

# Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

## 1 Интеграл

### 1.1 Неопределенный интеграл

#### Определение

$f, F : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$F$  – первообразная функции  $f$ , если  $F$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  и  $\forall x \in \langle a, b \rangle F'(x) = f(x)$

#### Теорема 1

Если  $f$  непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , то первообразная существует

#### Теорема 2

Пусть  $F$  – первообразная  $f$  на  $\langle a, b \rangle$

Тогда

1.  $\forall c \in \mathbb{R} F + c$  – тоже первообразная
2. Если  $G$  – первообразная, то  $G - F = \text{const}$

#### Определение

Неопределенный интеграл на  $\langle a, b \rangle$  – множество всех первообразных

$$\int f(x) dx = \{F : F' = f\}$$

#### Таблица первообразных

$$\int x^P dx = \frac{x^{P+1}}{P+1} + C, P \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x \, dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \operatorname{tg} x + C \\
\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\operatorname{ctg} x + C \\
\int \frac{dx}{x^2 + 1} &= \operatorname{arctg} x + C \\
\int \frac{dx}{1 - x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{arcth} x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{arcsin} x + C \\
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C = \operatorname{arcsch} x + C - \text{"длинный логарифм"}
\end{aligned}$$

### Гиперболические функции

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$  - из ряда Тейлора

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \text{гиперболический косинус}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \text{гиперболический синус}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

### Теорема о свойствах неопределенного интеграла

Пусть  $f, g$  - имеют первообразные на  $\langle a, b \rangle$

Тогда

$$\begin{aligned}
1. \quad \int f + g &= \int f + \int g \\
\int af &= a \int f
\end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Пусть } \phi : \langle p, q \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx|_{x:=\phi(t)} = F(\phi(t)) + C$$

**Замечание**

Пусть  $\phi$  обратима

$$\text{Тогда } F(x) = \int f(\phi(t))\phi'(t) \, dt|_{t:=\phi^{-1}(x)}$$

3.  $\forall \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int f(\alpha x + \beta) \, dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$$

4.  $f, g$  – дифференцируемы и  $f'g$  имеет первообразную

Тогда  $fg'$  имеет первообразную

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

**Определение**

Дифференциал  $d\phi(x) = \phi'(x) \, dx$

## 1.2 Правило Лопиталья

**Лемма об ускоренной сходимости**

$f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \in \bar{\mathbb{R}}$  - предельная точка  $D$

Пусть  $\exists U(a) : f, g \neq 0$  в  $\overset{\bullet}{U}(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Тогда } \forall x_k : \begin{array}{l} x_k \rightarrow a \\ x_k \in D \\ x_k \neq a \end{array} \exists y_k : \begin{array}{l} y_k \rightarrow a \\ y_k \in D \\ y_k \neq a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{f(x_k)} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(y_k)}{g(x_k)} = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

**Доказательство**

Выберем  $y_k$  как подпоследовательность  $x_k$

$$\forall k \frac{f(x_l)}{f(x_k)}, \frac{f(x_l)}{g(x_k)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty}$$

$$\text{Тогда } \exists l_0 : \left| \frac{f(x_{l_0})}{f(x_k)} \right|, \left| \frac{f(x_{l_0})}{g(x_k)} \right| < \frac{1}{k}$$

Отсюда  $y_k := x_{l_0}$

### Правило Лопиталья

$f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – дифференцируемы на  $(a, b)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  – неопределенность

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

### Доказательство

По Гейне

$$x_k \rightarrow a$$

Возьмем  $x_k : x_k \in (a, b)$

$$x_k \neq a$$

$$y_k \rightarrow a$$

Из леммы берем  $y_k : y_k \in (a, b)$

$$y_k \neq a$$

По т. Коши  $\frac{f(x_k) - f(y_k)}{g(x_k) - g(y_k)} = \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}$ ,  $\xi$  – между  $x_k$  и  $y_k$  (т.е.  $\xi_k \rightarrow a$ )

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(y_k)}{g(y_k)} + \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} \left(1 - \frac{g(y_k)}{g(x_k)}\right)$$

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)} = A$$

### Замечание

Работает только на неопределенностях

### Следствие

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\frac{x^a}{e^x} = \left(\frac{x}{e^n}\right)^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

### Теорема Штольца

$x_n, y_n \rightarrow 0$ ,  $y_n$  – строго монотонная

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow a$

### Замечание

При  $a = 0$  требуем монотонность  $x_n$

### Замечание

При  $x_n, y_n \rightarrow \infty$  теорема тоже верна

### Доказательство

1.  $a > 0, a \in \mathbb{R}$

#### Утверждение

$$p < \frac{a}{b}, \frac{c}{d} < q \Rightarrow p < \frac{a+c}{b+d} < q$$

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < a + \varepsilon$$

$\vdots$

$$\forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

$$\text{Отсюда } \forall 0 < \varepsilon < a \exists N_1 \forall n > N \geq N_1 \quad a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

Устремим  $n$  к  $\infty$

$$\text{Тогда } a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon, \text{ т.е. } \frac{x_N}{y_N} \rightarrow a$$

2.  $a < 0$  – аналогично

3.  $a = \pm\infty$

$$\text{Аналогично } \frac{x_N}{y_N} \rightarrow a$$

4.  $a = 0$  (потребуем монотонность  $x_n$ )

$$\text{Пусть } \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow +\infty$$

Перевернем дробь. Через доказанное выше

### Упражнение

Посчитаем  $1^k + 2^k + \dots + n^k$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$$x \frac{d}{dx} f(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = x + 2^2 x^2 + \dots + n^2 x^n$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^k f(x) = x + 2^k x^2 + \dots + n^k x^n$$

Отсюда  $1^k + 2^k + \dots + n^k = ((x \frac{d}{dx})^k f)(1)$

Заметим, что в результате дифференцирования мы получим дробь, знаменатель которой при подстановке 1 обращается в 0

Но данный дефект возникает лишь из-за формы записи. На самом деле функция непрерывна, поэтому можно взять ее предел в 1

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = \lim_{x \rightarrow 1} (x \frac{d}{dx})^k f$$

Применим правило Лопиталя

$$1^k + 2^k + \dots + n^k = (\frac{1}{(k+1)!} (\frac{d}{dx})^k (x-1)^{k+1} (x \frac{d}{dx})^k \frac{x^{n+1}-1}{x-1})(1)$$

### 1.3 Определенный интеграл

#### Определение

Пусть  $\varepsilon$  - множество ограниченных плоских фигур

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$  - *площадь*, если

1. Аддитивность -  $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(A_1) + \sigma(A_2)$ , где  $\sqcup$  - дизъюнктное объединение (объединение непересекающихся фигур)
2. Нормировка -  $\sigma([a, b] \times [c, d]) = (b-a)(d-c)$

#### Замечание

1.  $A \subset B \in \varepsilon \Rightarrow \sigma A \leq \sigma B$

##### Доказательство

$$B = A \sqcup (B \setminus A) \Rightarrow \sigma(B) = \sigma(A) + \sigma(B \setminus A) \geq \sigma(A)$$

2.  $A$  - вертикальный отрезок  $\Rightarrow \sigma(A) = 0$

##### Доказательство

Впишем отрезок в прямоугольник с шириной  $\varepsilon$

Для любого  $\varepsilon$  это возможно. Отсюда площадь стремится к 0

3. Мы не доказываем, что такая функция существует

#### Определение

$\sigma : \varepsilon \rightarrow [0, +\infty)$  - *ослабленная площадь*, если

1. Монотонность:

$$E \subset D \Rightarrow \sigma E \leq \sigma D$$

## 2. Нормировка

### 3. Ослабленная аддитивность:

Если  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \cap A_2 \subset$  вертикальный отрезок,  $A_1, A_2$  лежат в разных полуплоскостях, то  $\sigma A = \sigma A_1 + \sigma A_2$

#### UPD

Позже предыдущее утверждение было заменено на следующее:

Если вертикальная прямая  $l$  делит фигуру на  $A$  на части  $A_r$  и  $A_l$  (части могут иметь общие точки на  $l$ ), то  $\sigma A = \sigma A_l + \sigma A_r$

## Примеры

1.  $\sigma A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^n S(P_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^n P_k \right\}$ , где  $P_k$  - прямоугольник

2.  $\sigma A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} S(P_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$ , где  $P_k$  - прямоугольник

#### Эти площади разные

К примеру, рассмотрим  $C = [0, 1]^2 \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\sigma_1(C) = 1$$

$$\sigma_2(C) = 0$$

## Определение

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

Положительная срезка  $f^+ = \max(f, 0)$

Отрицательная срезка  $f^- = \max(-f, 0)$

$$f = f^+ - f^-$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$\text{Подграфик } (F, E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

## Определенный интеграл

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - \text{непрерывная}$$

Тогда *определенный интеграл*  $f$  по  $[a, b]$  -  $\int_a^b f(x) dx = \sigma(\text{ПГ}(f^+, [a, b])) -$

$\sigma(\text{ПГ}(f^-, [a, b]))$ , где  $\sigma$  - ослабленная площадь

## Замечания

1.  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$$2. f \equiv C \Rightarrow \int_a^b f = C(b-a)$$

$$3. \int_a^b -f = - \int_a^b f$$

$$4. \text{ Можно считать, что } \int_a^a f = 0$$

### Свойства

1. Аддитивность по промежутку

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

2. Монотонность

$$f \leq_{[a,b]} g[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

$$3. (b-a) \min_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \max_{[a,b]} f$$

$$4. \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

### Теорема о среднем

Пусть  $f \in C[a, b]$

Тогда  $\exists c \in [a, b] : \int_a^b f = f(c)(b-a)$

### Доказательство

Если  $a = b$  – тривиально

Иначе по утверждению 3:  $\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max f$

Т.к.  $f$  принимает все значения между минимумом и максимумом, то

$$\exists c : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

### Определение

Пусть  $f \in C[a, b]$

$\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Phi(x) = \int_a^x f$  – интеграл с переменным верхним пределом



$\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \Psi(x) = \int_x^b f$  – интеграл с переменным нижним пределом

### Теорема Барроу

$f \in C[a, b], \Phi$  – интеграл с переменным верхним пределом

Тогда  $\Phi$  дифференцируема на  $[a, b]$  и  $\Phi'(x) = f(x)$

### Доказательство

Пусть  $x \in (a, b), y > x$

$$\Phi'_+ = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_x^y f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c), c \in [x, y] = f(x)$$

Аналогично  $\Phi'_- = f(x)$

Тогда  $\Phi'(x) = f(x)$

### Замечание

$$\Psi'(x) = -f(x)$$

### Теорема (Формула Ньютона-Лейбница)

Пусть  $F$  – первообразная  $f$  на  $[a, b], f \in C[a, b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

### Доказательство

По т. Барроу  $\Phi$  – первообразная

Тогда  $F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

### Замечание

Теорема Барроу – это теорема о существовании первообразной у непрерывной функции

Также площадь под графиком непрерывной функции не зависит от  $\sigma$

### Соглашение

$$\text{При } c > d \quad \int_c^d f := - \int_d^c f$$

### Свойства

#### 1. Линейность

$$f, g \in C[a, b], \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

#### Пример (неравенство Чебышева)

$f, g \in C[a, b]$  – монотонно возрастающие/убывающие

$$I_f := \frac{1}{b-a} \int_a^b f \text{ – среднее значение функции}$$

Тогда  $I_f I_g \leq I_{fg}$

**Доказательство**

$x, y \in [a, b]$

Тогда  $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$  – из монотонности

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Проинтегрируем по  $x$  по  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x)g(x) - f(y) \int_a^b g(x) - f(y)g(y)(b-a) \geq 0$$

