_1,\dots,p_k))\subset\mathbb{R}^k\ \exists\,Q((p_{k+1},\dots,p_m))\subset\mathbb{R}^{m-k}$
$\exists\,H: P\to Q:\ \Phi(u, H(u)) = 0$, где $u\in P, F = (f_1,\dots,f_{m-k})$, равносильно
$\forall\,x\in M\cap(P\times Q)\ F(x) = 0$, т.е. $x = (u, H(u))$
Т.е. $\Phi: P\to P\times Q\subset\mathbb{R}^m$
$u\mapsto(u, H(u)), H\in C^r$
$\Phi\in C^r$
Φ – гомеоморфизм, т.к. Φ^{-1} – это проекция(а она непрерывна)

$\operatorname{rg} \Phi' = k$

Следствие (о двух параметризациях)

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ – k-мерное простое C^r-гладкое многообразие

$p \in M, \exists\, U(p)$

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p)$ – параметризация, $\Phi_1 \in C^r$

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p)$ – параметризация, $\Phi_2 \in C^r$

(обе действуют инъективно)

Тогда $\exists$ диффеоморфизм $\Theta : O_1 \to O_2, \Theta \in C^r$

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство

$\exists\, \Theta = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ – гомеоморфизм

$\Theta = \Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1 \in C^r$

$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Phi_2 \in C^r$

Лемма

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m, O$ – открытое множество

Φ – это C^1-параметризация некоторого M – простого гладкого многообразия в $\mathbb{R}^m$

$t_0 \in O, \Phi(t_0) = p \in M$

Тогда $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ – не зависит от Φ и представляет собой k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$

Доказательство

$\forall\, \Phi$ – гладкая параметризация $\operatorname{rg} \Phi' = k$ – образ k-мерный

Пусть есть Φ_1 и Φ_2 – две параметризации

$\exists\, \psi$ – диффеоморфизм

$\psi : O_1 \to O_2$

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$

$\Phi_1' = \Phi_2' \psi'$

Заметим, что $E = (\psi^{-1}\psi)' = (\psi^{-1})'\psi'$

Тогда ψ' и $(\psi^{-1})'$ – обратимые

$\Phi_1'(\mathbb{R}^k) = \Phi_2'\psi'(\mathbb{R}^k) = \Phi_2'(\mathbb{R}^k)$ (т.к. $\psi(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$)

Определение

M – простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$

$p \in M, \Phi$ – параметризация, $\Phi(t_0) = p$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ подпространство $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^k)$

Оно называется *касательным подпространством* к M в точке p

Обозначается T_pM

Множество $p+T_pM$ будем называть *афинным* пространством (касательное линейное многообразие)

Замечание

1. Если есть $v \in T_pM$, то $\exists$ гладкий путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M \subset \mathbb{R}^m, \gamma_v(0) = 0$ и $\gamma_v'(0) = v$
   Доказательство
   $\operatorname{rg} \Phi'(t_0) = k \Rightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^j : \Phi'(t_0)u = v$
   $\widetilde{\gamma}_v(s) = t_0 + t_0 + us$
   $\gamma_v = \Phi \circ \widetilde{\gamma}_v$
   $\gamma_v'(0) = \Phi' \widetilde{\gamma}_v'(0) = \Phi'(u) = v$

2. $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ – гладкий путь
   $\gamma(0) = p$
   Тогда $\gamma'(0) \in T_pM$
   Доказательство
   Что-то рукомахательное

3. Рассмотрим касательное пространство к графику
   $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
   $(x, y = f(x))$ – поверхность в $\mathbb{R}^{m+1}$ – это простое k-мерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{m+1}$:
   $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}, \Phi(x) = (x, f(x))$ – параметризация
   Тогда линейное касательное многообразие в (x_0, y_0), где $y = f(x_0)$, задается уравнением $y - y_0 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x_0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + \dfrac{\partial}{\partial x_m} f(x_0)(x_m - x_m^0)$
   Доказательство
   $$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f(x) \end{pmatrix}$$
   $$\Phi' = \begin{pmatrix} & E_m & \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} f & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_m} f \end{pmatrix}$$
   $a \in \mathbb{R}^m$
   $$\Phi'(x) \cdot a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} a + \ldots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m} a \end{pmatrix}$$

Линейное многообразие – множество векторов, перпендикулярных вектору $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}f(x_0), -1\right)$
Тогда надо проверить, что $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}f(x_0), -1\right) \cdot \Phi'(x)a = 0$

