Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

1 Линейное отображение

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть V, U - линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Определение
$\mathcal{A} : U \to V$ – *линейное отображение*, если $\forall \lambda \ \in K, u_1, u_2 \in U \ \mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$
Замечания

1. Обозначение: $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$ поточечно определены $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda\mathcal{A}u$

Примеры

1. $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2. $\epsilon v = v$
3. $V, U = P_n$ – множество многочленов степени $\leq n, A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ – дифференциальный оператор
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$ – матрица
   $\mathcal{A}u = B \cdot u$

Определение
$L(U,V) = \mathrm{Hom}_K(U,V) = \mathrm{Hom}(U,V)$ – множество всех линейных отображений $U \to V$
Определим операции
$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A}+\mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$
$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$
$L(U,V)$ – линейное пространство

Определение
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$ – образ линейного отображения
Замечание
$\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset V$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – конечномерное, то $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} =: \operatorname{rg}\mathcal{A}$
Определение
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$ – ядро линейного отображения (прообраз $\mathbb{0}_V$)
Замечание
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \varnothing$
$\mathbb{0}_U \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset U$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ конечномерно, то $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{def}\mathcal{A}$
Замечание 2
Изоморфизм – частный случай линейного отображения
$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U,V) \\ \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbb{0}_U (\text{тривиально}) \end{cases}$$
Следствие
Если U, V – конечномерные
$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U,V) \\ \operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim V \\ \operatorname{def}\mathcal{A} = 0 \end{cases}$$
Определение
$\mathcal{A} \in L(U,V)$

- $\mathcal{A}$ сюръективное $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$ инъективное $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$ биективно $\Leftrightarrow$ сюръективно + инъективно $\Leftrightarrow$ изоморфизм

- $\mathcal{A}$ эндоморфизм $\Leftrightarrow$ линейный оператор $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in L(V,V)$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_K(V)$

- $\mathcal{A}$ автоморфизм $\Leftrightarrow$ эндоморфизм + изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \operatorname{Aut}_K(V)$

Примеры

1. $\mathbb{0} \in L(U,V)$
2. $\epsilon \in \operatorname{Aut}(V)$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$ – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m\times n}$ – матрица
   Определение
   $\operatorname{Im} A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ – образ матрицы
   $\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbb{0}\}$ – ядро матрицы
   $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker} A$ – дефект матрицы
   $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A$ – согласуется со старыми определениями ранга матрицы
   Доказательство
   Для $y \in \operatorname{Im} A$
   $y = Ax = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$
   $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$
   $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A$
   Утверждение
   $\operatorname{Ker} A$ - множество решений $Ax = 0$
   Тогда $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rg} A$

   Отображение $u = Av$:

   (a) Сюръекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$
   (b) Инъекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
   (c) Биекция $\Leftrightarrow n = m = \operatorname{rg} A$
   (d) Эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m$
   (e) Автоморфизм $n = m = \operatorname{rg} A$

Определение
$\mathcal{AB} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – композиция
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – линейное отображение
Свойства

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{B}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$ – дистрибутивность

2. $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{AB}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$ – однородность

3. $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = \mathcal{ABC}$ – ассоциативность

4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – изоморфизм $\Rightarrow \mathcal{AB}$ – изоморфизм

Определение
Пусть $\mathcal{A} \in L(U, V)$ – изоморфизм
$\forall\, v \in V \ \exists !u : \ \mathcal{A}u = v$
Тогда зададим $\mathcal{A}^{-1}v = u$
$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$
$\mathcal{A}^{-1}$ – изоморфизм, обратный к $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$
$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$
Замечание
$\mathrm{End}(V)$ - ассициативная унитарная алгебра
$\mathrm{Aut}(V)$ - ассоциативная унитарная алгебра с делением
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$ – линейное подпространство
Тогда $\mathcal{A}_0 : U_0 \to V$ называется сужением на линейное подпространство U_0, если $\forall\, u \in U_0 \ \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$
Очевидно $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$
$A_0 =: A|_{U_0}$
Утверждение
A изоморфизм $\Rightarrow A_0$ изоморфизм $\in L(U_0, \operatorname{Im}\mathcal{A}_0)$
Доказательство
$\mathcal{A}_0 : U_0 \to \operatorname{Im}\mathcal{A}_0$ – сюръекция
$\operatorname{Ker}\mathcal{A}_0 \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$ – из изоморфизма
Отсюда $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_0 = \{\mathbb{0}_U\}$
Тогда $\mathcal{A}_0$ инъекция, а значит изоморфизм
Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

U, V – конечномерные
$A \in L(U, V)$
Тогда $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$
Доказательство
$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$
Дополним U_0 до U: $U = U_0 \oplus U_1$
Пусть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\forall\, u \in U \;\; u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$ – единственным образом
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$
Отсюда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
Покажем, что $\mathcal{A}_1$ изоморфизм:
Сюръекция, т.к. действует в $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$
Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ из дизъюнктности
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ – тривиально
Тогда $\mathcal{A}_1$ инъективно
Отсюда $\mathcal{A}_1$ изоморфизм, т.е. $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
Тогда $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$, ч.т.д.

1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные U, V

Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\xi_1, \ldots, \xi_n$ – базис U
$\nu_1, \ldots, \nu_m$ – базис V

$$\forall\, u \in U \;\; u = \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\forall\, v \in V \;\; v = \sum_{i=1}^{m} v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$\forall\, v \in \operatorname{Im} \mathcal{A}\ v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$

$\mathcal{A}$, как линейное отображение, полностью определяется значениями $\mathcal{A}$ на базисных векторах

$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

$A = (A_1 \ldots A_n)$ - матрица линейного отображения в базисах (ξ, ν)

Если $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(v)$ – линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадаю

$v = \sum_{j=1}^{m} v_j \nu_j$

$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}u_i)\nu_j$

Т.к. координаты введены единственным образом, то $\forall\, j\ v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}u_i \Leftrightarrow$

$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$

Примеры

1. $\epsilon : \underset{e_1 \ldots e_n}{V} \to \underset{e_1 \ldots e_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow E$

2. $\epsilon : \underset{\xi_1 \ldots \xi_n}{V} \to \underset{\nu_1 \ldots \nu_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow T_{\nu \to \xi} = T_{e \to e'}$

Утверждение

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$ – пространство всех матриц $A_{m \times n}, \dim U = n, \dim V = m$ (при фиксированных базисах U, V)

Доказательство

Соответствие между $\mathcal{A}$ и A взаимооднозначное

Докажем линейность

$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda\mathcal{B}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j + \lambda \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\nu_j = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} + \lambda b_{ji})\nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$

Утверждение

$\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$

Доказательство

$\underset{\xi_1\dots\xi_n}{U} \underset{\mathcal{B}}{\to} \underset{\theta_1\dots\theta_r}{W} \underset{\mathcal{A}}{\to} \underset{\nu_1\dots\nu_m}{V}$ $(\mathcal{A}\mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{r} b_{ki}\theta_k) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\mathcal{A}_{\theta_k} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\nu_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki})\nu_i = \sum_{j=1}^{m} AB_{jk}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

