

# Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

## 1 Линейное отображение

### 1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть  $V, U$  - линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

**Определение**

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$  - *линейное отображение*, если  $\forall \lambda \in K, u_1, u_2 \in U$   $\mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$

**Замечания**

1. Обозначение:  $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2.  $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$  поточечно определены  $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda \mathcal{A}u$

**Примеры**

1.  $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2.  $\epsilon v = v$
3.  $V, U = P_n$  - множество многочленов степени  $\leq n, A = \frac{d}{dt}$  - дифференциальный оператор
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$  - матрица  
 $\mathcal{A}u = B \cdot u$

**Определение**

$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V)$  – множество всех линейных отображений  $U \rightarrow V$

Определим операции

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

$$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$$

$L(U, V)$  – линейное пространство

**Определение**

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$  – образ линейного отображения

**Замечание**

$\text{Im } \mathcal{A} \subset V$  – линейное подпространство

Если  $\text{Im } \mathcal{A}$  – конечномерное, то  $\dim \text{Im } \mathcal{A} =: \text{rg } \mathcal{A}$

**Определение**

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$  – ядро линейного отображения (прообраз  $\mathbb{0}_V$ )

**Замечание**

$$\text{Ker } \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$\mathbb{0}_U \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$\text{Ker } \mathcal{A} \subset U$  – линейное подпространство

Если  $\text{Ker } \mathcal{A}$  конечномерно, то  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$

**Замечание 2**

Изоморфизм – частный случай линейного отображения

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbb{0}_U \text{ (тривиально)} \end{cases}$$

**Следствие**

Если  $U, V$  – конечномерные

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

- $\mathcal{A}$  сюръективное  $\Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$  инъективное  $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$  биективно  $\Leftrightarrow$  сюръективно + инъективно  $\Leftrightarrow$  изоморфизм

- $\mathcal{A}$  эндоморфизм  $\Leftrightarrow$  линейный оператор  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in L(V, V) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{End}_K(V)$
- $\mathcal{A}$  автоморфизм  $\Leftrightarrow$  эндоморфизм + изоморфизм  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}_K(V)$

### Примеры

1.  $0 \in L(U, V)$
2.  $\epsilon \in \text{Aut}(V)$  – автоморфизм
3.  $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$   
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$  – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм  
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$  – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4.  $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$  – матрица

#### Определение

$\text{Im } A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$  – образ матрицы

$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$  – ядро матрицы

$\text{def } A = \dim \text{Ker } A$  – дефект матрицы

$\text{rg } A = \dim \text{Im } A$  – согласуется со старыми определениями ранга матрицы

#### Доказательство

Для  $y \in \text{Im } A$

$$y = Ax = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$\text{Im } A = \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\dim \text{Im } A = \text{rg } A$$

#### Утверждение

$\text{Ker } A$  – множество решений  $Ax = 0$

Тогда  $\text{def } A = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg } A$

Отображение  $u = Av$ :

- (a) Сюръекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$
- (b) Инъекция  $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- (c) Биекция  $\Leftrightarrow n = m = \text{rg } A$
- (d) Эндоморфизм  $\Leftrightarrow n = m$
- (e) Автоморфизм  $n = m = \text{rg } A$

**Определение**

$\mathcal{AB} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – композиция

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  – линейное отображение

**Свойства**

1.  $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$   
 $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$  – дистрибутивность
2.  $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{AB}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$  – однородность
3.  $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = \mathcal{ABC}$  – ассоциативность
4.  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{AB}$  – изоморфизм

**Определение**

Пусть  $\mathcal{A} \in L(U, V)$  – изоморфизм

$\forall v \in V \exists !u : \mathcal{A}u = v$

Тогда зададим  $\mathcal{A}^{-1}v = u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

$\mathcal{A}^{-1}$  – изоморфизм, обратный к  $\mathcal{A}$

$\mathcal{AA}^{-1} = \epsilon_V$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$

**Замечание**

$\text{End}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра

$\text{Aut}(V)$  – ассоциативная унитарная алгебра с делением

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$  – линейное подпространство

Тогда  $\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow V$  называется сужением на линейное подпространство

$U_0$ , если  $\forall u \in U_0 \mathcal{A}_0u = \mathcal{A}u$

Очевидно  $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$

$\mathcal{A}_0 =: \mathcal{A}|_{U_0}$

**Утверждение**

$\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Rightarrow \mathcal{A}_0$  изоморфизм  $\in L(U_0, \text{Im } \mathcal{A}_0)$

**Доказательство**

$\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$\text{Ker } \mathcal{A}_0 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$  – из изоморфизма

Отсюда  $\text{Ker } \mathcal{A}_0 = \{0_U\}$

Тогда  $\mathcal{A}_0$  инъекция, а значит изоморфизм

**Теорема о ранге и дефекте линейного отображения**

$U, V$  – конечномерные

$A \in L(U, V)$

Тогда  $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$

**Доказательство**

$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$

Дополним  $U_0$  до  $U$ :  $U = U_0 \oplus U_1$

Пусть  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\forall u \in U \ u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$  – единственным образом

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$

Отсюда  $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

Покажем, что  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм:

Сюръекция, т.к. действует в  $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$

Отсюда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{0_U\}$  из дизъюнктивности

Тогда  $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{0_U\}$  – тривиально

Тогда  $\mathcal{A}_1$  инъективно

Отсюда  $\mathcal{A}_1$  изоморфизм, т.е.  $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$

Тогда  $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$ , ч.т.д.

## 1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные  $U, V$

**Определение**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\xi_1, \dots, \xi_n$  – базис  $U$

$\nu_1, \dots, \nu_m$  – базис  $V$

$$\forall u \in U \ u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$$\forall v \in V \ v = \sum_{i=1}^m v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\forall v \in \text{Im } \mathcal{A} \quad v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i$$

$\mathcal{A}$ , как линейное отображение, полностью определяется значениями  $\mathcal{A}$  на базисных векторах

$$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$A = (A_1 \dots A_n)$  - матрица линейного отображения в базисах  $(\xi, \nu)$

Если  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  - линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадают

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \nu_j$$

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \right) \nu_j$$

Т.к. координаты введены единственным образом, то  $\forall j \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \Leftrightarrow$

$$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$$

### Примеры

$$1. \quad \epsilon: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow E$$

$$2. \quad \epsilon: \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{V} \rightarrow \underset{\nu_1 \dots \nu_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow T_{\nu \rightarrow \xi} = T_{e \rightarrow e'}$$

### Утверждение

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$  - пространство всех матриц  $A_{m \times n}$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = m$  (при фиксированных базисах  $U, V$ )

### Доказательство

Соответствие между  $\mathcal{A}$  и  $A$  взаимнооднозначное

Докажем линейность

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda \mathcal{B}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$$

### Утверждение

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

### Доказательство

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} U \\ \xi_1 \dots \xi_n \end{matrix} \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{matrix} W \\ \theta_1 \dots \theta_r \end{matrix} \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{matrix} V \\ \nu_1 \dots \nu_m \end{matrix} \quad (\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^r b_{ki} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^r b_{ki} \mathcal{A}_{\theta_k} = \\
& \sum_{k=1}^r b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}\right) \nu_i = \sum_{j=1}^m AB_{jk} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Утверждение

$A$  изоморфно  $\Rightarrow A_0$  изоморфно

### Доказательство

$A_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$  – сюръекция

$\text{Ker } A_0 \subset \text{Ker } A = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда  $\text{Ker } A_0 = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда  $A_0$  – инъективно, а значит изоморфизм

**Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \rightarrow \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{\xi'}{U} \rightarrow \underset{\nu'}{V} \leftrightarrow A'$

$T_{\xi \rightarrow \xi'} T_{\nu \rightarrow \nu'}$  – матрицы перехода

Тогда  $A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$

### Доказательство

Пусть  $\xi_U : \underset{\xi'}{U} \rightarrow \underset{\xi}{U}$ ,

$\xi_V : \underset{\nu}{V} \rightarrow \underset{\nu'}{V} \quad \mathcal{A} = \xi_V \mathcal{A} \xi_U$

$A = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$

### Следствие

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\mathcal{A} : \underset{e}{V} \rightarrow \underset{e}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{e'}{V} \rightarrow \underset{e'}{V} \leftrightarrow A'$

$A' = T_{e' \rightarrow e} A T_{e \rightarrow e'}$

// todo 2

### Определение

Матрицы  $A_{n \times n}, B_{n \times n}$  *подобны*, если  $\exists C$  невырожденная:  $A = C^{-1} B C$