4. $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, O$ – открытое
   $p \in O$
   $U(p)$ – $m-1$-мерное простое гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$б заданное уравнением $f(x) = 0$
   При это выполняется:
   $f(p) = 0$
   $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$
   Тогда линейное касательное многообразие в точке p есть $(*)$ $f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \ldots + f'_{x_m}(p)(x_m - p_m) = 0$
   Доказательство
   Н.у.о. пусть $f'_{x_m}(p) \neq 0$
   $\exists\, \phi : U(p_1, \dots, p_{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ – вычисляет последнюю координату $f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U(p)$, где $x_m = \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$
   Т.е. $U(p)$ – есть график ϕ над $U(p_1, \dots, p_{m-1})$
   Тогда уравнение касательного линейного многообразия $(**)$ $x_m - p_m = \phi'_{x_1}(x_1 - p_1) + \ldots + \phi'_{x_{m-1}}(x_{m-1} - p_{m-1})$
   Мы знаем, что $f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$
   $f'_{x_1} + f'_{x_m}\phi'_{x_1} = \ldots = f'_{x_{m-1}} + f'_{x_m}\phi'_{x_{m-1}} = 0$
   Домножим $(**) \cdot f'_{x_m} = (*)$, ч.т.д.

6.1 Относительный (= условный) экстремум

Определение
$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$
$\Phi : E \to \mathbb{R}^n$
$M_\Phi = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : \Phi(x) = 0\}$
$(\Phi(x) = 0$ – уравнения связи$)$
$x_0 \in E$
$\Phi(x_0) = 0$, т.е. $x_0 \in M_\Phi$
x_0 – точка относительного локального максимума, если x_0 – локальный

максимум $f\Big|_{M_\Phi}$
Т.е. $\exists\, U(x_0) : \forall\, x \in U(x_0) : \Phi(x) = 0\ f(x_0) \geq f(x)$

7 Экспонента

Определение
$\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$
Свойства

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(z)' = \exp(z)$
3. $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$
4. $\forall\, z, w \in \mathbb{C}\ \ \exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$
   Доказательство
   $\exp z \exp w = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{z^k}{k!} + \frac{z^{k-1} w^1}{(k-1)!1!} + \ldots + \frac{w^k}{k!}) = \ldots$ – по теореме Коши о произведении рядов
   $\ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{k! z^k}{k!} + \frac{k! z^{k-1} w^1}{(k-1)!1!} + \ldots + \frac{k! w^k}{k!}) \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (C_k^0 z^k + C_k^1 z^{k-1} w^1 + \ldots + C_k^k w^k) \frac{1}{k!} = \sum \frac{(z+w)^k}{k!}$

Тогда из 1, 2, 4 exp – показательная функция из теоремы о существовании показательной функции
Следствие
$\forall\, z \in \mathbb{C}\ \ \exp(z) \neq 0$
Доказательство
Пусть $\exists\, z : \exp(z) = 0$
Тогда $\forall\, w\ \ \exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) = 0$
Пусть $w = u - z$

Тогда $\forall\, u \;\; \exp(z+u-z) = \exp(u) = \exp(z)\exp(u-z) = 0$
$\exp(u) \equiv 0$ – что неверно

Пусть $x \in \mathbb{R}$
Обозначим $e^{ix} = \alpha(x) + i\beta(x)$
Тогда $e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \alpha(x) - i\beta(x)$
$\alpha(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\beta(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Тогда $\alpha(x) = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$ (похоже на $\cos x$)
$\beta(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots$ (похоже на $\sin x$)
(желающие могут думать, что $x \in \mathbb{C}$)
Заметим, что $\alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y) - \beta(x)\beta(y)$
$\beta(x+y) = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$
$\alpha^2(x) + \beta^2(y) = 1$
$(e^{ix})' = ie^{ix}$
Отображение ie^{ix} – вектор скорости
Тогда e^{ix} описывает движение с постоянной скоростью по окружности единичной длины

8 Теория меры

8.1 Системы множеств

Обозначение

1. $A \sqcup B$ – дизъюнктное объединение
2. 2^X – множество всех подмножеств X

Определение
$\mathcal{P} \subset 2^X$ – полукольцо, если

1. $\forall\, A, B \in \mathcal{P} \;\; A \cap B \in \mathcal{P}$
2. $\varnothing \in \mathcal{P}$

3. $\forall\, A, A' \in \mathcal{P}\ \exists$ конечное $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$