Утверждение

A изоморфно $\Rightarrow A_0$ изоморфно

Доказательство

$A_0 : U_0 \to \operatorname{Im} \mathcal{A}_0$ – сюръекция

$\operatorname{Ker} A_0 \subset \operatorname{Ker} A = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда $\operatorname{Ker} A_0 = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда A_0 - инъективно, а значит изоморфизм

Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\nu'}{V} \leftrightarrow A'$

$T_{\xi\to\xi'}T_{\nu\to\nu'}$ – матрицы перехода

Тогда $A' = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Доказательство

Пусть $\xi_U : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\xi}{U}$,

$\xi_V : \underset{\nu}{V} \to \underset{\nu'}{V}$ $\mathcal{A} = \xi_v\mathcal{A}\xi_u$

$A = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Следствие

$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

$\mathcal{A} : \underset{e}{V} \to \underset{e}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{e'}{V} \to \underset{e'}{V} \leftrightarrow A'$

$A' = T_{e'\to e}AT_{e\to e'}$

$//$todo 2

Определение

Матрицы $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ *подобны*, если $\exists C$ невырожденная: $A = C^{-1}BC$

A и A' – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны

Утверждение

$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$

Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Ker} A$
$\operatorname{Im}\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Im} A$
Доказательство
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{Im} A$ $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A} = 0\}$
$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$
Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker} A$

1.3 Инвариантность линейного отображения

Определение
Инвариантностью/инвариантном называется свойство, которое не меняется при определенного рода преобразованиях
Теорема 1
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\operatorname{rg} A$ и $\operatorname{def} A$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$, не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса
Доказательство
$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$

$\operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{rg} A$
$\operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{A} = n = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A \Rightarrow \operatorname{def}\mathcal{A} = \operatorname{def} A$
Следствие
$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$

Определение
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
$e_1, \dots, e_n$ – базис V
Тогда $\det\mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$ – определитель системы векторов в базисе $e_1, \dots, e_n$
Теорема 2
Значение $\det\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ (т.е. является инвариантом), причем $\det\mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора в некотором базисе
Доказательство
Выберем базис $e_1, \dots, e_n$

Тогда $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{n\times n}$

$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det(\sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1}, \dots, \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}e_{i_n}) =$

$\sum\limits_{i_1=1}^{n} \dots \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) =$

$\sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в $e'_1, \dots e'_n$ – базисе V – это тоже верно

$\mathcal{A} \underset{e'}{\leftrightarrow} A'$

$\det \mathcal{A} = \det A'$

$T = T_{e\to e'}$

$A' = T^{-1}AT$

Тогда $\det A' = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$

Следствие

$\forall\, f$ – n-форма на V

$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_n \in V \;\; f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Доказательство

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

g – n-форма, т.к. f – n-форма

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n)$ (см. доказательство теоремы)

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) =$
$\det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Следствие 2

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$

Следствие 3

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$

Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$

$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$

Доказательство

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$

$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$

Примеры

1. В V_3
   $f(a,b,c) = (a,b,c) =$ ориентированный объем $= \det(a,b,c)$
   $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det\mathcal{A}\det(a,b,c)$
   $\lambda = \det\mathcal{A}$ – коэффициент пропорциональности объемов

   (a) $\mathcal{A}v = \mu v$ – оператор подобия
   Тогда $\lambda = \mu^3$

   (b) Поворот
   Пусть i, j, k перешли в e_1, e_2, e_3 поворотом
   Тогда $e_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{pmatrix}$
   Тогда $\mathcal{A} \underset{ijk}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$ – матрица поворота
   $f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a,b,c)$
   $\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1$ – смешанное произведение
   Отсюда при повороте объем сохраняется

Определение
$A_{n\times n}$
$\operatorname{tr} A := \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ – след матрицы
Теорема 3
Если матрицы подобные, то $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$
Доказательство
A, B – подобные $\Rightarrow \exists$ невырожденная $C : A = C^{-1}BC = SBC$
$\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_{ik}(BC)_{ki} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_{ik}\sum\limits_{m=1}^{n} B_{km}C_{ki} = \sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} B_{km}\sum\limits_{i=1}^{n} C_{mi}S_{ik} =$
$\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} B_{km}E_{mk} = \sum\limits_{k=1}^{n} B_{kk} = \operatorname{tr} B$
Следствие
A и A' матрицы $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ в разных базисах

Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$(из формулы перехода)

Определение

$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$, где A – матрица $\mathcal{A}$ в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

Определение

$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

L называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если $\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$

Если L – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве

Примеры

1. $\mathbb{0}, V$

2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$

3. $\mathcal{A}$ – вращение пространства вокруг оси l на фиксированный угол
   Тогда $l, L \perp l$ – инвариантное пространство (L – плоскость)
   Линейные многообразия $P = x_0 + L$ – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

Теорема 4

$L \subset V$ – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда $\exists$ базис V такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ \mathbb{0} & A^3 \end{pmatrix}$, где $A^1_{k\times k}, k = \dim L$

Доказательство

Пусть L – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A}$

$\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$

Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис L

Дополним его до базиса V:

$V = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j\in 1\dots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{k_j} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что A имеет ожидаемый вид

Следствие 1

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$, где $A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$

Доказательство

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L

$e_{k+1}, \ldots, e_n$ – базис n

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in 1\ldots k} \in L \leftrightarrow \begin{pmatrix} A^1_j \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in k+1\ldots n} \in L \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A^2_{j-k} \end{pmatrix}$

Следствие 2

$V = \oplus_{i=1}^m L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид(аналогично предыдущему следствию)

Пусть $A|_{L_j} : L_j \to L_j$ (эндоморфизм)

Тогда $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_i$

Следствие 3

$V = \oplus_{i=1}^m L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

$\mathcal{A}_i = \mathcal{A} : L_i \to V$

Тогда $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^m \mathrm{Im}\,\mathcal{A}^j$

Доказательство

$V = \oplus_{i=1}^m L_i$

$\forall\, x \in V\ \exists!x_1 \in L_1, \ldots, x_m \in L_m :\ x = \sum_{i=1}^m x_i$

$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}x_i$

$\mathcal{A}x_i \in \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_i$

Отсюда $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_i$

Доказжем дизъюнктность

Пусть $y_i \in \operatorname{Im} \mathcal{A}_i$
Тогда $\exists\, x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$
$y_1 + \ldots + y_m = \mathbb{0} \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \ldots + \mathcal{A}x_m = \mathbb{0}$
$\mathcal{A}x_i \in L_i$, т.к. L_i – инвариант
Т.к. $L_1 \ldots L_m$ – дизъюнктны, то $\mathcal{A}x_i = \mathbb{0}$
Отсюда $y_i = \mathbb{0}$
Отсюда $\operatorname{Im} \mathcal{A}_i$ дизъюнктны

1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

V – линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Определение
$\lambda \in K$ – *собственное число* $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, если $\exists\, v \neq \mathbb{0} \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$
v – собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ

