Математическая Логика. Теория

Александр Сергеев

1 Введение

Силлогизмы
Modus Ponendo Ponens: Если A и $A \to B$, то B
Парадокс Рассела
$X = \{x : x \notin x\}$
$(X \in X)?$
Определение
Номинализм – учение о том, что существуют лишь единичные вещи, а общие понятия – лишь имена
Реализм – учение о том, что общие понятия объективно существуют
Номинализм в вопросе решения парадокса Рассела: надо придумать понятие множества
Реализм в вопросе решения парадокса Рассела: необходимо понять, что такое множество на самом деле, докопаться до сути
Программа Гильберта – мы должны формализовать математику и избавиться от произвола, который может вносить сторонний исследователь
Формализация должна быть проверена, и ее непротиворечивость должна быть доказана
Программмма Гильберта – реализм: мы верим, что мир устроен некоторым образом, а значит существует некоторая идеальная математика, удовлетворяющая этим свойствам. Нам нужно лишь прислушаться к миру и найти ее

2 Исчисление высказываний

Определение
Высказывание – строка, сформулированная по следующим правилам

Предметный язык – язык, который мы изучаем (язык математической логики)
Метаязык – соглачения о записи. Из метаязыка можно получить предметный язык некоторыми неформализованными действиями
$A, B, \dots$ – Пропозиционная переменная
$\alpha, \beta, \dots$ – метапеременные (высказывания)
$\alpha \wedge \beta$ – Конъюнкция
$\alpha \vee \beta$ – Дизъюнкция
$\neg\alpha$ – Отрицание
$\alpha \rightarrow \beta$ – Импликация
X, Y, Z – метапеременные для пропозиционных переменных
Приоритет: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
Дизъюнкция и конъюнкция – левоассоциативные,импликация – правоассоциативная
Выражение на предметном языке – пропозиционные переменные, 4 вида *связкок* и полностью расставленные скобки. Все остальные формы записи – метаязык
Схема – строка, строящаяся по правилам предметного языка, где вместо пропозиционных переменных могут стоять маленькие греческие буквы(метапеременные)

Определение

Оценка высказывания $f : P \rightarrow V$, где $V = \{T, F\}$, P – множество пропозиционных переменных
$[[\alpha]] = T$ – оценка высказывания (значение α – истина)
$[[\alpha]]^{X_1:=v_1,\dots,X_n:=v_n}$ – оценка высказывания

Определение

Если $[[\alpha]] = T$ при любой оценке переменных, то она *общезначима (тавтология)*: $\models \alpha$
Иначе *опровержима*
Если $[[\alpha]] = T$ при любой оценке переменных, при которой $[[\gamma_1]] = \dots = [[\gamma_n]] = T$, то α – следствие этих высказываний: $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$
Если $[[\alpha]] = T$ при некоторой оценке, то она *выполнима*, иначе *невыполнима*

Аксиомы исчисления высказываний

1. $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

3. $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$

4. $\alpha \wedge \beta \to \alpha$

5. $\alpha \wedge \beta \to \beta$

6. $\alpha \to \alpha \vee \beta$

7. $\beta \to \alpha \vee \beta$

8. $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

9. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha$

10. $\neg\neg\alpha \to \alpha$

Определение
Доказательством назовем последовательность высказываний $\delta_1, \ldots, \delta_n$, где каждое высказывание δ_i либо:

- является аксиомой (существует замена метапеременных для какой-либо схемы аксоим, позволяющая получить схему δ_i)

- получается из $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$ по правилу Modus Ponens: существуют такие $j, k < i : \delta_k \equiv \delta_j \to \delta_i$

Формула *выводима/доказуема*, если существует ее доказательство
Пример
$A \to (A \to A)$
$(A \to (A \to A)) \to (A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$
$(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$
$A \to ((A \to A) \to A)$
$A \to A$
Определение
Вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ – такая последовательность $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что σ_i является (одним из следующих):

- аксиомой

- одной из гипотез γ_t

- получена по правилу Modus Ponens из предыдущих

Формула *выводима из гипотез*, если существует ее вывод
Обозначение: $\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$

Определение (корректность теории)

Теория *корректна*, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо
То есть, $\vdash \alpha$ влечет $\models \alpha$

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ влечет $\vdash \alpha$

Теорема (корректность вычисления высказываний)

Доказательство

Докажем, что любая строка доказательства является общезначимой
Докажем индукцией по количеству строк
База: $n = 1$ – аксиома. В ней нет правила Modus Ponens. Она общезначима
Переход: Пусть для любого доказательства длины n формула δ_n общезначима. Рассмотрим δ_{n+1}

1. Аксиома. Убедимся, что аксиома общезначима
2. Modus Ponens j, k – убедимся, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_k, \delta_k = \delta_j \to \delta_{n+1}$, то $\models \delta_{n+1}$