$A$  и  $A'$  – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны

### Утверждение

$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Ker } A$

$\text{Im } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Im } A$

**Доказательство**

$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{Im } A$   
 $\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = 0\}$

$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } A$

### 1.3 Инвариантность линейного отображения

**Определение**

Инвариантностью/инвариантом называется свойство, которое не меняется при определенном рода преобразованиях

**Теорема 1**

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\text{rg } A$  и  $\text{def } A$ , где  $A \leftrightarrow \mathcal{A}$ , не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса

**Доказательство**

$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \rightarrow \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$

$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$

$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A$

$\text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = n = \text{rg } A + \text{def } A \Rightarrow \text{def } \mathcal{A} = \text{def } A$

**Следствие**

$\mathcal{A}$  изоморфизм  $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ , где  $A \leftrightarrow \mathcal{A}$

**Определение**

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

Тогда  $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$  – определитель системы векторов в базисе  $e_1, \dots, e_n$

**Теорема 2**

Значение  $\det \mathcal{A}$  не зависит от выбора базиса  $e_1, \dots, e_n$  (т.е. является инвариантом), причем  $\det \mathcal{A} = \det A$ , где  $A$  – матрица оператора в некотором базисе

**Доказательство**

Выберем базис  $e_1, \dots, e_n$



Тогда  $\mathcal{A} \xleftrightarrow[e]{} A_{n \times n}$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в  $e'_1, \dots, e'_n$  – базисе  $V$  – это тоже верно

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[e']{} A'$$

$$\det \mathcal{A} = \det A'$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\text{Тогда } \det A' = \det(T^{-1} A T) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$$

**Следствие**

$\forall f$  – n-форма на  $V$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \quad f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

**Доказательство**

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

$g$  – n-форма, т.к.  $f$  – n-форма

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(e_1, \dots, e_n) \quad (\text{см. доказательство теоремы})$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

**Следствие 2**

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$$

**Следствие 3**

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

$$\text{Причем } \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

$$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \in \text{Aut}(V)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$$

$$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$$

## Примеры

1. В  $V_3$

$$f(a, b, c) = (a, b, c) = \text{ориентированный объем} = \det(a, b, c)$$

$$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$$

$\lambda = \det \mathcal{A}$  – коэффициент пропорциональности объемов

(a)  $\mathcal{A}v = \mu v$  – оператор подобия

$$\text{Тогда } \lambda = \mu^3$$

(b) Поворот

Пусть  $i, j, k$  перешли в  $e_1, e_2, e_3$  поворотом

$$\text{Тогда } e_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A} \xleftrightarrow{ijk} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

$$f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a, b, c)$$

$$\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1 - \text{смешанное произведение}$$

Отсюда при повороте объем сохраняется

## Определение

$$A_{n \times n}$$

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} - \text{след матрицы}$$

## Теорема 3

Если матрицы подобные, то  $\text{tr } A = \text{tr } B$

### Доказательство

$A, B$  – подобные  $\Rightarrow \exists$  невырожденная  $C : A = C^{-1}BC = SBC$

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik} \sum_{m=1}^n B_{km} C_{ki} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} \sum_{i=1}^n C_{mi} S_{ik} =$$

$$\sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} E_{mk} = \sum_{k=1}^n B_{kk} = \text{tr } B$$

### Следствие

$A$  и  $A'$  матрицы  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  в разных базисах

Тогда  $\text{tr } A = \text{tr } A'$  (из формулы перехода)

**Определение**

$\text{tr } \mathcal{A} := \text{tr } A$ , где  $A$  – матрица  $\mathcal{A}$  в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

**Определение**

$L \subset V, \mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$L$  называется инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Если  $L$  – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве

**Примеры**

1.  $\emptyset, V$
2.  $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$
3.  $\mathcal{A}$  – вращение пространства вокруг оси  $l$  на фиксированный угол  
Тогда  $l, L \perp l$  – инвариантное пространство ( $L$  – плоскость)  
Линейные многообразия  $P = x_0 + L$  – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

**Теорема 4**

$L \subset V$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда  $\exists$  базис  $V$  такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$ , где  $A^1_{k \times k}, k = \dim L$

**Доказательство**

Пусть  $L$  – инвариантное линейное подпространство относительно  $\mathcal{A}$

$\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L$

Дополним его до базиса  $V$ :

$V = \text{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что  $A$  имеет ожидаемый вид

**Следствие 1**

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}, \text{ где } A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$$

**Доказательство**

Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис  $L$

$e_{k+1}, \dots, e_n$  – базис  $n$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_j^1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in k+1 \dots n} \in L \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A_{j-k}^2 \end{pmatrix}$$

**Следствие 2**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис  $V$  такой, что матрица оператора  $\mathcal{A}$  имеет блочно-диагональный вид (аналогично предыдущему следствию)

Пусть  $A|_{L_j} : L_j \rightarrow L_j$  (эндоморфизм)

Тогда  $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_i$

**Следствие 3**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$  – инвариантные линейные пространства относительно  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A} : L_i \rightarrow V$$

$$\text{Тогда } \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}^j$$

**Доказательство**

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$$\forall x \in V \exists ! x_1 \in L_1, \dots, x_m \in L_m : x = \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}x_i$$

$$\mathcal{A}x_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}_i$$

Докажем дизъюнктность

Пусть  $y_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$

Тогда  $\exists x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$y_1 + \dots + y_m = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \dots + \mathcal{A}x_m = 0$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$ , т.к.  $L_i$  – инвариант

Т.к.  $L_1 \dots L_m$  – дизъюнкты, то  $\mathcal{A}x_i = 0$

Отсюда  $y_i = 0$

Отсюда  $\text{Im } \mathcal{A}_i$  дизъюнкты

## 1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

$V$  – линейное пространство над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

### Определение

$\lambda \in K$  – собственное число  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ , если  $\exists v \neq 0 \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

$v$  – собственный вектор  $\mathcal{A}$ , отвечающий собственному числу  $\lambda$

Отсюда  $v$  – СВ  $\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)v = 0$

$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)$  – множество всех СВ  $\mathcal{A}$ , отвечающих  $\lambda \cup \{0\}$  – собственное подпространство  $\mathcal{A}$ , отвечающее  $\lambda$

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$  – геометрическая кратность числа  $\lambda$

$V_\lambda, \gamma_\lambda$  – инвариантны относительно оператора  $\mathcal{A} - \lambda \epsilon$  и выбора базиса

### Примеры

1. Оператор подобия:

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v := \lambda v$$

У него  $\lambda$  – собственное число,  $V = V_\lambda$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[e]{} \lambda E$$

2.  $\mathcal{A}$  – поворот на плоскости относительно начала координат на угол

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

3.  $\lambda = 0$  – собственное число  $\mathcal{A}$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ – не изоморфизм}$$

$$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$$

4.  $v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$ , где  $v_j$  – СВ  $\mathcal{A}$  для стационарного числа  $\lambda_j$

Научимся находить СЧ и СВ

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \operatorname{tr} A + \dots + \det A$  – характеристический многочлен  $\mathcal{A}(A)$   $\lambda$  – СЧ  $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$

Из основной теоремы алгебры  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$  имеет ровно  $n$  корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)

Если  $\lambda_{i \in 1 \dots n}$  – корни, то  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  (т.к. свободный член  $\chi$ )

Т.о.  $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

Также из теоремы Виета  $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$ , где  $\alpha(\lambda)$  – алгебраическая кратность

СЧ  $\lambda$  (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в  $\mathbb{R}^2$  на  $\alpha \in (-\pi, \pi)$

Найдем характеристический многочлен:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos \alpha - t)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 2t \cos \alpha + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2t \cos \alpha + 1$$

Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ

$$\det A = 1, \operatorname{tr} A = 2 \cos \alpha$$

### Теорема 1

$\forall \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \lambda$  – СЧ  $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

#### Доказательство

$1 \leq \gamma(\lambda)$  очевидно, т.к.  $\gamma(\lambda) = \dim V_{\lambda} = \gamma$

Пусть  $v_1, \dots, v_{\gamma}$  – базис  $V_{\lambda}$

$V_{\lambda}$  – инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис  $V_{\lambda}$  такой, что  $A$  имеет ступенчатый вид  $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ \mathbb{O} & A^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Отсюда } \chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE| |A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \chi_{A^2}(t)$$