Поделим на  $b-a$ :

$$I_{fg} - f(y)I_g - I_f g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Проинтегрируем по  $y$  по  $[a, b]$  и поделим на  $b-a$ :

$$I_{fg} - I_f I_g - I_f I_g + I_{fg} \geq 0$$

$$I_{fg} \geq I_f I_g$$

## 2. Интегрирование по частям

$f, g \in C^1[a, b]$

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b g f'$$

**Пример**

$$H_n = \frac{1}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi^2}{4} - x^2 \right)^n \cos x \, dx = F_n(\pi^2) - \text{какой-то многочлен степени } n$$

Пример – полный треш. Если вам надо, смотрите видео:

[https://www.youtube.com/live/7ZQr\\_0Khuq4?feature=share&t=7020](https://www.youtube.com/live/7ZQr_0Khuq4?feature=share&t=7020)

Таймкод: 1:57:00

## 3. Замена переменных в интеграле

$f \in C\langle a, b \rangle$

$\phi : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, \phi \in C^1$

$[p, q] \in \langle a, b \rangle$

$$\text{Тогда } \int_p^q f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) \, dx$$

**Доказательство**

$F$  – первообразная  $f$

$F(\phi(t))$  – первообразная  $f(\phi(t))\phi'(t)$

$$\int_p^q f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt = F(\phi(q)) - F(\phi(p)) = \int_{\phi(p)}^{\phi(q)} f(x) \, dx$$

**Замечание**

- (а) Может оказаться, что  $\phi(p) > \phi(q)$   
 (б)  $\phi[p, q]$  может быть крупнее  $[\phi(p), \phi(q)]$

**Пример (Формула Тейлора с остатком в интегральной форме)**

$a, b \in \mathbb{R}, a < b, f \in C^{n+1}\langle a, b \rangle, x, x_0 \in \langle a, b \rangle$

Тогда  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

**Доказательство**

Индукция по  $n$ :

- (а)  $n = 0$ :

$$f(x) = f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

- (б) Интегрирование по частям

Пусть доказано для  $n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ \begin{array}{ll} f = f^{(n+1)} & g' = (x - t)^n \\ f' = f^{(n+2)} & g = -\frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{n!} \frac{(x - t)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt = \\ &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n + 1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

**Замечание**

Формулу Тейлора можно интегрировать

$F$  – первообразная  $f$

Проинтегрируем слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} &= \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} \Big|_{x=x_0}^{x=x} = \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} = \\ &= \frac{F^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}}{(k + 1)!} \end{aligned}$$

**Пример**

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\text{Тогда } \arctan x = F(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + o(x^{2n+1})$$

**Утверждение**

$\pi$  – иррациональное (даже  $\pi^2$  – иррациональное)

**Доказательство**

Пусть  $\pi^2 = \frac{k}{m}$

Тогда  $m^n F(\frac{k}{m})$  – целое число, где  $F$  – из примера к интегрированию по частям

Отсюда  $m^n F(\frac{k}{m}) = \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx$  – положительное целое число

Отсюда выражение  $\geq 1$

$$\left| \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x \, dx \right| \leq \frac{m^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |(\frac{\pi^2}{4} - x^2)^n \cos x| \, dx \leq \frac{m^n 3^n \pi}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**1.4 Продолжение свойств интеграла****Определение**

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – кусочно непрерывная, если функция непрерывна всюду, кроме конечного числа точек, где у нее разрыв 1 рода

2.  $f$  – кусочно непрерывная функция

$x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  – точки разрыва ( $a, b$  могут и не быть разрывными)

$$\int_a^b f(x) \, dx := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$$

3. Пусть  $f$  – кусочно непрерывная на  $[a, b]$

$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – почти первообразная функции  $f$ , если

(а)  $F$  – непрерывна на  $[a, b]$

(б)  $F'(x) = f(x)$  при  $x \in [a, b]$ , кроме конечного числа точек

Если  $F_i$  – первообразная  $f$  на  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\text{Тогда } F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ F_2(x) + c_1, & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ F_n(x) + c_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

где  $c_i = F_i(x_i) - F_{i+1}(x_i)$

### Утверждение

Если  $f$  – кусочно непрерывная на  $[a, b]$

$F$  – первообразная

$$\text{Тогда } \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

### Доказательство

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^n F_i(x_i) - F_i(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

### Пример

Пусть  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

$$\text{Тогда } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \quad \text{– неравенство Чебышева (ч.с.)}$$

### Доказательство

$$\text{Определим функции как } F_a(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} a_i, F_b(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} b_i$$

Тогда неравенство выполняется по неравенству Чебышева

### Замечание

Утверждается, что все доказанные свойства интеграла выполняются и для кусочно-непрерывных функций

## 1.5 Приложение определенного интеграла

### Общая схема

Пусть фиксирован  $\langle a, b \rangle$

Обозначения:  $\text{Segm}\langle a, b \rangle = \{[p, q] : [p, q] \subset \langle a, b \rangle\}$

### Определение

Отображение  $\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – функция промежутка

$\Phi$  – Аддитивная функция промежутка, если  $\forall c \in (p, q) \Phi[p, q] = \Phi[p, c] + \Phi[c, q]$

**Определение**

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – аддитивная функция промежутка

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – плотность а.ф.п.  $\Phi$ , если  $\forall \delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad |\delta| \cdot \inf_{\delta} f \leq$

$$\Phi(\delta) \leq |\delta| \cdot \sup_{\delta} f$$

**Основной пример**

$$\Phi[p, q] := \int_a^b f(x) \, dx$$

Тогда  $f$  – плотность

**Теорема 1 (о вычислении а.ф.п. по плотности)**

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – а.ф.п

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – плотность  $\Phi$ , непрерывна

$$\text{Тогда } \forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \quad \Phi[p, q] = \int_p^q f$$

**Доказательство**

$$\text{Пусть } F(x) = \begin{cases} 0, & x = p \\ \Phi[p, x] & p < x \leq q \end{cases}$$

Докажем, что  $F$  – первообразная  $f$

$$F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\Phi[p, x+h] - \Phi[p, x]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\Phi[x, x+h]}{h}$$

$$\inf_{[p,q]} \leq \frac{1}{q-p} \Phi[p, q] \leq \sum_{[p,q]} f$$

$$\text{Отсюда } F'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0+0} f(x + \theta h), \theta \in [0, 1] = f(x)$$

Аналогично  $F'_-(x) = f(x)$

$$\Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \int_p^q f(x) \, dx$$

**Пример**

Пусть  $r = f(\phi)$  – функция в полярных координатах

$\phi \in \langle \phi_0, \phi \rangle$

Пусть  $\Phi : \text{Segm}\langle \phi_0, \phi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  – площадь сектора  $(f, \langle \phi_0, \phi \rangle)$

Т.е.  $\Phi$  – Отображение  $[\alpha, \beta] \mapsto \sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta \rangle))$

Это аддитивная функция промежутка

**Теорема**

$f : \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}_+$  – непрерывна,  $\langle \phi_0, \phi_1 \rangle \subset [0, 2\pi]$

$$\text{Тогда } \sigma(\text{Сектор}(f, \langle \alpha, \beta \rangle)) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi) \, d\phi$$

$([\alpha, \beta] \in \langle \phi_0, \phi_1 \rangle)$

**Доказательство**

Проверим, что  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi) d\phi$  – плотность а.ф.п.  $\Phi$

Т.е. проверим неравенство  $\forall [\alpha, \beta] \min_{\phi \in [\alpha, \beta]} (\frac{1}{2} f^2(\phi))(\beta - \alpha) \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq$

$$\max_{\phi \in [\alpha, \beta]} (\frac{1}{2} f^2(\phi))(\beta - \alpha)$$

Рассмотрим произвольный сектор

Круговой сектор  $(\min f, [\alpha, \beta]) \subset \text{Сектор}(f, [\alpha, \beta]) \subset \text{Круговой сектор}(\max f, [\alpha, \beta])$  из геометрических соображений

$$\text{Отсюда } \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\min f)^2 \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\max f)^2$$

### Пример

$$x = r(t - \sin t)$$

$y = r(1 + \cos t)$  – циклоида (координата точки на поверхности катящегося колеса)

Найдем площадь арки(периода) циклоиды

Происходят геометрические рассуждения, которые плохо конвертируются в конспект, поэтому оставляю ссылку: <https://www.youtube.com/live/CaG68GvecLw?feature=share&t=6813>

Посчитаем площадь через интеграл

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi r} y(x) dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) d(r(t - \sin t)) = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)r(1 - \cos t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 2\pi r^2 + r^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \\ &= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

### Пример 2

Пусть задана кривая  $(x(t), y(t))$  – путь

Научимся считать площадь сектора  $[t_0, t_1]$

Перейдем в полярные координаты (считая, что  $\phi_0 \leq \phi_1$ ):

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r^2(\phi) d\phi = \left[ \begin{array}{l} \phi = \arctan \frac{y(t)}{x(t)} \\ r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{x'y - xy'}{x^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x^2 + y^2) \frac{x'y - xy'}{x^2 + y^2} dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x'y - xy') dt \end{aligned}$$

### Пример 3 (Изопериметрическое неравенство)

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  – замкнутая, ограниченная, выпуклая фигура

Пусть  $\text{diam}(G) \leq 1$ , где  $\text{diam}(G) = \sup(\rho(x, y) : x, y \in G)$

(Из компактности  $G$ , а значит  $\text{diam}(G) = \max(\rho(x, y) : x, y \in G)$ )

Тогда  $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

#### Доказательство

Зададим фигуру в полярных координатах

Граница фигуры – выпуклая функция

Выберем на поверхности точку  $A$ , где функция дифференцируема (точек недифференцируемости не более чем счетное множество). Проведем в этой точке касательную и повернем фигуру, чтобы касательная стала вертикальной, а фигура была расположена в правой полуплоскости

Зададим функцию  $f(\phi)$ ,  $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  следующим образом:

Проведем из точки  $A$  прямую под углом  $\phi$

Она пересечет границу в точке  $B$

Тогда  $f(\phi) = |AB|$

$$\sigma G = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi - \frac{\pi}{2}) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2})) d\phi$$

$(f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}))$  – квадрат длины некоторой хорды в  $G$

$$\text{Отсюда } \sigma G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2})) d\phi \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\phi = \frac{\pi}{4}$$

## 1.6 Интегральные суммы

### Определение

Пусть  $[a, b]$  – отрезок суммирования

Разделим отрезок конечным набором точек  $x_0, \dots, x_n$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$i$ -ый отрезок –  $[x_{i-1}, x_i]$

$\max |x_i - x_{i-1}|$  = ранг дробления = мелкость

Оснащение –  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – набор точек таких, что  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$  – Риманова сумма

### Теорема об интеграле как пределе Римановых сумм

$$f \in C[a, b]$$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$  дроблений  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , у которых



$$\text{ранг} < \delta \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

### Доказательство

Зафиксируем  $\varepsilon$

Для этого  $\varepsilon \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_2 - x_1| < \delta |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} -$

по т. Кантора

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) dx \right| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| dx < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \\ &\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \end{aligned}$$

### Пример

$$\int_0^1 x dx$$

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на отрезки по  $\frac{1}{n}$

$$\text{Т.е. } \int_0^1 x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

### Замечание

Пусть  $|f'(x)| \leq M$  на  $[a, b]$

Разделим отрезок на части  $\frac{b-a}{n}$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n} \right| &< \text{ по т. Лагранжа } < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\bar{x}_i)| (x_i - x) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx = \sum_{i=1}^n M \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} = \frac{M}{2} \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 n \end{aligned}$$

### Обобщенная теорема о плотности

Пусть  $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная

$\Phi : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall \Delta \in \text{Segm}\langle a, b \rangle$  заданы  $m_\Delta, M_\Delta$  — неточные минимум и максимум:

1.  $m_\Delta \cdot |\Delta| \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta \cdot |\Delta|$
2.  $\forall x \in \Delta \ m_\Delta \leq f(t) \leq M_\Delta$
3.  $\forall x \in \langle a, b \rangle \ \forall \Delta \ni x : |\Delta| \rightarrow 0 \ M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$

Тогда  $\forall [p, q] \in \text{Segm}\langle a, b \rangle \ \Phi[p, q] = \int_p^q f$

**Доказательство**

$$F(x) = \begin{cases} \Phi[p, x], & p < x \leq q \\ 0, & x = p \end{cases}$$

$$\Delta := [x, x + h]$$

$$m_\Delta \leq \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leq M_\Delta$$

$$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\text{Тогда } \left| \frac{F(x + h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Т.е. } F'_+(x) = f(x)$$

$$\text{Аналогично } F'_-(x) = f(x)$$

$$\text{Т.о. } \Phi[p, q] = F(q) - F(p) = \int_p^q f$$

**Пример**

Пусть  $a > 0$

$$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$$

$$\Phi_x, \Phi_y : \text{Segm}\langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Пусть } \Phi_x[p, q] = V_{\Omega^x}$$

$$\Phi_y[p, q] = V_{\Omega^y}$$

$\Omega^x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [p, q], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$  – фигура вращения вокруг  $OX$

$\Omega^y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : p \leq \sqrt{x^2 + z^2} \leq q, 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})\}$  – фигура вращения вокруг  $OY$

$\Phi_x, \Phi_y$  – а.ф.п.