Определение
$[a, b) \subset \mathbb{R}^m$ – ячейка, если $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall\, i\ a_i \le x_i < b_i\}$
Пример
$X = \mathbb{R}^m, \mathcal{P}$ – множество ячеек
$\mathcal{P}$ – полукольцо
Свойства

1. $A, B \in \mathcal{P}$
   Отсюда не следует, что $A^C \in \mathcal{P}, A \cup B \in \mathcal{P}, A \setminus B \in \mathcal{P}, A \oplus B \in \mathcal{P}$
2. $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$
   Тогда $A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ представимо в виде дизъюнктного объединения элементов $\mathcal{P}$

Определение
$\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, если

1. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$

Свойства

1. $X \setminus X = \varnothing \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
3. $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
4. $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C \in \mathcal{A}$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$
6. Алгебра – полукольцо

Определение
$\mathcal{A} \subset 2^X$ – сигма-алгебра, если

1. $\mathcal{A}$ – алгебра
2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Свойства

1. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i = (\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i^C)^C \in \mathcal{A}$
2. $E \in \mathcal{A}$ – сигма-алгебра
   Тогда $\{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$ – сигма-алгебра

8.2 Объем

Определение
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – аддитивна, если

1. μ не принимает одновременно $+\infty$ и $-\infty$
2. $\mu(\varnothing) = 0$
3. $A = \sqcup_{\text{конеч.}} A_i, A_i \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$

Определение
$\mathcal{P}$ – полукольцо
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$
μ – аддитивная, $\mu \geq 0$
Тогда μ – объем
Замечание
Если $X \in \mathcal{P}, \mu X < +\infty$ – μ конечный объем
Замечание
Если $\mathcal{P}$ – алгебра, то свойство 3 можно заменить на:
$A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \cup B) = A\mu + B\mu$
Пример
Классический объем в $\mathbb{R}^m$:
$\mathcal{P}^m$ – ячейки в $\mathbb{R}^m$
$\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$
Замечание

Если $B \subset A$, то $\mu B \leq \mu B$ – монотонность

Доказательство

Если в алгебре, то $A = B \sqcup (A \setminus B) \Rightarrow \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B) \geq \mu B$

Теорема

$\mathcal{P}$ – полукольцо, $\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – объем

Тогда выполняется

1. Усиленная монотонность: $\forall\, A \in \mathcal{P}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} : A \supset \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu A_i \leq \mu A$
2. Конечная полуаддитивность
   $\forall\, A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}\ A \subset \cup_{i=1}^{n} A_i$
   Тогда $\mu A \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mu A_i$
3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}, \mu B$ – конечное
   Тогда $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

Доказательство

1. $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup\limits_{\text{конеч.}} B_j\ A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup (\bigsqcup\limits_{\text{конеч.}} B_j) \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i + (\sum \mu B_j) \geq \sum \mu A_i$
2. $B_i = A \cap A_i \in \mathcal{P}$
   Тогда $A = \bigcup B_i$
   Сделаем эти B_i дизъюнктными
   $C_1 = B_1$
   $C_2 = B_2 \setminus B_1, \dots, C_k = B_k \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} B_i)$
   Тогда $A = \bigsqcup C_k$
   По замечанию $C_k = B_k \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} B_i) = \bigsqcup\limits_{k_j\ -\ \text{конеч.}} D_{k_j}$ Теперь $A = \bigsqcup\limits_{k,j} D_{k_j}$
   $\mu A = \sum\limits_{k,j} \mu D_{k_j}$

$\sum\limits_j \mu D_{k_j} \leq \mu B_k \leq \mu A_k$

Отсюда $\mu A \leq \sum\limits_k \mu A_k$

3. (a) $B \subset A$
   Это аддитивность

   (b) $B \not\subset A$
   $A \setminus B = A \setminus (A \cap B), A \cap B \in \mathcal{B}$
   $\mu(A \setminus B) + \mu B \geq \mu A$

8.3 Мера

Определение
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – мера, если μ – объем и μ – счетно-аддитивна:
$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}, A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \in \mathcal{P}, \mu A = \sum \mu A_i$
Замечание

1. Можно считать, что индексация с помощью любого произвольного счетного множества

2. Счетная аддитивность не следует из конечной
   Пример
   $X = \mathbb{R}^2, \mathcal{P}$ – множество ограниченных множеств и их дополнений
   $\mu(\text{огр}) = 0, \mu(\text{неогр}) = 1$
   В этом множестве нет счетной аддитивности, но есть конечная