Пусть  $v_1, \dots, v_{\gamma}, e_{\gamma+1}, \dots, e_n$  – наш базис

Т.к.  $\mathcal{A} v_{j \in 1 \dots \gamma} = \lambda v_j$ , то  $A^1 = \lambda E_{\gamma \times \gamma}$

$$\chi_{A^1}(t) = (\lambda - t)^{\gamma}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t)^{\gamma} \chi_{A^2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma, \text{ т.к. возможно } \lambda - \text{корень } \chi_{A^2}(t)$$

#### Определение

Набор СЧ  $\mathcal{A}$  с учетом кратности является спектром оператора  $\mathcal{A}$   
 Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е.  $\forall \lambda -$   
 СЧ  $\alpha(\lambda) = 1$

**Теорема 2**

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

$v_1, \dots, v_m$  — соответствующие СВ

Тогда  $v_1, \dots, v_m$  — линейно независимые

**Доказательство**

Методом математической индукции:

1.  $m = 1$  — очевидно (т.к.  $v_1 \neq 0$ )
2. Пусть верно для  $m$   
 Докажем для  $m + 1$  от противного  
 Пусть  $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j \in 1 \dots m}$ ,  $v_{m+1}$  — соответствует  $\lambda_{m+1}$   
 Пусть  $v_1, \dots, v_{m+1}$  линейно зависимые  
 Тогда  $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$   
 //todo

**Следствие 1**

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$

Тогда  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$  — дизъюнктные

**Доказательство**

$v_1 + \dots + v_m = 0, v_i \in V_{\lambda_i}$

Пусть  $v_i \neq 0$ , то  $v_i$  — СВ для  $\lambda_i$  (т.к.  $v_i \in V_{\lambda_i}$ )

Тогда линейная комбинация СВ  $= 0$ , чего не может быть из теоремы

Тогда  $v_i = 0$ , откуда дизъюнктность

**Следствие 2**

Пусть  $V = \oplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda}$

$\mathcal{A}_{\lambda} = \mathcal{A}|_{V_{\lambda}} \in \text{End}(V_{\lambda})$

Тогда  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{\lambda - \text{СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_{\lambda}}(t)$

**Доказательство**

$V = \oplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda}$

$V_{\lambda}$  — инвариант относительно  $\mathcal{A}$

Тогда существует базис такой, что  $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$$

$$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$$

Тогда  $V = \text{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$ , где  $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$  – базис  $V_{\lambda_k}$

Тогда базис  $V$  – объединение базисов

$$\text{Отсюда } \chi_A(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$$

## 1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагона- лизируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

### Определение

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$  называется оператором простой структуры, если существует базис  $V$  такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

### Замечание

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow$  в  $V$  существует базис из СВ

### Теорема

Если все корни  $\chi_A(t) \in K$ , т.е. являются СЧ (т.е.  $\sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda) = n =$

$$\deg \chi_A(t))$$

$\mathcal{A}$  – ОПС  $\Leftrightarrow \forall \lambda - \text{СЧ } \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$

### Доказательство

$$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

$$\mathcal{A} - \text{ОПС} \Leftrightarrow \exists \text{ базис из СВ} \Leftrightarrow = \oplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda} \Leftrightarrow n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \gamma(\lambda)$$

$$\text{Отсюда } n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$$

### Следствие

Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  попарно различные СЧ  $\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}$  – ОПС

### Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$$\exists T \text{ невырожденная : } T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i - \text{СВ}$$

### Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица  $A$  диагонализируема  $\Leftrightarrow A$  – матрица ОПС  $\mathcal{A}$  в некотором базисе

Причем  $T = T_{e \rightarrow v}$ , где  $e_1, \dots, e_n$  – базис, в котором была записана  $A$ ,  $v_1, \dots, v_n$



– базис из СВ  $\mathcal{A}$ , соответствующих  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$  – ОПС

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$   $v_1, \dots, v_n$  – СВ, соответствующие  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – СЧ, базис  $V$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[e]{A} A \mathcal{A} \xleftrightarrow[v]{A'} A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$T = T_{e \rightarrow v}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

Отсюда  $A$  подобна диагональной

**Доказательство**  $\Rightarrow$

//todo

**Определение**

Пусть  $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$ ,  $L_i$  – линейное подпространство

Тогда  $\forall v \in V \exists ! v_1, \dots, v_m : v_i \in L_i, v = \sum_{i=1}^m v_i$

Зададим  $\rho_i \in \text{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

$\rho_i$  – оператор проектирования (проектор) на  $L_i$

Свойства:

$$1. \forall i \neq j \rho_i \rho_j = 0$$

$$2. \sum_{i=1}^m \rho_i = \epsilon$$

$$3. \rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N} \text{ – идемпотентность}$$

$$4. \text{Im } \rho_i = L_i \\ \text{Ker } \rho_i = \sum_{j \neq i} L_j$$

**Утверждение**

Пусть  $\rho_1, \dots, \rho_m \in \text{End}(V)$ , удовлетворяющие свойствам 1 и 2

Тогда  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$  (т.е.  $\rho$  – проектор на  $L_i = \text{Im } \rho_i$ )

**Доказательство**

Докажем  $1, 2 \Rightarrow 3$

$$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \sum_{j=1}^m \rho_j = \rho_i^2$$

Докажем, что  $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$

$$\forall v \in V \quad v = \epsilon v = \sum_{i=1}^m \rho_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$$

Докажем дизъюнктность

$$0 = v_1 (\in \text{Im } \rho_1) + \dots + v_m (\in \text{Im } \rho_m)$$

$$\forall i = 1 \dots m \quad v_i = \rho_i \omega_i (\exists \omega_i \in V)$$

$$v_i = \rho_i \omega_i = \text{из свойства } 3 = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m \rho_j \omega_j \right) = \rho_i \left( \sum_{j=1}^m v_j \right) = \rho_i 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

**Теорема о спектральном разложении о.п.с.**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$  – о.п.с.

Тогда  $\mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$ , где  $\rho_\lambda$  – проектор на  $V_\lambda$

**Доказательство**

Обозначение: Пусть все  $\lambda$  – С.Ч.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.  $\Leftrightarrow V = \oplus_\lambda V_\lambda$

$$v = \sum_\lambda v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v = \mathcal{A} \left( \sum_\lambda v_\lambda \right) = \sum_\lambda (\mathcal{A}v_\lambda) = \sum_\lambda \lambda v_\lambda = \sum_\lambda \lambda \rho_\lambda(v) = \left( \sum_\lambda \lambda \rho_\lambda \right) v$$

Отсюда  $\mathcal{A} = \sum_\lambda \lambda \rho_\lambda$  – *спектральное разложение*

**Следствие**

$$A - \text{диагонализируема} \Rightarrow \exists \rho_\lambda, \lambda - \text{С.Ч. } A : A = \sum_\lambda \lambda \rho_\lambda$$

**Определение**

$(A_m)_{m=1}^\infty$  – последовательность матриц  $A_{n \times n} = (a_{ij}^m)_{n \times n}$ ,  $m$  – индекс, а не степень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A = (a_{ij})_{n \times n} \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \quad a_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^m$$

**Немного про ряды**

$$\sum_{m=1}^\infty a_m - \text{числовой ряд } (a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C}))$$

$$S_m = \sum_{i=1}^m a_k - \text{частичная сумма ряда}$$

Если  $S_m$  сходится, то ряд называется сходящимся

**Определение**

$$\sum_{m=1}^\infty A_m - \text{ряд из матриц}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m - \text{сходится} \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \sum_{m=1}^{\infty} a_{ij}^m - \text{сходится}$$

Далее про ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{функциональный ряд}$$

При фиксированном  $x$  – числовой ряд

Множество  $x$  таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда =  $E$

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m - \text{степенные ряды}$$

Утверждается, что ряд сходится при  $|x - x_0| < R$ , где  $R$  – радиус сходимости

В  $\mathbb{C}$  – круг сходимости

В  $\mathbb{R}$  – интервал сходимости

$$\text{Для } \mathbb{R} : \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|C_m|}$$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$$e^x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!}, \text{ сходится при } |x - x_0| \leq \infty$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \text{ сходится при } |x| \leq \infty$$

На окружности (при  $|x - x_0| = R$ ) ряд может как сходиться, так и расходиться

**Определение**

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

$$\text{Тогда } f(A) := \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \text{ (если ряд сходится)}$$

**Теорема 1 (первый способ вычисления  $f(A)$  для диагонализируемой матрицы)**

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$ , где  $\Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

**Теорема**

$A_{n \times n}$  диагонализируема, а значит  $\exists T : \Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k, R = \infty$$

$$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)T^{-1}$$

Отсюда  $S_m = T \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^m C_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m C_k \lambda_n^k)T^{-1}$  (т.к.  $R = \infty$ , то все ряды