**Теорема**

$$f \in C[p, q], f \geq 0$$

$$\text{Тогда } \Phi_x[p, q] = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

$$\Phi_y[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

### Доказательство

Для  $\Phi_x$  – очевидно (из 1 теоремы о плотности)

Для  $\Phi_y$ :

Проверим, что  $2\pi x f(x)$  – плотность  $\Phi_y$

Из геометрических соображений:

$$V(\Omega^y[\alpha, \beta]) \leq \pi(\beta^2 - \alpha^2) \max_{[\alpha, \beta]} f = (\beta - \alpha)\pi(\beta + \alpha) \max_{[\alpha, \beta]} f \leq (\beta - \alpha)\pi \max_{[\alpha, \beta]} 2x \max_{[\alpha, \beta]} f$$

$$V(\Omega^y[\alpha, \beta]) \geq \pi(\beta^2 - \alpha^2) \min_{[\alpha, \beta]} f = (\beta - \alpha)\pi(\beta + \alpha) \min_{[\alpha, \beta]} f \geq (\beta - \alpha)\pi \min_{[\alpha, \beta]} 2x \min_{[\alpha, \beta]} f$$

Отсюда  $M_\Delta := \pi \max_{\Delta} 2x \max_{\Delta} f(x)$

$$m_\Delta := \pi \min_{\Delta} 2x \min_{\Delta} f(x)$$

Т.о. условие 1 выполнено

$m_\Delta \leq 2\pi x f(x) \leq M_\Delta$  – условие 2 выполнено

$\max_{\Delta} 2x \max_{\Delta} f(x) - \min_{\Delta} 2x \min_{\Delta} f(x) \rightarrow 0$  по непрерывности  $f$  и  $2x$  – условие 3 выполнено

### Пример

Найдем объем тора с радиусом сечения  $r$  и радиусом кольца  $R$

Формула прямой –  $y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$

$$\text{Отсюда } V = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = 4\pi \int_{R-r}^{R+r} (x - R) \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx +$$

$$4\pi R \int_{R-r}^{R+r} \sqrt{r^2 - (x - R)^2} dx = 0 (\text{из симметрии относительно } R) + 4\pi R \frac{1}{2} \pi r^2 = 2\pi R \pi r^2$$

### 1.6.1 Длина пути

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , непрерывная – путь

$\gamma(a)$  – начало пути,  $\gamma(b)$  – конец пути

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}, \text{ где } \gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} - i\text{-ая координатная функция пути}$$

Путь *гладкий*, если  $\forall i \gamma_i \in C^1$

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_m(t) \end{pmatrix} - \text{вектор скорости пути в точке } t$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = v(t) - \text{считается покоординатно}$$

Носитель пути —  $\gamma([a, b])$

### Определение

$l$  — функция на множестве гладких путей называется длиной пути, если

1.  $l \geq 0$

2.  $l$  — аддитивна:

$$\forall \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall c \in [a, b] \quad l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$$

3.  $\gamma, \bar{\gamma}$  — два пути в  $\mathbb{R}^m$ ,  $C_\gamma, C_{\bar{\gamma}}$  — их носители

Пусть  $\exists T : C_\gamma \rightarrow C_{\bar{\gamma}}$  — сжатие:

$$\forall x, y \quad \rho(T(x), T(y)) \leq \rho(x, y)$$

$$\text{Тогда } l(\bar{\gamma}) \leq l(\gamma)$$

4.  $\gamma(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \Rightarrow l(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b))$  — длина прямолинейного пути

### Замечание 1

1. Длина дуги  $\geq$  длина хорды

(по свойству 3: ортогонально проецируем дугу на хорду)

2. При "расширении" длина дуги растёт

3. При движении пространства (изометрии) длина пути не меняется

### Теорема о длине гладкого пути

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma \in C^1$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

### Доказательство

Пусть  $\gamma$  — инъекция. Т.е. путь не проходит через одну точку два раза.

Если это не так, разобьём путь на несколько и посчитаем их длины отдельно

Проверим, что  $\|\gamma'(t)\|$  — плотность а.ф.п.  $\underbrace{[p, q]}_{\subset [a, b]} \mapsto l(\gamma|_{[p, q]})$

$$m_i(\Delta) = \min_{t \in \Delta} \gamma'_i(t)$$

$$M_i(\Delta) = \max_{t \in \Delta} \gamma'_i(t)$$

$$m_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i^2(\Delta)}$$

$$M_{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2(\Delta)}$$

Тогда свойства 2 ( $m_{\Delta} \leq \|\gamma'(t)\| \leq M_{\Delta}$ ) и 3 ( $M_{\Delta} - m_{\Delta} \xrightarrow{|\Delta| \rightarrow 0} 0$ ) очевидны,

$$\text{т.к. } \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(t))^2}$$

Докажем, что  $m_{\Delta}|\Delta| \leq l(\gamma|_{\Delta}) \leq M_{\Delta}|\Delta|$

Зафиксируем  $\Delta = [t_0, t_1]$

$\vec{M} = (M_1(\Delta), \dots, M_m(\Delta))$

$\tilde{\gamma}(t) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$

$\tilde{\gamma}(t) := \vec{M}t$

Проверим  $T : C_{\gamma} \rightarrow C_{\tilde{\gamma}} : \gamma(t) \mapsto \tilde{\gamma}(t)$  – растяжение

Пусть  $p < q$

$$\rho(\gamma(p), \tilde{\gamma}(q)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma_i(p) - \tilde{\gamma}_i(q))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(\bar{p})(p - q))^2} \leq |p - q| \sqrt{\sum_{i=1}^m (M_i[p, q])^2} =$$

$$\|\vec{M}[p, q]\| |p - q| = l(\tilde{\gamma}|_{[p, q]}) = \rho(\tilde{\gamma}(p), \tilde{\gamma}(q))$$

Т.е.  $l(\gamma|_{[p, q]}) \leq l(\tilde{\gamma}|_{[p, q]}) = \|\vec{M}_{[p, q]}\| |p - q| = \|\vec{M}_{\Delta}\| |\Delta|$

Аналогично  $\|\vec{m}_{\Delta}\| |\Delta| \leq l(\gamma|_{\Delta})$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \text{ ч.т.д.}$$

### Пример

Посчитаем длину дуги эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Пусть  $a > b$

Параметризуем его:  $(x, y) = (a \sin t, b \cos t)$

$$\gamma' = (a \cos t, -b \sin t)$$

$$\|\gamma'\| = a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = a^2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 t), t = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Тогда  $L[0, T] = a \int_0^T \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$  – не берется(

Формула – Эллиптический интеграл II рода

**Следствие**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$

Тогда  $l(\Gamma(f, [a, b])) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

**Доказательство**

$\Gamma(f, [a, b])$  – носитель пути  $x \mapsto (x, f(x))$

$\gamma(x) = (x, f(x)), \gamma' = (1, f'), \|\gamma'\| = \sqrt{1 + f'^2}$

**Следствие 2**

$r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, r \in C^1$  – функция в полярных координатах

$\gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi)$

Тогда  $l(\phi) = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\phi$

**Определение (способ определения длины пути)**

Разобьем кривую на  $n$  частей "точками"  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$

Тогда  $l(\gamma) = \sup_{n, (t_i)} \sum_{i=1}^n \rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$

**Определение**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда *вариация*  $f$  на  $[a, b]$   $\text{Var}_a^b f = \sup_{n, (t_i)} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$

Если  $f \in C^1$ ,  $\text{Var}_a^b f = \text{длина пути} = \int_a^b |f'|$

**Лемма**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{Var}_a^b f$  – ограничена

Тогда  $\exists p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонные такие, что  $f \equiv p - q$

**Доказательство**

$f(x) - f(a) = p(x) - q(x)$ , где

$2p(x) = \text{Var}_a^x f(x) + (f(x) - f(a))$

$2q(x) = \text{Var}_a^x f(x) - (f(x) - f(a))$

Докажем, что  $p, q$  – возрастают

$|f(y) - f(x)| \leq \text{Var}_x^y f$

Отображение  $\Delta \mapsto \text{Var}_\Delta f$  – а.ф.п.

Для  $x < y$   $2(p(y) - p(x)) = \text{Var}_x^y f + f(y) - f(x) \geq 0$

Т.е.  $p(y) \geq p(x)$ , ч.т.д.

Кстати,  $p(x) + q(x) = \text{Var}_a^x f$

## 2 Конечные $\varepsilon$ -сети

### Упражнение

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $K \subset X$  – компактно  $\Leftrightarrow K$  – секвенциально компактно

### Определение

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство,  $D \subset X, \varepsilon > 0$

Множество  $N \subset X$  –  $\varepsilon$ -сеть множества  $D$ , если  $\forall x \in D \exists y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$

Если  $N$  – конечное, то  $N$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть

### Определение

$D$  – свехограниченное в  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  конечная  $\varepsilon$ -сеть  $N \subset X$

### Лемма 1

$D$  – свехограниченно в  $X \Leftrightarrow D$  – свехограниченно в  $D$  (в себе)

**Доказательство**  $\Leftarrow$  – тривиально

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Возьмем  $\varepsilon > 0$

Берем  $\frac{\varepsilon}{2}$  в  $X : N = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\forall i B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$  выберем какую-нибудь  $y_i \in D$  (если такая есть)

Тогда  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  –  $\varepsilon$ -сеть  $D$

### Лемма 2

$f : D \rightarrow Y, D$  – свехограниченное

$f$  – равномерно непрерывно

Тогда  $f(D)$  – свехограниченно

### Доказательство

Равномерная непрерывность  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : \rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Зафиксируем  $\varepsilon$

Возьмем конечную  $\delta$ -сеть в  $D =: N$

$f(N)$  – конечная  $\varepsilon$ -сеть в  $Y$

### Лемма 3

$D$  – свехограниченно  $\Leftrightarrow$  любая последовательность в  $D$  содержит фундаментальную подпоследовательность

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Возьмем последовательность  $(x_n)$

$\exists$  конечная 1-сеть  $\{y_1, \dots, y_k\}$

Тогда  $\exists i : B(y_i, 1)$  содержит бесконечно много членов последовательно-

сти

Пусть  $x_k \in B(y_i, 1)$

Тогда  $n_1 := k$

$\exists$  конечная  $\frac{1}{2}$ -сеть  $D$ , а значит конечная  $\frac{1}{2}$ -сеть  $D \cap B(y_i, 1)$

Повторим действия

Получившаяся последовательность  $y_i$  фундаментальна

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Докажем от противного

Пусть  $\exists \varepsilon > 0$  : не существует конечной  $\varepsilon$ -сети

Возьмем  $x_1$

Т.к. сети не существует, то  $\exists x_2 \in D \setminus B(x_1, \varepsilon)$

$\exists x_3 \in D \setminus \bigcup_{i=1}^2 B(x_i, \varepsilon)$

И т.д.