Отсюда v – СВ $\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$
$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)$ = множество всех СВ $\mathcal{A}$, отвечающих $\lambda \cup \{\mathbb{0}\}$ – собственное подпространство $\mathcal{A}$, отвечающее λ
$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность числа λ
$V_\lambda, \gamma_\lambda$ – инвариантны относительно оператора $\mathcal{A} - \lambda\varepsilon$ и выбора базиса
Примеры

1. Оператор подобия:
   $\forall\, v \in V \ \mathcal{A}v := \lambda v$
   У него λ – собственное число, $V = V_x$
   $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$
2. $\mathcal{A}$ – поворот на плоскости относительно начала координат на угол $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
3. $\lambda = 0$ – собственное число $\mathcal{A}$
   $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\mathbb{0}\}$
   $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – не изоморфизм
   $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = \mathbb{0}$

4. $v_1, \dots, v_n$ – базис V, где v_j – СВ $\mathcal{A}$ для стационарного числа λ_j

Научимся находить СЧ и СВ
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \operatorname{tr} A + \ldots + \det A$ – характеристический могочлен $\mathcal{A}(A)$ λ – СЧ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$
Из основной теоремы алгебры $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ имеет ровно n корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)
Если $\lambda_{i \in 1 \dots n}$ – корни, то $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ (т.к. свободный член χ)
Т.о. $\det A = 0 \leftrightarrow \exists\, \lambda_i = 0$
Также из теоремы Виета $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda \text{ – корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$, где $\alpha(\lambda)$ – алгебраическая кратность СЧ λ (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в $\mathbb{R}^2$ на $\alpha \in (-\pi, \pi)$
Найдем характеристический многочлен:
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 2t\cos\alpha + t^2 + \sin^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$
Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ
$\det A = 1, \operatorname{tr} A = 2\cos\alpha$

Теорема 1
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \lambda$ – СЧ $1 \le \gamma(\lambda) \le \alpha(\lambda)$
Доказательство
$1 \le \gamma(\lambda)$ очевидно, т.к. $\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda = \gamma$
Пусть $v_1, \dots, v_\gamma$ – базис V_λ
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис V_λ такой, что A имеет ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$
Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t)\chi_{A^2}(t)$
Пусть $v_1, \dots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n$ – наш базис
Т.к. $\mathcal{A} v_{j \in 1 \dots \gamma} = \lambda v_j$, то $A^1 = \lambda E_{\gamma \times \gamma}$
$\chi_{A_1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$
$\chi_A(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \ge \gamma$, т.к. возможо λ – корень $\chi_{A_2}(t)$
Определение

Набор СЧ $\mathcal{A}$ с учетом кратности является спектном оператора $\mathcal{A}$
Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е. $\forall \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = 1$

Теорема 2

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
$v_1, \ldots, v_m$ – соответствующие СВ
Тогда $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимые

Доказательство

Методом математической индукции:

1. $m = 1$ – очевидно (т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$)

2. Пусть верно для m
   Докажем для $m + 1$ от противного
   Пусть $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j \in 1 \ldots m}, v_{m+1}$ – соответсвует λ_{m+1}
   Пусть $v_1, \ldots, v_{m+1}$ линейно зависимые
   Тогда $v_{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$
   //todo

Следствие 1

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
Тогда $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ – дизъюнктные

Доказательство

$v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0}, v_i \in V_{\lambda_i}$
Пусть $v_i \neq \mathbb{0}$, то v_i - СВ для λ_i (т.к. $v_i \in V_{\lambda_i}$)
Тогда линейная комбинация СВ $= \mathbb{0}$, чего не может быть из теоремы
Тогда $v_i = \mathbb{0}$, откуда дизъюнктность

Следствие 2

Пусть $V = \oplus_{\lambda \text{ – СЧ}} V_\lambda$
$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \mathrm{End}(V_\lambda)$
Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$

Доказательство

$V = \oplus_{\lambda \text{ – СЧ}} V_\lambda$
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис такой, что $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \ldots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \ldots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$
$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$
Тогда $V = \text{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}), \dots)$, где $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k})$ – базис V_{λ_k}
Тогда базис V – объединение базисов
Отсюда $\chi_A(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагонализируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

Определение
$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ называется оператором простой структуры, если существует базис V такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид
$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Замечание
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow$ в V существует базис из СВ
Теорема
Если все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$, т.е. являются СЧ (т.е. $\sum\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \alpha(\lambda) = n = \deg \chi_{\mathcal{A}}(t)$)
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \forall\, \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$
Доказательство
$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \exists$ базис из СВ $\Leftrightarrow\ = \oplus_{\lambda \text{ – СЧ}} V_\lambda \Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \gamma(\lambda)$
Отсюда $n = \sum\limits_{\lambda \text{ – СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$
Следствие
Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ - ОПС
Определение
Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной
$\exists\, T$ невырожденная : $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$ – СВ
Теорема о приведении матрицы к диагональному виду
Матрица A диагонализируема $\Leftrightarrow A$ – матрица ОПС $\mathcal{A}$ в некотором базисе
Причем $T = T_{e \to v}$, где $e_1, \dots, e_n$ – базис, в котором была записана $A, v_1, \dots, v_n$

– базис из СВ $\mathcal{A}$, соответствующих $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
Доказательство $\Leftarrow$
$\mathcal{A}$ – ОПС
$e_1, \ldots, e_n$ – базис V $v_1, \ldots, v_n$ – СВ, соответствующие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – СЧ, базис V
$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$ $\mathcal{A} \underset{v}{\leftrightarrow} A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$T = T_{e \to v}$
$A' = T^{-1}AT$
Отсюда A подобна диагональной
Доказательство $\Rightarrow$
$//$todo
Определение
Пусть $V = \oplus_{i=1}^m L_i, L_i$ – линейное подпространство
Тогда $\forall\, v \in V \exists\, !v_1, \ldots v_m : v_i \in L_i, v = \displaystyle\sum_{i=1}^m v_i$
Зададим $\rho_i \in \operatorname{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$
ρ_i – *оператор проектирования(проектор)* на L_i
Свойства:

1. $\forall\, i \neq j\ \rho_i \rho_j = \mathbb{0}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^m \rho_i = \epsilon$
3. $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$ – идемпотентность
4. $\operatorname{Im} \rho_i = L_i$
   $\operatorname{Ker} \rho_i = \displaystyle\sum_{j \neq i} L_j$

Утверждение
Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющие свойствам 1 и 2
Тогда $V = \oplus_{i=1}^m \operatorname{Im} \rho_i$ (т.е. ρ – проектор на $L_i = \operatorname{Im} \rho_i$)
Доказательство
Докажем $1, 2 \Rightarrow 3$
$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \displaystyle\sum_{i=1}^m \rho_j = \rho_i^2$
Докажем, что $V = \oplus_{i=1}^m \operatorname{Im} \rho_i$

$\forall\, v \in V\;\; v = \epsilon v = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i v \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} \rho_i$
Докажем дизъюнктность
$\mathbb{0} = v_1(\in \operatorname{Im} \rho_1) + \ldots + v_m(\in \operatorname{Im} \rho_m)$
$\forall\, i = 1 \ldots m\;\; v_i = \rho_i \omega_i (\exists\, \omega_i \in V)$
$v_i = \rho_i \omega_i =$ из свойства $3 = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_j \omega_j) = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} v_j) = \rho_i \mathbb{0} = \mathbb{0}$, ч.т.д.