сойдутся)

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$$

**Теорема 2 (второй способ вычисления  $f(A)$  для диагонализируемой матрицы)**

Пусть  $A_{n \times n}$  диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если  $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$ , то ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$  сходится

$$f(A) = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda, \text{ где } A = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \lambda \rho_\lambda - \text{спектральное разложение}$$

**Доказательство**

$$A - \text{диагонализируема} \Rightarrow A = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \lambda \rho_\lambda$$

$$\text{Тогда } A^k = \left( \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \lambda \rho_\lambda \right)^k = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \lambda^k \rho_\lambda$$

$$\text{Отсюда } S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k = \sum_{k=0}^m C_k \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \lambda^k \rho_\lambda = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \left( \sum_{k=0}^m C_k \lambda^k \right) \rho_\lambda \xrightarrow{m \rightarrow \infty}$$

$$\sum_{\lambda - \text{СЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$$

**Следствие**

$$A - \text{диагонализируема}, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$$

$$\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$$

$$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall \lambda - \text{СЧ } |t\lambda| < R$$

$$\text{Тогда } f(At) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \dots, f(\lambda_n t))T^{-1}$$

или  $f(At) = \sum_{\lambda \text{ — СЧ}} f(\lambda t) \rho_\lambda$

**Пример**

$$\exp At = e^{At} = \sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}$$

**Свойства**

1.  $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
2.  $e^{A0} = E$
3.  $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$

**Доказательство**

$$(e^{At})' = \left( \sum_{\lambda} f(\lambda t) \rho_\lambda \right)' = \sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t} \rho_\lambda = \left( \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda \right) \left( \sum_{\lambda} e^{\lambda t} \rho_\lambda \right) = A e^{At} = e^{At} A$$

**Поиск обратной матрицы**

Пусть  $A$  диагонализируема

$$\forall \lambda \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) T^{-1}$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_\lambda$$

**Определение**

$\sqrt[m]{A}$  — арифметический корень

Если  $\forall \lambda \lambda \geq 0$ , то результат определен однозначно

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$$

## 1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

$V$  — линейное пространство над полем  $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$   
Т.е. все корни являются С.Ч.  $\mathcal{A} \forall \lambda \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{A}$  — о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)

2. Все корни  $\chi_A(t) \in K$   
 Т.е. все корни являются С.Ч.  $A \exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$ , т.е.  $A$  – не о.п.с.  
 (тогда матрица приводится к жордановой форме)
3. При  $K = \mathbb{R}$  не все корни  $\chi_A(t) \in \mathbb{R}$   
 Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией

### Определение

$V$  – вещественное линейное пространство над  $\mathbb{R}$

$$\forall x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$$

$$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$$

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \text{ в } V$$

$$0 = 0 + i0 - \text{нулевой в } V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall x \in V V_{\mathbb{C}} \ni x + 0i = x \quad z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \quad \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

### Утверждение

$V_{\mathbb{C}}$  – линейное пространство

### Теорема (о вещественном базисе $V_{\mathbb{C}}$ )

Пусть  $\dim V = n, e_1, \dots, e_n$  – базис  $V, e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V_{\mathbb{C}} (\dim V = \dim V_{\mathbb{C}})$

### Доказательство

$$\forall z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e^j$$

$$y = \sum_{j=1}^n y_j e^j$$

$$\text{Отсюда } z = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j, \text{ т.е. } e_1, \dots, e_n - \text{порождающая}$$

//todo Отсюда  $e_1, \dots, e_n$  – линейно независимые

### Определение

$$z = x + iy$$

Тогда  $\bar{z} = x - iy$  – сопряженный вектор

### Утверждение

$z_1, \dots, z_m$  – линейно независимые в  $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$  – линейно независимые

$$(\Rightarrow \text{rg}(z_1, \dots, z_m) = \text{rg}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m))$$

### Доказательство

$$c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m = 0$$

$$\overline{c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m} = \bar{0} = 0 = \bar{c}_1 z_1 + \dots + \bar{c}_m z_m - \text{линейно независимые}$$

$$\text{Отсюда } \bar{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$$

### Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

Продолжением  $\mathcal{A}$  на  $V_{\mathbb{C}}$  называется  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$  такой, что

$$\forall z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$$

### Свойства

1.  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$   
 $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$   
Тогда  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n \times n}$

### Доказательство

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \dots = \mathcal{A} e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

$$\text{Отсюда } A_{\mathbb{C}} = A$$

2.  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$  (т.к. матрицы равны)
3.  $\forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\bar{z})$
4.  $\alpha \pm i\beta$  – пара сопряженных корней  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  – СЧ для  $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$   
Тогда  $z$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \bar{z}$  – СВ, отвечающий СЧ  $\alpha - i\beta$

### Доказательство

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\bar{z}$$

Тогда:

Т.о. если  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

## 1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

### Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

*Нормализованный многочлен* – многочлен, старший коэффициент которого 1

Нормализованный многочлен  $\psi(t)$  называется *аннулятором* элемента  $x \in V$ , если  $\psi(\mathcal{A})x = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0 = \prod_{\lambda - \text{корень многочлена}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) -$$

кратность корня

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_0\epsilon = \prod_{\lambda - \text{корень}} (A - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

### Определение

Минимальный аннулятор  $x$  – аннулятор минимальной степени

### Теорема о минимальном аннуляторе элемента

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

1.  $\forall x \in V \exists!$  минимальный аннулятор  $x$
2. Любой аннулятор  $x$  делится на минимальный

### Доказательство 1

(алгоритм)

1.  $x = 0, \psi \equiv 1$   
 $\epsilon = \psi(\mathcal{A})$

2.  $x \neq 0$

Пусть  $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$  – линейно независимые и  $m$  максимальное

$$\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$$

$$(\mathcal{A}^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = 0$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i - \text{минимальный и определен единственным образом}$$

### Доказательство 2

//todo

### Определение

Нормализованный многочлен  $\phi(t)$  называется аннулятором  $\mathcal{A}$ , если  $\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = 0$  (т.е.  $\phi(\mathcal{A}) = 0$ )

Аннулятор  $\mathcal{A}$  минимальной степени – *минимальный многочлен*

### Теорема о минимальном многочлене

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$



1.  $\forall \mathcal{A} \exists !$  минимальный многочлен
2. Любой аннулятор  $\mathcal{A}$  делится на минимальный многочлен

### Доказательство

(алгоритм)

1.  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

По теореме 1  $\forall e_i \exists ! \psi_i(t)$  – минимальный аннулятор  $e_i$

$$\phi(t) := \text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

Тогда  $\forall j \phi(t) = a_j(t) \psi_j(t)$

Докажем, что  $\phi(t)$  – аннулятор

$$\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^m v_j e_j = \sum_{j=1}^m \phi(\mathcal{A}) v_j e_j = \sum_{j=1}^m a_j(t) \psi_j(t) v_j e_j =$$

$$0$$

Т.о.  $\phi$  – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на  $\phi$

Пусть  $\phi_1(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$\forall v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow \forall j = 1 \dots n \phi_1(\mathcal{A})e_j = 0$  – тогда  $\phi_1(\mathcal{A})$  – аннулятор  $e_j$

Т.к.  $\psi_j(t)$  – минимальный аннулятор  $e_j$ , то  $\phi_1(t)$  делится на  $\psi_i(t)$

Отсюда  $\phi_1(t)$  делится на  $\text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$  Отсюда  $\deg \phi$  – минимальная из возможных, а значит  $\phi$  – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный

Пусть  $\phi_2(t)$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  такой, что  $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$

Тогда  $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$  – степень меньше  $m$

Но тогда  $\delta$  – аннулятор,  $\deg \delta < m$  – противоречие

Отсюда  $\phi_2 = \phi$

### Теорема Кэли-Камильтона

$\forall \mathcal{A} \in V$

$\chi_{\mathcal{A}}$  – аннулятор  $\mathcal{A}$  (т.е.  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$ )

### Доказательство

Пусть  $\mathcal{A} \leftrightarrow A$   
 $e_1, \dots, e_n$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$$

Пусть  $\mu$  не корень  $\chi$

Тогда  $\det(A - \mu E) \neq 0$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (b_{ij} := A_{ji})$$