Построена последовательность  $x_n \in D : \forall k, l \rho(x_k, x_l) \geq \varepsilon$  – не фундаментальная

Отсюда противоречие

**Теорема**

$D$  – метрическое пространство

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $D$  – компактно
2.  $D$  – сверхограниченное и полное

**Доказательство**  $1 \Rightarrow 2$

$D$  – компактно

Если  $D$  – неполное, то  $\exists (x_n) \in D$  – фундаментальная, но не имеющая предела

Тогда  $\forall (n_k) x_{n_k}$  – не имеет предела

(Т.к. фундаментальная последовательность сходится, если ее подпоследовательность сходится)

Это противоречит секвенциальной компактности

Если  $D$  – не сверхограниченное

Тогда  $\exists (x_n)$ , не содержащей фундаментальную

Но тогда нет и сходящейся, что противоречит секвенциальной компактности

**Доказательство**  $2 \Rightarrow 1$



$D$  – сверхограниченное и полное

Тогда любая последовательность содержит фундаментальную подпоследовательность (в силу полноты – сходящуюся)

Это секвенциальная компактность

### Следствие

$X$  – полное метрическое пространство  $D \subset X$

Тогда эквивалентны следующие утверждения

1.  $D$  – компактно
2.  $D$  – сверхограниченное и замкнутое

### Теорема о формулах центральных прямоугольников и трапеций

Пусть  $f \in C^2[a, b]$ ,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $\delta = \max_i (x_i - x_{i-1})$

$$t = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Тогда выполняются две формулы

1.  $\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$
2.  $\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx$

При равномерном дроблении  $\delta = \frac{b-a}{n}$  :

$$M := \max |f''(x)|, \quad \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''(x)| dx \leq \frac{M(b-a)^3}{n^2}$$

### Доказательство (только 2)

Пусть  $dg := g'(x) dx$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) d(x - t_i) = f(x)(x - t_i) \Big|_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)(x -$$

$$t_i) dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) d\psi, \text{ где } \psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x), x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) + \underbrace{\frac{1}{2} f' \psi \Big|_{x_{i-1}}^{x_i}}_0 - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi dx$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \left| \int_a^b \dots - \sum_{i=1}^n \dots \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'' \psi \right| = \frac{1}{2} \int_a^b |f''| \underbrace{\psi}_{\leq \frac{\delta^2}{4}} dx \leq \frac{\delta^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

Подсказка: для прямоугольников  $\psi = \begin{cases} (x - x_{i-1})^2, & x \in [x_{i-1}, t_i] \\ (x - x_i)^2, & x \in [t_i, x_i] \end{cases}$

### Формула Эйлера-Маклорена

Пусть  $f \in C^2[m, n]$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Тогда } \int_m^n f(x) dx = \sum_{i=m}^n {}^* f(i) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x) \{x\} (1 - \{x\}) dx$$

\* – два крайних слагаемых – с коэффициентом  $\frac{1}{2}$

$$\text{Т.е. } \sum_{i=m}^n {}^* f(i) = \frac{1}{2} f(m) + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2} f(n)$$

### Доказательство

Из доказательства формулы для трапеции, где  $\psi = (x - k)(k + 1 - x) = \{x\}(1 - \{x\})$

### Пример

$$p > -1, f(x) = x^p$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 1^p + \dots + n^p &= \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx = \\ &= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} + \frac{n^p}{2} + O(\max(1, n^{p-1})) \end{aligned}$$

Пояснение:

$$0 \leq \int_1^n x^{p-2} \{x\} (1 - \{x\}) dx \leq \int_1^n x^{p-2} dx = \frac{x^{p-1}}{p-1} \Big|_1^n = \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1}$$

$$\text{При } p < 1 \quad \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(1)$$

$$\text{При } p > 1 \quad \frac{n^{p-1}}{p-1} - \frac{1}{p-1} = O(n^{p-1})$$

Замечание: при  $p < -1$  слагаемые будут ограниченными, т.е. вся сумма будет  $O(1)$

### Пример 2

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$1 + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^3} \{x\} (1 - \{x\}) dx}_{=: y_n, \text{возрастающая последовательность}}$$

$y_n$  – возрастает

$y_n$  – ограниченная

$$y_n \leq \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8} \left( -\frac{1}{x^2} \right) \Big|_1^n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8n^2} < \frac{1}{8}$$

$$\text{Тогда } 1 + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + y_n}_{\text{имеет предел } \gamma \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]} = \ln n + \gamma + o(1)$$

$\gamma \approx 0.57 \dots$  – постоянная Эйлера

### Пример 3

$$f(x) = \ln x$$

$$\ln 1 + \dots + \ln n = \int_1^n \ln x dx + \frac{\ln n}{2} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \{x\} (1 - \{x\}) dx}_{x_n} = n \ln n -$$

$$n + \frac{\ln n}{2} + x_n$$

$x_n$  монотонная и ограниченная

Тогда  $x_n \rightarrow C$

$$\text{Отсюда } n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{C+o(1)} \rightarrow C_1 n^n e^{-n} \sqrt{n}, C_1 = e^C$$

Найдем  $C_1$

### Формула Валлиса

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx = \underbrace{-\sin^{n-1} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 -$$

$$\sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{четное} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим на } [0, \frac{\pi}{2}] : \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$$

Проинтегрируем:  $\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$

$$\underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k+1}}_{\alpha_k} \leq \frac{\pi}{2} \leq \underbrace{\frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2}_{\beta_k}$$

$$\beta_k - \alpha_k = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2k+1}}_{\leq \frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2k} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Тогда  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2k} = \frac{\pi}{2}$

**Замечание**

$$2b_k := (4k+3) \left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right)^2$$

$$2c_k := \frac{4}{4k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2$$

Тогда  $\alpha_k < \frac{b_k}{2} < \frac{c_k}{2} < \beta_k$

При этом  $b_k \uparrow, c_k \downarrow$

$$c_k - b_k = c_k \frac{1}{4(2k+1)^2}$$

$$\pi = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right)}{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}}$$

По формуле Валлиса  $\sqrt{\pi} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k!)^2}{(2k)!} =$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2^k k^k e^{-k} \sqrt{k})^2 C_1^2}{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{2k} C_1} = \frac{C_1}{\sqrt{2}}$$

Отсюда  $C_1 = \sqrt{2\pi}$

Тогда  $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  – формула Стирлинга

### 3 Выпуклость

Множество  $A \subset \mathbb{R}^m$  называется выпуклым, если

$$\forall x, y \in A \quad [x, y] \subset A,$$

где  $[x, y] = \{x + t(y - x), y \in [0, 1]\} = \{\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0, 1]\}$  – отрезок

прямой, содержащей  $x, y$

**Определение**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Если  $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ , то  $f$  – выпуклая (выпуклая вниз) на  $\langle a, b \rangle$

Если  $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ , то  $f$  – вогнутая (выпуклая вверх) на  $\langle a, b \rangle$

**Примеры**

$e^x$  – выпуклая

$x^2$  – выпуклая

**Замечание**

$f$  – выпуклая  $\Leftrightarrow$  любая хорда (отрезок, соединяющий две точки графика) расположена нестрого выше графика  $\Leftrightarrow$  надграфик выпуклый

Надграфиком  $f$  на  $\langle a, b \rangle$  называется  $\{(x, y) : x \in \langle a, b \rangle, y \geq f(x)\}$

**Определение**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Если  $\forall x, y \in \langle a, b \rangle \forall \alpha \in (0, 1) f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ , то  $f$  – строго выпуклая/вогнутая на  $\langle a, b \rangle$

**Лемма о трех хордах**

$f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда эквивалентны:

1.  $f$  выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

$$2. \forall x_1 < x_2 < x_3 \in \langle a, b \rangle \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

**Доказательство  $\Rightarrow$**

Докажем первое неравенство

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3$$

$$\text{Тогда неравенство } 1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

При  $\alpha = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}, 1 - \alpha = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$  получаем знакомое неравенство

Второе неравенство аналогично

**Доказательство  $\Leftarrow$**

Очевидно из предыдущего доказательства

**Следствие**

$f$  строго выпукла  $\Leftrightarrow$  строгое неравенство в теореме

### Замечание

Если  $f, g$  – выпуклые на  $\langle a, b \rangle$ , то  $f + g$  – выпуклая  
 $f$  – выпуклая, то  $-f$  – вогнутая

### Теорема об односторонней дифференцируемости выпуклой функции

$f$  – выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\forall x \in (a, b) \exists f'_+(x), f'_-(x)$  – конечные

$$\text{и } \forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 \leq x_2 \quad f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$

### Доказательство

Сделать предельный переход в лемме о 3 хордах

$$g(\xi) := \frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1}, \xi \in (a, b) \setminus \{x_1\}$$

$g(\xi) \uparrow$  по лемме о 3 хордах

При  $\xi \in (x_1, x_2)$

Т.к. функция монотонна,  $\exists \lim_{\xi \rightarrow x_1+0} g(\xi)$

Возьмем  $\xi_0 \leq \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \xi_3 < x_2 < \xi_4 \leq \xi_5$

Из лемм о трех хордах(средние неравенства) и монотонности(крайние неравенства):

$$\frac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1} \leq \frac{f(\xi_1) - f(x_1)}{\xi_1 - x_1} \leq \frac{f(\xi_2) - f(x_1)}{\xi_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(\xi_3) - f(x_2)}{\xi_3 - x_2} \leq \frac{f(\xi_4) - f(x_2)}{\xi_4 - x_2} \leq \frac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$$

Пусть  $\xi_1 \rightarrow x_1 - 0, \xi_2 \rightarrow x_1 + 0, \xi_3 \rightarrow x_2 - 0, \xi_4 \rightarrow x_2 + 0$

$$\text{Отсюда } C_0 \leq f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2) \leq C_5,$$

$$\text{где } C_0 = \frac{f(\xi_0) - f(x_1)}{\xi_0 - x_1}, C_5 = \frac{f(\xi_5) - f(x_2)}{\xi_5 - x_2}$$

Отсюда производные конечные(ограничены  $C_0$  и  $C_5$ )

### Воспоминания о прошлом семестре

Если  $\exists f'_+(x_0)$ , то  $f$  – непрерывна справа в  $x_0$

### Следствие

$f$  – выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда она непрерывна на  $(a, b)$

(т.к. у нее есть левосторонние и правосторонние производные, то она непрерывна слева и справа, т.е. непрерывна)

### Контр-пример для $[a, b]$

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) = 2$$

$$f(x) = x^2, x \in (a, b)$$

Функция выпукла, но не непрерывна на  $[a, b]$

### Теорема

$f$  – дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f$  – выпуклая вниз на  $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow$  график расположен не ниже любой касательной, т.е.  $\forall x_0, x \in \langle a, b \rangle f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Требуемое неравенство есть в предыдущей теореме

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Возьмем  $x_1 < x_0 < x_2$

$$\text{Тогда } \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

По лемме о трех хордах  $f$  – выпуклая

### Определение

Пусть имеется выпуклая фигура  $A \subset \mathbb{R}^2$

$b \in A$  – граничная точка

Прямая  $l : b \in l$  – опорная прямая, если  $A$  полностью содержится в одной из полуплоскостей, образованных прямой

### Утверждение

$f$  – выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\forall x \in \langle a, b \rangle$  через  $(x, f(x))$  можно провести опорную прямую к над-графику  $f$

(для  $x \in (a, b)$  есть односторонняя дифференцируемость, можем провести одностороннюю касательную)

(для  $x = a$  и  $x = b$  можем провести вертикальные прямые или касательные, если односторонние производные есть и конечны)

### Утверждение 2

Если  $A \subset \mathbb{R}^2$  – замкнутая и ограниченная выпуклая фигура, то через каждую граничную точку можно провести опорную прямую

**Доказательство**

Возьмем точку  $b$

Докажем, что для нее можно провести опорную прямую

Для этого выберем оси  $X, Y$  так, чтобы проекция  $b$  на  $X$  была внутренней точкой проекции фигуры на  $X$

