

# Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

## 1 Введение

### 1.1 Множества

*Множество* - совокупность уникальных элементов.  
(Не является определением)

Способы задания множества:

1.  $A = \{1, 2, \dots\}$  - перечисление
2.  $A = \{x \in B : \phi(x)\}$  - через другое множество

Отношения множеств:

1.  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$
2.  $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Операции над множествами:

1.  $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  - Декартово произведение
2.  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \exists \alpha \quad x \in X_\alpha\}$  - Объединение
3.  $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : \forall \alpha \quad x \in X_\alpha\}$  - Пересечение
4.  $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$  - Дополнение
5.  $A \setminus B = A \cap B^c$  - Разность

6.  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  - Исключающее объединение (симметричная разность)

Свойства объединения и пересечения:

1. Коммутативность:  $X \cap Y = Y \cap X$ ;  $X \cup Y = Y \cup X$
2. Нейтральный элемент:  $X \cap U = X$ ;  $X \cup \emptyset = X$
3. Ассоциативность:  $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ ;  $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
4. Дистрибутивность (законы де Моргана):  
 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ ;  $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Законы де Моргана для разности:

1.  $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
2.  $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

## 1.2 Логические операции

Правила отрицания:

1.  $\overline{\exists x : \phi(x)} \Leftrightarrow \forall x : \overline{\phi(x)}$
2.  $\overline{\forall x : \phi(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{\phi(x)}$

Операции над логическими выражениями:

1. Импликация  
 $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Q \vee \overline{P}$
2. Эквивалентность  
 $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \wedge P \vee \overline{Q} \wedge \overline{P}$

## 1.3 Семейства

*Семейство* - совокупность неупорядоченных элементов.  
(Не является определением)

### Определение

*Семейство элементов*  $X$  - отображением множества индексов  $A$  в множество  $X$ . Обозначения:

1.  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}, x_\alpha \in X$
2.  $A \rightarrow X$
3.  $\alpha \mapsto x_\alpha$

Частные случаи семейств:

1. Упорядоченный набор из  $n$  чисел  
 $\{1 \dots n\} \mapsto \mathbb{R}$
2. Упорядоченная пара  
 $\{1, 2\} \mapsto \mathbb{R}$
3. Последовательность

## 1.4 Счетные и несчетные множества

### Определение

Назовем два множества эквивалентными, если существует биекция между ними

Классы эквивалентности по этому отношению называются *мощностью множества*

Если множество конечно, то его мощность - число его элементов

### Определение

Множество *счетно*, если существует биекция между этим множеством и  $\mathbb{N}$

### Теорема

Если множество бесконечно, то оно содержит счетное подмножество

### Доказательство

Будем по одному выкидывать элементы из множества, нумеруя их

Т.к. множество бесконечно, то для каждого номера такой элемент найдется

### Теорема

Бесконечное подмножество в счетном множестве тоже счетно

### Доказательство

Пусть  $A$  - счетное множество

$B$  - бесконечное подмножество  $A$

Пусть у каждого элемента  $A$  был номер

Перенумеруем элементы  $B$  в порядке возрастания номеров

**Определение**

Множество *не более чем счетное* - множество, являющееся конечным или счетным

**Теорема**

Не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно

**Следствие**

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  счетно

**Теорема**

$\mathbb{Q}$  счетно

**Теорема**

$[0, 1]$  несчетно

**Определение**

Если множество равномощно  $[0, 1]$ , то его мощность - *континуум*

**Теорема**

Пусть  $A$  - имеет мощность континуума,  $B$  не более чем счетно

Тогда  $A \cup B$  имеет мощность континуума

**Теорема**

Множество всех бесконечных бинарных последовательностей имеет мощность континуума

**Доказательство**

Сопоставим каждой последовательности  $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots)$  двоичную дробь  $0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots$

Заметим, что такое сопоставление не будет биективным из-за двойственности представления двоичных дробей

Пусть  $A$  - множество конечных двоичных дробей (целая часть 0)

Множество  $A$  счетно (можно сопоставить каждой дроби двоичное число из  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ , полученное отражением числа относительно запятой)

Теперь мы можем построить биекцию между последовательностями и  $[0, 1] \cup A$ , считая, что элементы  $A$  - это "другие" дроби, не содержащиеся в  $[0, 1]$

Тогда из предыдущей теоремы множество последовательностей равномощно  $[0, 1]$

**Континуум-гипотеза**

Пусть  $A \subset [0, 1]$  и не континуально

Утверждение "Тогда  $A$  счетно" невозможно ни доказать, ни опровергнуть

**Утверждение**

$\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^\infty$  - континуум

$\{f : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  - больше, чем континуум

Если  $X$  - множество, то  $2^X$  - множество всех подмножеств - имеет большую мощность

## 2 Последовательности в метрическом пространстве

### 2.1 Предел вещественной последовательности

#### Определение

Пусть  $(x_n)$  - вещественная последовательность

$$(x_n) \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

Замечания:

1.  $N = N(\varepsilon)$
2. Необязательно брать самый оптимальный  $N$
3.  $N(\varepsilon_0)$  подходит для  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$
4. " $< \varepsilon$ " можно заменить на " $< y\varepsilon$ " или " $< \varepsilon^y$ " ( $y \in (0; +\infty)$ )

#### Определение

$\varepsilon$ -окрестность  $\alpha$   $U_\varepsilon(\alpha) = [\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$

#### Определение

$$(x_n) \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall n > N x_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

#### Определение

*Метрика* на  $X$  - это отображение  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее свойствам (аксиомам метрики):

1.  $\forall x, y \in X \rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  - неравенство треугольника

**Определение**

Пара  $(X, \rho)$  - метрическое пространство

Примеры:

1. Симплициальная метрика -  $\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ .
2. Метрика Хемминга  
 $X = \text{множество байтов} = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8) : \forall i \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$   
 $\rho(x, y) = \text{число несовпадающих разрядов}$
3. Метрика городских кварталов  
 $(\mathbb{R}^m, \rho) : \rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|$
4. Евклидова метрика  
 $(\mathbb{R}^m, \rho) : \rho(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \dots + |x_m - y_m|^2}$
5.  $(\mathbb{R}^m, \rho) : \rho(x, y) = \max |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_m - y_m|$

**Определение**

$(X, \rho)$  - метрическое пространство

$A \subset X$

$\rho_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R} : \forall a, b \in A \rho_A(a, b) = \rho(a, b)$

$(A, \rho_A)$  - Подпространство метрического пространства

**Определение**

$(X, \rho)$  - метрическое пространство

$a \in X, r > 0$

Открытый шар  $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

Закрытый шар  $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$

Сфера  $S(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\}$

**Определение**

$\varepsilon$ -окрестность точки  $a = B(a, \varepsilon)$

Проколота  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a = \overset{\bullet}{B}(a, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$

**Определение**

$A \subset X$  - Ограниченное

$\Leftrightarrow A$  содержится в каком-нибудь шаре (в том числе в шаре с фиксированным центром)  
 $\Leftrightarrow \exists a \in X, r > 0 : A \subset B(a, r)$   
 $\Leftrightarrow \exists r > 0 : A \subset B(b, r)$  для фиксированного  $b$

### Определение

$(x_n)$  - последовательность в  $(X, \rho)$   
 $x_n \rightarrow L$   
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N \rho(x_n, L) < \varepsilon$   
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N x_n \in U_\varepsilon(L)$   
 $\Leftrightarrow (x_n \rightarrow L \Leftrightarrow \rho(x_n, L) \rightarrow 0)$

### Теорема

Пусть  $(x_n)$  - последовательность в  $(X, \rho)$   
 $x_n \rightarrow L, x_n \rightarrow M$   
 Тогда  $L = M$ .

### Доказательство

Для любой окружности верно, что вне нее содержится конечное количество  $x_n$ .

Пусть  $L \neq M$ .

Возьмем  $U_\varepsilon(L)$  и  $U_\varepsilon(M)$  с  $\varepsilon = \frac{\rho(L, M)}{2}$ . Тогда из свойства для  $U_\varepsilon(L)$  следует, что в  $U_\varepsilon(M)$  конечное количество членов, что неверно. Отсюда  $L = M$ , ч.т.д.

Уточнение:  $U_\varepsilon(M) \cap U_\varepsilon(L) = \emptyset$ , т.к. окрестности - открытые окружности (доказательство очевидно).

### Теорема

#### (об ограниченности сходящейся последовательности)

Пусть  $(x_n)$  - последовательность в  $(X, \rho)$   
 $x_n \rightarrow L$

Тогда множество значений  $x_n$  ограничено.

$(\exists B(a, r) : \forall n x_n \in B(a, r))$

### Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall n > N_\varepsilon x_n \in U_\varepsilon(L)$

Возьмем  $\varepsilon$ .  $R = \varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} \rho(x_i, L)$ . Тогда  $\forall n x_n \in B(L, R)$

## 2.2 Порядковые свойства пределов последовательностей в $\mathbb{R}$

### Теорема

(о предельном переходе в неравенствах)

$(x_n), (y_n)$  - вещественные последовательности

$x_n \leq y_n$  для бесконечного количества  $n$ .

Пусть:  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$

Тогда  $a \leq b$

### Доказательство

Пусть  $a > b$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{\rho(a, b)}{2}$ . Для некоторого  $N \forall n > N \ x_n \in U_\varepsilon(a), y_n \in U_\varepsilon(b)$ . Отсюда  $\forall n > N \ y_n \leq b + \varepsilon < a - \varepsilon \leq x_n \Leftrightarrow \forall n > N \ y_n < x_n$ , что неверно. Тогда  $a \leq b$ , ч.т.д.

### Теорема о двух городских

$(x_n), (y_n), (z_n)$  - вещественные последовательности.

$\forall x_n \leq y_n \leq z_n$

Пусть  $x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a$

Тогда  $y_n \rightarrow a$

### Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \ a - \varepsilon < x_n$

Для того же  $\varepsilon \exists K \forall n > K \ a + \varepsilon > z_n$

При  $n > \max(N, K) \ a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$ .

Отсюда  $\forall \varepsilon > 0 \exists S > 0 \forall n > S \ a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow y_n \rightarrow a$

### Следствие

$(y_n), (z_n)$  - вещественные последовательности.

$\forall n \ |y_n| \leq z_n$

$z_n \rightarrow 0$

Тогда  $y_n$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$

### Определение

$(x_n)$  - бесконечно малая последовательность  $\Leftrightarrow x_n \rightarrow 0$

### Теорема

$(x_n)$  - бесконечно малая



$(y_n)$  - ограниченная последовательность

Тогда  $(x_n \cdot y_n)$  - бесконечно малая

**Доказательство**

$$x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow 0$$

$$y_n - \text{ограниченная} \Leftrightarrow \exists R \forall n |y_n| \leq R$$

$$\text{Отсюда } |x_n \cdot y_n| \leq R \cdot |x_n| \rightarrow 0$$

Тогда по следствию из теоремы о двух городских  $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$ , ч.т.д.

## 2.3 Отображение

*Отображение* - тройка объектов  $(f, X, Y)$ , где  $X$  - область определения,  $Y$  - область значений.

Обозначения:

$$1. \forall x \in X \quad f(x) \in Y$$

$$2. f : X \rightarrow Y$$

$$3. x \mapsto y$$

Функция - отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}$

Векторнозначная функция - отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}^m$

Вещественная последовательность - отображение  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Семейство - отображение

**Определение**

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Образ  $A \subset X$   $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \quad y = f(x)\}$

**Определение**

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ . Прообраз  $B \subset Y$   $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

(Не является обратным отображением)

Инъекция (взаимно однозначное отображение):  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Сюръекция (отображение "на"):  $\forall y \exists x : f(x) = y$

Биекция (взаимно однозначное соответствие) = Инъекция  $\wedge$  Сюръекция

**Определение**

График отображения  $f : X \rightarrow Y$

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$$

### Определение

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  - инъективное.

Обратное отображение  $f^{-1} : f(X) \subset Y \rightarrow X$

$\forall y \in f(X) \exists x \in X : f(x) = y.$

В силу инъективности  $f^{-1}(y) = x$

### Определение

$f : X \rightarrow Y$

$A \subset X$

Сужение  $f$  на  $A$  - это отображение  $f|_A : A \rightarrow Y : \forall x \in A f|_A(x) = f(x)$

### Определение

$f : X \rightarrow Y$

$X \subset B$

Продолжение  $f$  на  $B$  - это отображение  $F : B \rightarrow Y : \forall x \in X F(x) = f(x)$

### Определение

Тождественное отображение  $id : X \rightarrow X$  - функция  $id(x) = x$

### Определение

$f : X \rightarrow Y$

$g : Y \rightarrow Z$

Композиция отображений - отображение  $g \circ f : X \rightarrow Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$

## 2.4 Вещественные числа

### Определение

$\mathbb{R}$  - любое множество, которое удовлетворяет аксиомам 1-4

#### 1. Аксиомы поля

(a) " + " :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

i. Коммутативность  $a + b = b + a$

ii. Ассоциативность  $(a + b) + c = a + (b + c)$

iii. Нейтральный элемент  $\exists 0 : a + 0 = a$

iv. Обратный элемент  $\exists b : a + b = 0$

(b) "  $\cdot$  " :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

i. Коммутативность  $a \cdot b = b \cdot a$

ii. Ассоциативность  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

iii. Нейтральный элемент  $\exists 1 \neq 0 : a \cdot 1 = a$

iv. Обратный элемент  $\forall a \neq 0 \exists b : a \cdot b = 1$

(v) Дистрибутивность  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

## 2. Аксиомы порядка

(a) "  $\leq$  " =  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

i.  $\forall x, y \ x \leq y \vee y \leq x$  - полнота

ii.  $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$  - транзитивность

iii.  $x \leq y, y \leq x \Leftrightarrow x = y$  - антисимметричность

iv.  $x \leq y \Rightarrow \forall z \ x + z \leq y + z$

v.  $0 \leq x, y \Rightarrow 0 \leq xy$

## 3. Аксиома Архимеда

$\forall x, y > 0 \exists n \in \mathbb{N} \ nx > y$

*Пояснение:* не существует бесконечно больших чисел

## 4. Аксиома Кантора

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$  - бесконечное семейство вложенных отрезков в  $\mathbb{R}$

Тогда  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] \neq \emptyset$

*Замечание:* отрезки не могут быть заменены на (полу)интервалы

Множество, удовлетворяющее аксиомам

- поля - *поле*
- поля и порядка - *упорядоченное поле*

$[a, b] = x : a \leq x \leq b$  - отрезок  
 $[a, b) = x : a \leq x < b$  - полуинтервал  
 $(a, b] = x : a < x \leq b$  - полуинтервал  
 $(a, b) = x : a < x < b$  - интервал  
 $\langle a, b \rangle$  - любой из 4 промежутков

### Определение

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$   
 $\forall a \in \mathbb{R} \quad -\infty < a < +\infty$

### Теорема

$\frac{1}{2} \sum_{(i,k) \in A \times B} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \geq 0$  - Тождество

Лагранжа

$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2$  - Неравенство Коши - Буняковского (КБШ)

## 2.5 Нормированное пространство

### Определение

$K$  - поле (поле скаляров)  $X$  - линейное (векторное) пространство над полем  $K$ , если заданы

$" + " : X \times X \rightarrow X$  и  $" \cdot " : K \times X \rightarrow X$ , удовлетворяющие аксиомам

1.  $a + b = b + a$
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $\exists 0 \in X : \forall a \quad a + 0 = a$
4.  $\forall a \quad \exists -a \in X : a + (-a) = 0$
5.  $\forall \lambda, \mu \in K, a \in X \quad (\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$
6.  $\forall \lambda \in K, a, b \in X \quad \lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$
7.  $\forall \lambda, \mu \in K, a \in X \quad (\lambda \mu) \cdot a = \lambda (\mu \cdot a)$
8.  $1 \cdot a = a$

### Определение

*Нормированное пространство* - это линейное пространство, в котором задана норма.