Теорема о спектральном разложении о.п.с.
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ – о.п.с.
Тогда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda\text{ – С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$, где ρ_λ – проектор на V_λ

Доказательство
Обозначение: Пусть все λ – С.Ч. $\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow V = \oplus_\lambda V_\lambda$
$v = \sum\limits_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\forall\, v \in V\;\; \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum\limits_{\lambda} v_\lambda) = \sum\limits_{\lambda}(\mathcal{A}v) = \sum\limits_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda(v) = (\sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) v$
Отсюда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$ – *спектральное разложение*

Следствие
A – диагонализируема $\Rightarrow \exists\, \rho_\lambda, \lambda$ – С.Ч. $A : A = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

Определение
$(A_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность матриц $A_{n\times n} = (a_{ij}^m)_{n\times n}, m$ – индекс, а не степень
$\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A = (a_{ij})_{n\times n} \Leftrightarrow \forall\, i,j = 1 \ldots n\;\; a_{ij} = \lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^m$

Немного про ряды
$\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ – числовой ряд $(a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C}))$
$S_m = \sum\limits_{i=1}^{m} a_k$ – частичная сумма ряда
Если S_m сходится, то ряд называется сходящимся

Определение
$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ – ряд из матриц

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \text{ – сходится} \Leftrightarrow \forall\, i, j = 1 \ldots n \ \sum_{m=1}^{\infty} a_{ij}^m \text{ – сходится}$$

Далее про ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функциональный ряд

При фиксированном x – числовой ряд

Множество x таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда $= E$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m$ – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$, где R – радиус сходимости

В $\mathbb{C}$ – круг сходимости

В $\mathbb{R}$ – интервал сходимости

Для $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}$, сходится при $|x - x_0| \leq \infty$

$\sin x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, сходится при $|x| \leq \infty$

На окружности (при $|x - x_0| = R$) ряд может как сходиться, так и расходиться

Определение

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда $f(A) := \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$ (если ряд сходится)

Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = T\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$, где $\Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Теорема

$A_{n\times n}$ диагонализируема, а значит $\exists\, T : \Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k, R = \infty$

$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1} = T\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)T^{-1}$

Отсюда $S_m = T\operatorname{diag}(\sum\limits_{k=0}^{m} C_k\lambda_1^k, \dots, \sum\limits_{k=0}^{m} C_k\lambda_n^k)T^{-1}$ (т.к. $R = \infty$, то все ряды сойдутся)

$S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = T\operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))T^{-1}$

Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \le R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = \sum\limits_{\lambda-\text{ СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$, где $A = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \lambda\rho_\lambda$ – спектральное разложение

Доказательство

A – диагонализируема $\Rightarrow A = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \lambda\rho_\lambda$

Тогда $A^k = (\sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \lambda\rho_\lambda)^k = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \lambda^k\rho_\lambda$

Отсюда $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \lambda^k\rho_\lambda = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} (\sum\limits_{k=0}^{m} C_k\lambda^k)\rho_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$

Следствие

A – диагонализируема, $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall\, \lambda$ – СЧ $|t\lambda| < R$

Тогда $f(At) = T\operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \dots, f(\lambda_n t))T^{-1}$

или $f(At) = \sum\limits_{\lambda-\text{ СЧ}} f(\lambda t)\rho_\lambda$

Пример

$\exp At = e^{At} = \sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda = T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})T^{-1}$

Свойства

1. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$
2. $e^{A0} = E$
3. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$

   Доказательство

   $(e^{At})' = (\sum\limits_{\lambda} f(\lambda t)\rho_\lambda)' = \sum\limits_{\lambda} \lambda e^{\lambda t}\rho_\lambda = (\sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda)(\sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At}A$

Поиск обратной матрицы

Пусть A диагонализируема

$\forall\,\lambda\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$

$A^{-1} = T\operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n})T^{-1}$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda} \frac{1}{\lambda}\rho_\lambda$

Определение

$\sqrt[m]{A}$ – арифметический корень

Если $\forall\,\lambda\ \lambda \geq 0$, то результат определен однозначно

$A^{-1} = T\operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n})T^{-1}$

1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

V – линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$

   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}\ \forall\,\lambda\ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)

2. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}\ \exists\, \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)

3. При $K = \mathbb{R}$ не все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$
   Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией
Определение
V – вещественное линейное пространство над $\mathbb{R}$
$\forall\, x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$
$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$
$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$ в V
$\mathbb{0} = \mathbb{0} + i\mathbb{0}$ – нулевой в $V_{\mathbb{C}}$
$\forall\, x \in V V_{\mathbb{C}} \ni x + \mathbb{0}i = x\ z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$\forall\, \lambda = \alpha + i\beta\ \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$
Утверждение
$V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство
Теорема (о вещественном базисе $V_{\mathbb{C}}$)
Пусть $\dim V = n, e_1, \ldots, e_n$ – базис $V, e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$
Тогда $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V_{\mathbb{C}}(\dim V = \dim V_{\mathbb{C}})$
Доказательство
$\forall\, z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e^j$$

Отсюда $z = \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j$, т.е. $e_1, \ldots, e_n$ – порождающая
//todo Отсюда $e_1, \ldots, e_n$ – линейно независимые
Определение
$z = x + iy$
Тогда $\overline{z} = x - iy$ – сопряженный вектор
Утверждение
$z_1, \ldots, z_m$ – линейно независимые в $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m$ – линейно независимые
$(\Rightarrow \mathrm{rg}(z_1, \ldots, z_m) = \mathrm{rg}(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m))$

Доказательство
$c_1\overline{z}_1 + \ldots c_m\overline{z}_m = \mathbb{0}$
$\overline{c_1\overline{z}_1 + \ldots c_m\overline{z}_m} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} = \overline{c}_1 z_1 + \ldots + \overline{c}_m z_m$ – линейно независимые
Отсюда $\overline{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$
Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
Продолжением $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ называется $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ такой, что
$\forall\, z = x + iy \in V_{\mathbb{C}}\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$
Свойства

1. $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
   $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$
   Тогда $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n\times n}$
   Доказательство
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \ldots = \mathcal{A} e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$
   Отсюда $A_{\mathbb{C}} = A$

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ (т.к. матрицы равны)

3. $\forall\, z \in V_{\mathbb{C}}\ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{z})$

4. $\alpha \pm i\beta$ – пара сопряженных корней $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ – СЧ для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   Тогда z – СВ, отвечающий СЧ $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \overline{z}$ – СВ, отвечающий СЧ $\alpha - i\beta$
   Доказательство
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta) z} = (\alpha - i\beta)\overline{z}$