Теперь определим функцию  $f(x) := \inf(y : (x, y) \in A)$  – нижнюю часть границы фигуры

Данная функция выпуклая, а значит в точке  $b$  к ней можно провести опорную прямую

**Замечание**

$f$  – выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f$  дифференцируема на  $\langle a, b \rangle$  всюду, кроме не более чем счетного множества точек (возможно, пустого)

**Доказательство**

Пусть  $E$  – множество точек, где не существует производной

Но существуют  $f'_-(x) < f'_+(x)$

Тогда  $\forall x_1 < x_2 \in E \quad f'_-(x_1) < f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) < f'_+(x_2)$

Тогда для  $x \in E$  построим отображение  $q(x) \in (f'_-(x), f'_+(x)) \cap \mathbb{Q}$

$q : E \rightarrow \mathbb{Q}$  – инъекция

Отсюда  $E$  не более чем счетно

**Теорема (дифференциальный критерий выпуклости)**

1.  $f$  – непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда  $f$  – выпукла (строго выпукла)  $\Leftrightarrow f'$  возрастает (строго возрастает)

**Доказательство  $\Rightarrow$**

По теореме об односторонней дифференцируемости  $f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2)$  при  $x_1 < x_2$

( $f'_- = f'$  из дифференцируемости)

Знак строгий, если  $f$  строго выпукла (смотри доказательство теоремы)

**Доказательство  $\Leftarrow$**

Проверим лемму о трех хордах

$x_1 < x_2 < x_3$

Тогда  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi_1), x_1 < \xi_1 < x_2$  – по т. Лагранжа

$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} = f'(\xi_2), x_2 < \xi_2 < x_3$

Из возрастания  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$  (при строгом возрастании знак  $<$ )

2.  $f$  – непрерывна на  $\langle a, b \rangle$ , дважды дифференцируема на  $(a, b)$

Тогда  $f$  – выпукла  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

**Доказательство**

$f'$  – возрастает  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$

**Пример 1**



При  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$   $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$

При  $x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2}$  достигается равенство

**Доказательство**

$(\sin x)' = \cos x$  — строго убывает на промежутке

Тогда функция строго вогнутая на промежутке

Отсюда значение функции строго выше хорды, соединяющей  $(0, 0)$  и

$(\frac{\pi}{2}, 1)$  (ее уравнение  $y = \frac{2}{\pi}x$ )

## 4 Верхний и нижний предел

**Определение**

Частичный предел последовательности = предел вдоль подпоследовательности

**Пример**

$$x_n = (-1)^n$$

$-1, 1$  — частичные пределы  $x_n$

**Пример**

$$\forall a \in [-1, 1] \exists n_k : \sin n_k \rightarrow a$$

**Определение 2**

$x_n$  — вещественная последовательность

$y_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$  — верхняя огибающая

$z_n = \inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \in \overline{\mathbb{R}}$  — нижняя огибающая

Верхний предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

Нижний предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

**Замечание**

1.  $y_n \geq y_{n+1} \geq \dots, z_n \leq z_{n+1} \leq \dots$
2.  $\forall n \ z_n \leq x_n \leq y_n$
3. При изменении конечного числа  $x_n$  изменяется конечное число  $y_n, z_n$

**Пример**

1.  $x_n = (-1)^n$   
 $\overline{\lim} x_n = 1, \underline{\lim} x_n = -1$

$$2. \ x_n = (1 + (-1)^n)n$$

$$\overline{\lim} x_n = +\infty, \underline{\lim} x_n = 0$$

### Свойства

1.  $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2.  $x_n \leq \tilde{x}_n$   
Тогда  $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n$   
 $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3.  $\forall \lambda \geq 0$  ( $0 \cdot \infty =: 0$ )  
 $\overline{\lim} \lambda x_n = \lambda \overline{\lim} x_n$   
 $\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$
4.  $\forall \lambda < 0$   
 $\overline{\lim} \lambda x_n = -\lambda \underline{\lim} x_n$   
 $\underline{\lim} \lambda x_n = -\lambda \overline{\lim} x_n$
5.  $\overline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} \tilde{x}_n$   
 $\underline{\lim}(x_n + \tilde{x}_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} \tilde{x}_n$   
(если сумма в правой части имеет смысл)
6.  $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$   
Тогда  $\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$   
**Доказательство**  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall k > N_0 \ x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$   
Возьмем  $\sup_{k \geq N}$  для некоего  $N > N_0$   
 $y_N + l - \varepsilon < \sup_{k \geq N} (x_k + t_k) < y_N + l + \varepsilon$   
Возьмем предел  $N \rightarrow +\infty$   
 $\overline{\lim} x_n + l - \varepsilon \leq \overline{\lim}(x_k + t_k) \leq \overline{\lim} x_n + l + \varepsilon$
7.  $t_n \rightarrow l > 0, l \in \mathbb{R}$   
Тогда  $\overline{\lim} t_n x_n = l \overline{\lim} x_n$

### Техническое описание верхнего предела

1.  $\overline{\lim} x_n = +\infty \Leftrightarrow x_n$  – не ограничено сверху
2.  $\overline{\lim} x_n = -\infty \Leftrightarrow x_n \rightarrow -\infty$

3.  $\overline{\lim} x_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A + B$   
 $A : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n < l + \varepsilon$   
 $B : \forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N : l - \varepsilon < x_n$

**Доказательство 1**

Очевидно в обе стороны

**Доказательство 2  $\Rightarrow$**

$$x_n \leq y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

**Доказательство 2  $\Leftarrow$**

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall A \exists N : \forall n > N x_n < A \text{ (а значит } y_n \leq A)$$

Отсюда  $y_n \rightarrow -\infty$

**Доказательство 3  $\Rightarrow$**

$$y_n \downarrow, l = \lim y_n = \inf y_n$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$

$$\text{Тогда } \exists N : y_N < l + \varepsilon \Rightarrow \forall n > N x_n < l + \varepsilon$$

Отсюда  $A$  – доказано

$$\forall N y_n > l - \varepsilon \Rightarrow \exists n > N : l - \varepsilon < x_n \leq y_N$$

**Доказательство 3  $\Leftarrow$**

$$A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N y_n \leq l + \varepsilon$$

$$B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N l - \varepsilon \leq y_n$$

Отсюда  $y_n \rightarrow l$

**Теорема**

$$(x_n) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n (= \lim x_n)$$

**Доказательство  $\Rightarrow$**

$$1. \lim x_n = +\infty \Rightarrow \underline{\lim} x_n = +\infty \leq \overline{\lim} x_n$$

$$2. \lim x_n = -\infty \Rightarrow \overline{\lim} x_n = -\infty \geq \underline{\lim} x_n$$

$$3. \lim x_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда из А и В } \overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = l$$

**Доказательство  $\Leftarrow$**

$$z_n \leq x_n \leq y_n$$

$$\text{Тогда } \underline{\lim} x_n \leq \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

**Теорема о характеристизации частичных пределов**

$$(x_n) \in \mathbb{R}$$

1. Если  $l$  – частичный предел  $x_n$  (существует по принципу выбора Больцано-Вейерштрасса), то  $\underline{\lim} x_n \leq l \leq \overline{\lim} x_n$

### Доказательство

$$z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}, k \rightarrow +\infty$$
$$\liminf x_n \leq l \leq \limsup x_n$$

$$2. \exists x_{n_k} \rightarrow \overline{\lim} x_n, \exists x_{m_k} \rightarrow \underline{\lim} x_n$$

### Доказательство для $\lim x_n$

Если  $\lim x_n = +\infty$ , то  $x_n$  не ограничена сверху

Если  $\lim x_n = -\infty$ , то  $\lim x_n = -\infty$

Если  $\lim x_n = l$ , то по А, В:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_k : l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$$

Будем выбирать  $n_{k+1} > n_k$

Тогда  $x_{n_k} \rightarrow l$

### Пример

$$\overline{\lim} \sin n = 1, \underline{\lim} \sin n = -1$$

$$\forall l \in (-1, 1) \exists n_k : \sin n_k \rightarrow l$$

### Замечание

И множество  $\{\sin n, n \in \mathbb{N}\}$  плотно на  $[-1, 1]$

### Доказательство

$$\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \sin n \neq \sin m$$

Т.е. невозможно  $n = m + 2\pi k, \pi - m + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Будем двигаться по окружности с шагом  $l_1 = 1$

Движение с шагом  $6l_1$  равносильно движению с шагом  $l_2 := |6l_1 - 2\pi|$  в противоположную сторону

Т.о. мы научились двигаться с шагом  $l_2$

Будем по индукции уменьшать  $l_i$

$$\text{Пусть } |ml_i| < 2\pi, |(m+1)l_i| > 2\pi, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } l_{i+1} := \min(2\pi - ml_i, (m+1)l_i - 2\pi)$$

$$\text{Заметим, что т.к. } 2\pi \in (ml_i, (m+1)l_i), \text{ то } l_{i+1} \leq \frac{l_i}{2}$$

Рассмотрим отрезок в  $[-1, 1]$

Ему соответствует отрезок  $[a, b], a, b \in [0, 2\pi)$  на окружности

$$\text{Пусть } l = b - a$$

Подберем  $l_k < l$

$$\text{Тогда для некоторого } q \in \mathbb{N} ql_k \in [a, b]$$

Т.о.  $\sin ql_k$  будет лежать в нашем отрезке. Отсюда  $\sin n$  плотно в  $[-1, 1]$

Докажем, что  $\forall \alpha \in [-1, 1] \exists q_i : \lim q_i \rightarrow \alpha$

Возьмем некоторую окрестность  $\alpha$

Будем генерировать последовательность, лежащую в этой окрестности, и сдвигать границу

## 5 Несобственный интеграл

### Определение

1.  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$  – допустимая, если  $\forall A \in (a, b)$   $f|_{[a, A]}$  – кусочно непрерывная

2.  $\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$

Если  $\exists \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ , то он называется несобственным интегралом  $f$  на  $[a, b)$

Отношение:  $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$

Если  $\nexists \lim \Phi(A)$  – несобственный интеграл не существует

Если  $\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A)$  – конечный, то интеграл сходится

Если  $\lim_{A \rightarrow b-0} = \infty$  – интеграл расходится

Аналогично определяем  $\int_{\rightarrow a}^b f(x) dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_{-\infty}^c f + \int_c^{+\infty} f$$

### Пример

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty$$

### Пример

$$\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +0} \ln A = +\infty$$

$$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, -\infty \leq a < b \leq +\infty$$

$$x_1 < \dots < x_n \in (a, b), n - \text{нечетное}$$

Пусть  $f$  допустимо на каждом из промежутков  $(a, x_1], [x_1, x_2), (x_2, x_3], [x_3, x_4), \dots, [x_n, b)$

Тогда  $\int_a^b f = \int_{\rightarrow a}^{x_1} f + \int_{x_1}^{\rightarrow x_2} f + \int_{\rightarrow x_2}^{x_3} f + \dots + \int_{x_n}^{\rightarrow b} f$

Если хотя бы один интеграл не существует или сумма некорректная (есть  $+\infty$  и  $-\infty$ ), то интеграл расходится

**Пример**

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \underbrace{\int_{-1}^{\rightarrow 0} \frac{1}{x} dx}_{-\infty} + \underbrace{\int_{\rightarrow 0}^1 f}_{+\infty}$$

Данный интеграл расходится

**Свойства**

1. Критерий Больцано-Коши о сходимости несобственного интеграла  
 $f$  – допустимая на  $[a, b)$   $-\infty < a < b \leq +\infty$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f$  – сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) : \forall A, B \in (\delta, b) \mid \int_A^B f \mid < \varepsilon$

**Доказательство**

$\exists \lim_{R \rightarrow b-0} \Phi(R) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (a, b) \forall A, B \in (\delta, b) \mid \Phi(A) - \Phi(B) \mid < \varepsilon$  – критерий Больцано-Коши