*Норма в линейном пространстве  $X$  над полем  $K$*  - это отображение  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее аксиомам нормы:

1. Положительная неопределенность:

$$\|x\| \geq 0, \text{ причем } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

2. Положительная однородность

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. Неравенство треугольника

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Свойства нормы:

1.  $p(\sum \lambda_k x_k) \leq \sum \lambda_k p(x_k)$   
( $x_k \in X, \lambda_k \in K$ )

2.  $p(0) = 0$

3.  $p(-x) = p(x)$

4.  $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$

### Определение

*Полунорма* - неотрицательная функция, удовлетворяющая 2 и 3 аксиомам нормы.

*Замечание:* в нормированном пространстве  $\|x - y\|$  является метрикой, но не всякая метрика может быть порождена нормой.

## 2.6 Арифметические свойства пределов

**Теорема(арифметические свойства предела в нормированном пространстве)**

$(X, \|\cdot\|)$  - нормированное пространство

$(x_n), (y_n)$  - последовательности в  $X$

$(\lambda_n)$  - последовательность скаляров.

Пусть  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \lambda_n \rightarrow \mu$

Тогда:

$$1. x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b$$

**Доказательство**

$$0 \leq \|x_n \pm y_n - (a \pm b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n \pm y_n - (a \pm b)\| \rightarrow 0$$

$$2. x_n y_n \rightarrow ab$$

$$3. \lambda_n x_n \rightarrow \mu a$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \mu a\| &= \|(\lambda_n x_n - \mu x_n) + (\mu x_n - \mu a)\| \leq \|(\lambda_n - \mu)x_n\| + \|\mu(x_n - a)\| \\ &= |\lambda_n - \mu| \cdot \|x_n\| + |\mu| \cdot \|x_n - a\| = |\text{б.м.}| \cdot \|\text{огр.}\| + |\text{огр.}| \cdot \|\text{б.м.}\| = \text{б.м.}, \\ &\text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

$$4. \|x_n\| \rightarrow \|a\|$$

$$5. y_n, b \neq 0 \text{ начиная с некоторого места } \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

**Доказательство**

$$\text{Достаточно доказать, что } \frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$$

$$\text{Докажем ограниченность } \frac{1}{y_n}:$$

$$\text{Из предела для } \varepsilon = \frac{|b|}{2} \exists N \forall n > N |y_n| > \frac{|b|}{2}. \text{ Тогда начиная с}$$

$$\text{некоторого } N \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| &= \frac{1}{y_n} \cdot \frac{1}{b} \cdot |y_n - b| = \text{ограниченная с некоторого места} \cdot \\ &\text{ограниченная} \cdot \text{бесконечно малая} = 0 \end{aligned}$$

## 2.7 Сходимость к $\infty$

В  $\mathbb{R}$ :

**Определение**

$(x_n)$  - вещественная последовательность,  $x_n \rightarrow +\infty$ , если

$$\forall E > 0 \exists N \forall n > N x_n > E$$

или на языке окрестностей

$$\forall U(+\infty) \exists N \forall n > N x_n \in U(+\infty), \text{ где } U(+\infty) = (a, +\infty] - \text{окрестность } +\infty$$

Аналогично  $x_n \rightarrow -\infty$

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow +\infty$$

$x_n$  - бесконечно большая последовательность. При этом  $\frac{1}{x_n}$  - бесконечно малая последовательность

Если  $x_n \rightarrow +\infty$ , то  $x_n \nrightarrow -\infty$ ,  $x_n \nrightarrow a \in \mathbb{R}$  - единственность предела.  
Другими словами если  $x_n \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$ , то он единственный.

Все утверждения о пределах актуальны для  $\mathbb{R}^m$

### Теоремы

Если  $x_n \rightarrow +\infty$ , то  $x_n$  не ограничена сверху, но ограничена снизу и имеет минимум

Если  $x_n \rightarrow -\infty$ , то  $x_n$  не ограничена снизу, но ограничена сверху и имеет максимум

Если  $x_n \leq y_n$ ,  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , тогда  $a \leq b$

#### Доказательство теоремы 1

Пусть для некоторого  $E \exists k \forall n > k \ x_n > E$ . Тогда минимум  $x_n$  - это

$$\min_{1 \leq n \leq k} x_n$$

#### Доказательство теоремы 3

1.  $a, b \in \mathbb{R}$  - доказано
2.  $b = +\infty$  (включая  $a = \pm\infty$ ). Тогда  $a \leq b$
3.  $a = +\infty$ . Тогда возможно только  $b = +\infty$

### Теорема об арифметических свойствах предела в $\overline{\mathbb{R}}$

$(x_n), (y_n)$  - последовательности в  $\mathbb{R}$

$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ , где  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда

1.  $x_n + y_n \rightarrow a + b$
2.  $x_n y_n \rightarrow ab$
3. Если  $y_n \neq 0$  с некоторого места,  $b \neq 0$ , то  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

при условии, что правые части утверждений имеют смысл (т.е. нет операций вида  $(-\infty) + (+\infty)$ ,  $0 \cdot (\pm\infty)$ ,  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ )

*Замечание*

$\frac{\pm X}{0}$  может быть интерпретирован как  $\pm\infty$

## 2.8 Точные границы числовых множеств

### Определение

Пусть непустое  $E \subset \mathbb{R}$  и ограничено сверху.

*Супремум*  $E$  - наименьшая верхняя граница  $E$

или  $\sup E = \min\{M : \forall x \in E \ x \leq M\}$

или  $\sup E = S \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ S - \varepsilon < x \end{cases}$

*Инфимум*  $E$  - наибольшая нижняя граница  $E$

или  $\inf E = \max\{m : \forall x \in E \ m \leq x\}$

или  $\inf E = I \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \ I \leq x \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ x < I + \varepsilon \end{cases}$

## 2.9 Точки и множества в метрическом пространстве

Далее считаем, что  $X$  - метрическое пространство,  $D \subset X, a \in X$

### Определение

1.  $a$  - *внутренняя точка* множества  $D \Leftrightarrow \exists U(a) \subset D$
2.  $D$  - *открытое множество*, если все его точки внутренние
3.  $\text{Int}(D)$  - множество внутренних точек  $D$

$$\text{Int}(D) = \bigcup_{\substack{F \subset D \\ F \text{ - открытое}}} F$$

### Замечания

1.  $\emptyset$  и  $X$  - открытые множества
2. Открытый шар - открытое множество

**Доказательство**



Рассмотрим шар радиуса  $r$  с центром в точке  $a$ , а также точку  $x$

$$R = r - \rho(a, x)$$

$$U(x) = B(x, R)$$

Докажем, что  $U(x) \subset B(a, r)$ :

Рассмотрим  $y \in U(x)$ :

$$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < R + (r - R) = r$$

### Теорема о свойствах открытых множеств

1. Объединение любого семейства открытых множеств открыто

$(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство открытых множеств

$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открытое множество

**Доказательство**

Пусть  $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

Тогда  $\exists \alpha_0 : x \in G_{\alpha_0}$

Тогда  $\exists U(x) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ , ч.т.д.

2. Пересечение конечного семейства открытых множеств открыто

$(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство открытых множеств

$\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открытое множество

**Доказательство**

Пусть  $x \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

Тогда  $\forall \alpha_0 x \in G_{\alpha_0}$

Тогда  $\exists U(x) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$ , ч.т.д.

**Контр-пример для бесконечного семейства**

$\bigcap_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \{0\}$  - не открытое множество в  $\mathbb{R}$

### Определение

1. Проколота окрестность  $\dot{U}(a) = B(a, r) \setminus \{a\}$
2.  $D \subset X$ ,  $a$  - предельная точка  $D \Leftrightarrow \forall \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$   
( $a \in D$  или  $a \notin D$ )

### Замечание

1.  $a$  - предельная точка  $D \Leftrightarrow \forall U(a) |\dot{U}(a) \cap D| = \infty$
2.  $a$  - предельная точка  $D \Leftrightarrow \exists (x_n) \neq a \subset D : x_n \rightarrow a$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Рассмотрим  $U_{r_1}(a)$ . Возьмем там  $d_1$

Положим  $d_2 = \min \rho(a, d_1), \frac{r_1}{2}$

Повторим для  $d_2 \dots \infty$

Тогда  $(d_n)$  - искомая последовательность

**Доказательство**  $\Leftarrow$

В каждой окрестности есть какой-то  $x_n$ , а значит любая окрестность непустая

### Определение

$a \in D$  - *изолированная точка*, если  $\exists U(a) : U(a) \cap D = \{a\}$

### Определение

$D$  - *замкнутое множество* в  $X$ , если  $D$  содержит все свои предельные точки

### Теорема

$D \subset X$  - замкнутое  $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$  - открытое

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть правое утверждение ложно. Тогда  $\exists x \in D^c : \forall U(x) U(x) \cap D \neq \emptyset$ .

Тогда для такого  $x$

$\forall U(x) U(x) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \dot{U}(x) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow x$  - предельная точка  $\Rightarrow x \in D$ , т.к.  $D$  замкнутое. Отсюда противоречие

Тогда  $\exists U(x) \subset D^c$ , ч.т.д.

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$D^c$  - открыто

Если  $D$  не замкнуто, то  $\exists x$  - предельная точка  $D, x \notin D$ . Тогда  $x \in D^c \Rightarrow \exists U(x) \subset D^c \Rightarrow x$ , т.е.  $U(x) \cap D = \emptyset$  - не предельная точка  $D$ . Тогда  $D$  - замкнуто, ч.т.д.

### Теорема о свойствах замкнутых множеств

В произвольном метрическом пространстве  $X$ :

1.  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  - произвольное семейство замкнутых в  $X$  множеств. Тогда  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  - замкнутое
2.  $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$  - произвольное конечное семейство замкнутых в  $X$  множеств. Тогда  $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$  - замкнутое

**Контр-пример для бесконечного семейства**

В  $\mathbb{R}$   $\{x\}$  - замкнутое в  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\frac{1}{k}\}$ . Тогда 0 - предельная точка, не содержащаяся в множестве. Тогда множество не замкнутое

### Доказательство

Из свойств открытых множеств и теоремы о связи открытых и замкнутых множеств

### Определение

$D \subset X$  - произвольное множество. Тогда замыкание  $\overline{D}$  множества  $D$  - это  $D \cup$  (все его предельные точки)

### Замечание

Обратим внимание, что  $\overline{D}$  содержит все предельные точки  $D$ , а не свои. Но все же  $\overline{D}$  - замкнуто

### Замечание

$$1. \overline{D} = \{a \in X : \exists (x_n) : x_n \rightarrow a, x_n \in D\}$$

$$2. \overline{D} = \bigcap_{\substack{F: D \subset F \subset X \\ F \text{ - замкнуто}}} F,$$

т.е.  $\overline{D}$  - наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее  $D$

$$3. D \text{ - замкнуто} \Leftrightarrow \overline{D} = D$$

### Определение

$D \subset X$  - произвольное множество

$a$  - граничная точка  $D$ , если  $\forall \overset{\bullet}{U}(a) \begin{cases} \overset{\bullet}{U}(a) \cap D \neq \emptyset \\ \overset{\bullet}{U}(a) \cap D^c \neq \emptyset \end{cases}$

### Замечание

1. Граничная точка - не внутренняя предельная точка
2. Граничная точка - предельная точка  $D$  и  $D^c$
3. Множество граничных точек замкнуто
4. Множество предельных точек замкнуто

## 2.10 Компактность и полнота

### Лемма Гейне-Бореля

Рассмотрим  $\mathbb{R}$

Пусть  $[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$

Тогда найдется конечное число отрезков  $k_1 \dots k_n$  таких, что  $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_{k_i}, b_{k_i})$

### Теоремы об открытых и замкнутых множествах в пространстве и подпространстве

Пусть  $D \subset Y \subset X$ ,  $X, Y$  - метрические пространства с общей метрикой

Тогда

1.  $D$  - открытое в  $Y \Leftrightarrow \exists G$  - открытое в  $X : D = G \cap Y$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$G$  - открыто в  $X$ ,  $D = G \cap Y$ . Доказать, что  $D$  открыто в  $Y$

Берем  $a \in D$

$a \in D \Rightarrow a \in G$ , а  $G$  - открыто. Тогда  $\exists r : B^x(a, r) \subset G \Rightarrow B^x(a, r) \cap Y = B^y(a, r) \subset G \cap Y = D$ . Отсюда  $a$  - внутренняя точка

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$D$  - открытое в  $Y$

$D = \bigcup_{x \in D} B^y(x, r_x)$ , где  $r_x$  подбираем так, чтобы  $B^y(x, r_x) \subset D$

Возьмем  $D = \bigcup_{x \in D} B^x(x, r_x)$ .  $G$  - открытое множество. Тогда  $D = G \cap Y$

2.  $D$  - замкнутое в  $Y \Leftrightarrow \exists F$  - замкнутое в  $X : D = F \cap Y$

**Доказательство**

$D$  - замкнутое в  $Y \Leftrightarrow (Y \setminus D)$  - открытое множество  $\Leftrightarrow \exists G$  - открытое в  $X : (Y \setminus D) = G \cap Y$

$$\begin{aligned}
Y \setminus (Y \setminus D) &= Y \setminus (G \cap Y) \\
D &= (Y \setminus G) \cap Y \\
D &= (X \setminus G) \cap Y. \text{ Отсюда } X \setminus G - \text{ замкнутое}
\end{aligned}$$

### Определение

$X$  - метрическое пространство

$K \subset X$

Если  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ , то множества  $G_\alpha$  образует *покрытие*  $K$

Если все  $G_\alpha$  - открытые, то *открытое покрытие*

$K \subset \bigcup_{\alpha \in A' \subset A} G_\alpha$  - *подпокрытие*

Множество называется *компактным*, если

$$\forall (G_\alpha) - \text{открытые} : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \exists G_{\alpha_1} \dots G_{\alpha_n} : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

### Теорема

Пусть  $K \subset Y \subset X$

Тогда  $K$  - компактно в  $Y \Leftrightarrow K$  - компактно в  $X$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$K$  - компактно в  $Y$

Пусть  $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открытые в  $X$

Тогда  $K \subset (\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y)$ .  $G_\alpha \cap Y$  - открыто в  $Y$ .