Тогда:
Т.о. если $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
Нормализованный многочлен – многочлен, старший коэффициент которого 1

Нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется *аннулятором* элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$
$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0 = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень многочлена}} (t-\lambda)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ – кратность корня
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_0\epsilon = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень}} (A - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Определение
Минимальный аннулятор x – аннулятор минимальной степени
Теорема о минимальном аннуляторе элемента
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\, x \in V\ \exists!$ минимальный аннулятор x

2. Любой аннулятор x делится на минимальный

Доказательство 1
(алгоритм)

1. $x = \mathbb{0}, \psi \equiv 1$
   $\epsilon = \psi(\mathcal{A})$

2. $x \neq \mathbb{0}$
   Пусть $x, \mathcal{A}x, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}x$ – линейно независимые и m максимальное
   $\exists!\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$
   $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{0}$
   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i$ – минимальный и определен единственным образом

Доказательство 2
//todo
Определение
Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором $\mathcal{A}$, если $\forall\, v \in V\ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$ (т.е. $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$)
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени – *минимальный многочлен*
Теорема о минимальном многочлене
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\mathcal{A}\exists!$ минимальный многочлен

2. Любой аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен

Доказательство
(алгоритм)

1. $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
   По теореме 1 $\forall e_i \exists! \psi_i(t)$ – минимальный аннулятор e_i
   $\phi(t) := \mathrm{lcm}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$
   Тогда $\forall j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$
   Докажем, что $\phi(t)$ – аннулятор
   $\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A})\sum_{j=1}^{m} v_j e_j = \sum_{j=1}^{m}\phi(\mathcal{A})v_j e_j = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\psi_j(t)v_j e_j = \mathbb{0}$
   Т.о. ϕ – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на ϕ
   Пусть $\phi_1(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$
   $\forall v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \forall j = 1 \ldots n \ \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$ - тогда $\phi_1(\mathcal{A})$ – аннулятор e_j
   Т.к. $\psi_j(t)$ – минимальный аннулятор e_j, то $\phi_1(t)$ делится на $\psi_i(t)$
   Отсюда $\phi_1(t)$ делится на $\mathrm{lcm}(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \phi(t)$ Отсюда $\deg\phi$ – минимальная из возможных, а значит ϕ – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный
   Пусть $\phi_2(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$ такой, что $\deg\phi = \deg\phi_2 = m$
   Тогда $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0$ – степень меньше m
   Но тогда δ – аннулятор, $\deg\delta < m$ – противоречие
   Отсюда $\phi_2 = \phi$

Теорема Кэли-Камильтона
$\forall\mathcal{A} \in$ V
$\chi_{\mathcal{A}}$ – аннулятор $\mathcal{A}$ (т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$)
Доказательство
Пусть $\mathcal{A} \underset{e_1,\ldots,e_n}{\leftrightarrow} A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$
Пусть μ не корень χ

Тогда $\det(A-\mu E) \neq 0$
$(A-\mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A-\mu E)}(b_{ij} := A_{ji})$
b_{ij} - многочлен $n-1$ степени от μ
Отсюда $(A-\mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A-\mu E)}(\mu^{n-1}B_{n-1}+\ldots+B_0)$, где B_i – матрица $n \times n$
Отсюда $\det(A-\mu E)E = (A-\mu E)(\mu^{n-1}B_{n-1}+\ldots+B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1}-B_{n-2})+\ldots+\mu(AB_1-B_0)+AB_0$
$\det(A-\mu E)E = \chi(\mu)E = \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\mu^k E$
$\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1}-B_{n-2})+\ldots+\mu(AB_1-B_0)+AB_0$
Отсюда $\alpha_0 E = AB_0$
$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$
$\vdots$
$\alpha_{n-1}E = AB_{n-1} - B_{n-2}$
$\alpha_n E = -B_{n-1}$
$\chi(A) = \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1-B_0)+A^2(AB^2-B^1)+\ldots+A^{n-1}(AB_{n-1}-B_{n-2}) = \mathbb{0}$
Следствие
$\forall\,\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$ $\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}$
Следствие 2
$\deg\phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n\chi_{\mathcal{A}}$
Теорема (о корнях минимального многочлена)
Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть λ – корень $\chi(t)$

1. Пусть $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ – С.Ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \exists\, v \neq 0 : (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$
   Отсюда $\psi(t) = (t-\lambda)$ – минимальный аннулятор элемента v Т.к. ϕ – минимальный многочлен, то $\phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулятор v
   Тогда по теореме 1 ϕ делится на $\psi \Rightarrow \lambda$ – корень ϕ

2. Пусть $\lambda \notin K$, т.е. $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$
   $V \to V_{\mathbb{C}}$

$\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
$e_1, \ldots, e_n$ – базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$
$\mathcal{A} \underset{V,e}{\leftrightarrow} A \underset{V_{\mathbb{C}},v}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda$ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена
$\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
Отсюда λ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

Доказательство $\Leftarrow$
Пусть λ – корень $\phi_{\mathcal{A}}(t)$
$\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$
Замечание
Получаем второй способ получения С.Ч. $\mathcal{A}$
$m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \prod\limits_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)^{m(\lambda)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t), \phi_\lambda(t) := \prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\lambda)}$
$\deg \phi = m = \sum\limits_{\lambda} m(\lambda)$
Определение
$I_\lambda := \{p \in P_{m-1} : p$ делится на $\phi_\lambda\}$ – главный идеал, порождающий многочлен ϕ_λ
I_λ – линейное подпространство P_{m-1}

$I_\lambda \ni p(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$
$m - 1 \geq \deg p = \deg a_\lambda + \deg \phi_\lambda = \deg a_\lambda + m - m_\lambda$
$\deg a_\lambda \leq m(\lambda) - 1$
$I_\lambda \cong P_{m(\lambda)-1}$
$p \leftrightarrow a_\lambda$
$\dim I_\lambda = m(\lambda)$
Теорема
$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Доказательство

1. Проверим, что I_λ дизъюнктны
   $\mathbb{0} = \sum\limits_\lambda p_\lambda(t) = \sum\limits_\lambda a_\lambda(t)\phi_\lambda(t) = \underbrace{a_\lambda(t) \underbrace{\phi_\lambda(t)}_{\text{не делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum\limits_{\mu \neq \lambda} a_\mu(t)\phi_\mu(t)}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$
   Отсюда $a_\lambda(t)$ делится на $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$, но $\deg a_\lambda \leq m(\lambda) - 1$
   Тогда $a_\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow p_\lambda(t) \equiv 0 \Rightarrow$ дизъюнктные

2. $\oplus_\lambda I_\lambda \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m$
   $\dim \oplus_\lambda I_\lambda = \sum\limits_\lambda m(\lambda) = m$
   Отсюда $P_{m-1} = \oplus_\lambda I_\lambda$