$\int f$  – расходится  $\Rightarrow \exists A_n, B_n \rightarrow b-0 : \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0$

**Пример**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx, A_n = n, B_n = 2n$$

Тогда  $\int_n^{2n} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{2n}n = \frac{1}{2}$  – расходится

**Пример**

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx, A_n = \frac{1}{2n}, B_n = \frac{1}{n}$$

$$\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx \geq 2n \frac{1}{2n} = 1$$

2. Аддитивность по промежутку

$f$  – допустима  $[a, b), c \in (a, b)$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_c^{\rightarrow b} f$  сходятся/расходятся одновременно

И в случае сходимости  $\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$

**Следствие**

Если  $\int_a^{\rightarrow b} f$  — сходится, то  $\int_A^{\rightarrow b} f \xrightarrow{A \rightarrow b-0} 0$

3.  $f, g$  — допустимы на  $[a, b)$ ,  $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$  — сходятся,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда  $\lambda f, f \pm g$  — допустимы  $\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} (f+g) = \int_a^{\rightarrow b} f + \int_a^{\rightarrow b} g$

4.  $\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$  — существуют в  $\overline{\mathbb{R}}, f \leq g$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$

5.  $f, g$  — дифференцируемые на  $[a, b)$   
 $f', g'$  — допустимы на  $[a, b)$

Тогда\*  $\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g \Big|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$ , где  $f g \Big|_a^{\rightarrow b} = (\lim_{B \rightarrow b-0} f g(b)) - f(a)$

\* — если здесь существуют два предела из трех, то существует и третье и равенство выполняется

6.  $\phi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \phi \in C^1$

Пусть  $\exists \phi(\beta-0) \in \overline{\mathbb{R}}$

$f \in C\langle A, B \rangle$

Тогда\*  $\int_{\phi(\alpha)}^{\beta} (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\rightarrow \phi(\beta-0)} f$

\* — если существует один интеграл, то существует и другой

### Замечание

Это означает, что мы можем начать вычислять интеграл, не зная, существует ли он. Тогда если посчитать его удалось, то он существует

Т.к. свойства собственных и несобственных интегралов одинаковые, то с этого момента стрелочку писать не будем

### Лемма об интегрировании асимптотических равенств

$f, g \in C[a, b), g \geq 0, \int_a^b g(x) dx = +\infty$

$$F(x) := \int_a^x f, G(x) := \int_a^x g, x \in [a, b)$$

Тогда при  $x \rightarrow b-0$  из  $f = O(g)/f = o(g)/f \sim g$

Следует  $F = O(G)/F = o(G)/F \sim G$

**Доказательство**

1.  $f = O(g)$

$$\exists M \exists x_0 : \forall x \in [x_0, b) |f(x)| \leq M|g(x)|$$

$$\text{Пусть } \int_a^{x_0} |f| = C_1$$

Выберем  $x_1 \in (x_0, b)$  такую, что  $\int_{x_0}^{x_1} |g| = \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \text{При } x > x_1 \quad |F(x)| &= \left| \int_a^x |f| \right| = \int_a^{x_0} |f| + \int_{x_0}^{x_1} |f| \leq C_1 + M \int_{x_0}^x g \leq \\ \frac{C_1}{\alpha} \int_{x_0}^{x_1} g + M \int_{x_0}^x g &\leq \left( \frac{C_1}{\alpha} + M \right) \int_{x_0}^x g = \left( \frac{C_1}{\alpha} + M \right) G(x) \end{aligned}$$

2. Аналогично

3. Из эквивалентности  $F(x) \rightarrow +\infty$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F}{G} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = 1$$

**Лемма**

Пусть  $\phi_n$  – шкала асимптотического разложения при  $x \rightarrow b-0$  на  $[a, b)$

$$\phi_n \in C[a, b), \phi_n \geq 0$$

$$\Phi_n := \int_x^b \phi_n(x) \quad (\text{считаем, что } \forall n - \text{сходится})$$

Тогда

1.  $\Phi_n$  – шкала

2.  $f \in C[a, b), F(x) = \int_x^b f$  – сходится

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(x) + o(\phi_n)$$

$$\text{Тогда } F = \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k + o(\Phi_n)$$

**Доказательство**



1. По правилу Лопиталя

$$\forall n \Phi_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\Phi'_{n+1}}{\Phi'_n} = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{-\phi_{n+1}}{-\phi_n} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{F(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \Phi_k}{\Phi_n(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k}{\phi_n(x)} = 0$$

## 5.1 Признаки сходимости несобственного интеграла

### Теорема

$f \geq 0$

1.  $f$  – допустима на  $[a, b)$ ,  $f \geq 0$ ,  $\Phi(A) = \int_a^A f$

Тогда  $\int_a^b f$  – сходится  $\Leftrightarrow \Phi$  – ограничена на  $[a, b)$

#### Доказательство

$$\lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) = [\Phi \uparrow] = \sup \Phi(A)$$

2. *Признак сравнения*

$f, g$  – допустимы на  $[a, b)$ ,  $f, g \geq 0$

- (а) Пусть  $f \leq g$

Тогда если  $\int_a^b g$  – сходится, то и  $\int_a^b f$  – сходится

Если  $\int_a^b f$  – расходится, то и  $\int_a^b g$  – расходится

- (б) Пусть  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = l < +\infty$

Тогда если  $\int_a^b g$  – сходится, то и  $\int_a^b f$  – сходится

- (с) Пусть  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = m > 0$  (вероятно  $m = +\infty$ )

Тогда если  $\int_a^b f$  – сходится, то и  $\int_a^b g$  – сходится

**Замечание**

Если  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} \in (0, \infty)$ , то интегралы  $f, g$  сходятся одновременно

**Доказательство**

- (а)  $\Phi(A) = \int_a^A f, \Psi(A) = \int_a^A g$   
 $f \leq g \Rightarrow \Phi(A) \leq \Psi(A)$ , обе  $\uparrow$   
 $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \Psi$  — ограничена  $\Rightarrow \Phi$  ограничена  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится  
 $\int_a^b f$  — расходится  $\Rightarrow \Phi$  — не ограничена  $\Rightarrow \Psi$  не ограничена  
 $\Rightarrow \int_a^b g$  — расходится
- (б)  $\frac{f}{g} \rightarrow l < L < +\infty$   
 Тогда  $\exists c \in [a, b) : f \leq Lg$  на  $[c, b)$   
 Т.е.  $\int_a^b g$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b Lg$  — сходится  $\Rightarrow \int_a^b f$  — сходится
- (с) Аналогично

**Пример**

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  — при  $p > 1$  сходится, иначе расходится

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  — при  $p < 1$  сходится, иначе расходится

(Чтобы не путаться, можно посмотреть, что происходит в  $p = 1$ )

**Метод "удавить логарифм"**

Пусть есть интеграл  $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$

(Нижняя граница не важна)

Определим, сходится ли он

1.  $\alpha > 1, \alpha = 1 + 2a, a > 0$

Тогда  $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1+a}} \frac{1}{x^a (\ln x)^\beta}$

Утверждается, что  $x^a (\ln x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (упражнение на правило Лопиталя)

Тогда  $\exists x_0 : \forall x > x_0 \ x^a (\ln x)^\beta > 1$

А значит с некоторого места  $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{1+a}}$

Тогда выражение сходится по признаку сходимости

2.  $\alpha < 1, \alpha = 1 - 2a, a > 0$

Тогда  $\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \frac{1}{x^{1-a}} \frac{1}{x^{-a} (\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$

$x^{-a} (\ln x)^\beta \rightarrow +0$

$\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} > \frac{1}{x^{1-a}}$

Тогда выражение расходится по признаку сходимости

3.  $\alpha = 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^\beta}$$

При  $b > 1$  – сходится

При  $b \leq 1$  – расходится

### Определение

Гамма-функция Эйлера  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$

$\square g(t, x) = x^{t-1} e^{-x}$

1. Определим сходимость  $g(t, x)$  в  $x \rightarrow +0$

$x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1}$  при  $x \rightarrow +0$  – сходится при  $t > 0$

Определим сходимость  $g(t, x)$  в  $x \rightarrow +\infty$

$$x^{t-1} e^{-x} = \underbrace{x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

2.  $\Gamma(t)$  выпукла на  $(0, +\infty)$  :

$\forall x > 0 \ g(t, x)$  – выпуклая

$$g(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2, x) \leq \alpha g(t_1, x) + (1 - \alpha)g(t_2, x)$$

$$\int_0^{+\infty} g(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2, x) dx \leq \alpha \int_0^{+\infty} g(t_1, x) dx + (1 - \alpha) \int_0^{+\infty} g(t_2, x) dx$$

Отсюда  $\Gamma(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \leq \alpha \Gamma(t_1) + (1 - \alpha)\Gamma(t_2)$

Следствие –  $\Gamma$  дифференцируема на  $(0, +\infty)$

$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$$

$$\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + t \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$3. \Gamma(1) = 1$$

Тогда  $\Gamma(n+1) = n!$

**Следствие**

$$\Gamma(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{t} \underset{t \rightarrow +0}{\sim} \frac{1}{t}$$

$$4. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \underset{x=y^2}{=} 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy}_{\text{интеграл Эйлера-Пуассона, } \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \sqrt{\pi}$$

**Лемма**

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Доказательство**

$$1 - y^2 \leq e^{-y^2} \leq \frac{1}{1 + y^2} - \text{переписанное } e^t \geq 1 + t$$

$$\int_0^1 (1 - y^2)^n dy \leq \int_0^1 e^{-ny^2} dy \leq \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1 + y^2)^n}$$

$$\int_0^1 (1 - y^2)^n dy \underset{y=\cos t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt =: w_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1 + y^2)^n} \underset{y=\tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2} dt = w_{2n-2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n}$$

$$\text{По формуле Валлиса } \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{\pi}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!} \frac{1}{\sqrt{n-1}}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-ny^2} dy \underset{z=\sqrt{n}y}{=} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Определение**

Пусть  $f$  — допустима на  $[a, b]$

$\int_a^{+b} f$  — абсолютно сходимый, если

1. Он сходится

$$2. \int_a^{\rightarrow b} |f| - \text{сходится}$$

### Теорема

Пусть  $f$  – допустима на  $[a, b)$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

$$1. \int_a^b f \text{ абсолютно сходится}$$

$$2. \int_a^b |f| \text{ сходится}$$

$$3. \int_a^b f^+, \int_a^b f^- \text{ оба сходятся}$$

**Доказательство**  $1 \Rightarrow 2$

Очевидно

**Доказательство**  $2 \Rightarrow 3$

$0 \leq f^+ \leq |f|, 0 \leq f^- \leq |f|$ . Тогда по признаку сходимости

**Доказательство**  $3 \Rightarrow 1$

$$f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$$

### Примеры

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, p \in \mathbb{R}$$

При каких  $p$  сходится, абсолютно сходится?

$$\left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}, p > 1 - \text{абсолютно сходится (и сходится)}$$

$$p \leq 0: \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \frac{\sin x}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi k)^p} \int_{2\pi k}^{2\pi k + \pi} \sin x = \frac{2}{(2\pi k)^p} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

Это же рассуждение и для  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right|$  – расходится

$$0 < p \leq 1: \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \left[ \begin{array}{cc} f = \frac{1}{x^p} & g' = \sin x \\ f' = -\frac{p}{x^{p+1}} & g = -\cos x \end{array} \right] = \frac{-\cos x}{x^{p+1}} \Big|_1^{+\infty} -$$

$$p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx - \text{сходится}$$

$$\text{Рассмотрим } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$$

Возможны следующие доказательства:

1. Заметим, что в большинстве точек  $|\sin x| \geq 10^{-6}$ . Тогда в большинстве точек  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx \geq 10^{-6} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  – расходится  
(Другими словами: проинтегрируем по множеству точек, где  $|\sin x| \geq 10^{-6}$ )
2.  $|\sin x| \geq \sin^2 x$   
 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{сходится}} - \text{расходится}$
3.  $\int_{2\pi k}^{3\pi k} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_{2\pi k}^{3\pi k} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{3\pi k} \int_{2\pi k}^{3\pi k} |\sin x| = \frac{2}{3\pi} \not\rightarrow 0 - \text{отсюда}$   
расходится