В силу компактности  $K$  в  $Y \exists \alpha_1 \dots \alpha_n$

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $K$  компактно в  $X$

$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ , где  $O_\alpha$  открыты в  $Y$

$\forall O_\alpha = G_\alpha \cap Y$ , где  $G_\alpha$  открыты в  $X$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда  $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Отсюда  $K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y) = \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$ , ч.т.д.

**Теорема о простейших свойствах компактных множеств**  
 $(X, \rho)$  - метрическое пространство  
 $K \subset X$

1.  $X$  - компактно  $\Rightarrow X$  замкнуто и ограничено

**Доказательство**

Докажем, что  $K^c$  - открытое

Пусть  $x \in K^c$

$$K \subset \bigcup_{a \in K} B(a, \frac{\rho(a, x)}{2})$$

Т.к.  $K$  - компактно,  $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, r_i)$ , где  $r_i = \frac{\rho(a_i, x)}{2}$

$$B(a_i, r_i) \cap B(x, r_i) = \emptyset$$

Отсюда  $B(x, \min(r_1, \dots, r_n))$  не пересекает ни одно  $B(a_i, r_i)$ . Тогда

$$B(x, \min(r_1, \dots, r_n)) \cap K = \emptyset \Leftrightarrow B(x, \min(r_1, \dots, r_n)) \subset K^c$$

Т.о.  $x \in K^c \Rightarrow B(x) \subset K^c$ , а значит  $K^c$  открыто. Тогда  $K$  замкнуто,

ч.т.д. Выберем  $x_0 \in X$ .  $K \subset X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n)$

Из компактности  $\exists n_1, \dots, n_m : K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_0, n_i)$

Тогда  $K \subset B(x_0, \max(n_1, \dots, n_m))$

2.  $X$  - компактно, а  $K$  - замкнуто. Тогда  $K$  - компактно

**Доказательство**

$K \subset \bigcup_{a \in K} G_a$ . Тогда  $X = \bigcup_{a \in K} G_a \cup K^c$ , где  $K^c$  - открыто.

Тогда  $\exists a_1, \dots, a_n : X = \bigcup_{i=1}^n (G_{a_i} \cup K^c)$ . Отсюда  $K \subset \bigcup_{a \in K} G_a$ , ч.т.д.

**Теорема о компактности в пространстве и в подпространстве**

$K \subset X \subset Y$  - компактно в  $X \Leftrightarrow K$  компактно в  $Y$

**Определение**

$a, b \in \mathbb{R}^m$

Параллелепипед  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1 \dots m\} a_i \leq x_i \leq b_i\}$

### Лемма о вложенных параллелепипедах

$$[a^{(1)}, b^{(1)}] \supset [a^{(2)}, b^{(2)}] \supset \dots$$

$$[a^{(1)}, b^{(1)}] \cap [a^{(2)}, b^{(2)}] \cap \dots \neq \emptyset$$

### Доказательство

Покоординатно следует из теоремы Кантора

### Лемма

Замкнутый параллелепипед компактен

### Доказательство

$[A^{(1)}, B^{(1)}] \subset \bigcup_{a \in K} G_a$  - открытые. Воспользуемся *половинным делением*

Допустим, что нет конечного подпокрытия

По каждой координате разделим параллелепипед на две части. Тогда он будет разделен на  $2^m$  частей

Если бы все части можно было накрыть конечным числом покрытий, то и весь параллелепипед можно

Тогда существует такой "кусочек" который не покрывается конечным числом подпокрытий.

Назовем этот параллелепипед  $[A^{(2)}, B^{(2)}]$ . Применим к нему такую же логику

Тогда мы получаем бесконечную последовательность вложенных параллелепипедов, каждый из которых не покрывается конечным количеством подпокрытий.  $\exists x \in [A^{(1)}, B^{(1)}] \cap [A^{(2)}, B^{(2)}] \cap \dots$  Тогда  $\exists G_i : x \in G_i$ . Вместе с  $x$  в  $G_i$  содержится некая окрестность  $B(x, R)$ .

Линейные размеры параллелепипедов стремятся к 0, а значит с некоторого момента его размеры по всем координатам будут такими, что  $\rho(A, B) < 2R$ . Отсюда весь этот параллелепипед поместится в  $B(x, R)$ . Тогда с некоторого места все параллелепипеды содержатся в некотором покрытии. Противоречие.

Отсюда параллелепипед компактен, ч.т.д.

### Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^m$

Данные утверждения эквивалентны

1.  $K \subset \mathbb{R}^m$  замкнуто и ограничено
2.  $K \subset \mathbb{R}^m$  компактно
3.  $K \subset \mathbb{R}^m$  секвенциально компактно

### Доказательство

1  $\Rightarrow$  2:  $K$  - ограничено  $\Rightarrow$  содержится в шаре  $\Rightarrow$  содержится в параллелепипеде  $\Rightarrow$  содержится в компактном множестве и замкнуто  $\Rightarrow$  компактно

2  $\Rightarrow$  3: (а) Если некая последовательность  $(x_n)$  имеет конечное число значений, то какое-то значение повторяется бесконечное количество раз. Тогда оно является частным пределом

(b) Иначе: пусть  $D$  - множество значений  $(x_n)$ ,  $|D| = \infty$

i. если  $D$  не имеет предельных точек

Пусть  $K \subset D$  Тогда  $\forall x \in K \exists \dot{B}(x, r') : \dot{B}(x, r') \cap D = \emptyset$   
 $K \subset \bigcup_{a \in K} B(x, r')$

Тогда каждая такая окрестность покрывает конечное множество точек, а значит  $K$  - не компактное - противоречие.

ii. существует  $x_0$  - предельная точка  $D$

Тогда из закрытости  $D$   $x_0 \in D$  и из определения предельной точки в  $D$  существует сходящаяся последовательность к  $x_0$ . Выкинем из нее элементы, индексы которых меньше, чем у предыдущих и получим подпоследовательность  $(x_n)$ , сходящуюся к  $x_0$ , ч.т.д.

3  $\Rightarrow$  1: Пусть  $a$  - предельная точка  $K$

Проверим, что  $a \in K$

$$x_n \in K$$

$$\exists (x_n) : x_n \neq a$$

$$x_n \rightarrow a$$

Выберем подпоследовательность  $(x_{n_k})$ . Из секвенциальной компактности  $\exists n_k : x_{n_k} \rightarrow x_0 \in K$ .

Из  $x_n \rightarrow a$   $(x_{n_k}) \rightarrow a$ . Отсюда  $x_0 = a$  и  $a \in K$ . Тогда  $K$  замкнуто

Пусть  $K$  не ограничено, то существуют сколь угодно большие числа. Выберем  $(x_n) \rightarrow \infty$ . Тогда  $x_{n_k} \rightarrow \infty$ , что противоречит секвенциальной компактности. Тогда  $K$  ограничено, ч.т.д.

### Определение

$K \subset X$  - секвенциально компактно, если  $\forall (x_n) \subset K \exists (n_k) \in \mathbb{N}, x_0 \in K : (n_k) \uparrow, x_{n_k} \rightarrow x_0$

### Замечания



1. В произвольном метрическом пространстве замкнутое + ограниченное  $\nRightarrow$  компактное
2.  $2 \Leftrightarrow 3$  в любом метрическом пространстве
3.  $2 \nLeftrightarrow 3$  в произвольном топологическом пространстве

### Следствие (принцип выбора Больцано-Вейерштрасса)

$(x_n)$  - ограниченная последовательность в  $\mathbb{R}^m$

Тогда существует сходящаяся подпоследовательность

#### Доказательство

$x_n$  - ограниченная последовательность

Тогда существует замкнутый параллелепипед  $K : \forall n x_n \in K$

Параллелепипед компактный. Тогда  $K$  - секвенциально компактный

Тогда из свойств секвенциальной компактности, ч.т.д.

#### Замечание

$x_n$  - не ограничено  $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) : x_{n_k} \rightarrow \infty$

#### Определение

$X$  - метрическое пространство

$(x_n)$  - *фундаментальная последовательность* (последовательность Коши, сходящаяся в себе)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

#### Лемма

1.  $(x_n)$  - фундаментальная последовательность  $\Rightarrow (x_n)$  - ограничена

#### Доказательство

Пусть  $\varepsilon = 1$

$\forall n_0, m > N(1) \rho(x_m, x_{n_0}) < 1$

Тогда  $x_m \in B(x_{n_0}, 1)$  начиная с  $m > N(1)$

Тогда не в  $B(x_{n_0}, 1)$  конечное число точек, а значит вся последовательность ограничена

2.  $(x_n)$  - фундаментальная последовательность,  $x_{n_k} \rightarrow A$

Тогда  $(x_n) \rightarrow A$

#### Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

$x_{n_k} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists M = \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \forall m > M \rho(x_m, a) \leq \rho(x_m, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

## Теорема

1.  $X$  - метрическое пространство  
 $(x_n)$  - сходящаяся  $\Rightarrow (x_n)$  - фундаментальная

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N \rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \rho(x_n, x_m) < \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2. в  $\mathbb{R}^m$  :  $(x_n)$  - фундаментальная  $\Rightarrow (x_n)$  - сходится

### Доказательство

$$(x_n) - \text{фундаментальная} \Rightarrow (x_n) - \text{ограниченная} \Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow a \Rightarrow x_n \rightarrow a$$

## Определение

Метрическое пространство *полно*, если в нем любая фундаментальная последовательность является сходящейся

### Утверждение (критерий Больцано-Коши)

$$(x_n) - \text{сходится в } \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

## 3 Пределы и непрерывность отображений

### 3.1 Всякие прикольные теоремы

#### Теорема Кантора

Пусть  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots, |[a_n, b_n]| = b_n - a_n \rightarrow 0$ . Тогда  $\exists! c : \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] =$

$$\{c\}$$

#### Доказательство

Т.к. пересечение не пусто, берем любую точку  $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ .

Тогда  $\forall k \ a_k \leq c \leq b_k$

$$|a_k - c| \leq b_k - a_k \rightarrow 0, \text{ т.е. } a_k \rightarrow c$$

$$|b_k - c| \leq b_k - a_k \rightarrow 0, \text{ т.е. } b_k \rightarrow c$$

Из единственности предела  $c$  единственный

#### Следствие

$$a_k, b_k \rightarrow c$$

Алгоритм перевода в двоичную дробь: делим наш промежуток пополам. Если число попало в левую половинку, дописываем 0 и переходим в левую, иначе дописываем 1 и переходим вправо.

### Теорема

1. Пусть  $\varepsilon_i$  - бесконечная последовательность из 0 и 1.  
Тогда  $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots$  определяет некоторое число из  $[0, 1]$
2.  $\forall x \in [0, 1]$  существует не более двух последовательностей  $\varepsilon_i$ , задающих  $x$

(a) Если  $x$  - двоичное рациональное число кроме 0, т.е.  $x = \frac{a}{2^b} \neq 1$   
- две записи

(b) Иначе - одна запись

#### Доказательство

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} [0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k; 0, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k + \frac{1}{2^k}]$$

3. Баг:

$x$  может оказаться между половинками очередного отрезка, тогда он принадлежит обоим половинкам.

$x$  окажется на стыке тогда и только тогда, когда он - двоичное рациональное число (на  $b$ -ом шаге)

В этом случае  $x$  имеет две записи

4. Отдельно:  $1, 00 \dots = 0, 11 \dots$

В любом упорядоченном поле  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Рассмотрим  $A \subset \mathbb{R}$

$A$  - индуктивное, если

1.  $1 \in A$
2.  $\forall x \in A \ x + 1 \in A$

Самое маленькое индуктивное множество:

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{A \subset \mathbb{R} \\ A \text{—индуктивное}}} A$$

### Неравенство Бернулли

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

#### Доказательство

1. База ( $n = 1$ ):  $1+x \geq 1+x$

2. Шаг индукции:

Пусть  $(1+x)^n \geq 1+nx$  - верно

Докажем  $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x, \text{ ч.т.д.}$$

### Определение

Множество  $A \subset \mathbb{R}$  *ограничено сверху*:

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M$$

Множество  $A \subset \mathbb{R}$  *ограничено снизу*:

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \geq m$$

Множество  $A \subset \mathbb{R}$  *ограничено*, если оно ограничено сверху и снизу

$x \in A$  - *максимум*, если  $\forall a \in A \quad a \leq x$

$x \in A$  - *минимум*, если  $\forall a \in A \quad a \geq x$

### Теорема

В любом конечном множестве существует максимальный (минимальный) элемент

#### Доказательство

1. База: для  $n = 1$   $A = \{x\}$ ,  $x$  - максимум

2. Переход: рассмотрим множество из  $n+1$  элементов  $A$ . Выберем элемент  $x$ . Множество  $A \setminus \{x\}$  имеет максимум  $y$ . Тогда максимум множества  $A$  - это  $\max x, y$ .