$b_{ij}$  - многочлен  $n - 1$  степени от  $\mu$

Отсюда  $(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0)$ , где  $B_i$  - матрица  $n \times n$

$$\text{Отсюда } \det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

$$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

$$\text{Отсюда } \alpha_0 E = AB_0$$

$$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$$

$\vdots$

$$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$$

$$\alpha_n E = -B_{n-1}$$

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \dots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = 0$$

**Следствие**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V) \chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}$

**Следствие 2**

$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$

**Теорема (о корнях минимального многочлена)**

Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $\lambda$  - корень  $\chi(t)$

1. Пусть  $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$  - С.Ч.  $\mathcal{A} \Rightarrow \exists v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0$

Отсюда  $\psi(t) = (t - \lambda)$  - минимальный аннулятор элемента  $v$  Т.к.  $\phi$

- минимальный многочлен, то  $\phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$  аннулятор  $v$

Тогда по теореме 1  $\phi$  делится на  $\psi \Rightarrow \lambda$  - корень  $\phi$

2. Пусть  $\lambda \notin K$ , т.е.  $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V \rightarrow \text{базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[V, e]{} A \xleftrightarrow[V_{\mathbb{C}}, v]{} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda - \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda - \text{корень } \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена

$$\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Отсюда  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть  $\lambda$  – корень  $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$  делится на  $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$  – корень  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

**Замечание**

Получаем второй способ получения С.Ч.  $\mathcal{A}$

$$m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

## 1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t), \phi_{\lambda}(t) :=$$

$$\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\deg \phi = m = \sum_{\lambda} m(\lambda)$$

**Определение**

$I_{\lambda} := \{p \in P_{m-1} : p \text{ делится на } \phi_{\lambda}\}$  – главный идеал, порождающий многочлен  $\phi_{\lambda}$

$I_{\lambda}$  – линейное подпространство  $P_{m-1}$

$$I_{\lambda} \ni p(t) = a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$m - 1 \geq \deg p = \deg a_{\lambda} + \deg \phi_{\lambda} = \deg a_{\lambda} + m - m_{\lambda}$$

$$\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$$

$$I_{\lambda} \cong P_{m(\lambda)-1}$$

$$p \leftrightarrow a_{\lambda}$$

$$\dim I_{\lambda} = m(\lambda)$$

**Теорема**

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

## Доказательство

1. Проверим, что  $I_\lambda$  дизъюнкты

$$0 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \underbrace{\phi_{\lambda}(t)}_{\text{не делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} a_{\mu}(t) \phi_{\mu}(t)}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$$

Отсюда  $a_{\lambda}(t)$  делится на  $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ , но  $\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$

Тогда  $a_{\lambda}(t) = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda}(t) \equiv 0 \Rightarrow$  дизъюнкты

2.  $\oplus_{\lambda} I_{\lambda} \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m$

$$\dim \oplus_{\lambda} I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m$$

Отсюда  $P_{m-1} = \oplus_{\lambda} I_{\lambda}$

## Следствие

$$\forall p \in P_{m-1} \exists! (p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$$

В частности, для  $p \equiv 1 \exists! (p_{\lambda}) : p_i \in I_i, 1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$  — полиномиальное

разложение единицы (порожденное многочленом  $\phi$ )

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

## Замечание

1.  $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_{\lambda} p_{\mu}$  делится на  $\phi$

**Доказательство**  $p_{\lambda}(t) = a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t)$

$$p_{\mu}(t) = a_{\mu} \phi_{\mu}(t)$$

$$p_{\lambda}(t) p_{\mu}(t) = a_{\lambda}(t) a_{\mu}(t) \phi_{\lambda}(t) \phi_{\mu}(t) = b(t) \phi(t)$$

2. Пусть все корни  $\phi$  взаимно-простые, т.е.  $\forall \lambda m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\deg a_{\lambda}(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$$

Отсюда  $a_{\lambda}(t) = \text{const}$

## Теорема Лагранжа

Пусть все корни  $\phi(t)$  взаимно простые

$$\text{Т.е. } \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \quad \phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

Тогда  $\forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$

$$(a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$$

**Доказательство**

$$\exists!(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p(t) = \sum_{\lambda} \underbrace{a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t)}_{\phi_{\lambda}(t) \in I_{\lambda}}$$

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = a_{\lambda} \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi_{\lambda}(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu) = (t - \lambda) \underbrace{\prod_{\substack{\mu \neq \lambda \\ \phi_{\lambda}(t)}} (t - \mu)}$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\xi \neq \mu} (t - \xi)$$

$$\phi'(\lambda) = \prod_{\xi \neq \lambda} (\lambda - \xi) = \phi_{\lambda}(\lambda)$$

Отсюда  $a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

**Следствие**

$$\forall \lambda : m(\lambda) = 1$$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow p(t) = t = \sum_{\lambda} t p_{\lambda}$$

**Доказательство**

$$1 = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$$

Пусть  $\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Построим полиномиальное разложение 1, порождающее многочлен  $\phi$

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \underbrace{p_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\rho\text{- спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} \text{ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)}$$

## Спектральный оператор действует не на собственное подпространство

### Свойства

Пусть  $\lambda \neq \mu$

Проверим, что  $\rho_\lambda \rho_\mu = 0$

$$\rho_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$$

$$\rho_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = a_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})$$

$$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = 0$$

Если  $\lambda$  единственный корень  $\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$$

Если все корни взаимно простые:

$$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$$

По следствию из т. Лагранжа:

$$\epsilon = \sum_{\lambda} p_\lambda$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

Далее покажем, что  $p_\lambda$  – проекторы на  $V_\lambda$ , т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с

Т.е.  $\mathcal{A}$  – о.п.с.

### Определение

$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$  называется корневым подпространством  $\mathcal{A}$

$\lambda$  – СЧ  $\mathcal{A}$

Очевидно, что  $V_\lambda \subset K_\lambda$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

### Теорема о корневом подпространстве

1.  $K_\lambda$  – инвариантно относительно  $\mathcal{A}$

2.  $\text{Im } \rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \oplus_\lambda K_\lambda = V)$

3.  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен для  $A \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_1)$

### Доказательство

1.  $x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

$$\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \mathcal{A}x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}x = 0$$

перестановочные, т.к. многочлены

Отсюда  $\mathcal{A}x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{k-1}$$

$$2. \forall x \in V \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A})x \\ (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\text{Im } \rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A})x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A})x}_{\phi(\mathcal{A})=0} =$$

0

Отсюда  $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда  $\text{Im } \rho_\lambda \subset K_\lambda$

**Обратно**

$x \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть  $\mu \neq \lambda$

$$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = 0$$

$$x = \epsilon x = \sum_{\mu} \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \text{Im } \rho_\lambda$$

Отсюда  $K_\lambda \overset{\mu}{\subset} \text{Im } \rho_\lambda$

$$3. \mathcal{B} = \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

Проверим, что  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – минимальный многочлен

$(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  – аннулятор  $\mathcal{B}$

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть  $(t - \lambda)^k$  – минимальный многочлен,  $k < m(\lambda)$

$$\phi_1(t) := (t - \lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg \phi_1 \leq \deg \phi$$

Покажем, что  $\phi_1$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V = \oplus_{\mu} K_{\mu} \quad v = \sum_{\mu} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} - \text{раскладывается единственным об-}$$

разом

$$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum_{\mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_{\mu}}_{\mu \neq \lambda} = \sum_{\mu \neq \lambda} (\mathcal{A} -$$

$$\lambda\epsilon)^k b_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_{\mu} + (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \phi_\lambda(\mathcal{A}) v_{\lambda} = 0$$

Отсюда  $\phi_1$  аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем степени меньшей, чем  $\phi$ , что противоречит минимальности  $\phi$

Отсюда  $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$  минимальный многочлен  $\mathcal{B}$

**Следствие 1**

$\forall \lambda \ m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$  (очевидно из п.3 теоремы)

**Следствие 2**

$\mathcal{A}$  – о.п.с  $\Leftrightarrow \forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$V = \oplus_\lambda V_\lambda$

Пусть  $\phi(t) := \prod_{\lambda - \text{сч}} (t - \lambda)$

Очевидно аннулятор  $\mathcal{A}$ , причем минимальный

$\forall v \in V \ v = \sum_{\lambda} \underbrace{v_\lambda}_{\in V_\lambda}$  – раскладывается единственным образом

$$\phi(\mathcal{A}) = \prod_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \underbrace{v_\mu}_{\in V_\mu = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu\epsilon)} = \prod_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)(\mathcal{A} - \mu\epsilon)v_\mu = 0$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$

$\forall \lambda \ K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^1 = V_\lambda$

Отсюда  $\oplus_\lambda K_\lambda = V = \oplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$  – о.п.с.