#### Замечание

$$\int_a^b f(x) dx \text{ сходится} \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$$

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ сходится} \not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$$

## 6 Несколько классических неравенств

### Неравенство Йенсена

$f$  – выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\forall a_1, \dots, a_n \in \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 : \sum_i \alpha_i = 1 \quad f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq$

$$\sum_i \alpha_i f(x_i)$$

#### Доказательство

$$x^* := \sum_i \alpha_i x_i$$

$$\text{Тогда } x^* \leq \sum_i \alpha_i (\max_i x_i) = \max_i x_i$$

$$\text{Аналогично } x^* \geq \min_i x_i$$

$$\text{Тогда } x^* \in \langle a, b \rangle$$

Проведем в  $x^*$  опорную прямую  $y = kx + b$

$$f(x^*) = kx^* + b = k \sum_i \alpha_i x_i + b \sum_i \alpha_i = \sum_i \alpha_i (kx_i + b) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i) - \text{из}$$

выпуклости

Заметим, что в  $a, b$  последний переход может не выполняться, если опорная прямая вертикальная. Но тогда  $x^* = \max_i x_i = \min_i x_i \Rightarrow \forall x_i : \alpha_i = 0 \vee x^* = x_i$ , что доказывается тривиально

### Пример

Неравенство Коши

$$\forall a_1, \dots, a_n > 0 \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

**Доказательство**

$$\ln\left(\frac{1}{n}a_1 + \dots + \frac{1}{n}a_n\right) \geq \frac{1}{n}(\ln a_1 + \dots + \ln a_n)$$

Применим неравенство для вогнутых функций

**Интегральное неравенство Йенсена**

$f$  – выпуклая на  $\langle A, B \rangle$

$\phi : [a, b] \rightarrow \langle A, B \rangle$  – непрерывная

$\lambda : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\int_a^b \lambda(x) dx = 1$  – непрерывная

$$\text{Тогда } f\left(\int_a^b \lambda(x)\phi(x) dx\right) \leq \int_a^b \lambda(x)f(\phi(x)) dx$$

**Доказательство**

Докажем для случая  $\lambda > 0$  в силу сложности доказательства в общем случае

$$x^* = \int_a^b \lambda(x)\phi(x) dx \leq \max \phi \int_a^b \lambda(x) dx, \geq \min \phi \int_a^b \lambda(x) dx$$

Рассмотрим  $y = kx + l$  – опорную прямую в  $x^*$

$$f(x^*) = kx^* + l = \int_a^b \lambda(k\phi + l) \leq \int_a^b \lambda(x)f(\phi(x)) dx$$

Тут существует проблема, аналогичная предыдущей теореме. Но выкинуть все точки, где  $\lambda = 0$  мы не можем, т.к. получившееся множество будет сложным

**Пример (Продолжение)**

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \text{среднее арифметическое } f \text{ на } [a, b]$$

$$\text{Тогда среднее геометрическое} - \text{это } \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx\right)$$

**Теорема**

$\phi \in C[a, b], \phi > 0$

Тогда  $\ln\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(x) dx\right) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln \phi(x) dx$

**Доказательство**

$f(t) = \ln t$  – вогнутая

Применим неравенство Йенсена:  $\phi$  – это  $\phi$

$$\lambda(x) = \frac{1}{b-a}$$

**Неравенство Гельдера**

Пусть  $a_i, b_i > 0$

Заметим, что  $\forall p > 1 \exists q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, q$  – сопряженный

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_i b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**Доказательство**

$f(x) = x^p, p > 1$  – выпуклая при  $x > 0$

По неравенству Йенсена  $\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)^p \leq \sum_i \alpha_i x_i^p$

$$\alpha_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j^q}. \text{ Тогда } \alpha_i > 0, \sum_i \alpha_i = 1$$

$$x_i := a_i b_i^{-\frac{1}{p-1}} \left(\sum_j b_j^q\right)$$

$$\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)^p = \left(\sum_i a_i b_i^{q-\frac{1}{p-1}}\right)^p = \left(\sum_i a_i b_i\right)^p$$

$$\sum_i \alpha_i x_i^p = \sum_i \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{p}{p-1}} \left(\sum_j b_j^q\right)^p = \sum_i \left(a_i^p \left(\sum_j b_j^q\right)^{p-1}\right) = \left(\sum_i a_i^p\right) \left(\sum_j b_j^q\right)^{p-1}$$

$$\left(\sum_i a_i b_i\right)^p \leq \left(\sum_i a_i^p\right) \left(\sum_j b_j^q\right)^{p-1}$$

Возведем в степень  $\frac{1}{p}$

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_j b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**Замечание**

В неравенстве Йенсена равенство достигается при  $x_1 = \dots = x_n$

Отсюда в неравенстве Гельдера = достигается при  $\forall i, j \ x_i = x_j \Leftrightarrow x_i^p = x_j^p = \lambda \Leftrightarrow a_i^p b_i^{-q} = a_j^p b_j^{-q} = \lambda \Leftrightarrow a_i^p = \lambda b_i^q$

Т.е. вектора  $(a_i^p)_i \parallel (b_j^q)_j$

**Замечание**



$$|\sum_i a_i b_i| \leq \sum_i |a_i b_i| \leq (\sum_i |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_i |b_i|^q)^{\frac{1}{q}} - \text{общий вид неравенства}$$

Гельдера

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

Равенство при  $(\vec{a}_i)_i \| (\vec{b}_j)_j$

**Интегральное неравенство Гельдера**

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$$

$$\text{Тогда } \int_a^b |fg| \leq (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

**Доказательство**

$$x_k := a + k \frac{b-a}{n}, k = 0 \dots n$$

$$a_k := f(x_k) \left( \frac{b-a}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, b_k := g(x_k) \left( \frac{b-a}{n} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_k a_k b_k = \sum_k |f(x_k) g(x_k)| \frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |fg|$$

$$\left( \sum_k a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_k |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left( \sum_k b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \left( \int_a^b |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Замечание**

При  $p = 2$  неравенство Гельдера = КБШ

**Неравенство Минковского**

$$p \geq 1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \left( \sum_i |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_i |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_i |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Это утверждение о том, что  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \left( \sum_i |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  – норма в  $\mathbb{R}^n$

**Доказательство**

Если  $p = 1$ , очевидно

Если  $p > 1$ :

Пусть  $a_i, b_i > 0$

$$\text{Тогда } \sum_i a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum_i a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_i b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq \left( \sum_i b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_i (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } (\sum_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} &\leq ((\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i b_i^p)^{\frac{1}{p}})(\sum_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}} \\ (\sum_i (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{p}} &\leq (\sum_i a_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_i b_i^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Для произвольных  $a_i, b_i$  заметим, что  $(\sum_i |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_i (|a_i| + |b_i|)^p)^{\frac{1}{p}}$

### Неравенство Минковского – интегральный вид

$f, g \in C[a, b], p \geq 1$

$$\text{Тогда } (\int_a^b |f + g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_a^b |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

**Доказательство:** самостоятельно

## 7 Ряды

### 7.1 Простейшие свойства

Пусть  $(a_n)$  – вещественная последовательность. Тогда  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$  – числовой ряд

$S_N = a_1 + \dots + a_N$  – частичная сумма

Если  $S = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$  – существует и конечен, то говорят, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится к  $S$  – сумме ряда

Если существует  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \pm\infty$  – ряд расходится, сумма –  $\pm\infty$

Если  $\nexists \lim S_N$  – ряд расходится

#### Замечание

1. Суммирование может быть с любой точки

2.  $a_n = S_n - S_{n-1}$

Тогда возможно построить последовательность с любой последовательностью частичных сумм

#### Примеры

$$e^x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

**Доказательство**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^{c_{n,x}}(n+1)!x^{n+1}$$

$$C_{n,x} \in [0, x]$$

$$\text{Тогда } S_n = e^x - \frac{e^{C_{n,x}}}{(n+1)!}x^{n+1} \xrightarrow{x \text{ — фиксированное}} e^x$$

**Теорема о иррациональности  $e^2$**

$e^2$  иррационально

**Доказательство**

Пусть это не так. Тогда  $e^2 = \frac{2k}{n}$  (не требуем несократимости)

$$en = 2ke^{-1}$$

$$en(2k-1)! = (2k)!e^{-1}$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in [0, 1]$$

$$(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!} + \dots)n(2k-1)!$$

$$= \underbrace{(1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)!})n(2k-1)!}_{\text{целое число}} + \underbrace{n(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k \cdot 2k+1} + \dots)}_{\leq n\frac{1}{2k} + n\frac{1}{(2k)^2} + \dots = \frac{\frac{n}{2k}}{1 - \frac{1}{2k}} = \frac{e^{-2}}{1 - \frac{1}{2k}} \leq 2e^{-2} < \frac{1}{3}}$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, c \in [0, 1]$$

$$(2k)!e^{-1} = (2k)!\underbrace{(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{(2k-1)!} + \frac{1}{(2k)!})}_{\text{целое}}$$

$$+ \underbrace{(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} - \dots)}_{\text{отр. и по модулю не превосходит } \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \dots < \frac{1}{3}}$$

отр. и по модулю не превосходит  $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \dots < \frac{1}{3}$

Т.о. слева число чуть больше целого, а справа — чуть меньше целого

Тогда равенство не выполняется. Отсюда  $e^2$  иррациональное

**Признаки Абеля и Дирихле**

1. (Дирихле)  $f$  — допустима на  $[a, b]$

$$F(A) := \int_a^A f \, dx, F \text{ — ограничена}$$

$$g \in C^1, g(x) \text{ — монотонна на } [a, b], g(x) \rightarrow 0$$

$$\text{Тогда } \int_a^{\rightarrow b} fg \, dx \text{ — сходится}$$

2. (Абеля)  $f$  – допустима на  $[a, b)$ ,  $\int_a^{\rightarrow b} f \, dx$  – сходится  
 $g \in C^1, g(x)$  – монотонна и ограничена  
 Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} fg \, dx$  – сходится

### Доказательство 1

Проинтегрируем по частям:  $\int_a^A fg = \underbrace{Fg \Big|_a^A}_{F(A)g(A) \xrightarrow{A \rightarrow b-0} 0} - \int_a^A Fg'$

Т.к.  $F$  ограничена, то для некоторого  $C$   $|F(x)| \leq C$   
 Тогда  $|Fg'| \leq \underbrace{\pm}_{\text{Зависит от знака } g} Cg$

Отсюда  $\int_a^A Fg'$  абсолютно сходится

### Доказательство 2

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} S \in \mathbb{R}$

$\int_a^A f(g - S + S) \, dx = \underbrace{\int_a^A f(g - S)}_{\text{сходится по Дирихле}} + \underbrace{\int_a^A fS \, dx}_{\xrightarrow{A \rightarrow b-0} S \int_a^{\rightarrow b} f}$

### Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

### Лемма

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

### Доказательство

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin((k + \frac{1}{2})x) - \sin((k - \frac{1}{2})x)$$

$$\int_0^\pi (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) \, dx = 0 = \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} \, dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} \, dx = \int_{y=(n+\frac{1}{2})x}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} \, dx = \int_0^\pi \sin(n + \frac{1}{2})x \cdot h(x) \, dx = \dots, h(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right. - \text{бесконечно дифференцируема на } [0, \pi]$$

$$\dots = \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})x \cdot h(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos(n + \frac{1}{2})x \cdot h' = O(\frac{1}{n})$$

$$\text{Отсюда } \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{x} = \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} + O(\frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n})$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

### Задача

Пусть 5 кузнечиков расположены в вершинах правильного пятиугольника. Один кузнечик сидит в начале координат и не может двигаться. Остальные кузнечики могут совершить прыжок через другого, оказавшись в точке, симметричной относительно данного. Вопрос: могли ли кузнечики оказаться в вершинах правильного пятиугольника большего размера?