### Определение

Множество  $\mathbb{Q}$  *плотно* в  $\mathbb{R}$ , если  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{Q} : x \in [a, b]$

#### Доказательство для рациональных чисел

Пусть  $n \in \mathbb{N} > \frac{1}{b-a}$  (существует по теореме Архимеда)

$$\frac{1}{n} < b-a$$

Возьмем  $x = \frac{[na] + 1}{n} \in \mathbb{Q}$

$$a = \frac{na - 1 + 1}{n} < \frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

Отсюда  $a < x < b$ , ч.т.д.

### Теорема о существовании супремума

$E \neq \emptyset \subset \mathbb{R}$ , ограниченное сверху

Тогда  $\exists s \in \mathbb{R} : s = \sup E$

### Доказательство

Пусть  $b_1$  - верхняя граница  $E$ ,  $a_1 \in E$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}:$$

1. если  $c_1$  - верхняя граница, то рассмотрим промежуток  $[a_2, b_2] : a_2 = a_1; b_2 = c_1$   
 $b_2$  - верхняя граница
2. если  $c_1$  - не верхняя граница, то рассмотрим промежуток  $[a_2, b_2] : a_2 = c_1; b_2 = b_1$   
 $b_2$  - верхняя граница

$$|[a_n, b_n]| = b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Повторяем аналогичные действия. Тогда по следствию из теоремы Кантора существует единственный  $s = \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

Проверим, что  $s = \sup E$ :

1.  $\forall x \in E, n \ x \leq b_n$   
 $b_n \rightarrow s$   
Отсюда  $\forall x \in E \ x \leq s$
2.  $\forall \varepsilon \exists n \ b_n - a_n < \varepsilon$   
 $a_n \in E$
3.  $\forall \varepsilon \exists n \ s < b_n < \varepsilon + a_n$

### Дополнительная часть определения

1.  $E$  не ограничено сверху:  $\sup E = +\infty$

2.  $E$  не ограничено снизу:  $\inf E = -\infty$

3.  $E = \emptyset$ :  $\sup E = -\infty, \inf E = +\infty$

### Лемма о свойствах супремума

1.  $D \neq \emptyset \subset E \subset \mathbb{R}$

Тогда  $\sup D \leq \sup E$

**Доказательство**

$\sup E$  - верхняя точка  $D$

2.  $X \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda X = \lambda \cdot x : x \in X$  Тогда  $\forall \lambda > 0 \quad \sup \lambda X = \lambda \sup X$

3.  $\sup -X = -\inf X$

$\sup kX = k \sup X, k > 0$

$\inf kX = k \inf X, k > 0$

$\sup X + Y = \sup X + \sup Y$

$\inf X + Y = \inf X + \inf Y$

### Определение

1.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, D \subset X$

$f$  - ограничена(сверху/снизу) на  $D \Leftrightarrow f(D) \subset R$  - ограниченное множество(сверху/снизу)

2.  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  - монотонна  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

### Теорема о пределе монотонной последовательности

1.  $(x_n)$  - ограниченная сверху возрастающая вещественная последовательность

Тогда эта последовательность сходится к  $s = \sup x_n$

2.  $(x_n)$  - ограниченная снизу убывающая вещественная последовательность

Тогда эта последовательность сходится к  $i = \inf x_n$

3.  $(x_n)$  - ограниченная монотонная последовательность

Тогда эта последовательность сходится

**Доказательство**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : s - \varepsilon < x_n$$

Из возрастания  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N s - \varepsilon < x_n$

или  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N 0 \leq s - x_n < \varepsilon$

Т.о.  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , ч.т.д.

**Замечание**

$x_n$  - возрастающая. Тогда  $\exists \lim x_n = \sup x_n \in \overline{\mathbb{R}}$

**Лемма (о сходимости к нулю быстро убывающей последовательности)**

Пусть  $x_n > 0$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$

Тогда  $x_n \rightarrow 0$

**Доказательство**

Начиная с некоторого места,  $x_n$  убывает.  $x_n > 0$ . Тогда существует  $L$  :  $x_n \rightarrow L$ .

$$L \geq 0$$

1.  $L = 0$  - ч.т.д.

2.  $L > 0$ :

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$

Тогда для  $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ :  $\exists N : \forall n > N \frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{l+1}{2} < 1$

(Из определения предела)

В то же время для  $\varepsilon = L \frac{2}{l+1} - L$ :  $\exists N : \forall n > N x_n - L < \varepsilon$

Рассмотрим  $x_n$  для  $n > N$ :

$$x_n < L \frac{2}{l+1}$$

По лемме о пределе монотонной последовательности  $\inf x_n = L$

Тогда  $x_{n+1} \geq L$

Тогда  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{l+1}{2}$ . Противоречие

Отсюда  $L = 0$

**Следствие**

1.  $a > 1, k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$
2.  $a > 0$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

## 3.2 Предел отображений

### Определение

$X, Y$  - метрическое пространство

$D \subset X, f : D \rightarrow Y$

$a$  - предельная точка  $D$

Определим:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) \rightarrow A$ , если:

1. Определение по Коши; на языке  $\varepsilon - \delta$ :  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 \neq \rho^x(x, a) < \delta \quad \rho^y(f(x), A) < \varepsilon$
2. На языке окрестностей:  
 $\forall U(A) \exists V(a) \forall x \in D \cap \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$   
*( $U, V$  - окрестности)*
3. По Гейне:  
 $\forall (x_n) : \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \quad f(x_n) \rightarrow A$

### Теорема

Определения по Коши и по Гейне эквивалентны

### Доказательство

$x, y$  - метрические пространства

$f : D \subset X \rightarrow Y$

$a$  - предельная точка  $D$

$A \in Y$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Тогда по Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 \neq \rho^x(x, a) < \delta \quad \rho^y(f(x), A) < \varepsilon$



По Гейне:

$$\forall (x_n) : \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \quad f(x_n) \rightarrow A$$

1. Докажем, что из определения Коши следует определение Гейне

Возьмем  $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

Из определения Коши для  $\varepsilon$ :

$$\exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) < \varepsilon$$

Из  $x_n \rightarrow a$ :

$$\exists N \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \delta$$

Тогда  $\rho(f(x_n), A) < \varepsilon$ , ч.т.д.

2. Докажем, что из определения Гейне следует определение Коши

Пусть определение Коши неверное

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in D : 0 < \rho(x, a) < \delta \quad \rho(f(x), A) \geq \varepsilon$$

Возьмем  $\delta = 1$

$$\exists x_1 \in D \quad 0 < \rho(x_1, a) < 1 \quad \rho(f(x_1), A) \geq \varepsilon$$

$\vdots$

$$\text{Возьмем } \delta = \frac{1}{n} : \exists x_n \in D \quad 0 < \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \quad \rho(f(x_n), A) \geq \varepsilon$$

Отсюда  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_n \rightarrow a$ , а  $\rho(f(x_n), A) > \varepsilon$ . Тогда  $f(x_n) \nrightarrow A$

- противоречие

### Замечание

1.  $a$  - предельная точка  $D \Rightarrow$  последовательности из определения 3 существуют
2. Если  $a \in D$ , то предел не зависит от  $f(a)$
3.  $f \equiv g$  на некоторой  $\overset{\bullet}{W}(a)$  (выколотой окрестности  $a$ ) и  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$
4. Определение 2 можно обобщить на случай  $X = \overline{\mathbb{R}}, Y = \overline{\mathbb{R}}, D \subset \mathbb{R}, a, A \in \overline{\mathbb{R}}$
5.  $X, Y$  - метрические пространства  
Определение 2 равносильно  
 $\forall U \subset Y : A \in U, U$  — открытое  $\exists V \subset X : a \in V, V$  — открытое  $\forall x \in$

$$D \cap V \setminus \{a\} \quad f(x) \in U$$

(Назовем его топологическим определением предела)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Выберем множество  $U$ . Тогда существует  $U(A) \subset U$

Выберем множество  $V$ . Тогда существует  $V(a) \subset V$

Пусть дано Определение 2. Для каждого  $U$  будем рассматривать только  $U(A)$ , а вместо  $V$  будем брать только  $V(a)$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Для каждого  $V$  существует  $V(a) \subset V$ . Сузим  $V$  до  $V(a)$ . От этого утверждение не пострадает

Если для всех  $U$  утверждение верно, то и для всех  $U = U(A)$  работает, т.к. это частный случай

6. Попробуем обобщить Определение 1 для предела  $\infty$ . Для этого можно ввести метрику  $\rho(a, b) = |\arctan a - \arctan b|$ , считая, что  $\arctan \pm\infty = \pm\frac{\pi}{2}$   
Тогда  $x_n \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \rho(x_n, \pm\infty) \rightarrow 0$

### Свойства пределов отображений

$$f : D \subset X \rightarrow Y$$

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \Rightarrow A = B$

**Доказательство**

Предел последовательности  $f(x_n)$  из определения Гейне единственный

2. (Локальная ограниченность отображения, имеющего предел)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Тогда  $\exists U(a) : f|_{U(a) \cap D}$  - ограничено

**Доказательство**

Если  $a \notin D$ : Для  $B(A) \exists \dot{U}(a) \forall x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \in B(A)$

Если  $a \in D$ : Для  $B(A) = B(A, R + \rho(f(a), A)) \exists U(a) \forall x \in U(a) \cap D \quad f(x) \in B(A)$

3. (Теорема о стабилизации знака)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$A \neq B$$

$$\exists U(a) : \forall x \in \dot{U}(a) \cap D \quad f(x) \neq B$$

**Доказательство**

Для  $B(A, \rho(A, B)) \exists \dot{U}(a) \forall x \in \dot{U}(a) \cap D f(x) \in B(A, \rho(A, B))$ , а значит  $f(x) \neq B$

**Следствие**

$$B = 0$$

Тогда  $\text{sign } A = \text{sign } f(x)$  в некоторой окрестности

4.  $g, f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $X$  - метрическое пространство,  $Y$  - нормированное пространство

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \in Y, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} B \in Y, \lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L \in \mathbb{R}$$

Тогда

$$(a) \quad f(x) \pm g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \pm B$$

$$(b) \quad \lambda(x)f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} LA$$

$$(c) \quad \|f(x)\| \xrightarrow{x \rightarrow a} \|A\|$$

**Доказательство**

Из определения Гейне

**Дополнение**

При  $B \neq 0$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$$

**Определение**

Рассмотрим в  $\overline{\mathbb{R}}$  метрику  $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$

1.  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \rho(x_n, a) \rightarrow 0$   
 $x_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \rho(x_n, +\infty) \rightarrow 0$
2. Тогда из определения Гейне можно получить предел функции в  $\overline{\mathbb{R}}$
3. Теоремы об арифметических свойствах предела последовательности в  $\overline{\mathbb{R}}$  также выполняются при условии, что все операции имеют смысл (нет выражений вида  $+\infty - \infty$  и т.д.)
4. Также выполняются теоремы об арифметических свойствах пределов отображений

**Теорема о предельном переходе в неравенствах**

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

$\forall x \in D \setminus \{a\} \quad f(x) \leq g(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , где  $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $A \leq B$  из определения Гейне

**Следствие**

$f, g, h : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  при  $x \in D \setminus \{a\}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  из Гейне

**Определение**

$f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

$D' \in D$ ,  $a$  - предельная точка  $D'$

Предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  по множеству  $D'$  : - это  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{D'}(x)$

**Определение**

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

Левосторонний предел при  $x \rightarrow a$ ,  $D' = (-\infty, a) \cap D$  - это

$\lim_{x \rightarrow a} f|_{D'} = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$

Правосторонний предел при  $x \rightarrow a$ ,  $D' = (a, +\infty) \cap D$  - это

$\lim_{x \rightarrow a} f|_{D'} = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$

**Теорема о пределе монотонной функции**

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и монотонна,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$D' = (-\infty, a) \cap D$ ,  $a$  - предельная точка  $D'$

Тогда

1.  $f \uparrow$  и ограничена сверху  $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  - конечный

**Доказательство**

Дополнение:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup_{D'} f(x)$

Пусть  $\sup_{D'} f(x) = A$

Докажем  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in D' \quad A - \varepsilon < f(x) \leq A$

Пусть  $\delta = |x - a|$

Тогда при  $x' : a - \delta = x < x' < a \quad A - \varepsilon < f(x) \leq f(x') \leq A$

Т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x : a - \delta < x < a \quad A - \varepsilon < f(x) \leq A$

Т.е.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-0} A$

Аналогично для неограниченной функции  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-0} +\infty$

2.  $f \downarrow$  и ограничена снизу  $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  - конечный
3. Аналогично для правого предела возрастающей ограниченной снизу последовательности
4. Аналогично для правого предела убывающей ограниченной сверху последовательности

### Критерий Больцано-Коши для отображений

Пусть  $f : D \subset X \rightarrow Y$  - полное

$a$  - предельная точка  $D$

Тогда данные выражения эквивалентны:

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in Y$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x, x' \in D \cap \dot{V}(a) \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$

### Доказательство

1  $\Rightarrow$  2 Из существования предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x \in D \cap \dot{V}(a) \rho(f(x), A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x' \in D \cap \dot{V}(a) \rho(f(x'), A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Отсюда } \forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x, x' \in D \cap \dot{V}(a) \rho(f(x), f(x')) \leq \rho(f(x), A) + \rho(f(x'), A) < \varepsilon$$

2  $\Rightarrow$  1 по Гейне

$$\text{Возьмем } (x_n) : \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \forall x, x' \in D \cap \dot{V}(a) \rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

$$\text{И } \forall \varepsilon > 0 \exists V(a) \exists N \forall n > N x_n \in V(a)$$

$$\text{Тогда можем взять } x = x_n, n > N; x' = x_m, m > N$$

Отсюда  $(f(x_n))$  - фундаментальная, а значит в  $Y$  существует конечный предел  $f(x_n)$ , ч.т.д.