Следствие
$\forall\, p \in P_{m-1} \exists!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p = \sum\limits_\lambda p_\lambda$
В частности, для $p \equiv 1$ $\exists!(p_\lambda) : p_i \in I_i, 1 = \sum\limits_\lambda p_\lambda$ – полиноминальное разложение единицы (порожденное многочленом ϕ)
$p_\lambda(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$
Замечание

1. $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_\lambda p_\mu$ делится на ϕ
   Доказательство $p_\lambda(t) = a_\lambda \phi_\lambda(t)$
   $p_\mu(t) = a_\mu \phi_\mu(t)$
   $p_\lambda(t)p_\mu(t) = a_\lambda(t)a_\mu(t)\phi_\lambda(t)\phi_\mu(t) = b(t)\phi(t)$

2. Пусть все корни ϕ взаимно-простые, т.е. $\forall\, \lambda\ m(\lambda) = 1$
   $\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)$
   $\deg a_\lambda(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$
   Отсюда $a_\lambda(t) = \text{const}$

Теорема Лагранжа
Пусть все корни $\phi(t)$ взаимно прострые
Т.е. $\forall\, \lambda : m(\lambda) = 1$ $\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)$

Тогда $\forall\, p \in P_{m-1}\; p(t) = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$

$(a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$

Доказательство

$\exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p(t) = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{a_\lambda \phi_\lambda(t)}_{\phi_\lambda(t) \in I_\lambda}$

$p(\lambda) = \sum\limits_{\mu} a_\mu \phi_\mu(\lambda) = a_\lambda \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$

$\phi(t) = \prod\limits_{\mu}(t-\mu) = (t-\lambda)\underbrace{\prod\limits_{\mu \neq \lambda}(t-\mu)}_{\phi_\lambda(t)}$

$\phi'(t) = \sum\limits_{\mu}\prod\limits_{\xi \neq \mu}(t-\xi)$

$\phi'(\lambda) = \prod\limits_{\xi \neq \lambda}(\lambda-\xi) = \phi_\lambda(\lambda)$

Отсюда $a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

Следствие

$\forall\, \lambda : m(\lambda) = 1$

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda \Rightarrow p(t) = t = \sum\limits_{\lambda} t p_\lambda$

Доказательство

$1 = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda \phi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{1}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$

$t = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{\lambda}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda(t)$

Пусть $\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Построим полиноминальное разложение 1, порождающее многочлен ϕ

$1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{p_\lambda(\mathcal{A})}_{\rho-\text{ спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)

Спектральный оператор действует не на собственное подпространство

Свойства
Пусть $\lambda \neq \mu$
Проверим, что $\rho_\lambda \rho_\mu = \mathbb{0}$
$\rho_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$
$\rho_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = a_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})$
$\rho_\lambda\rho_\mu = (\rho_\lambda\rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

Если λ единственный корень $\phi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$
$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$
Если все корни взаимно прострые:
$\forall\, \lambda\; m(\lambda) = 1$
По следствию из т. Лагранжа:
$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda$
$\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$
Далее покажем, что p_λ – проекторы на V_λ, т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с
Т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с.
Определение
$K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$ называется корневым подпространством $\mathcal{A}$
λ – СЧ $\mathcal{A}$
Очевидно, что $V_\lambda \subset K_\lambda$
$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
Теорема о корневом подпространстве

1. K_λ – инвариантно относительно $\mathcal{A}$
2. $\operatorname{Im}\rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \oplus_\lambda K_\lambda = V)$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $A\Big|_{K_\lambda} \in \operatorname{End}(K_1)$

Доказательство

1. $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

$\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}x = \mathbb{0})$

Отсюда $\mathcal{A}x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{k-1}$

2. $\forall\, x \in V\, \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x$

   $(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\operatorname{Im}\rho_\lambda} = (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} x = \mathbb{0}$

   Отсюда $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

   Отсюда $\operatorname{Im}\rho_\lambda \subset K_\lambda$

   Обратно

   $x \in K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

   Пусть $\mu \neq \lambda$

   $\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = \mathbb{0}$

   $x = \epsilon x = \sum\limits_\mu \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \operatorname{Im}\rho_\lambda$

   Отсюда $K_\lambda \subset \operatorname{Im}\rho_\lambda$

3. $\mathcal{B} = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in \operatorname{End}(K_\lambda)$

   Проверим, что $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен

   $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – аннулятор $\mathcal{B}$

   Докажем от противного, что он минимальный

   Пусть $(t-\lambda)^k$ – минимальный многочлен, $k < m(\lambda)$

   $\phi_1(t) := (t-\lambda)^k\phi_\lambda(t), \deg\phi_1 \leq \deg\phi$

   Покажем, что ϕ_1 – аннулятор $\mathcal{A}$

   $\forall\, v \in V = \oplus_\mu K_\mu\ v = \sum\limits_\mu \underbrace{v_\mu}_{\in K_\mu}$ – раскладывается единственным образом

   $\phi_1(\mathcal{A})v = \sum\limits_\mu (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_\mu}_{\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} = \sum\limits_{\mu\neq\lambda} (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k b_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}v_\mu + (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k\phi_\lambda(\mathcal{A})v_\lambda = \mathbb{0}$

   Отсюда ϕ_1 аннулятор $\mathcal{A}$, причем степени меньшей, чем ϕ, что противоречит минимальности ϕ

   Отсюда $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{B}$

Следствие 1
$\forall\,\lambda\ m(\lambda) \le \dim K_\lambda$ (очевидно из п.3 теоремы)
Следствие 2
$\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow \forall\,\lambda\ m(\lambda) = 1$
Доказательство $\Rightarrow$
‘ $V = \oplus_\lambda V_\lambda$
Пусть $\phi(t) := \prod\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} (t-\lambda)$
Очевидно аннулятор $\mathcal{A}$, причем минимальный
$\forall\, v \in V\ \ v = \sum\limits_\lambda \underbrace{v_\lambda}_{\in V_\lambda}$ – раскладывается единственным образом
$$\phi(\mathcal{A}) = \prod_\mu \prod_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\epsilon) \qquad \underbrace{v_\mu}_{\in V_\mu = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\mu\epsilon)} \qquad = \prod_\mu \prod_{\lambda\ne\mu} (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)(\mathcal{A}-\mu\epsilon)v_\mu = \mathbb{0}$$
Доказательство $\Leftarrow$
$\forall\,\lambda\ m(\lambda) = 1$
$\phi(t) = \prod\limits_\lambda (t-\lambda)$
$\forall\,\lambda\ K_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^1 = V_\lambda$
Отсюда $\oplus_\lambda K_\lambda = V = \oplus_\lambda V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ – о.п.с.

1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

Определение
$\mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$ называется *нильпотентным*, если $\chi_\mathcal{B} = t^\nu, \nu \ge 1$
ν – индекс нильпотентности ($\nu \le n$)
(Т.е. $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$)
Теорема (разложение Жордана)
$\forall\,\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
$\exists\,\mathcal{D}$ – оператор простой структуры $\in \mathrm{End}(V), \mathcal{B}$ нильпотентный $\in \mathrm{End}(V)$:
$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, причем $\mathcal{BD} = \mathcal{DB}$
Доказательство
$\phi(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$(все корни $\in K$)
$\epsilon = \sum\limits_\lambda \rho_\lambda$

$\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

Проверим, что $\mathcal{D}$ – о.п.с.