### Решение

Зададим матрицу кузнечиков:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

Если кузнечик  $a$  прыгает через кузнечика  $b$ , то он окажется в точке  $2b - a$

Тогда матрица перехода имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{-1}_{(a,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{2}_{(b,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Если кузнечик  $a$  перепрыгивает через нулевого, то матрица перехода

имеет вид 
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \underbrace{-1}_{(a,a)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства матриц:

1. (a)  $\det = \pm 1$   
(b) На  $a_{ii}$  – нечетные, на  $a_{ij}$  – четные
2. Любая матрица, удовлетворяющая свойствам (a),(b), может быть разложена в произведение данных
3.  $\exists B : KB = K', \det B = \pm 1, K'$  – искомое состояние(более крупный пятиугольник)  
Тогда  $\exists m : KB^m = K'$  и  $B^m$  удовлетворяет условию (b)

#### Доказательство

Построим отображение  $\pi$  из множества матриц с определителем  $\pm 1$  и целыми коэффициентами (назовем множество  $SL(n, \mathbb{Z})$ ), сопоставляющее матрице аналогичную матрицу с элементами по модулю 2 (назовем множество  $SL(n, F_2)$ )

$\pi$  – гомоморфизм, т.е.  $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$

Заметим, что в  $SL(n, \mathbb{Z})$  и  $SL(n, F_2)$  у всех элементов есть обратные(т.к. определитель 1)

$SL(n, F_2)$  – конечная

В конечной группе  $\forall g \in SL(n, F_2) \exists m : g^m = E$

Это легко проверить: будем выписывать  $g, g^2, g^3, \dots$ . Т.к. группа конечна, то у данной последовательности есть период. Тогда  $\exists l \neq m > 0 : g^m = g^l$

Тогда  $g^m g^{-l} = g^{m-l} = E$  (обратная матрица существует, т.к. определитель 1)

Т.е.  $\forall C \in SL(n, \mathbb{Z}) \exists m : (\pi C)^m = E \Leftrightarrow \pi C^m = E$

Заметим, что  $KB = \lambda RK, |\lambda| > 1$ , где  $R$  – поворот

Тогда  $KB^m = \lambda^m R^m K$

Отсюда  $KB^m$  – переводит пятиугольник в пятиугольник большего размера

Рассмотрим  $B_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B_0$  переводит один пятиугольник в другой

$$\begin{array}{l|llll} \mathcal{K} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \mathcal{K}B_0 & v_2 - v_1 & v_3 - v_1 & v_4 - v_1 & -v_1 \\ \mathcal{K}B_0^2 & v_3 - v_2 & v_4 - v_2 & -v_2 & v_1 - v_2 \\ \mathcal{K}(B_0 + B_0^2) & v_3 - v_1 & \dots & & \end{array} \quad \text{Утверждается, что } B_0 +$$

$B_0^2$  дает в результате пятиугольник. Воспользуемся свойством 3 и возведем его в степень  $m$ . Теперь  $(B_0 + B_0^2)^m$  представима как композиция прыжков

### Определение

Пусть есть ряд  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$

Тогда  $\sum_{i=m}^{+\infty} a_n$  —  $m$ -ый остаток ряда

### Свойства

1. Пусть  $\sum a_n, \sum b_n$  — сходятся  
 $\sum (a_n + b_n)$  сходится  
 $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
2. Пусть  $\sum a_n$  — сходится  
 $\sum \lambda a_n$  сходится и равен  $\lambda \sum a_n$
3. (а) Если ряд сходится, то и любой остаток сходится  
 $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{+\infty} a_i$

#### Доказательство

$$N > m : \sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^N a_i$$

Левая часть сходится и конечна. Тогда и правая часть тоже

- (б) Если какой-то остаток сходится, то и ряд сходится

#### Доказательство

Аналогично

(с) Пусть  $r_m$  –  $m$ -ый остаток ряда. Тогда  $\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow r_m \rightarrow 0$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} a_i}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i} + r_m$$

Тогда  $r_m \rightarrow 0$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Тривиально

**Утверждение (необходимое условие сходимости ряда)**

$\sum a_n$  – сходится. Тогда  $a_n \rightarrow 0$

**Доказательство**

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Примеры**

1.  $\sum_n \frac{1}{n}$  расходится (по асимптотике гармонического ряда)

2.  $\sum_n \sin(n\alpha), \alpha \in (0, \pi)$  – расходится

**Критерий Больцано-Коши о сходимости ряда**

$\sum a_n$  – сходится  $\Leftrightarrow \exists \lim S_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists K : \forall N, M > K |S_N - S_M| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > K \forall m |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$

**Примеры**

1.  $\sum \frac{1}{n}$   
 $|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}| > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

2.  $\sum \frac{1}{n^2}$   
 $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$



$$\frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+m)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

## 7.2 Сходимость положительных рядов

Обозначения:

$(a) := (a_n)$

$S_N^{(a)}$  – частичная сумма ряда

$S^{(a)}$  – сумма ряда

**Лемма**

$a_n \geq 0$

Тогда  $a_n$  сходится  $\Leftrightarrow$  последовательность  $S_N^{(a)}$  ограничена

**Доказательство**

Очевидно

**Теорема (признак сравнения)**

$a_n, b_n \geq 0$

1. Если с некоторого места  $a_n \leq kb_n, k > 0$ , то

$$\sum b_n - \text{сходится} \Rightarrow \sum a_n - \text{сходится}$$

$$\sum a_n - \text{расходится} \Rightarrow \sum b_n - \text{расходится}$$

2.  $b_n \neq 0, \lim \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$

При  $l = 0$  аналогично первой части

$$\text{При } l \in (0, +\infty) \quad \sum a_n - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum b_n - \text{сходится}$$

$$\text{При } l = +\infty \quad \sum a_n - \text{сходится} \Rightarrow \sum b_n - \text{сходится}$$

$$\sum b_n - \text{расходится} \Rightarrow \sum a_n - \text{расходится}$$

3.  $a_n, b_n > 0$

$$\text{С некоторого места } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Тогда аналогично первой части

**Доказательство**

1.  $\forall n \quad a_n \leq kb_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq kS_n^{(b)}$

$$\sum b_n - \text{сходится} \Rightarrow S_n^{(b)} - \text{ограничена сверху} \Rightarrow S_n^{(a)} - \text{ограничена}$$

сверху  $\Rightarrow \sum a_n$  – сходится Если  $\forall n \geq n_0 \ a_n \leq b_n \Rightarrow S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$  – тривиально

2. Если  $l \in (0, +\infty)$

Для  $\varepsilon = \frac{l}{2} \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}l$

Тогда из п. 1 Если  $l = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \ \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$

Тогда из п.1

Для  $l = +\infty$  – аналогично

3.  $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$

$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}$

$\vdots$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} < \frac{b_n}{b_{n-1}}$

Отсюда  $\frac{a_n}{a_{n_0}} < \frac{b_n}{b_{n_0}}$

Тогда  $a_n < \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$  – из п.1

**Теорема (признак Коши)**

$\sum a_n, a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$

Light:

1.  $\exists q < 1 : \text{НСНМ } K_n \leq q$

Тогда  $\sum a_n$  сходится

2.  $K_n \geq 1$  для бесконечного множества  $n$ . Тогда  $a_n$  расходится

Hard:  $\square \exists K := \overline{\lim} K_n$ . Тогда

1.  $K < 1$  – ряд сходится

2.  $K > 1$  – ряд расходится

**Замечание**

При  $K = 1$  признак не работает

Пример:  $\sum \frac{1}{n}, \sum \frac{1}{n^2}, K = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ , но 1 ряд расходится, а второй сходится

### Доказательство

Сравнить с прогрессией:

Light:

1. Пусть  $K_n \leq q$  при  $n \geq n_0$   
Н.У.О.  $n_0 = 1$   
 $\sqrt[n]{a_n} \leq q \Leftrightarrow a_n \leq q^n$   
Т.к.  $q^n$  сходится, то и  $a_n$  сходится
2.  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq 1$  для бесконечного количества  $n$   
Тогда  $a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$  ряд расходится

Hard:

1.  $q := \frac{K+1}{2}$   
Из технического описания  $\overline{\lim}: \exists n_0 : \forall n \geq n_0 K_n < q$
2. Из технического описания  $\overline{\lim}: \exists$  бесконечного много  $n : \sqrt[n]{a_n} > 1$

### Примеры

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2023} e^{-n}$$

$$K := \lim \sqrt[n]{n^{2023} e^{-n}} = \frac{1}{e} < 1$$

**Теорема (признак Даламбера)**

$$\sum a_n, a_n > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Light:

1.  $\exists q < 1 : \text{НСНМ } D_n \leq q$   
Тогда  $\sum a_n$  сходится
2.  $D_n \geq 1$  НСНМ. Тогда  $a_n$  расходится

Hard:  $\square \exists D := \lim D_n$ . Тогда

1.  $D < 1$  – ряд сходится
2.  $D > 1$  – ряд расходится

### Замечание

При  $D = 1$  признак не работает

### Доказательство

Сравнить с прогрессией

Light:

$$1. \text{ Н.У.О. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \text{ при } n \geq 1$$

$$\text{Т.е. } a_2 \leq qa_1$$

$$a_3 \leq qa^2$$

$$\vdots$$

$$a_n \leq qa_{k-1}$$

$$a_k \leq q^{k-1}a_1 = q^k(q^{-1})a_1$$

Тогда по признаку сравнения ряд расходится

$$2. \text{ Н.У.О. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \text{ при } n \geq 1$$

$$\text{Т.е. } a_2 \geq a_1 > 0$$

$$a_3 \geq a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n \geq a_{n-1}$$

Отсюда  $a_n \geq a_1$ , т.е.  $a_n \not\rightarrow 0$

Hard:

$$1. q = \frac{D+1}{2}$$

Тогда по определению  $\lim$ :  $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 D_n < q$

Дальше по Light 1

$$2. \exists n_0 : \forall n > n_0 D_n > 1$$

Далее по Light 2

### Теорема (признак Раабе)

$$\sum a_n, a_n > 0$$

Если  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq p > 1$  НСНМ, то ряд сходится

Если  $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$  – расходится

### Доказательство

Сравните  $a_n$  с  $\frac{1}{n^p}$

**Доказательство**

$$1. \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{p}{n}$$

Возьмем  $1 < S < p$

$$\text{Заметим, что } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^S - 1}{\frac{1}{n}} = S < p$$

$$\text{Т.е. НСНМ } \frac{(1 + \frac{1}{n})^S - 1}{\frac{1}{n}} < p$$

$$\frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(1+n)^S}} = (1 + \frac{1}{n})^S < 1 + \frac{p}{n}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\frac{1}{n^S}}{\frac{1}{(1+n)^S}}$$

$$\sum \frac{1}{n^S} - \text{сходится}$$

Тогда  $\sum a_n$  - сходится

$$2. \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

Тогда  $\sum a_n$  - расходится

**Следствие**

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = p$

При  $p > 1$  - ряд  $\sum a_n$  сходится

При  $p < 1$  - ряд  $\sum a_n$  расходится

**Теорема (интегральный признак Коши)**

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$ , непрерывная, монотонная

Тогда  $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k), \int_1^{+\infty} f(x) dx$  - сходятся/расходятся одновременно

**Доказательство**

Если  $f \not\equiv 0$ , возрастает, то тривиально:

НСНМ  $a f \geq \varepsilon$

Тогда  $\int_1^{+\infty} f \geq \int_a^{+\infty} \varepsilon \, dx = +\infty$  – расходится

Сумму также расходится

Если  $f$  убывает:

$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) \, dx$  – из графика

$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) \, dx$  – из графика

Отсюда они сходятся/расходятся одновременно

//todo continue url<https://www.youtube.com/live/46TKmI9S1Nw?feature=share&t=4855>