Пример (дискретная мера)
X – любое множество, $\mathcal{P} = 2^X$
$A_1, A_2, \ldots \in X$
$h_1, h_2, \ldots > 0$
$\mu U := \sum\limits_{i: A_i \in E} h_i$ – мера
Теорема 1
$\mu : \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ – объем
Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2. Имеет место счетная полуаддитивность
   $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}$
   $A \in \mathcal{P}$
   $A \subset \bigcup\limits_{i=1\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$

Доказательство $1 \Rightarrow 2$
Как в предыдущей теореме
Доказательство $2 \Rightarrow 1$
Проверим, что μ – мера
Пусть $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$
Из свойства 2 $\mu A \leq \sum \mu A_i$
Из усиленной монотонности $\mu A \geq \sum \mu A_i$
Следствие
$A \in \mathcal{P}, A_n \in\in \mathcal{P}, \mu A_n = 0$
$A \subset \bigcup A_n$
Тогда $\mu A = 0$
Теорема 2
$\mathcal{A}$ – алгебра
$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ – объем
Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2. μ – непрерывна снизу
   $A, A_i \in \mathcal{A}$
   $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$
   $A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$
   Тогда $\mu A = \lim\limits_{i \to \infty} \mu A_i$

Теорема 3
$\mathcal{A}$ – алгебра
$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – конечным объем
Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2. μ – непрерывна сверху
   $A, A_i \in \mathcal{A}$
   $A_1 \supset A_2 \supset \dots$
   $A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$
   Тогда $\mu A = \lim\limits_{i\to\infty} \mu A_i$

Контр-пример для неконечного объема

μ – дискретная мера

$\forall\, k \in \mathbb{Z}\ \mu(k) = 1$

$\forall\, A \subset \mathbb{R}\ \mu A = \sum\limits_{k \in A} 1$

$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$

$A_i = [i, +\infty)$

$\mu A_i = +\infty$

$A = \bigcap A_i = \varnothing$

$\mu A = 0$

Доказательство $1 \Rightarrow 2$

$B_k := A_l \setminus A_{k+1}$

$A_1 = \bigsqcup B_k \sqcup A$

$\mu A_1 = \underbrace{\sum \mu B_k}_{.} + \mu A$

$A_n = \bigsqcup\limits_{k \geq n} K_k \sqcup A$

$\mu A_n = \sum\limits_{k \geq n} \mu B_k + \mu A, n \to +\infty$

Доказательство $2 \Rightarrow 2' \Rightarrow 1$

$2'$: непрерывность сверху на $\varnothing$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap A_n = \varnothing \Rightarrow \mu A_n \to 0$

$2 \Rightarrow 2'$ – тривиально

Проверим счетную аддитивность

$C = \bigsqcup\limits_i C_i$

Пусть $A_k := \bigsqcup\limits_{i=k}^{\infty} C_i$

$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap A_k = \varnothing$

$C - C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_{k-1} \sqcup A_k$
$\mu C = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu C_i + \mu A_k \Rightarrow \mu C = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu C_i$

8.4 Продолжение меры

Определение
$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ – мера
Мера полная, если $\forall A \in \mathcal{A}, \mu A = 0 \; \forall B \subset A \; B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0$
$A \in \mathcal{A}$. Тогда A – измеримое множество
Определение
μ – σ-конечная, если $\exists P_k \in \mathcal{A} \; \mu P_k < +\infty, X = \bigcup P_k$
Теорема о стандартном продолжении меры
Пусть X – множество, $\mathcal{P}_0$ – полукольцо его подмножеств
$\mu_0 : \mathcal{P}_0 \to \mathbb{R}$ – σ-конечная мера на $\mathcal{P}_0$
Тогда $\exists \, \sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ такое, что

1. $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}, \mu\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu 0$
2. μ – полная
3. Если $\mathcal{P} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и μ_1 – продолжение μ_0 на $\mathcal{P}$, тогда $\mu\Big|_{\mathcal{P}} = \mu_1$
4. Если μ_1 – полная мера на σ – алгебре $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{P}_0$ и μ_1 – продолжает μ_0, то $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A} \; \mu_1\Big|_{\mathcal{A}} = \mu$
5. $A \in \mathcal{A}, \mu A = \inf(\sum \mu_0 P_i : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \in \mathcal{P}_0)$