### Следствие

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in D : \begin{matrix} 0 < |x - a| < \delta \\ 0 < |x' - a| < \delta \end{matrix} \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$   
 Для  $a = +\infty$  аналогично

### 3.3 Непрерывное отображение

*Определение*

Пусть  $f : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  - метрические пространства  
 $x_0 \in D$

Говорят, что  $f$  непрерывна в  $x_0$ , если верно одно из утверждений  
 (на самом деле тогда верны все)

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  либо  $x_0$  - изолированная точка
2. (по Коши)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$
3. (на языке окрестностей)  $\forall U(f(x_0)) \exists V(x_0) \forall x \in D \cap V(x_0) f(x) \in U(f(x_0))$   
 (Эквивалентна топологическому определению:  $V(x_0)$  - открытое множество, содержащее  $x_0$ ,  $U(f(x_0))$  - открытое множество, содержащее  $f(x_0)$ )
4. (по Гейне)  $\left. \begin{matrix} x_n \in D \\ x_n \rightarrow x_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Доказательство эквивалентности аналогично доказательству эквивалентности определений пределов отображений

**Определение**

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in D$

Если  $f|_{D \cap (-\infty, x_0]}$  - непрерывна в  $x_0$ , то  $f$  - непрерывна в  $x_0$  слева

Если  $f|_{D \cap [x_0, +\infty)}$  - непрерывна в  $x_0$ , то  $f$  - непрерывна в  $x_0$  справа

Если  $f$  непрерывна слева и справа в точке  $x_0$ , то она непрерывна в точке  $x_0$

**Обозначения**

Для непрерывных функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

**Определение**

Если  $f(x_0 + 0), f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$  определены и  $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$  или  $x_0 \notin D$  или  $f(x_0 \pm 0) \neq f(x_0)$ , то в точке  $x_0$   $f(x)$  имеет скачок (разрыв I рода)

В данном случае  $f$  не является непрерывной, т.е. имеет разрыв в  $x_0$

Также бывает разрыв II рода -  $\nexists f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$  или  $\nexists f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$

Если  $x_0 \notin D$  и  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ , то разрыв будем считать устранимым

**Определение**

$f : D \subset X \rightarrow Y$  непрерывна на  $D$ , если непрерывна в каждой точке  $D$

**Арифметические свойства**

1.  $f, g : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $Y$  - нормированное пространство

$$\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$x_0 \in D, f, g, \lambda$  - непрерывны в  $x_0$

Тогда  $f + g, \lambda f, \|f\|$  - непрерывны в  $x_0$

2.  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g$  - непрерывные в  $x_0$

Тогда  $f + g, fg, |f|$  - непрерывны

$\frac{f}{g}, g(x_0) \neq 0$  - непрерывна

**Замечание**

Для непрерывности на множестве  $D$  теоремы аналогичные

**Теорема о стабилизации знака для непрерывных функций**

$f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, f$  - непрерывна в  $x_0$

Тогда  $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists U(x_0) : f|_{U(x_0)} > 0$

**Теорема о непрерывности композиции**

$f : D \subset X \rightarrow Y$

$g : E \subset Y \rightarrow Z$

$f(D) \subset E, x_0 \in D, f$  - непрерывна в  $x_0, f(x_0) \in E, g$  - непрерывна в  $f(x_0)$

Тогда  $g \circ f$  непрерывна в  $x_0$

**Доказательство**

$$\forall x_n : \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \rightarrow x_0 \end{cases} \begin{cases} f(x_n) \in E \\ f(x_n) \rightarrow f(x_0) \end{cases}$$

Тогда  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$

**Теорема о пределе композиции**

$$f : D \subset X \rightarrow Y$$

$$g : E \subset Y \rightarrow Z$$

$$f(D) \subset E, x_0 - \text{предельная точка } D, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$A - \text{предельная точка } E, \lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$$

$$\text{Пусть } \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \cap D \quad f(x) \neq A$$

$$\text{Тогда } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = B$$

Также предел будет существовать и равен  $B$ , если  $A \in E$ ,  $g$  - непрерывна в  $A$

**Доказательство**

По Гейне

$$x_n \in D$$

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$x_n \neq x_0$$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

$$f(x_n) \in E$$

$$f(x_n) \neq A \text{ начиная с некоторого места}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \in D \\ x_n \rightarrow x_0 \\ x_n \neq x_0 \\ f(x_n) \rightarrow A \\ f(x_n) \in E \\ f(x_n) \neq A \text{ начиная с некоторого места} \end{array} \right\} \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow B$$

**Определение**

Функции  $\text{const}$ ,  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arctan x$  и полученные из них конечным числом арифметических операций и композиций называются *элементарными функциями*

**Теорема**

Все элементарные функции непрерывны на своих областях определения

**Теорема (о топологическом определении непрерывности)**

$$f : X \rightarrow Y, X, Y - \text{метрические пространства}$$

Тогда  $f$  - непрерывна на  $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$  - открытое в  $Y$   $f^{-1}(G)$  - открыто в  $X$

**Доказательство  $\Leftarrow$** 

Рассмотрим  $a \in X$

$$\text{Пусть } G \subset Y - \text{открытое}, f(a) \in G$$

$$\text{Тогда } f^{-1}(G) - \text{открыто в } X, a \in f^{-1}(G)$$

$$\text{Тогда } \exists U(a) : U(a) \subset f^{-1}(G), \text{ ч.т.д.}$$

**Доказательство  $\Rightarrow$** 

Пусть  $G \subset Y$  - открытое

Выберем  $a \in f^{-1}(G)$



Тогда  $f(a) \in G$

Тогда по определению существует окрестность  $U(a) \subset f^{-1}(G)$ , ч.т.д.

**Теорема Вейерштрасса о непрерывном образе компакта**

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  - непрерывно на  $X$ ,  $X, Y$  - метрические пространства,  $X$  - компактно

Тогда  $f(X)$  - компактно

**Доказательство**

Пусть  $f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ , где  $G_\alpha$  - открытые в  $Y$

Тогда  $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(G_\alpha)$ . Из предыдущей теоремы  $f^{-1}(G_\alpha)$  - открыты

Тогда существует конечное подпокрытие  $f^{-1}(G_{\alpha_i}) : X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})$

Тогда  $f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

**Следствие 1**

В условиях теоремы  $f(X)$  - замкнутое и ограниченное в  $Y$

**Следствие 2(первая теорема Вейерштрасса)**

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно на  $[a, b]$

Тогда  $f([a, b])$  - ограниченное

**Следствие 3**

$f : X \neq \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна на  $X$ ,  $X$  - компактно

Тогда  $\exists \min f(X), \max f(X)$

**Доказательство**

$f(X)$  - замкнуто и ограничено, а значит  $\exists \sup f(X)$  и  $\sup f(X) \in f(X)$ , ч.т.д.

**Следствие 4(вторая теорема Вейерштрасса)**

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна на  $[a, b]$

Тогда  $\exists \max f, \min f$

**Определение**

Пусть  $A$  - метрическое пространство

$A$  - *связно*, если невозможно представить  $A$  в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств

**Лемма (о связности отрезка)**

$[a, b]$  в  $\mathbb{R}$  невозможно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств

$\nexists G_1, G_2$  - открытые в  $\mathbb{R} : [a, b] \subset G_1 \cup G_2, [a, b] \cap G_1 \neq \emptyset, [a, b] \cap G_2 \neq \emptyset$

$$\emptyset, G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

#### **Доказательство**

Пусть  $G_1, G_2$  существуют

Пусть  $a \in G_1$

Пусть  $t = \sup\{x : [a, x] \subset G_1\}$

Пусть  $b_2 \in G_2$

Тогда  $t \leq b_2$

$t$  - корректно определенная точка на  $[a, b]$

Если бы  $t$  лежал в  $G_1$ , то она лежала бы там с некой окрестностью, а значит  $t$  не был бы  $\sup$ . Тогда  $t \notin G_1$ .

Если бы  $t$  лежал в  $G_2$ , то она лежала бы там с некой окрестностью, а значит  $t$  не был бы  $\sup$ . Тогда  $t \notin G_2$ .

Отсюда  $t \in [a, b], t \notin G_1 \cup G_2$ , что невозможно.

#### **Следствие**

Утверждение верно не только для  $[a, b]$ , но и для  $\langle a, b \rangle$

#### **Обозначение**

$C(\langle a, b \rangle)$  - множество функций  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывных на  $\langle a, b \rangle$

#### **Теорема Больцано - Коши о промежуточном значении**

Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\forall \min f(a), f(b) \leq t \leq \max f(a), f(b) \exists x \in [a, b] : f(x) = t$

#### **Доказательство**

Пусть существует  $t_0$ , не удовлетворяющее этому условию

Тогда  $[a, b] = f^{-1}((-\infty, t_0)) \cup f^{-1}((t_0, \infty))$ , что противоречит теореме

#### **Теорема о бутерброде**

Пусть  $A, B \subset \mathbb{R}^2, A \cap B = \emptyset$  - выпуклые многоугольники

Тогда существует прямая  $l$ , рассекающая оба многоугольника на равные многоугольники

#### **Доказательство**

Для начала решим задачу разреза одного многоугольника прямой, параллельной вектору  $v \in \mathbb{R}^2$

Будем двигать прямую по прямоугольнику и считать  $\delta$  - разность площадей частей прямоугольника, расположенных по разные части от прямой  $\delta$  принимает значения от  $[-S_A, S_A]$

Заметим, что  $\delta$  непрерывна (доказывается через две приближающиеся друг к другу прямые)

Тогда  $\delta$  принимает все значения  $[-S_A, S_A]$ , а значит возможно добиться  $\delta = 0$ , т.е. разрезать прямоугольник на 2 равные по площади части

Будем задавать наш вектор  $v$  через угол  $\phi$ . Для вектора построим прямую, разделяющую  $A$  на две равные по площади части

Рассмотрим  $\sigma(\phi)$  - разность двух половин, на которые данная прямая пересекает  $B$ .  $\sigma$  будет принимать значения  $[-S_B, S_B]$

Заметим, что  $\sigma(\phi)$  и  $\sigma(\phi + \pi)$  разных знаков

Заметим, что  $\sigma(\phi)$  (доказывается черед два вектора с близкими друг другу углами. Не забываем, что иногда образуется не треугольник, а четырехугольник. Также уточняем, что точка пересечения прямых лежит в  $A$ )

Тогда  $\sigma$  пересекает 0, ч.т.д.

### **Теорема о сохранении промежутка**

$f \in C\langle a, b \rangle, m = \inf f, M = \sup f, m, M \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $f(\langle a, b \rangle) = \langle m, M \rangle$  (выбор скобок не согласован)

### **Доказательство**

Достаточно проверить, что  $\forall t \in (m, M) \exists c : f(c) = t$

Если это не так, рассмотрим  $t_0$ , для которого это не выполняется. Тогда  $\langle a, b \rangle = f^{-1}((-\infty, t_0)) \cup f^{-1}((t_0, +\infty))$

Заметим, что  $(-\infty, t_0)$  и  $(t_0, +\infty)$  не пусто

### **Замечание**

Тип промежутка не сохраняется

### **Доказательство**

$\sin((0, 2\pi)) = [-1, 1]$

### **Но**

По теореме Вейерштрасса образ отрезка - отрезок

### **Определение**

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ ,  $Y$  - метрическое пространство, функция непрерывна

Тогда  $\gamma$  - *путь*

### **Определение**

$E \in Y$ ,  $Y$  - метрическое пространство

$E$  - *линейно связное* множество, если  $\forall A, B \in E \exists$  непрерывная  $\gamma :$

$[a, b] \rightarrow Y : \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$

### **Пример**

$E = (\Gamma_{y=\sin \frac{1}{x}}) \cup [(0, -1), (0, 1)]$  - отрезок )

$E$  - связное, но не линейно связное

### **Лемма**

$E \subset \mathbb{R}$  - линейно связное  $\Leftrightarrow E$  - промежуток

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $A, B \in \langle a, b \rangle$

Тогда  $\gamma(t \in [0, 1]) = A + t(B - A)$  - искомая функция

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Если  $E = \emptyset$  - очевидно

Иначе:

$m = \inf E, M = \sup E$

Пусть  $\exists t \in (m, M), t \notin E$

Из линейной связности для  $A < t < B$  существует непрерывный путь из  $A$  в  $B$ . А значит этот путь принимает все значения, включая  $t$ . Тогда  $t \in E$ .

Отсюда  $(m, M) \in E$ , а значит  $E = \langle m, M \rangle$

**Теорема о сохранении линейной связности**

$f : X \rightarrow Y$  - непрерывно

$X$  - линейно связное

Тогда  $f(X)$  - линейно связное

**Доказательство**

Пусть  $A, B \in f(X), U, V \in X, f(U) = A, f(V) = B$

Построим путь между  $U, V$  -  $c : [a, b] \rightarrow X, c(a) = U, c(b) = V, c$  - непрерывно

Тогда  $f \circ c$  - путь в  $f(X)$

**Теорема (о непрерывности монотонной функции)**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  - монотонная функция

Тогда

1. У такой функции не может быть разрывов второго рода
2. Непрерывность  $f \Leftrightarrow f(\langle a, b \rangle)$  - промежуток

**Доказательство п.1**

Не умоляя общности пусть  $f$  - возрастающая

Возьмем  $x_1 \leq x \leq x_2$

Тогда  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Заметим, что у такой функции есть предел (из теоремы о пределе монотонной функции)

Пусть  $x \rightarrow x_2 - 0$

Тогда  $f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(x_2)$

Тогда у функции существует конечный односторонний предел справа

(аналогично слева)

Тогда в любой точке  $y$  данной функции существует односторонний предел, а значит не может быть разрывов второго рода, ч.т.д.