Достаточно убедиться, что λ – СЧ $\mathcal{D}, \operatorname{Im} \rho_\lambda = V_\lambda^D$ – собственное подпространство для $\mathcal{D}$

Пусть $v_\lambda \in \operatorname{Im} \rho_\lambda$

$\mathcal{D} v_\lambda = \sum\limits_{\mu} \mu \underbrace{\rho_\mu \underbrace{v_\lambda}_{\in \operatorname{Im} \rho_\lambda}}_{\mu \neq \lambda \Rightarrow \ldots = 0} = \lambda \rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda$ – СЧ $\mathcal{D}$

$V = \oplus_\mu \operatorname{Im} \rho_\mu$ – дизъюнктны Отсюда $\operatorname{Im} \rho_\lambda \subset V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$V = \oplus_\lambda \operatorname{Im} p_\lambda \subset \oplus_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}} \subset V$

Отсюда $\operatorname{Im} p_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$ – о.п.с

$V = \oplus_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$D = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$ – спектральное разложение $\mathcal{D}$

$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$

$\nu := \max\limits_{\lambda} m(\lambda)$

Покажем, что $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

$(\mathcal{A} - \mathcal{D})^\nu = (\mathcal{A} - \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda)^\nu = (\mathcal{A} \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda - \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda)^\nu = (\sum\limits_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \rho_\lambda)^\lambda = \sum\limits_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^\nu \rho_\lambda = \sum\limits_{\lambda} b_\lambda(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\mathcal{B}\mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda)(\sum\limits_{\mu} \mu \rho_\mu) = (\sum\limits_{\mu} \mu \rho_\mu)(\mathcal{A} - \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) = \mathcal{D}\mathcal{B}$

Теорема (единственность разложения Жордана)

Разложение Жордана $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$ возможно единственным образом

Доказательство

Пусть $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}}\,' + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$

$\mathcal{D}' = \sum\limits_{\mu} \mu Q_\mu$ – спектральное разложение

Достаточно доказать, что

1. множество μ с.ч. $\mathcal{D}'$ совпадает с множеством с.ч. $\mathcal{A}$
2. $\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda (D = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda, \operatorname{Im} \rho_\lambda = K_\lambda)$

   $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$

3. $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$

$(\mathcal{A} - \mu\epsilon)Q_\mu = (\sum\limits_\xi \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$

Покажем, что $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$\exists\lambda \neq \mu$ $(\lambda-\mu)\mathcal{C}Q_\lambda CQ_\mu = \lambda Q_\lambda CQ_\mu = Q_\lambda C\mu Q_\mu = Q_\lambda D'CQ_\mu - Q_\lambda CD'Q_\mu = Q_\lambda(D'C - CD')Q_\mu = \mathbb{0}$

Отсюда $Q_\lambda CQ_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu CQ_\lambda, \lambda \neq \mu$

$\sum\limits_\lambda Q_\lambda CQ_\mu = \sum\limits_\mu Q_\lambda CQ_\mu$

При $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$

$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$

Пусть $m(\mu)$ – минимальное $k : (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{m(\mu)} = \mathbb{0}$

Такой k найдется, т.к. $\mathcal{C}$ нильпотентный и при каком-то k дает $= \mathbb{0}$

$\psi_\mu(t) = (t-\mu)^{m(\mu)}$

$\forall\, x \in \operatorname{Im} Q_\mu$ $\psi_\mu(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$

Тогда $\psi_\mu(\mathcal{A})$ – минимальный аннулятор элементов $\operatorname{Im} Q_\mu$

ϕ – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и $\operatorname{Im} Q_\mu$

Тогда ϕ делится на ψ_μ

Тогда $\forall\,\mu$ μ – корень ϕ

Рассмотрим $\prod\limits_\mu \psi_\mu(t)$. Покажем, что это аннулятор $\mathcal{A}$

$\forall\, v \in V$ $v = \sum\limits_\mu \underbrace{v_\mu}_{\in \operatorname{Im} Q_\mu}$

$\psi(\mathcal{A})v = \sum\limits_\xi \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum\limits_\xi b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = \mathbb{0}$

Отсюда ψ – аннулятор $\mathcal{A}$

Тогда ψ делится на ϕ

Т.о. $\psi \equiv \phi$

Докажем пункт 2

$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}Q_\lambda = \mathbb{0}$

$\operatorname{Im} Q_\lambda \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

$V = \oplus \operatorname{Im} Q_\lambda \subset \oplus_\lambda K_\lambda = V$

$\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda = \operatorname{Im} p_\lambda$

Теорема 3

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ – разложение Жордана

$\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$

Доказательство
$\mathcal{D} = \sum\limits_{\lambda} \lambda p_\lambda$
$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$
$\mathcal{B} = \mathbb{0}^\nu, \nu = \max m(\lambda)$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ – попарно перестановочные
$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$
$\operatorname{Im} p_\lambda = K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$
$(\chi_\mathcal{A}(\mu))^\nu = (\det \mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu = \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu$
$t \in K, (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^\nu - t^\nu \mathcal{B}^\nu = (\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$
$\underbrace{\det(\chi_\mathcal{A}(\mu))^\nu}_{\text{не зависит от } t} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})}_{\text{многочлен от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$
Отсюда $\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})$ и $\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$ не зависит от t
Тогда $\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - \mathcal{B}) = \det \mathcal{D} - \mu\epsilon$
$\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2} t\mathcal{B} + \ldots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}$
$\det(\chi_\mathcal{A}(\mu))^\nu = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)}_{\chi_\mathcal{D}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_\mathcal{A}(\mu)}$
Отсюда $\chi_\mathcal{A}(\mu) = \chi_\mathcal{D}(\mu)$
$\chi_\mathcal{A}(\lambda) = \chi_\mathcal{D}(\lambda) = 0$
Следствие 1
$\det \mathcal{A} = \chi_\mathcal{A}(0) = \chi_\mathcal{D}(0) = \det \mathcal{D}$
Следствие 2
$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$
Доказательство
//todo 16.03 10:25

1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис. Функция от матрицы

Пусть все корни $\chi(t) \in K$
$V = \oplus_\lambda K_\lambda$
$K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$
Построим в каждом K_λ такой базис, что матрица оператора в нем будет

иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)\Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть $K_j = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^j, j = 1 \dots m$
$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$
$K_r \neq K_{r+1}$
Пусть это не так
Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{B}^r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r+1}$
$\dim K = \operatorname{rg}\mathcal{B}^r + \dim K_r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$
Отсюда $\operatorname{rg}\mathcal{B}^r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1}$
$\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} \subset \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$
Т.о. $\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$
Тогда $\operatorname{Im}\mathcal{B}^r = \operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \dots = \operatorname{Im}\mathcal{B}^m = \mathbb{0}$, что противоречит минимальности m