Доказательство
$\forall A \subset X$ заведем $\mu^* : \mu^* A = \inf(\sum \mu_0 P_i : A \subset \bigcup P_i)$
Она не аддитивна
Она счетно полуаддитивна
Будем говорить, что A – хорошо разбивающая, если $\forall B \subset X \; \mu^* B =$

$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^C)$
$\mathcal{A} = \{A : A$ – хорошо разбивающая$\}$
Замечание
Пусть μA – конечное
Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, (P_k^\varepsilon) : P_k^\varepsilon \in \mathcal{P}_0, \mu A \le \sum \mu P_k^\varepsilon \le \mu A + \varepsilon (A \subset \bigcup P_k^\varepsilon)$
Тогда пусть $B_n := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k^{\frac{1}{n}}$
$A \subset B_n, \mu A \le \mu B_n \le \mu A + \dfrac{1}{n}$
$B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$
$A \subset B, \mu(B \setminus A) = 0$
$\forall\, n\ B \setminus A \subset B_n \setminus A$

8.5 Мера Лебега

Определение
$\mathcal{P}^m$ – полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^m$
Классический объем: $\mu_0[a, b) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_m - a_m)$
Теорема
Классический объем в $\mathbb{R}^m$ есть σ-конечная мера на $\mathcal{P}^m$
Доказательство
σ-конечность – смотри на листик в тетради)
Проверим счетную полуаддитивность
$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n), P \subset \bigcup P_n$
Пусть $P \ne \varnothing$
Возьмем b' чуть меньше b: $[a, b'] \subset [a, b)$, чтобы $\mu_0(\underbrace{[a, b) \setminus [a, b')}_{\bigsqcup D_i, \sum \mu D_i < \varepsilon}) < \varepsilon$
Чуть уменьшим a_n: $(a_n', b'n) \supset [a_n, b_n)$
$\mu([a_n', b_n) \setminus [a_n, b_n)) \le \dfrac{\varepsilon}{2^n}$
$[a, b'] \subset \bigcup (a_n', b_n)$
$[a, b']$ – компакт. Тогда н.у.о. $\exists\, k : [a, b') \subset \bigcup\limits_{n=1}^{k} [a_n', b_n)$
Тогда $\underbrace{\mu_0[a, b')}_{\ge \mu([a,b)) - \varepsilon} \le \sum \mu_0[a_n', b_n)$

$\mu([a,b)) - \varepsilon \le \mu_0[a,b')$ по лемме
$\sum \mu_0[a_n', b_n) \le \sum(\mu_0[a_n, b_n') + \frac{\varepsilon}{2^n}) \le \sum \mu_0[a_n, b_n) + \varepsilon$
Для произвольного ε
Тогда возьмем $\varepsilon \to 0$

Определение
Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ – стандарное продолжение классического объема
λ_m – мера Лебега в $\mathbb{R}^m$
σ-алгебра, где она задана – $\mathcal{M}^m$ – *σ-алгера множеств, измеримых по Лебегу*
Свойства

1. $\mathcal{M}$ – σ-алгебра, т.е. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{M}, A_1 \cap A_2 \cap \ldots \in \mathcal{M}$
   $\forall\, n\ \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$ и есть полнота: $B \subset \bigcup A_n \Rightarrow B$ – измеримо и $\lambda B = 0$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}^m\ \{x\}$ – измеримо и $\lambda\{x\} = 0$
   $Q \in \mathbb{R}^1$ – измеримо и $\lambda_1(Q) = 0$
   $A \subset \mathbb{R}^m$ – счетно $\Rightarrow A$ – измеримо

2. $\mathcal{M}^m$ содержи все открытые и замкнутые множества
   Лемма

   (a) $O \subset \mathbb{R}^m$ – открытое. Тогда $\exists$ кубические ячейки $Q_o : O \subset \bigsqcup Q_i$ и при этом (по желанию) $\overline{Q}_i \subset O$ и (по желанию) Q_i – двоичные рациональные ячейки (т.е. концы задаются рациональными числами со знаменателем – степенью 2)
   (b) $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $\lambda E = 0$
   Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, Q_i$ – кубические ячейки : $E \subset \bigcup Q_i, \sum \lambda Q_i < \varepsilon$
   Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B_i$ – шары : $E \subset \bigcup Q_i, \sum \lambda Q_i < \varepsilon$

   Доказательство

   (a) $\forall\, x \in O$ Пусть $Q(x)$ – кубическая ячейка : $x \in Q(x) \subset O$, Q – двоичная рациональная
   Тогда $O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$. Заметим, что Q – счетное множество.
   Тогда объединение счетное