### Доказательство п.2

$\Rightarrow$ : из теоремы о сохранении промежутка

$\Leftarrow$ :

Рассмотрим  $x_0 \in (a, b)$

Пусть  $f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$

Из монотонности  $f(x_0) < f(x_0 + 0)$

Тогда  $(f(x_0), f(x_0 + 0))$  не лежит в множестве значений (для  $x < x_0$   $f(x) \leq f(x_0)$ , для  $x > x_0$   $f(x) \geq f(x_0 + 0)$ ), но тогда множество значений - не промежуток - противоречие

Аналогично для левостороннего предела

### Следствие

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  - монотонна

Тогда множество точек разрыва не более чем счетно

### Доказательство

Не умоляя общности, пусть  $f$  возрастает

Пусть  $X$  - множество точек разрыва  $f$

Построим инъекцию  $\phi : X \rightarrow \mathbb{Q}$ :

Пусть  $x_0 \in X$  - точка разрыва. Тогда  $f$  имеет скачок в этой точке

Тогда  $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$  (неравенство из разрывности)

Тогда  $\forall x_1 < x_0 < x_2$   $f(x_1) \leq f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0) \leq f(x_2)$  (см. доказательство п.1)

Отсюда пусть  $\phi(x_0) =$  любое  $a \in \mathbb{Q} \cap (f(x_0 - 0), f(x_0 + 0))$

Заметим, что  $\phi$  является инъекцией, что и требовалось

Отсюда множество  $X$  не более чем счетно

### Пример

Пусть  $\{r_n, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sign}(x - r_n)}{2^n}$$

### Теорема (о существовании и непрерывности обратной функции)

Пусть  $f \in C(\langle a, b \rangle)$ ,  $f$  - строго монотонна,  $m = \inf f$ ,  $M = \sup f$

Тогда

1.  $f$  - обратима,  $f^{-1} : \langle m, M \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ , функция биективна
2.  $f^{-1}$  строго монотонна и имеет ту же монотонность

3.  $f^{-1}$  непрерывна

### Определение

Определим функцию  $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Q} \leftrightarrow f_\alpha(x)$

1.  $\alpha = 1 : f_1 = \text{id}$   
 $f_1(x)$  непрерывна
2.  $f_n(x) = x \cdot \dots \cdot x, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  - непрерывна как произведение  
 При нечетном  $n$  - непрерывна на  $\mathbb{R}$   
 При четном  $n$  - непрерывна на  $(-\infty, 0]$  и  $[0, +\infty)$
3.  $f_{-n}(x) = \frac{1}{f_n(x)}, n \in \mathbb{N}, x \neq 0$   
 Непрерывна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  и монотонна на  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$
4.  $f_0 = 1$  на  $\mathbb{R}$
5.  $f_{\frac{1}{n}}(x), n \in \mathbb{N}, n$  - нечетная  
 Рассмотрим  $f_n$ :  
 $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , строго возрастает, непрерывна  
 Тогда  $\exists (f_n)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , она непрерывна и возрастает  
 $f_{\frac{1}{n}} := (f_n)^{-1}$
6.  $f_{\frac{1}{n}}(x), n \in \mathbb{N}, n$  - нечетная  
 Рассмотрим сужение  $f_n$  на  $\mathbb{R}_+$ :  
 $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , строго возрастает, непрерывна  
 Тогда  $\exists (f_n)^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , она непрерывна и возрастает  
 $f_{\frac{1}{n}} := (f_n)^{-1}$
7.  $f_{\frac{p}{q}} := f_{\frac{1}{q}} \circ f_p, \frac{p}{q}$  - несократимая дробь  
 Если  $p$  - четная или  $q$  нечетная, то  $f_{\frac{p}{q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 Иначе  $f_{\frac{p}{q}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

### Свойства

Пусть  $x > 0$

1.  $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$
2.  $x^{rs} = (x^r)^s$
3.  $(xy)^s = x^s y^s$

### 3.4 Показательная функция

#### Определение

Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *показательной*, если она

1. Непрерывна
2. Не является  $f \equiv 0$  или  $f \equiv 1$
3. Удовлетворяет свойству  $f(x+y) = f(x)f(y)$

#### Свойства показательных функций

Пусть  $f$  - показательная функция. Тогда

1.  $f(x) > 0, f(0) = 1$

**Доказательство**

Т.к.  $f \not\equiv 0, \exists x_0 : f(x_0) \neq 0$

Тогда  $f(0+x_0) = f(0)f(x_0)$

Отсюда  $f(0) = 1$

$\forall x f(x) \neq 0$ , т.к. если  $f(x_1) = 0$ , то  $\forall t f(t) = f(x_1)f(t-x_1) = 0$ , а значит  $f \equiv 0$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

2.  $\forall r \in \mathbb{Q} f(rx) = f(x)^r$

**Доказательство**

Если  $r \in \mathbb{N}$ , очевидно

$$\text{Если } r = -n, n \in \mathbb{N}: 1 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx)f(-nx) = f(nx)f(rx)$$

$$\text{Тогда } f(rx) = \frac{1}{f(nx)}$$

$$\text{Если } r = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}: f(x) = f\left(n \frac{1}{n} x\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\text{Тогда } f\left(\frac{x}{n}\right) = f(x)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Если } r = \frac{m}{n}, \frac{m}{n} - \text{несократимая дробь: } f(rx) = f\left(m \frac{x}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)^m = f(x)^{\frac{m}{n}}$$

3.  $f$  строго монотонна

Пусть  $a := f(1)$

$$a \neq 1$$

$$a > 1 \Rightarrow f(x) \uparrow$$

$$a < 1 \Rightarrow f(x) \downarrow$$

### Доказательство

Если  $a = 1$ , то  $\forall r \in \mathbb{Q} \ f(r) = f(r-1)f(1) = f(r-1)$

Тогда из непрерывности функция тождественна единице, что противоречит условию

Пусть  $a > 1$

Тогда  $\forall x > 0 \ f(x) > 1$ :

$f(1 \cdot \frac{m}{n}) = a^{\frac{m}{n}} > 1$ ,  $\frac{m}{n}$  - несократимая дробь - по свойствам степенной функции

Тогда  $\forall x > 0 \ f(x) \geq 1$  (через предельный переход)

Тогда  $\forall x > 0 \ f(x) > 1$ , т.к.  $\forall x > 0 \ \exists r \in \mathbb{Q} : 0 < r < x$

Тогда  $f(x) = f(r)f(x-r)$ .  $f(r) > 1, f(x-r) \geq 1$ . Отсюда  $f(x) > 1$

Т.о.  $f(x)$  строго возрастает:  $f(x+h) = f(x)f(h) > f(x) \cdot 1$

Убывание аналогично

4. Множество значений  $f$  - это  $(0, +\infty)$

### Доказательство

$f$  строго монотонна и непрерывна. Тогда множество значений  $f$  -  $(\inf f, \sup f)$

Из свойств  $a^r, r \in \mathbb{Q}$ :  $\inf f = 0, \sup f = +\infty$

5. Пусть  $f, g$  - показательные функции. Тогда если  $f(1) = g(1)$ , то  $f = g$

## Теорема

Пусть существует  $f_0$  - показательная функция такая, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

### Доказательство

#### Ниже Теорема

Пусть  $f$  - произвольная показательная функция

Тогда  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall f(x) = f_0(\alpha x)$ , где  $f_0$  - функция из предыдущей теоремы

### Доказательство

Множество значений  $f_0$  -  $(0, +\infty)$

$$f(1) = a > 0, a \neq 1$$

$$\exists \alpha \neq 0 : f_0(\alpha) = a$$

$$\text{Пусть } g(x) = f_0(\alpha x)$$



$g$  - показательная функция

$$g(1) = a$$

Из свойства 5  $f(x) = g(x) = f_0(\alpha x)$ , ч.т.д.

### Следствие 1

Существует единственная  $f_0$  из теоремы 2

### Доказательство

Пусть  $h$  - показательная функция из теоремы 2

Тогда  $\exists \alpha : h(x) = f_0(\alpha x)$

$$\text{По теореме 2: } 1 \xleftarrow{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{x} = \frac{f_0(\alpha x) - 1}{\alpha x} \alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha$$

Отсюда  $\alpha = 1, h = f_0$ , ч.т.д.

### Определение

$f_0$  - экспонента

$$f_0 = \exp$$

$$f_0(1) = e$$

Обозначения  $\exp x$  и  $e^x$  эквивалентны

### Следствие 2

Для любого  $a > 0, a \neq 1$  существует единственная показательная функция  $f : f(1) = a$

Такую функцию будем обозначать  $a^x$

### Доказательство

Существование:

Для  $a$  из условия  $\exists! \alpha : f_0(\alpha) = a$

Тогда  $f(x) = f_0(\alpha x)$

Единственность из свойства 5

### Следствие 3

$$\forall a > 0, a \neq 1 \forall x, y \in \mathbb{R} \quad a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

### Доказательство

Если  $x = 0$ , все тривиально (хотя по определению справа не показательная функция)

Если  $x \neq 0$ :  $b := a^x$ . Из свойств функции  $b > 0, b \neq 1$

Для  $y \in \mathbb{Q}$   $a^{xy} = (a^x)^y = b^y$  - из свойств

Для  $y \in \mathbb{R}$  подберем  $(r_k) \subset \mathbb{Q}, r_k \rightarrow y$

$$a^{xr_k} = (a^x)^{r_k}$$

Тогда из непрерывности  $a^{xr_k} \rightarrow a^{xy}, (a^x)^{r_k} \rightarrow (a^x)^y$

Отсюда  $a^{xy} = (a^x)^y$

### 3.5 Логарифм

$a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  - строго монотонна и непрерывна

Тогда существует обратная функция  $\log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная и строго монотонная

#### Свойства

$a > 0, a \neq 1$

1.  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2.  $\log_a b^x = x \log_a b$

3.  $\log_a x = \log_a c \log_c x$

#### Доказательство

$u = v \Leftrightarrow a^u = a^v$

1.  $a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$

2.  $a^{\log_a b^x} = b^x = a^{x \log_a b}$

3.  $\log_a x = \log_a (c^{\log_c x}) = \log_a c \log_c x$

### 3.6 Степень с произвольным показателем

Пусть  $\sigma \in \mathbb{R}, x > 0$

$x^\sigma = e^{\sigma \ln x}$  - степенная функция

#### Теорема

Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  - рационально зависимое, если  $\exists x_1, \dots, x_n \in A : \exists r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$  (не все нули):  $r_1 x_1 + \dots + r_n x_n = 0$

Пусть  $X$  - множество всех рационально независимых подмножеств  $\mathbb{R}$

Введем в  $X$  отношение частичного порядка  $A \subset B$

//todo 11:30 12.12 аксиома выбора

### 3.7 Тригонометрические функции

#### Утверждение

При  $0 < x < \frac{\pi}{2}$   $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  - из площадей

#### Следствие

$|\sin x| \leq |x|$

**Утверждение**

$\sin x, \cos x$  - непрерывны на  $\mathbb{R}$

**Доказательство**

Докажем для  $x_0$ :  $|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|$

**Утверждение**

$\sin$  монотонен на  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \exists \arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos$  монотонен на  $[0, \pi] \Rightarrow \exists \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

**3.8 Асимптотические разложения****Определение**

$f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

Если существует  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\forall x \in D \setminus \{a\} f(x) = \phi(x)g(x)$

1.  $\phi$  ограничена на  $V(a) \cap D$ , то  $f$  ограничена по сравнению с  $g$  в  $V(a)$   
 $f = O(g)$
2.  $\phi \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , то  $f$  бесконечно мала относительно  $g$  при  $x \rightarrow a$   
 $f = o(g)$
3.  $\phi \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ , то  $f$  эквивалентна  $g$  при  $x \rightarrow a$   
 $f \sim g$

**Аналогичные определения**

$f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $\exists C > 0 \forall x \in D |f(x)| \leq C|g(x)| \Leftrightarrow f = O(g)$  на  $D$
2.  $f = O(g); g = O(f)$  -  $f$  и  $g$  асимптотически сравнимы на  $D$

**Замечание**

$f = o(g); g \neq 0$  в  $\dot{V}(a) \cap D \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

$f \sim g; g \neq 0$  в  $\dot{V}(a) \cap D \Leftrightarrow \frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$

**Примеры свойств**

1. При  $x \rightarrow a : f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g) = g + o(f)$

$$2. o(f) \pm o(f) = o(f)$$

**Эквивалентные функции при  $x \rightarrow 0$**

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x & \sin x &= x + o(x) \\ e^x - 1 &\sim x & e^x &= 1 + x + o(x) \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x & (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \\ \ln(1+x) &\sim x & \ln(1+x) &= x + o(x) \end{aligned}$$

**Теорема о замене на эквивалентные функции**

Пусть у нас есть функции  $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

$$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g} \text{ при } x \rightarrow a$$

Тогда

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \in \overline{\mathbb{R}}$  и при существовании  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$  и при существовании  
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ , если  $a$  - предельная точка  $D' = D \cap \{x : g(x) \neq 0\}$

**Доказательство**

$$f(x) = \phi(x)\tilde{f}(x), g(x) = \psi(x)\tilde{g}(x) \text{ в } U(a) \cap D \text{ и } \phi, \psi \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$$

Тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x)\psi(x)\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$   
 $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\phi(x)} \frac{1}{\psi(x)} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$   
 $\exists \lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$

**Определение**

$g_1, g_2, g_3, \dots : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

Пусть  $\forall k \ g_{k+1} = o(g_k), x \rightarrow a$

Тогда набор функций  $g_1, g_2, \dots$  называют *шкалой*

$f = c_1g_1 + c_2g_2 + \dots + c_ng_n + o(g_n), x \rightarrow a$  - асимптотическое разложение по шкале  $(g_k)$

### Теорема о единственности асимптотического разложения

$f, g_1, \dots, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $D$

$g_1, \dots, g_n$  - шкала асимптотического разложения при  $x \rightarrow a$

$$f = c_1g_1 + c_2g_2 + c_3g_3 \dots c_ng_n + o(g_n)$$

$$f = d_1g_1 + d_2g_2 + d_3g_3 \dots d_ng_n + o(g_n)$$

Тогда  $c_i = d_i, i = 1 \dots n$

#### Доказательство

Пусть  $m := \min\{k : c_k \neq d_k\}$

Тогда  $f = c_1g_1 + \dots + c_mg_m + o(g_m)$

$$f = d_1g_1 + \dots + d_mg_m + o(g_m)$$

Отсюда  $f - f = 0 = (c_m - d_m)g_m + o(g_m), x \rightarrow a$

$$(d_m - c_m)g_m = o(g_m)$$

Отсюда  $g_m = o(g_m)$ , что невозможно, ч.т.д.