## 1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

**Определение**

$\mathcal{B} \in \text{End}(V)$  называется *нильпотентным*, если  $\chi_{\mathcal{B}} = t^\nu, \nu \geq 1$

$\nu$  – индекс нильпотентности ( $\nu \leq n$ )

(Т.е.  $\mathcal{B}^\nu = 0$ )

**Теорема (разложение Жордана)**

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\exists \mathcal{D}$  – оператор простой структуры  $\in \text{End}(V), \mathcal{B}$  нильпотентный  $\in \text{End}(V)$  :

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ , причем  $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$

**Доказательство**

$\phi(t)$  – минимальный многочлен  $\mathcal{A}$  (все корни  $\in K$ )

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$



$$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}$$

Проверим, что  $\mathcal{D}$  – о.п.с.

Достаточно убедиться, что  $\lambda$  – СЧ  $\mathcal{D}$ ,  $\text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$  – собственное подпространство для  $\mathcal{D}$

Пусть  $v_{\lambda} \in \text{Im } \rho_{\lambda}$

$$\mathcal{D}v_{\lambda} = \sum_{\mu} \underbrace{\mu \rho_{\mu} v_{\lambda}}_{\substack{\in \text{Im } \rho_{\lambda} \\ \mu \neq \lambda \Rightarrow \dots = 0}} = \lambda \rho_{\lambda} v_{\lambda} = \lambda v_{\lambda} \Rightarrow \lambda \text{ – СЧ } \mathcal{D}$$

$V = \oplus_{\mu} \text{Im } \rho_{\mu}$  – дизъюнкты Отсюда  $\text{Im } \rho_{\lambda} \subset V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$

$$V = \oplus_{\lambda} \text{Im } \rho_{\lambda} \subset \oplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}} \subset V$$

Отсюда  $\text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$  – о.п.с

$$V = \oplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$D = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$  – спектральное разложение  $\mathcal{D}$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\nu := \max_{\lambda} m(\lambda)$$

Покажем, что  $\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{D})^{\nu} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\mathcal{A} \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \rho_{\lambda})^{\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{\nu} \rho_{\lambda} = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{B}\mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) = (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) = \mathcal{D}\mathcal{B}$$

**Теорема (единственность разложения Жордана)**

Разложение Жордана  $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$  возможно единственным образом

**Доказательство**

Пусть  $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$

$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_{\mu}$  – спектральное разложение

Достаточно доказать, что

1. множество  $\mu$  с.ч.  $\mathcal{D}'$  совпадает с множеством с.ч.  $\mathcal{A}$
2.  $\text{Im } Q_{\lambda} = K_{\lambda} (D = \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}, \text{Im } \rho_{\lambda} = K_{\lambda})$   
 $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$

$$3. \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$$

$$(\mathcal{A} - \mu\epsilon)Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon\right)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

Покажем, что  $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$$\square \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)\mathcal{C}Q_\lambda CQ_\mu = \lambda Q_\lambda CQ_\mu = Q_\lambda C\mu Q_\mu = Q_\lambda D' CQ_\mu - Q_\lambda C D' Q_\mu = Q_\lambda (D' C - C D') Q_\mu = 0$$

Отсюда  $Q_\lambda CQ_\mu = 0 = Q_\mu CQ_\lambda, \lambda \neq \mu$

$$\sum_{\lambda} Q_\lambda CQ_\mu = \sum_{\mu} Q_\lambda CQ_\mu$$

При  $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

Пусть  $m(\mu)$  – минимальное  $k : (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{m(\mu)} = 0$

Такой  $k$  найдется, т.к.  $\mathcal{C}$  нильпотентный и при каком-то  $k$  дает  $= 0$

$$\psi_\mu(t) = (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\forall x \in \text{Im } Q_\mu \quad \psi_\mu(\mathcal{A})x = 0$$

Тогда  $\psi_\mu(\mathcal{A})$  – минимальный аннулятор элементов  $\text{Im } Q_\mu$

$\phi$  – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и  $\text{Im } Q_\mu$

Тогда  $\phi$  делится на  $\psi_\mu$

Тогда  $\forall \mu \quad \mu$  – корень  $\phi$

Рассмотрим  $\prod \psi_\mu(t)$ . Покажем, что это аннулятор  $\mathcal{A}$

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{\mu} \underbrace{v_\mu}_{\in \text{Im } Q_\mu}$$

$$\psi(\mathcal{A})v = \sum_{\xi} \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum_{\xi} b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = 0$$

Отсюда  $\psi$  – аннулятор  $\mathcal{A}$

Тогда  $\psi$  делится на  $\phi$

Т.о.  $\psi \equiv \phi$

Докажем пункт 2

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = 0$$

$$\text{Im } Q_\lambda \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$V = \oplus \text{Im } Q_\lambda \subset \oplus_\lambda K_\lambda = V$$

$$\text{Im } Q_\lambda = K_\lambda = \text{Im } p_\lambda$$

**Теорема 3**

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$  – разложение Жордана

$$\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$$

**Доказательство**

$$\mathcal{D} = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B} = \mathbb{O}^{\nu}, \nu = \max m(\lambda)$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$  – попарно перестановочные

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\text{Im } p_{\lambda} = K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)}$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = (\det \mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu} = \det(\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu}$$

$$t \in K, (\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu} - t^{\nu} \mathcal{B}^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu \epsilon - t \mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-2} t \mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1} \mathcal{B}^{\nu-1})$$

$$\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu \epsilon - t \mathcal{B})}_{\text{не зависит от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-2} t \mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1} \mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$$

$$\text{Отсюда } \det(\mathcal{A} - \mu \epsilon - t \mathcal{B}) \text{ и } \det((\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-2} t \mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1} \mathcal{B}^{\nu-1})$$

не зависит от  $t$

$$\text{Тогда } \det(\mathcal{A} - \mu \epsilon - t \mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu \epsilon - \mathcal{B}) = \det \mathcal{D} - \mu \epsilon$$

$$\det((\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-2} t \mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1} \mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1})$$

$$\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu \epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu \epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$$

$$\text{Отсюда } \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$$

**Следствие 1**

$$\det \mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0) = \det \mathcal{D}$$

**Следствие 2**

$$\dim K_{\lambda} = \alpha(\lambda)$$

**Доказательство**

//todo 16.03 10:25

## 1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис.

### Функция от матрицы

Пусть все корни  $\chi(t) \in K$

$$V = \oplus_{\lambda} K_{\lambda}$$

$$K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)}$$

Построим в каждом  $K_{\lambda}$  такой базис, что матрица оператора в нем будет

иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордано-выми

Пусть  $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть  $K_j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{B}^r = \text{Ker } \mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \text{rg } \mathcal{B}^r + \dim K_r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда  $\text{rg } \mathcal{B}^r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1}$

$\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} \subset \text{Im } \mathcal{B}^r$

Т.о.  $\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \text{Im } \mathcal{B}^r$

Тогда  $\text{Im } \mathcal{B}^r = \text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{B}^m = \mathbb{O}$ , что противоречит минимальности  $m$

Рассмотрим  $K_1 \dots K_m$

Найдем  $j_m$  – компоненту, которая лежит в  $K_m$ , но не лежит в  $K_{m-1}$

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1} \quad j_r := \mathcal{B}j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что  $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \text{Ker } \mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B}j_r$

$\mathcal{B}^{r-1}j_{r-1} = \mathcal{B}^rj_r = \mathbb{O}$

Отсюда  $j_{r-1} \in K_{r-1} = \text{Ker } \mathcal{B}^{r-1}$

$\mathcal{B}j_1 = \mathbb{O}$

$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$  – циклический базис, порожденный вектором  $j_m$

Далее повторяем это для всех векторов  $K_m, K_{m-1}, \dots$

Максимальная длина циклического базиса, порожденного  $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$  – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора(фундамент башни) – вектора  $j_m$

Крыша башни – вектора  $j_1$

Крыша башня – собственное подпространство

Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу

Если  $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$ , то  $V_\lambda = K_\lambda$ , то замок будет состоять из одной башни высоты 1

$K = K_\lambda = \text{span}(\dots, j_1, j_2, \dots, j_m, \dots)$  – линейная оболочка всех векторов всех башен

$$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$$

$$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)j_{r+1}$$

$$\mathcal{A}j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}j_1 &= \lambda j_1 \\ \mathcal{A}j_2 &= j_1 + \lambda j_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}j_m &= j_{m-1} + \lambda j_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана}$$