Заменим объединение на конечное дизъюнктное
$Q_1 \to Q_1$
$Q_2 \to Q_2 \setminus Q_1$. $Q_2 \setminus Q_1$ – не ячейка. Тогда представим как конечное объединение ячеек
$Q_n \to Q_n \setminus Q_1 \dots Q_{n-1}$

(b) $0 = \lambda E = \inf\{\sum \lambda P_i : E \subset \bigcup P_i\}$
Подберем покрытие E параллелепипедами $P_i : \sum \lambda P_i < \varepsilon$
Теперь для P_i подберем множество ячеек Q_k, чтобы $P_i \subset \bigcup Q_k$
Мы можем подбирать Q_i так, чтобы $\lambda(\bigcup Q_k \setminus P_i) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^i}$
Чтобы покрыть шарами, опишем шар вокруг ячейки. Т.к. сам шар можно вписать в ячейку, то мы можем оценить меру шара сверху и снизу

3. Пример
$K \subset [0, 1]$ – канторово множество
$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (выкинули среднюю треть)
$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (выкинули средние части имеющихся отрезков)
$K_3 = \dots$
$K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$
Все концы всех отрезков содержатся в K
K – измеримо
$\forall\, n : \lambda K \leq \lambda K_n = (\frac{2}{3})^n$
Отсюда $\lambda K = 0$
K – имеет мощность континуума
Возьмем произвольную бинарную последовательность
Пусть 0 соответствует левому подотрезку, 1 – правому
Будем начинать в K_1
Если видим 0, спускаемся в первую треть отрезка, иначе – в третью
Это отображение – биекция
Т.о. мы сопоставили бинарную последовательность элементу из K
Это пример континуального множества меры 0

4. $\exists$ неизмеримые множества
   Рассмотрим $\mathbb{R}$
   Пусть $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$
   Рассмотрим $\mathbb{R} \cap [0,1]/_{\sim}$
   A – множество, где из каждого класса эквивалентности $\mathbb{R} \cap [0,1]/_{\sim}$ взят один элемент
   Пусть A измеримо
   Тогда $\forall\, t\ A + t$ измеримо $(A + t = \{a + t : a \in A\})$
   Возьмем $\displaystyle\bigsqcup_{q \in Q, q \in [-1,1]} (A + q) \subset [-1, 2]$
   Заметим, что объединение правда дизъюнктное: $a + q_1 = b + q_2 \Leftrightarrow a - b = q_2 - q_1$, а это значит, что не может быть, чтобы $a \in A$ и $b \in A$
   $[0,1] \subset \displaystyle\bigsqcup_{q \in Q, q \in [-1,1]} : x \in [0,1] \Rightarrow \exists\, a \in A : x - a = q \in Q, q \in [-1,1]$
   Если $\lambda A = \alpha_0 > 0$
   Тогда, с одной стороны, $\displaystyle\sum_q \lambda(A + q) \leq 3$
   С другой стороны, $\displaystyle\sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \alpha_0 = +\infty$
   Если $\lambda A = 0$
   Тогда, с одной стороны, $\displaystyle\sum_q \lambda(A + q) \geq 1$
   С другой стороны, $\displaystyle\sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \alpha_0 = 0$

5. Регулярность меры Лебега
   Лемма
   $A \in \mathcal{M}^m$
   Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ откр. $\Gamma_\varepsilon : A \subset \Gamma_\varepsilon, \lambda(\Gamma_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ замк. $F_\varepsilon : A \subset F_\varepsilon, \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$
   Доказательство 1
   A – ограничено $\Rightarrow \lambda A$ – конечное
   $\lambda A = \displaystyle\int (\sum \lambda P_k : A \subset \bigcup P_k)$
   Из технического описания inf: $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, (P_k) : \lambda A \leq \sum \lambda P_k < \lambda A + \dfrac{\varepsilon}{2}$
   Ячейки $P_k = [a_k, b_k)$ заменим на $(a_k^*, b_k) \supset P_k$ так, чтобы мера увеличилась на $\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

$\Gamma_\varepsilon := \bigcup (a_k^*, b_k)$
Если A – не ограниченное
$\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$
$A = \bigsqcup A \cap Q_i$
$\lambda A = \sum \lambda(A \cup Q_i)$
$A \cup Q_i \subset G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$
$\Gamma_\varepsilon = \bigcup G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$
$A = \bigcup (A \cup Q_i) \subset \bigcup G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$
$G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup (G_{i, \frac{\varepsilon}{2}} \setminus (A \cap Q_i))$
$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \leq \sum \lambda(\ldots) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$