#### Пример

$f(x) = ax + b + o(1), x \rightarrow +\infty$  (для шкалы  $x^1, x^0, x^{-1}, \dots$ )

Тогда  $y = ax + b$  - наклонная асимптота к графику  $y = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

### Теорема (Формула Тейлора для многочленов)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  - многочлен  $\deg f = n, x_0 \in \mathbb{R}$

Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

#### Доказательство

Представим  $f$  в виде  $f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n$

Тогда

$$f'(x) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2(x - x_0) + \dots + n \cdot b_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + 3 \cdot 2 \cdot b_3(x - x_0) + \dots + n \cdot (n - 1) \cdot b_n(x - x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot b_k + \frac{(k+1)!}{2!} \cdot b_{k+1}(x - x_0) + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} \cdot b_n(x - x_0)^{n-k}$$

Отсюда  $f(x_0) = b_0, f'(x_0) = 1! \cdot b_1, \dots, f^{(k)}(x_0) = k! \cdot b_k$ , из чего следует формула, ч.т.д.

### Теорема (Формула Тейлора)

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,  $f$  -  $m$  раз дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

## 3.9 Замечательные пределы

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Доказательство**

При  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$   $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$$1 \xleftarrow{x \rightarrow 0} \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

**Следствие**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

**Следствие 2**

$$(\sin x_0)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \cos x_0$$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  - из теоремы о существовании экспоненты

**Следствие**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

**Доказательство**

Замена

**Следствие**

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Доказательство**

Экспонента от предыдущего предела

**Следствие**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

**Доказательство**

$$\text{Если } \alpha = 0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = 0$$

$$\text{Иначе: } f := (1+x)^\alpha - 1$$

$$\text{Заметим, что } \alpha \ln(1+x) = \ln(f+1)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(f(x)+1)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} =$$

$\alpha$

## 4 Дифференциальное счисление

### 4.1 Производная

**Определение**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Если  $\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0$ , то  $f$  - дифференцируема в  $x_0$ ,  $A = f'(x_0)$  - производная в  $x_0$

$f'(x_0)$  однозначно определено по единственности асимптотического разложения

**Определение 2**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \in \mathbb{R}$ , то  $f$  - дифференцируема,  $A = f'(x_0)$  - производная

Определения 1 и 2 равносильны

**Замечание**

$$1. f'_\pm(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ - односторонняя производная}$$

Если существуют и равны  $f'_+(x_0)$  и  $f'_-(x_0)$ , то  $f$  дифференцируема

в  $x_0$ ,  $f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$

2. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ , то функция не считается дифференцируемой
3.  $f$  - дифференцируема  $\Rightarrow f$  - непрерывна (для  $f'(x_0) = \infty$  не действует)

### Определение

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  - множество точек, где  $f$  дифференцируема  
 $f'(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^2$  прямую  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  - касательную к графику функции в  $(x_0, f(x_0))$

## 4.2 Правила дифференцирования

### Теорема

Пусть  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$f, g$  дифференцируемы в  $x_0$

Производные следующих функций существуют и равны ...:

1.  $(f + g)' = f' + g'$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} (\alpha f)' = \alpha f'$
3.  $(fg)' = f'g + fg'$
4.  $g(x_0) \neq 0 : \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

### Доказательство

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f}{g}(x_0 + h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + h)}{hg(x_0 + h)g(x_0)} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}{g(x_0 + h)g(x_0)} &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

### Замечание без доказательств

Возьмем  $\left(\frac{x \sin x}{\ln x}\right)'$



Выберем какой-то  $x$ . Все остальные  $x$  заменим на константу  $x_0$  и выпишем производную такой функции. Сделаем так для всех  $x$  и возьмем сумму от результатов. В получившемся выражении заменим  $x_0$  обратно на  $x$

$$\left(\frac{x \sin x}{\ln x}\right)' = \frac{\sin x}{\ln x} + \frac{x}{\ln x} \cos x + x \sin \left(-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{В общем виде } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

\*TODO какие ограничения\*

### Теорема

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ , дифференцируема на  $x \in \langle a, b \rangle$

$g : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируема в  $y = f(x)$

Тогда  $g \circ f$  - дифференцируема в  $x$  и  $(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

### Доказательство

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\alpha(h)$ ,  $\alpha(h)$  бесконечно малая при  $h \rightarrow 0$

$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + y\beta(k)$

Тогда  $g(f(x+h)) = g(f(x) + f'(x)h + h\alpha(h))$ . Заметим, что  $f(x) = y$ ,  $f'(x)h + h\alpha(h)$ ,  $\alpha(h)$  подходит под описание  $k$

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + h\alpha(h)) + (f'(x)h + h\alpha(h))\beta(k) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + g'(f(x))h\alpha(h) + (f'(x)h + h\alpha(h))\beta(k)$$

Заметим, что  $g'(f(x))h\alpha(h) + f'(x)h\beta(k) + h\alpha(h)\beta(k) = o(h)$

Тогда  $g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + o(h)$ , ч.т.д.

### Замечание

Можно считать, что  $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ . Тогда  $\alpha, \beta$  непрерывные, а значит мы считаем композицию непрерывных функций. Отсюда производная существует

### Теорема (о дифференцировании обратной функции)

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , функция непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , строго монотонна, дифференцируема в  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$

Тогда  $f^{-1}$  - дифференцируема в  $f(x)$  и  $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

$$\text{Т.е. } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

### Доказательство

Пусть  $x = f^{-1}(y)$ ,  $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h(k)}{f(x+k) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+h(k)) - f(x)}{h(k)}} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}, \text{ ч.т.д.}$$

### Таблица производных

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(e^x)' = e^x$   
 $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$
- $\sin' = \cos$   
 $\cos' = -\sin$   
 $\operatorname{tg}' = \frac{1}{\cos^2} = \operatorname{tg}^2 + 1$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

### 4.3 Теорема о среднем

#### Лемма(о возрастании в точке)

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируема в  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f'(x_0) > 0$

Тогда  $\exists \varepsilon > 0 : \begin{aligned} &\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad f(x) > f(x_0) \\ &\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad f(x) < f(x_0) \end{aligned}$

#### Доказательство

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

При  $h \rightarrow +0 (\Rightarrow h > 0)$   $\exists \varepsilon \quad f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$  (из предела)

Аналогично для  $h \rightarrow -0$

#### Теорема Ферма

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f(x_0) = \max_{\langle a, b \rangle} f$ ,  $f$  - дифференцируема в  $x_0$

Тогда  $f'(x_0) = 0$  (необходимое условие экстремума)

#### Доказательство

Очевидно из леммы

#### Теорема Ролля

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ ,  
 $f(a) = f(b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

### Доказательство

$c$  - найдется среди точек максимума или минимума

По т. Вейерштрасса у этой функции существуют точки максимума или минимума

Если максимум и минимум достигаются только в  $a$  и  $b$ , то  $f = const$

Тогда  $c$  - любая точка  $(a, b)$

Иначе  $c$  - любая точка максимума или минимума в  $(a, b)$

### Обозначение

$\text{Ln}(x) = ((1 - x^2)^n)^{(n)}$  - многочлен Лежандра

### Пример-теорема

Многочлен  $\text{Ln}(x)$  имеет  $n$  различных вещественных корней

### Доказательство

Пусть  $f, g$  - многочлены

Введем понятие:

Если  $f(x) = (x - a)^k g(x)$ ,  $g(a) \neq 0$

Тогда будем говорить, что  $a$  - корень кратности  $k$

Заметим, что  $a$  - корень кратности  $k - 1$  у  $f'(x)$ :

$$f'(x) = k(x - a)^{k-1}g(x) + (x - a)^k g'(x) = (x - a)^{k-1}(kg(x) + (x - a)g'(x))$$

Теперь докажем пример

У  $(1 - x^2)^n$  - корни  $-1, 1$  имеют кратность  $n$ . Больше у него корней нет, т.к. их не больше  $2n$

Продифференцируем выражение

Тепер  $-1$  и  $1$  имеют кратность  $n - 1$ . По теореме Ролля в  $(-1, 1)$  существует корень. Его кратность будет  $1$ , т.к. всего корней  $2n - 1$

Продифференцируем выражение еще раз

Тепер  $-1$  и  $1$  имеют кратность  $n - 2$ .  $c$  перестанет быть корнем. В  $(-1, c)$  и  $(c, 1)$  будут корни по теореме Ролля. Их кратность будет  $1$

Тогда после  $n - 1$  дифференцирований корни  $-1$  и  $1$  будут иметь кратность  $1$ . Степень многочлена будет  $n + 1$

Аналогично предыдущим случаям будет  $n - 1$  корней кратности  $1$

После еще одного дифференцирования  $-1$  и  $1$  перестанут быть корнями.

Многочлен будет иметь  $n$  корней кратности  $1$ . Т.о. все они различны, ч.т.д.

### Теорема Лагранжа

Пусть  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

**Теорема Коши**

Пусть  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Функции непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$   
 $g' \neq 0$  в  $(a, b)$

Тогда  $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Замечание**

Если  $g(b) = g(a)$ , то  $g'(x)$  в какой-то момент будет 0 по теореме Ролля.

Тогда  $g(b) \neq g(a)$

**Доказательство**

Пусть  $F(x) = f(x) - kg(x)$

Подберем  $k : F(a) = F(b)$ :

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Т.к.  $F(a) = F(b)$ , то  $\exists c \in (a, b) F'(c) = 0$ , т.е.  $f'(c) = kg'(c)$ , ч.т.д.

**Следствие**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

Пусть  $\exists M > 0 : \forall x \in \langle a, b \rangle |f'(x)| \leq M$

Тогда  $\forall x, x + h \in \langle a, b \rangle |f(x + h) - f(x)| \leq M|h|$

**Следствие 2**

$f \in C[x_0, x_0 + h]$ , дифференцируема на  $(x_0, x_0 + h]$

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = k \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $\exists f'_+(x_0) = k$

**Доказательство**

$$f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

По т. Лагранжа  $\exists c \in (x_0, x_0 + t) : \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(c)$

Тогда  $f'_+(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} f'(c) = k$

**Теорема Дарбу**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемая на  $[a, b]$

Тогда  $\forall C : \min(f'(a), f'(b)) < C < \max(f'(a), f'(b)) \exists c \in (a, b) : f'(c) = C$

(При этом производная не является непрерывной)

**Доказательство**

Пусть  $g(x) = f(x) - Cx$

Тогда  $g'(a)$  и  $g'(b)$  разных знаков

Пусть  $g'(a) > 0, g'(b) < 0$

По т. Вейерштрасса  $\exists c : g(c) = \max_{[a,b]} g(x), c \neq a, b$  по лемме

Тогда  $g'(c) = 0$

### **Следствие**

Если  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f'(\langle a, b \rangle)$  - промежуток

### **Следствие 2**

$f'$  не может иметь разрывов первого рода

## **4.4 Производные высших порядков**

### **Определение**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , дифференцируемая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f' : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Если нашлась  $x_0 \in \langle a, b \rangle : \exists (f')'(x_0)$ , то говорят, что  $(f')'(x_0)$  - это вторая производная в  $f_0$

Аналогично далее

Аналогично для односторонних производных (заранее сужаем область определения до требуемой)

Пусть  $E$  - промежуток на  $\mathbb{R}$ . За  $C^n(E)$  будем обозначать множество функций, определенных на  $E$ ,  $n$  раз дифференцируемых на  $E$ , и  $f^{(n)}$  - непрерывных на  $E$

$$C^\infty E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(E)$$

### **Замечание**

$$C^E \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \supsetneq \dots \supset C^\infty(E)$$

### **Лемма**

Пусть  $r : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \langle a, b \rangle$ ,

$r$  -  $n - 1$  раз дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ ,

$r$  -  $n$  раз дифференцируема в  $x_0$  и  $r(x_0) = r'(x_0) = \dots = r^{(n)}(x_0) = 0$

Тогда  $r(x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$

### **Доказательство**

Докажем по индукции

1. База

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\text{Тогда } r(x) = o(x - x_0)$$

2. Переход (от  $n$  к  $n+1$ )

Пусть  $R(x)$  дифференцируема  $n$  раз на  $\langle a, b \rangle$ ,  $n+1$  раз - в  $x_0$ ,  
 $R(x_0) = \dots = R^{(n+1)}(x_0) = 0$  Тогда  $r(x) := R'(x)$  - удовлетворяет предположению индукции

Тогда  $r(x) = o((x - x_0)^n)$

$$\text{Отсюда } \frac{R(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n}$$

По теореме Лагранжа для некоторой  $c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$ :

$$\frac{R(x) - R(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} = \frac{R'(c)}{(x - x_0)^n}$$

$$\left| \frac{R(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \right| = \frac{|R'(c)|}{|x - x_0|^n} \leq \frac{|R'(c)|}{|c - x_0|^n} = \frac{|r(c)|}{|c - x_0|^n} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

**Формула Тейлора с остатком в форме Пеано**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n-1$  раз дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$ ,  $n$  раз - в  $x_0 \in \langle a, b \rangle$

$$\text{Тогда } f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

**Доказательство**

$$r(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$r(x_0) = 0$$

$$r'(x_0) = f'(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = 0$$

$$r^{(l)}(x_0) = f^{(l)}(x_0) - \sum_{k=l}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-l)!} (x - x_0)^{k-l} = 0, l \leq n$$

$$\text{Из леммы } r(x) = o_{x \rightarrow x_0}((x - x_0)^n)$$

**Обозначения**

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k - \text{многочлен Тейлора } n\text{-ой степени}$$