Рассмотрим $K_1 \dots K_m$
Найдем j_m – компоненту, которая лежит в K_m, но не лежит в K_{m-1}
$j_m \in K_m \setminus K_{m-1}$ $j_r := \mathcal{B}j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$
Заметим, что $j_r \in K_r$
$j_r \in K_r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^r$
$j_{r-1} = \mathcal{B}j_r$
$\mathcal{B}^{r-1}j_{r-1} = \mathcal{B}^r j_r = \mathbb{0}$
Отсюда $j_{r-1} \in K_{r-1} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r-1}$
$Bj_1 = \mathbb{0}$
$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$ – циклический базис, порожденный вектором j_m
Далее повторяем это для всех векторов $K_m, K_{m-1}, \dots$
Максимальная длина циклического базиса, порожденного $j_r = r$
$j_1 \in V_\lambda$ – собственном подпространстве
Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса
Башни образуют *замок Жордана*
Ширина башни – число циклических базисов в ней
Высота башни – размер циклического базиса
Опорные вектора(фундамент башни) – вектора j_m
Крыша башни – вектора j_1

Крыша башна – собственное подпространство
Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу
Если $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то $V_\lambda = K_\lambda$, то замок будет состоять из одной башни высоты 1
$K = K_\lambda = \operatorname{span}(\ldots, j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots)$ – линейная оболочка всех векторов всех башен
$j_r = \mathcal{B} j_{r+1}$
$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) j_{r+1}$
$\mathcal{A} j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}j_1 = \lambda j_1 \\ \mathcal{A}j_2 = j_1 + \lambda j_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A}j_m = j_{m-1} + \lambda j_m \end{array} \leftrightarrow J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ – клетка Жордана}$$

m-ого порядка (блок нижнего уровня)
Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера m
Рассмотрим теперь блочную матрицу $\operatorname{diag}(\underbrace{J_1, \ldots J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \ldots, \underbrace{J_m, \ldots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$ – блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству K_λ
Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты
Объединим все блоки вернего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу
Получим жорданов базис пространства V
Матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы
$T_{e \to j} = T = (\ldots, j_1, \ldots j_m, \ldots)$
$T^{-1} A T = J$
$J = \operatorname{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$

Обоснование алгоритма

Пусть $\mathcal{B}K = \operatorname{Im} \mathcal{B}$
$Z_0 = \mathcal{B}K$
$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \ldots m$
$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$
$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$
$\overline{K}_1 \subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1$

$\overline{K}_2 \subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2$
$\overline{K}_r \subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K$
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$ (1)
$\overline{K}_j$ – опорные подпространства
Теорема
$1 \le r \le m$
$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$
Доказательство
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$ (1)
$\forall\, x \in K: \ \exists!(x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \ldots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \operatorname{Ker} \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1}x' = \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1}x' \in \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1}x' = \mathbb{0}$$

$$\mathcal{B}^r \underbrace{(\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x')}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' = \sum_{j=1}^{m} x_j + \mathcal{B}y'$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности $\overline{K}_j$ и $\mathcal{B}K$ $\forall\, j\ x_j = \mathbb{0}$
$\mathbb{0} + \mathcal{B}^{r+1} = \mathbb{0}$ – дизъюнктность

$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$
$\mathcal{B}K = \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K$
$\vdots$
$\mathcal{B}^{m-1}K = \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=\mathbb{0}}$

Отсюда следствие
Следствие
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$
Сумма представляется в виде пирамиды

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \overline{K}_m \\
 & & & \overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}K_m \\
 & & \iddots & \iddots & \vdots \\
 & \overline{K}_2 & \ldots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m \\
\overline{K}_1 & \mathcal{B}\overline{K}_2 & \ldots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m
\end{array}
$$

Данная таблица соответствует башням

$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$

Отсюда $\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \operatorname{Ker}\mathcal{B} = V_\lambda$

Если $\overline{K}_r \neq \mathbb{0}$, то $J_r = \overline{K}_r \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$

$\overline{K}_r$ – основание башни (опорное пространство, поорожденное J_r)

$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m$ – основание (1 этаж – крыша)

Верхние клетки каждого этажа – основание

l-ый этаж: $\overline{K}_l \oplus \mathcal{B}\overline{K}_{l+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$

$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \mathbb{0}, j = 0 \ldots m-l$

Отсюда $\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

Первые j этажей соответствуют K_j

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни имеют однинаковую размерность $d_r = \dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \ldots r-1$

Доказательство

Рассмотрим $\mathcal{B}^j$ (очевидно, что $\mathcal{B}^j$ – эндоморфизм)

Докажем, что $\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е. $\dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

Пусть $x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \mathbb{0}$

Тогда $x \in \operatorname{Ker} B^j = K^j$

$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \ldots r-1$

$K_1, \ldots, K_{r-1}$ дизъюнктны с $\overline{K}_r$

Т.о. $x = \mathbb{0}$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

Следствие

$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum\limits_{r=1}^{m} d_r$

$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum\limits_{r=1}^{m} r d_r$

Следствие 2 (теорема Фробениуса)

$\forall\, r = 1 \ldots m\ d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$

(при $r = m\ d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$)

Доказательство

$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$

$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$

$\rho_j = d_{j+1} + \ldots + d_m + \rho_{j+1}$

$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \ldots + d_m$

$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$

$d_1 + \ldots + d_m = \rho_0 - \rho_1$

$\vdots$

$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$

$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$

Отсюда $d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$

$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$

Замечание

На практике удобнее

$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$

Рассмотрим башню

$\dim \overline{K}_r = d_r = d$

$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \ldots, g_d)$

$$\begin{array}{c|cccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \ldots & g_d \\ \mathcal{B}\overline{K}_r & \mathcal{B}g_1 & \mathcal{B}g_2 & \ldots & \mathcal{B}g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1}g_1 & \mathcal{B}^{r-1}g_2 & \ldots & \mathcal{B}^{r-1}g_d \end{array}$$ $\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. базис переходит в базис

$\mathcal{B}^j g_1 \ldots \mathcal{B}^j g_d$ – базис $\mathcal{B}^j \overline{K}^r$ – циклический базис

Тогда $J_r = \oplus_{i=1}^{d} \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \ldots, \mathcal{B} g_i, g_i)$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda\epsilon)\mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$ $\mathcal{A}\Big|_{\operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \ldots, \mathcal{B} g_i, g_i)} \underset{\text{в цикл.базисе}}{\leftrightarrow} J_r$ – клетка Жордана размерности $r \times r$ – блок нижнего уровн

$\mathcal{A}\Big|_{J_i} \leftrightarrow = \operatorname{diag}(\underbrace{J_r(\lambda), \dots, J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda)\ \mathcal{A}\Big|_{K=\oplus_{r=1}^{m} J_r} \leftrightarrow \operatorname{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda), \dots, \mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) =$
$\mathcal{J}(\lambda)$
$\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J}$ //todo 13:11 16.03

2 Черная магия

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$
Отсюда $(\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$
$y' = y(\ln|y|)'$ (удобно)