8.6 Криволинейный интеграл в $\mathbb{R}^m$

Определение
Векторное поле $V : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – непрерывное
Определение
Интеграл векторного поля по пути $I(V, \gamma) := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}\, t$ $V = (V_1, \ldots, V_m)$
$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$
$I(V, \gamma) = \int_a^b \sum_i V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, \mathrm{d}\, t$
Обозначение: $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 \, \mathrm{d}\, x_1 + \ldots + V_m \, \mathrm{d}\, x_m$
Свойства

1. Линейность по полю:
   $I(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \gamma) = \alpha_1 I(V_1, \gamma) + \alpha_2 I(V_2, \gamma)$

2. Аддитивность по дроблению:
   $a < c < b$
   $\gamma_1 = \gamma \Big|_{[a,c]}, \gamma_2 = \gamma \Big|_{[c,b]}$
   $I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$
   Отсюда может рассматривать кусочно-гладкие пути

3. Замена переменной
   $\gamma : [a,b] \to E \subset \mathbb{R}^m$
   $\phi : [p,q] \to [a,b], \phi \in C^1$
   $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [p,q] \to E$
   Тогда $I(V,\gamma) = I(V,\widetilde{\gamma})$
   Доказательство
   $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}\, t = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \rangle \phi'(s) \,\mathrm{d}\, s \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \phi'(s) \rangle \,\mathrm{d}\, s$

4. $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m, \gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m$
   $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$
   Определим $\gamma = \gamma_2\gamma_1 : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^m$
   $t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$
   $I(V,\gamma) = I(V,\gamma_1) + I(V,\gamma_2)$

5. Противоположный путь
   $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$
   $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ – обратный путь
   $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$
   Тогда $I(V,\gamma_-) = -I(V,\gamma)$

6. Оценка интеграла пути
   $|I(V,\gamma)| \le \max\limits_{x \in \gamma([a,b])} |V(x)| l(\gamma)$, где $\gamma([a,b])$ – носитель пути, $l(\gamma)$ – длина пути
   Доказательство
   $\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}\, t \le \int_a^b |V(\gamma(t))||\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\, t \le \max |V(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}\, t$

8.7 Потенциальные векторные поля

Определение
$O \subset \mathbb{R}^m$ – область, $V : O \to \mathbb{R}^m$ – векторное поле
V – потенциальное, если $\exists\, f : O \to \mathbb{R} : \forall\, x \in O \;\; \mathrm{grad}\, f = V$
f – потенциал
"Загадка"
Если f_1 и f_2 – потенциалы на области O
Тогда $f_1 - f_2 \equiv \mathrm{const}$
Теорема (обобщенная формула Ньютона-Лейбница)

$V: O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – потенциальное поле
f – потенциал, γ – кусочно-гладкий путь
$\gamma: [a, b] \to O, \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$
Тогда $\displaystyle\int_\gamma \sum_i V_i \,\mathrm{d}\, x_i = f(B) - f(A)$
Доказательство

1. Если γ – гладкий путь
   $$\int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\gamma'(t) \,\mathrm{d}\, t = f(\gamma_1(t), \dots \gamma_m(t))\Big|_a^b = f(B) - f(A)$$
2. Если γ – кусочно-гладкий
   Разобъем область определения на отрезки: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$
   Посчитаем каждый интеграл и сложим

Определение
Интеграл поля V не зависит от пути в области O, если $\forall\, a, b \in O \forall\, \gamma_1, \gamma_2$ – кусочно-гладкие пути из A в B $\displaystyle\int_{\gamma_1} \sum_i V_i \,\mathrm{d}\, i = \int_{\gamma_2} \sum_i V_i \,\mathrm{d}\, i$
Теорема (характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)
//Лекция 21 0:20. Дальше там ничего не видно
//Лекции 22-23 тоже скипаю, мне лень.
//Вот конспект, там есть `https://github.com/Jovvik/M3137year2019/blob/pdfs/analysis/3sem/final.pdf`