функции  $f$  в точке  $x_0$

Формула Тейлора:  $f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n$ , где  $R_n$  - остаток в формуле Тейлора

$$R_n = o((x - x_0)^n)$$

**Теорема**

Пусть у нас есть рациональная функция  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P, Q$  - многочлены,  $\deg P <$

$\deg Q$

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{k_n}$$

Тогда существует  $n$  серий вещественных коэффициентов:  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}; \beta_1, \dots, \beta_{k_2}; \dots; \omega_1, \dots, \omega_{k_n}$

таких, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left( \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \dots + \frac{\alpha_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} \right) + \dots + \left( \frac{\omega_1}{x - a_n} + \dots + \frac{\omega_{k_n}}{(x - a_n)^{k_n}} \right)$$

**Доказательство**

$$\text{Получим серию } \alpha: \frac{P}{Q} = \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} \cdot F_1, F_1 = \frac{P(x)}{(x - a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{k_n}}$$

Заметим, что  $F_1 \in C^\infty$

Отсюда

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{(x - a_1)^{k_1}} \cdot (\alpha_{k_1} + \alpha_{k_1-1}(x - a_1) + \dots + \alpha_1(x - a_1)^{k_1-1} + \alpha_0(x - a_1)^{k_1} +$$

$$o((x - a_1)^{k_1})) = \frac{\alpha_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{(x - a_1)} + \alpha_0 + \frac{o((x - a_1)^{k_1})}{(x - a_1)^{k_1}}$$

Наблюдение:

$$\frac{P}{Q} - \left( \frac{\alpha_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{(x - a_1)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow a_1} \alpha_0 - \text{т.е. это конечный предел.}$$

Значит знаменатель  $(x - a_1)$  полностью ушел из знаменателя (иначе бы предел был  $\infty$ )

$$\text{Рассмотрим } R(x) = \frac{P}{Q} - \left( \frac{\alpha_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{\alpha_1}{(x - a_1)} \right) - \left( \frac{\beta_{k_2}}{(x - a_2)^{k_2}} + \dots + \frac{\beta_1}{(x - a_2)} \right) - \dots - \left( \frac{\omega_{k_n}}{(x - a_n)^{k_n}} + \dots + \frac{\omega_1}{(x - a_n)} \right)$$

$R(x)$  - рациональная дробь со знаменателем  $Q$

По выше описанной логике в  $R(x)$  полностью сократятся все знаменатели

Т.о.  $R(x)$  - многочлен. При  $x \rightarrow \infty$   $R(x) \rightarrow 0$ . Отсюда  $R(x) = \text{const}$

Т.е.  $R(x) \equiv 0$

**Замечание**

Для нахождения числителей раскладываем  $F_i$  в формулы Тейлора

//todo научиться это делать

**Теорема (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа)**

Пусть  $f \in C^n(\langle a, b \rangle)$ , существует  $f^{(n+1)}$  на  $\langle a, b \rangle$ ,  $x_0, x \in \langle a, b \rangle$

Тогда  $\exists C \in (x_0, x)$  (или  $(x, x_0)$ )

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(Заметим, что  $C$  зависит от  $x$ )

### Доказательство

$$\phi(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, t \in [x_0, x] (\text{или наоборот})$$

$$\phi(x) = 0$$

$$\phi(x_0) = f(x) - T_n(f, x_0)(x) = R_n(x) - \text{остаток в формуле Тейлора}$$

$$\phi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1}$$

$$\psi(x) = 0, \psi(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$$

По теореме Коши:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}, c \in [x_0, x]$$

$$\text{Тогда } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

### Замечание

1. Теорема эквивалентна следующему утверждению:

$$\exists \theta \in (0, 1) : f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

2. В доказательстве вместо  $\psi$  можно взять функцию  $(x-t)$

$$\text{Тогда } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n$$

### Метод Ньютона

Пусть у нас есть дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  с неизвестным корнем  $\xi$  и точка  $x_1$ . Сгенерируем последовательность  $x_n$ , приближающуюся к  $\xi$

Пусть  $x_{n+1}$  - точка пересечения ОХ и касательной к  $f$  в точке  $x_n$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

### Оценка

$$\text{Найдем разность } \xi - x_{n+1} = \xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n)}{f'(x_n)}$$

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!} (\xi - x_n) + \frac{f''(c)}{2!} (\xi - x_n)^2 \text{ по формуле Тейлора,}$$

$c$  - между  $\xi$  и  $x_n$



Тогда  $\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2$

Пусть  $m := \min_{\langle a, b \rangle} |f'(x)|$

$M := \max_{\langle a, b \rangle} |f''(x)|$

$$|\xi - x_{n+1}| = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} |\xi - x_n|^2 \leq \frac{M}{2m} |\xi - x_n|^2 \leq \frac{M}{2m} \frac{M^2}{4m^2} |\xi - x_{n-1}|^4 \leq \dots \leq$$

$$|\xi - x_1|^{2^n} \frac{M^{1+2+4+\dots+2^{n-1}}}{(2m)^{1+2+4+\dots+2^{n-1}}} = \frac{2m}{M} \left| \frac{M}{2m} (\xi - x_1) \right|^{2^n}$$

Тогда при хорошем  $x_1$  точность будет очень быстро увеличиваться с каждым шагом

### Следствие

Пусть  $f \in C^\infty \langle a, b \rangle$  и  $\exists M, A \forall t \in \langle a, b \rangle \forall n f^{(n)}(t) \leq M \cdot A^n$

Тогда  $\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle T_n(f, x_0)(x - x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

### Доказательство

Из предыдущей теоремы  $|f(x) - T_n(f, x_0)(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^n \right| \leq$

$$\frac{MA^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = MA \frac{|A(x - x_0)|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

### Таблица формул Тейлора

При  $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n), \text{ где}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$$

## 4.5 Равномерная непрерывность

### Определение

Пусть  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  - метрические пространства,  $f$  - непрерывная на

$X$

Если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x_0 : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ , то функция -  
*равномерно непрерывная*

### **Теорема Кантора**

$f : X \rightarrow Y$  - непрерывная на  $X$ ,  $X$  - компактно,  $X, Y$  - метрическое пространство

Тогда  $f$  - равномерно непрерывна на  $X$

### **Доказательство**

Докажем от противного

Докажем, что  $\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, x'_n \in X : \rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}, \rho(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$

Т.к.  $X$  компактно,  $\exists n_k : x_{n_k} \rightarrow a \in X$

Отсюда  $x'_{n_k} \rightarrow a$

Тогда  $\rho(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \rightarrow 0$  - противоречие

### **Следствие**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывна

Тогда  $f$  - равномерно непрерывна

### **Замечание**

Если отображение равномерно непрерывное на двух множествах, то оно непрерывно и на их объединении

TODO проверить

### **Минутка из теории игр**

Пусть у нас есть "прямоугольное" поле для игры в Нех, играют два игрока - белый и черный

Игроку выделены две противоположные стороны прямоугольника. Требуется, закрашивая клетки, провести путь между клетками

Утверждается, что в этой игре не бывает ничьих

### **Доказательство**

Встанем в нижний угол и будем оттуда вести линию так, чтобы слева от линии были белые клетки, а справа - черные

Заметим, что мы можем построить такую линию

Заметим, что длина линии конечна

Тогда когда-то линия упрется куда-то

Линия не может заиклиться

Тогда линия всегда упрется в какую-то стенку

Тогда вдоль линии будет находиться выигрышный путь для черных или белых

### Теорема Брауэра о неподвижной точке

1. Пусть в  $\mathbb{R}^m$   $B = B(0, 1)$  и  $f : B \rightarrow B$  - непрерывная  
Тогда  $\exists x \in B : f(x) = x$
2. Пусть  $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  - непрерывное  
Тогда  $\exists x \in [0, 1]^2 : f(x) = x$

#### Доказательство

Будем задавать точку следующим образом:  $x = (x_1, x_2)$

$f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$

Рассмотрим  $\rho(x, y) := \max |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|$  - непрерывная на нашем квадрате (т.к. зажата между 0 и евклидовой метрикой)

Для евклидовой метрики будем использовать  $\|x - y\|$

Пусть в квадрате нет неподвижных точек

Тогда рассмотрим функцию  $x \mapsto \rho(x, f(x))$ . Эта функция положительна, непрерывна

Тогда по т. Вейерштрасса существует минимум  $\varepsilon := \min \rho(x, f(x)) > 0$

$f$  по т. Кантора равномерно непрерывна, т.е. для  $\varepsilon \exists \delta < \varepsilon : \forall x, x_0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Возьмем доску для игры в Нех( $n, n$ ),  $n : \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$

Преобразуем ее, взяв центры ее клеток и соединив их. Тогда мы получим прямоугольную сетку с диагоналями. Покраска клеток теперь эквивалентна покраске ее центра

Стороны первого игрока - левая и правая, второго - верхняя и нижняя

Сожмем сетку до размеров  $1 \times 1$ . Теперь каждому узлу  $(v_1, v_2)$  в сетке соответствует точка  $(\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n})$

Теперь покрасим точки следующим образом:  $\text{color}(v) = \min(i : |f_i(\frac{v_i}{n}) - \frac{v_i}{n}| \geq \varepsilon)$  (хотя бы одна координата подходит по выше описанным причинам)

По предыдущим рассуждениям существует одноцветный путь от нижней грани к верхней или от левой грани к правой

Пронумеруем вершины в этом пути:  $v^0, v^1, \dots, v^N$

Пусть путь имеет цвет 1 (путь - слева направо)

Тогда  $v_1^0 = 0$

$f_1(\frac{v^0}{n}) \geq 0$  - по условию

Т.к. цвет - 1, то  $f_1(\frac{v^0}{n}) - \frac{v_1^0}{n} \geq \varepsilon$

$v_1^N = 1$

$f_1(\frac{v^N}{n}) \leq 1$

Т.к. цвет - 1, то  $f_1(\frac{v^N}{n}) - \frac{v_1^N}{n} \leq -\varepsilon$

Заметим, что в какой-то момент мы перейдем от  $f_1(\frac{v^i}{n}) - \frac{v_1^i}{n} \geq \varepsilon$  к

$f_1(\frac{v^i}{n}) - \frac{v_1^i}{n} \leq -\varepsilon$

При переходе к следующему пункту значение  $\frac{v_1^i}{n}$  меняется на  $\frac{1}{n} < \delta$ ,

$f_1(\frac{v^i}{n})$  - менее чем на  $\varepsilon$

Отсюда переход на  $2\varepsilon$  невозможен, ч.т.д.

## 4.6 Монотонность и экстремумы

**Теорема (критерий монотонности)**

$f \in C\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда

$f \uparrow$ (нестрого) на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f' \geq 0$  на  $(a, b)$

$f \downarrow$ (нестрого) на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow f' \leq 0$  на  $(a, b)$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Из определения производной

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Из т. Лагранжа:

Возьмем  $x_0 < x_1$

$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) \geq 0$  для некоторого  $c \in (a, b)$

**Следствие**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда  $f = \text{const} \Leftrightarrow f \in C\langle a, b \rangle \wedge f' \equiv 0$  на  $(a, b)$

**Доказательство**  $\Rightarrow$  из определения

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Из теоремы  $f$  нестрого возрастает и нестрого убывает

Тогда  $f = \text{const}$

**Следствие 2**

$f \in C\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда  $f$  строго возрастает  $\Leftrightarrow \begin{cases} f' \geq 0 \text{ на } (a, b) \\ f' = 0 \text{ (не является тождественным 0 ни на каком интервале)} \end{cases}$

**Доказательство**  $\Rightarrow$  по теореме и следствию 1

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Она нестрого возрастает

Но если есть промежутки, где она константа, то в этих промежутках

$f'(x)$  - константа

Отсюда она строго возрастает, ч.т.д.

**Следствие 3**

Пусть  $f, g \in C[a, b]$  и дифференцируемы на  $(a, b)$

$f(a) \leq g(a)$

При  $x \in (a, b)$   $f'(x) \leq g'(x)$

Тогда  $f(x) \leq g(x)$

**Доказательство**

Рассмотрим  $g(x) - f(x)$

Она неотрицательна и всегда возрастает

**Определение**

Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда  $x_0 \in X$  - *точка локального максимума*, если  $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) f(x) \leq f(x_0)$

$x_0 \in X$  - *точка строгого локального максимума*, если  $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) f(x) < f(x_0)$

*Локальный экстремум* - локальный максимум или локальный минимум

**Определение**

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Точка  $x$  *стационарная*, если  $f'(x) = 0$

**Определение**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Точка  $x_0$  - *точка строгого возрастания*, если  $\exists U(x_0) :$

$\forall x \in U(x_0), x > x_0 f(x) > f(x_0)$

$\forall x \in U(x_0), x < x_0 f(x) < f(x_0)$

**Теорема о необходимом и достаточном условии экстремума**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in (a, b)$

(интервал!!!)

Тогда

1. Если  $f$  - дифференцируема в  $x_0$ ,  $x_0$  - локальный экстремум. Тогда  $f'(x_0) = 0$

**Доказательство**

По т. Ферма

2. Пусть  $f$  -  $n$  раз дифференцируема в окрестности  $x_0$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Если  $f^{(n)}(x_0) > 0$ :

Если  $n$  - четная, то  $x_0$  - минимум

Если  $n$  - нечетная, то  $x_0$  - не экстремум.  $x_0$  - точка строгого возрастания

Если  $f^{(n)}(x_0) < 0$ :

Если  $n$  - четная, то  $x_0$  - максимум

Если  $n$  - нечетная, то  $x_0$  - не экстремум.  $x_0$  - точка строгого убывания

**Доказательство**

Распишем формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + 0 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Тогда в некоторой окрестности  $x_0$  знак  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$  совпадает со

знаком  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

Отсюда свойства очевидны