$m$ -ого порядка (блок нижнего уровня)

Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера  $m$

Рассмотрим теперь блочную матрицу  $\text{diag}(\underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \dots, \underbrace{J_m, \dots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$

– блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству  $K_\lambda$

Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты

Объединим все блоки верхнего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу

Получим жорданов базис пространства  $V$

Матрица  $\mathcal{A}$  в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы

$$T_{e \rightarrow j} = T = (\dots, j_1, \dots, j_m, \dots)$$

$$T^{-1}AT = J$$

$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$

### Обоснование алгоритма

Пусть  $\mathcal{B}K = \text{Im } \mathcal{B}$

$$Z_0 = \mathcal{B}K$$

$$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \dots m$$

$$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$$

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_m$$

$$\overline{K}_1 \subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1$$

$$\begin{aligned}\overline{K}_2 &\subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2 \\ \overline{K}_r &\subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K \\ K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1) \\ \overline{K}_j &- \text{ опорные подпространства}\end{aligned}$$

**Теорема**

$$1 \leq r \leq m$$

$$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$$

**Доказательство**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1)$$

$$\forall x \in K : \exists! (x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \dots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^m \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \text{Ker } \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{B}^r \left( \sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' \right) = \mathbb{O}$$

$$\underbrace{\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x'}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} = \sum_{j=1}^m x_j + \mathcal{B}y'$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности  $\overline{K}_j$  и  $\mathcal{B}K \forall j x_j = \mathbb{O}$   
 $\mathbb{O} + \mathcal{B}^{r+1} = \mathbb{O}$  – дизъюнктность

$$\begin{aligned}K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \\ \mathcal{B}K &= \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K \\ &\vdots \\ \mathcal{B}^{m-1} K &= \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=0}\end{aligned}$$

Отсюда следствие

**Следствие**

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$$

Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & \overline{K}_m & \\
& & & & & \overline{\mathcal{B}}K_m & \\
& & & & & \vdots & \\
& & \ddots & & \ddots & & \\
& & \overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m & \\
\overline{K}_1 & \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m & & 
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \text{Ker } \mathcal{B} = V_\lambda$$

$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset, \text{ то } J_r = \overline{K}_r \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$$

$\overline{K}_r$  – основание башни (опорное пространство, порожденное  $J_r$ )

$$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m \text{ – основание (1 этаж – крыша)}$$

Верхние клетки каждого этажа – основание

$$l\text{-ый этаж: } \overline{K}_l \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$$

$$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \emptyset, j = 0 \dots m-l$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

Первые  $j$  этажей соответствуют  $K_j$

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

**Теорема (о размерности башни)**

Все этажи башни имеют одинаковую размерность  $d_r = \dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \dots r-1$

**Доказательство**

Рассмотрим  $\mathcal{B}^j$  (очевидно, что  $\mathcal{B}^j$  – эндоморфизм)

Докажем, что  $\mathcal{B}^j$  – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е.  $\dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

$$\text{Пусть } x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \emptyset$$

$$\text{Тогда } x \in \text{Ker } \mathcal{B}^j = K^j$$

$$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \dots r-1$$

$$K_1, \dots, K_{r-1} \text{ дизъюнкты с } \overline{K}_r$$

$$\text{Т.о. } x = \emptyset$$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

**Следствие**

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^m d_r$$

$$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum_{r=1}^m r d_r$$

**Следствие 2 (теорема Фробениуса)**

$\forall r = 1 \dots m \ d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$   
(при  $r = m \ d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$ )

**Доказательство**

$$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$$

$$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$$

$$\rho_j = d_{j+1} + \dots + d_m + \rho_{j+1}$$

$$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \dots + d_m$$

$$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$d_1 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

$\vdots$

$$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$$

$$\text{Отсюда } d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$$

**Замечание**

На практике удобнее

$$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$$

Рассмотрим башню

$$\dim \overline{K}_r = d_r = d$$

$$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \dots, g_d)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \mathcal{B} \overline{K}_r & \mathcal{B} g_1 & \mathcal{B} g_2 & \dots & \mathcal{B} g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1} \overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1} g_1 & \mathcal{B}^{r-1} g_2 & \dots & \mathcal{B}^{r-1} g_d \end{array} \quad \mathcal{B}^j - \text{изоморфизм, т.е. базис пе-}$$

реходит в базис

$\mathcal{B}^j g_1 \dots \mathcal{B}^j g_d$  – базис  $\mathcal{B}^j \overline{K}^r$  – циклический базис

Тогда  $J_r = \bigoplus_{i=1}^d \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i)$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda \epsilon) \mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$$

$$\mathcal{A} \left| \begin{array}{c} \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i) \end{array} \right. \leftrightarrow \begin{array}{c} J_r - \text{клетка Жордана размерности } r \times r - \\ \text{в цикл. базисе} \end{array}$$

блок нижнего уровн



$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \Big|_{J_i} &\leftrightarrow \text{diag}(\underbrace{J_r(\lambda), \dots, J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda) \\
\mathcal{A} \Big|_{K=\oplus_{r=1}^m J_r} &\leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda), \dots, \mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda) \\
\mathcal{A} &\leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J} \\
&\text{//todo 13:11 16.03}
\end{aligned}$$

### 1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

$$\exists T(j_1, \dots, j_n), A = T \mathcal{J} T^{-1}$$

Пусть  $\mathcal{J} = \text{diag}(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$  Тогда  $\mathcal{J}^k = \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$$A^k = T \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k) T^{-1}$$

$$f(A) = T \text{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)), \dots, f(\mathcal{J}(\lambda_n))) T^{-1}$$

$$\begin{aligned}
J_r &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r \times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
I_r^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

$$\begin{aligned}
\text{Отсюда } J_r^k &= (\lambda E_{r \times r} + I_r)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + \\
&C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

//todo 23.03 10:27

## 2 Черная магия

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{Отсюда } (\ln |y|)' = \frac{y'}{y}$$

$$y' = y(\ln |y|)' \text{ (удобно)}$$

## 3 Тензоры

### 3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

$V$  – линейное пространство над  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

#### Определение

Линейная функция  $f : V \rightarrow K$  называется *линейной формой* (линейным функционалом)

Т.е.  $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$

#### Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор

2.  $A_{n \times n}, f : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$   
 $f(A) = \text{tr } A$

3.  $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$

Пусть  $f^j = P_n \rightarrow \mathbb{R}, f^j(p) = \frac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$

Тогда  $f^0, f^1, \dots$  – линейная форма

4.  $f : \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \delta(f) := f(0) - \delta\text{-функция Дирака}$   
 $\delta(f)$  – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$

$V^* = \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ – линейная форма}\}$

$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$

$\forall f \in V^* \quad -f \in V^*$

Тогда  $V^*$  – линейное пространство над полем  $K$

$V^*$  – сопряженное (дуальное) к  $V$

Вспоминаем правило Эйнштейна

Выражение  $\alpha^i \beta_i := \sum_i \alpha_i \beta_i$

иначе:  $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$

$\forall x \in V \quad f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$

$a := f(e_i)$  называется коэффициентами линейной формы  $f$

Тогда  $f(x) = x^i a_i - f$  полностью описывается значениями на базисных элементах

Тогда  $f \leftrightarrow a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$  – зависит от выбора базиса

Сопоставление – изоморфизм

**Факт**

*Естественный изоморфизм* – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай

$V^* \cong K_n(K^n)$  – пространство  $n$ -мерных строк

**Определение**

$$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$$

$\forall x \in V \omega^i(x) = x_i$  – координатные функции

(очевидно, что  $\omega^i \in V^*$ ,  $\omega^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$ )

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = + (i == j) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

**Доказательство**

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – линейно независимые

$$\alpha_i \omega^i = 0$$

$$\alpha_i \in K$$

$$j = 1 \dots n \quad \alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

$$\dim V^* = n \Rightarrow \text{базис}$$

**Следствие**

$a_i$  – координаты  $f$  в базисе  $\omega^1 \dots \omega^n$

**Доказательство**

$$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$$

**Определение**

$\omega = (\omega^1 \dots \omega^n)$  называется *сопряженным (дуальным)* базисом к базису  $e$  пространства  $V$

Вопрос: есть другой базис в  $V^*$ . Будет ли он сопряженным к некоторому базису  $V$

**Теорема**

$\omega^1, \dots, \omega^m$  – базис  $V^*$

Тогда  $\exists e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$  такой, что  $\omega'$  сопряжен с  $e'$