9 Метод Лапласа

Лемма о локализации
f – непрерывная(суммируемая) на $[a, b], f \geq 0$
f – «не изсчезает» вблизи $a: \exists\, U(a): \forall\, x \in U(a), x > a$ $\displaystyle\int_a^x f(t) \,\mathrm{d}\, t > 0$
ϕ – убывает на $[a, b]$ «почти строго»:
$\forall\, t \in (a, b)$ $\phi(t) < \phi(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \phi(x)$
(отсюда $\exists\, t_1 \in (a, t): \phi(t) < \phi(t_1) < \phi(a + 0)$)
Тогда $\forall\, c \in (a, b)$ $\displaystyle\int_a^b f(t) e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t \underset{A \to +\infty}{\sim} \int_a^c f(t) e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t$

Доказательство

$M := \int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, t < +\infty$

$\int_c^b f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t \leq e^{A\phi(c)} \int_c^b f \leq e^{A\phi(c)} M$ Выберем $c_1 \in (a, c) : \phi(c_1) > \phi(c)$

$\int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t \geq \int_a^{c_1} f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t \geq e^{A\phi(c_1)} \underbrace{\int_a^{c_1} f\phi t}_{:=m>0}$

$e^{A\phi(c)} M = o(e^{A\phi(c_1)} m)$ при $A \to +\infty$

Следствие

В условиях леммы при фиксированном $c \in (a, b)$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, A_0 : \forall\, A > A_0 \int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t < \int_a^b f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t < (1+\varepsilon) \int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t$

Замечание

$g = O(f)$ при $t \to a$

Тогда $\int_a^b g(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t = O(\int_a^b fe^{A\phi}), A \to +\infty$

То же верно при $g = o(f), f \sim g$

Теорема (метод Лапласа)

$f \geq 0$ – непрерывная(суммируемая) на $[a, b]$

$f(t) \sim L(t-a)^q, t \to a, L \in \mathbb{R}, q > -1$

ϕ – монотонно убывающая

$\phi(a) - \phi(t) \sim c(t-a)^p, p > 0$

Тогда $\int_a^b f(t)e^{A\phi(t)} \,\mathrm{d}\, t \underset{A\to+\infty}{\sim} e^{A\phi(a)} \int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} \,\mathrm{d}\, t$

Доказательство

Возьмем $\varepsilon > 0$

Выбираем $s : \forall\, t \in [a, a+\varepsilon]\ 1-\varepsilon < \dfrac{f(t)}{L(t-a)^q} < 1+\varepsilon, 1-\varepsilon < \dfrac{\phi(a)-\phi(t)}{c(t-a)^p} < 1+\varepsilon$

Тогда $\exists\, A_0$ – из следствия : $\forall\, A > A_0 \int_a^b fe^{A\phi} < (1+\varepsilon) \int_a^{a+s} fe^{A\phi} = (1+\varepsilon)e^{A\phi(a)} \int_a^{a+s} fe^{-A(\phi(a)-\phi(t))} \,\mathrm{d}\, t \underset{\text{по следствию}}{<} (1+\varepsilon)e^{A\phi(a)}(1+\varepsilon)L \int_a^{a+s} (t-a)^q e^{-A(1-\varepsilon)c(t-a)^p}$

Сделаем замену $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{p}}(t-a) \to t-a$

$(1+\varepsilon)e^{A\phi(a)}(1+\varepsilon)L\int_a^{a+s}(t-a)^q e^{-A(1-\varepsilon)c(t-a)^p} = (1+\varepsilon)^2 e^{A\phi(a)}L\frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}}\int_a^{a+s(1-q)^{\frac{1}{p}}}(t-$
$a)^q e^{-Ac(t-a)^p}\,\mathrm{d}\,t < \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}}e^{A\phi(a)}L\int_a^b (t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p}$

С другой стороны, $\int_a^b fe^{A\phi} > \int_a^{a+s} fe^{A\phi} > (1-\varepsilon)Le^{A\phi(a)}\int_a^{a+s}(t-a)^q e^{-Ac(1+\varepsilon)(t-a)^p}\,\mathrm{d}\,t =$
$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon^{\frac{p+1}{q}}}Le^{A\phi(a)}\int_a^{a+s(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p}\,\mathrm{d}\,t > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon^{\frac{p+1}{q}}}Le^{A\phi(a)}\int_a^{a+s}(t-$
$a)^q e^{-Ac(t-a)^p}\,\mathrm{d}\,t > \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}+1}}e^{A\phi(a)}\int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p}$

Тогда $\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,A_0 : \forall\,A > A_0\ \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}+1}} < \frac{\int_a^b f(t)e^{A\phi(t)}\,\mathrm{d}\,t}{e^{A\phi(a)}\int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p}\,\mathrm{d}\,t} <$
$\frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}}$