**Доказательство**

Пусть  $e'_1, \dots, e'_n$  – базис в  $V$

Базис  $V$   $\omega^1, \dots, \omega^n$  сопряжен с  $e$

$$\omega^1, \dots, \omega^m \text{ – базис } V^* \Rightarrow (\omega^1 \dots \omega^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix} = \underbrace{T_{\omega \rightarrow \omega'}^T}_{=: S_{\omega \rightarrow \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис  $e'$

$$T_{e \rightarrow e'} = S^{-1} = T$$

$$(e'_1 \dots e'_n) := (e_1 \dots e_n) T \text{ – тоже базис по определению}$$

Покажем, что  $\omega'$  сопряжен к  $e'$ , т.е.  $\omega'^i$  – координатные функции по от-

ношению к  $e'$

Пусть  $s_j^i = s_{ij}, t_j^i = t_{ij}$

$$\forall x \in V \quad \omega'^i(x) = s_k^i \omega^k(x) = s_k^i x^k = \underbrace{s_k^i t_j^k}_{(ST)_{j= \delta_j^i}^i} x'^j = x'^i$$

Отсюда  $\omega'^i$  – координатная функция  $\Rightarrow$  базис сопряженный

### Замечание

Вообще говоря, базис  $e'$  существует и единственный (очевидно из доказательства) **Следствие**

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$$

Тогда  $a' = aT$

$$T = S^{-1} = T_{e \rightarrow e'}$$

$$x' = Sx$$

### Доказательство

$$X' = SX \text{ очевидно } (X = TX' = S^{-1}X')$$

$$(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$a^T = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T (a')^T \quad a = a' T_{\omega \rightarrow \omega'}^T = a' S \Leftrightarrow a' = a S^{-1} a T$$

### Определение

Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону (т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным (согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*

Элементы  $V^*$  – это ковекторы (линейная форма  $\equiv$  ковектор)

В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, противоположному (т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контровариантным* или просто вектором

Элементы  $V$  – контрвариантные векторы

Принято писать индекс координаты контрвектора сверху, а ковариантного – снизу

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = x' i a'_i = s_k^i x^k a_m t_i^m = \underbrace{t_i^m s_k^i}_{\delta_k^m} x^k a_m = x^k a_k$$

Т.о. форма записи  $f$  – инвариант относительно замены базиса

### Определение

$$V^{**} = (V^*)^*$$

$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$  – можем построить изоморфизм между  $V$  и  $V^{**}$

### Теорема 3 (естественный изоморфизм $V$ и $V^{**}$ )

Вместо обозначения " $x$ " буду использовать  $\langle x \rangle$

$$\forall x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$$

$$\forall f \in V^* \quad \langle x \rangle (f) = f(x)$$

Отсюда  $x \leftrightarrow \langle x \rangle$

$$V \cong V^{**}$$

### Доказательство

$$\forall f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K \quad \langle x \rangle (f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = \langle x \rangle (f_1) + \lambda \langle x \rangle (f_2)$$

Отсюда  $\langle x \rangle \in (V^*)^*$

Покажем, что  $V$  линейно вложено в  $V^{**}$ , т.е.  $x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$

//todo 12:00 23.03

Покажем, что базис  $V$   $e_1, \dots, e_n$  перейдет в базис  $V^{**}$

$$e_j \rightarrow \langle e_j \rangle$$

$\forall f \in V^* \quad \langle e_j \rangle (f) = f(e_j) = a_j$  – координата  $f$  в базисе  $\omega^1, \dots, \omega_n$ , сопр. с  $e$

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – координатная функция в пространстве  $V^*$  относительно  $\omega^1, \dots, \omega_n$

Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства

Т.о.  $\langle e_j \rangle$  – базис  $V^{**}$

Базис  $V$   $e_1, \dots, e_n \rightarrow$  базис  $V^{**}$   $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$

Т.о. отображение линейно, то изоморфизм

### Замечание

1. принято отождествлять элементы  $V$  и  $V^{**}$  с помощью изоморфизма, описанного в теореме 3

Поэтому  $\langle \rangle$  не пишут

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = a_i x^i = f(e_i) x^i = e_i(f) x^i = x(f)$$

$$a_i = f(e_i)$$

$$x^i = x(\omega^i)$$

$$2. \omega^i(e_j) = \delta_j^i = e_j(\omega^i)$$

Как найти на практике?

$e_1, \dots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$  – столбцы

$$\omega^i(e_j) = \underbrace{(\dots)}_a \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_x = \delta_j^i$$

$$\text{Отсюда } \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}}_{S=T^{-1}} \underbrace{(e_1 \dots e_n)}_T = E$$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса дуальны

$\omega$  сопряженный базис к  $e$

$e$  сопряженный базис к  $\omega$

(здесь подразумевается элементы  $V^{**}$ )

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$

$$\forall x \in V \exists! x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}, x_{\lambda} \in V_{\lambda}$$

$$\rho_{\lambda} : V \rightarrow V, \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}, \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} = \epsilon$$

$$\forall x \in V \rho x := x_{\lambda}, \underbrace{\rho_{\lambda} \rho_{\mu}}_{\lambda \neq \mu} = 0$$

$v_1, \dots, v_n$  – базис  $V$  = объединение базисов  $V_{\lambda}$

$$x = x^i v_i = \sum_{\lambda} \underbrace{\sum_{m_{\lambda}} x^{m_{\lambda}} v_{m_{\lambda}}}_{x_{\lambda}} = \omega^1, \dots, \omega^n \text{ – сопряженный базис} =$$

$$\sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} \omega^{m_{\lambda}}(x) v_{m_{\lambda}}$$

$$\omega^{m_{\lambda}} \leftrightarrow (a_i^{m_{\lambda}})_i \text{ – строка}$$

$$x \leftrightarrow X$$

$$\omega^{m_{\lambda}}(x) = a^{m_{\lambda}} X$$

$$v_{m_{\lambda}} \leftrightarrow (V_{m_{\lambda}, i})_i \text{ – столбец}$$

$$x = \sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \underbrace{\left( \sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} \right)}_{\rho_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \left( \sum_{m_{\lambda}} \underbrace{(a^{m_{\lambda}} x)}_{\omega^{m_{\lambda}}(x)} V_{m_{\lambda}} \right)$$

### 3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

#### Определение

$V, V^*$  – сопряженные линейные пространства над полем  $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K, p, q \geq 0$  – линейная по каждому аргументу

$f$  – тензор порядка  $(p, q)$  или  $p$  раз ковариантом,  $q$  раз контрвариантным

Множество таких функций обозначим  $T_{(p,q)}$

$p, q$  – валентности

$r = p + q$  – полная валентность/ранг тензора (не наш rg)

$f \in T_{p,0}$  – ковариантный тензор валентности  $p$

$f \in T_{0,q}$  – контрвариантный тензор валентности  $q$

$r = 0$  – тензор нулевого ранга.  $f = \text{const} \in K$

#### Пример

$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_{V}$  – столбец

$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$  – строка

$f(x, a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1,1)}$

$\mathbb{O}$  – нулевой тензор

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \nu^1, \dots, \nu^p \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^p) = 0$

$\forall f \in T_{(p,q)} \quad - f \in T_{(p,q)}$

$T_{(p,q)}$  – линейное пространство

$e_1, \dots, e_n$  – базис  $V$

$\omega^1, \dots, \omega^n$  – базис  $V^*$

$e, \omega$  – сопряженные

Для  $\xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i$

Для  $\nu \in V^* \quad \nu = \nu_i \omega^i$

Тогда  $f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_q})$

$= \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^1, \dots, \omega^{i_q})$  – любой тензор определяется



значениями на всевозможных наборах  $e_j, \omega^i$

$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$  – коэффициенты тензора  $f$  относительно базисов  $e, \omega$

$$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$$

### Определение

$S$  – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов  $s_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ , где  $i_k, j_m \in (1, \dots, n)$  называется  $p + q$ -мерной матрицей порядка  $n$

### Пример

$n = 3$ , трехмерная матрица

$$1. S^{ijk}$$

$$2. S_k^{ij}$$

$$3. S_{jk}^i$$

$$4. S_{ijk}$$

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q})$  – изоморфизм

$$T_{(p,q)} \cong S_{(p+q)}$$

### Правило записи элементов тензора в многомерной записи

В  $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$  сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы

Для двумерных матриц:

1. строка

2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка

2. столбец

3. слой

$$\text{Запись: } \left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

Для четырехмерных матриц:

1. строка

2. столбец

3. слой

4. срез

Запись:

$$\left( \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$