Аксиому проверим через таблицу истинности
Докажем правило Modus Ponens
По индукционному предположению $\models \delta_j, \models \delta_k$
Зафиксируем произвольную оценку
Из общезначимости $[[\delta_j]] = T, [[\delta_k]] = T$
Тогда из таблицы истинности $[[\delta_j]] = [[\delta_k]] = T$ только при $[[\delta_{n+1}]] = T$
Отсюда $\models \delta_{n+1}$

Определение

Контекст – совокупность всех гипотез. Обозначается большой греческой буквой
Пример записи:
$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$
$\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$
$\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

Теорема о дедукции

$\Gamma, \alpha \vdash \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$
Доказательство $\Leftarrow$
Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$
Т.е. существует вывод $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \underbrace{\alpha \to \beta}_{\delta_n}$
Дополним вывод: добавим туда α
По правилу Modus Ponens добавим туда β
Отсюда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$
Определение
Конечная последовательность – функция $\delta : \{1, \dots, n\} \to \mathcal{F}$
Конечная последовательность, индексированная дробными числами – функция $\zeta : I \to \mathcal{F}, I \subset \mathbb{Q}^+, |I| \in \mathbb{N}$
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть $\Gamma, \alpha \vdash \beta$
Пусть дан некоторый вывод: $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \underbrace{\beta}_{\delta_n}$
Тогда рассмотрим последовательность: $\alpha \to \delta_1, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$
Заметим, что выводом эта формула не является, т.к. в ней нет аксиом
Докажем по индукции по длине вывода
Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ – вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то найдется ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, причем $\zeta_1 = \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n = \alpha \to \delta_n$

1. $n = 1$ – ч.с. перехода без Modus Ponens

2. Пусть $\delta_1, \dots \delta_{n+1}$ – исходный вывод
   По индукционному предположению по $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$
   Достроим его для δ_{n+1}

   - δ_{n+1} – аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$:
     $\zeta_{n+1/3} = \delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$
     $\zeta_{n+2/3} = \delta_{n+1}$
     $\zeta_{n+1} = \alpha \to \delta_{n+1}$

   - $\delta_{n+1} = \alpha$:
     $\zeta_{n+1/5} = a \to a \to a$
     $\zeta_{n+2/5} = (a \to a \to a) \to (a \to (a \to a) \to a) \to (a \to a)$
     $\zeta_{n+3/5} = (a \to (a \to a) \to a) \to (a \to a)$

$\zeta_{n+4/5} = a \to (a \to a) \to a$
$\zeta_{n+1} = a \to a$

- δ_{n+1} – Modus Ponens из δ_j и $\delta_k = \delta_j \to \delta_{n+1}$:
  $\zeta_{n+1/5} = \alpha \to \delta_j$
  $\zeta_{n+2/5} = \alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$
  $\zeta_{n+3/5} = (\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$
  $\zeta_{n+4/5} = (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$
  $\zeta_{n+1} = \alpha \to \delta_{n+1}$

Лемма (правило контрапозиции)
Каково бы ни были формулы α, β, справедливо, что $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
Лемма (правило исключенного третьего)
Какова бы ни была формула α, справедливо, что $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
Лемма (правило исключенного допущения)
Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$
Тогда $\Gamma \vdash \alpha$
Теорема
Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$
Определение
Зададим некоторую оценку, что $[[\alpha]] = x$
Тогда *условным отрицанием* формулы α называется формула $(|\alpha|) = \begin{cases} \alpha, & x = T \\ \neg\alpha, & x = F \end{cases}$
Если $\Gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_n$, то $(|\Gamma|) = (|\gamma_1|), \dots, (|\gamma_n|)$
Пример: $(|A|), (|B|) \vdash (|A \to B|)$ позволяет записать таблицу истинности в одну строку, перебрав ее для всех оценок
Доказательство теоремы
Для каждой возможной связки $\star$ докажем формулы $(|\phi|), (|\psi|) \vdash (|\phi \star \psi)$
Теперь построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$(|\Xi|) \vdash (|\alpha|), \Xi$ – контекст(все переменные в таблице)
Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(|\Xi|) \vdash \alpha$. От гипотез можно избавиться индукционно по теореме об исплючении допущения и получить требуемое $\vdash \alpha$
Лемма (Условное отрицание формул)
Пусть пропозиционные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ – все переменные, которые используются в α

Пусть задана некоторая оценка переменных
Тогда $(|\Xi|) \vdash (|\alpha|)$
Доказательство
Докажем по индукции по длине формулы α

- База: формула атомарная, т.е. $\alpha = X_i$
  Тогда при любом Ξ выполнено $(|\Xi|)^{X_i=T} \vdash X_i$ и $(|\Xi|)^{X_i=F} \vdash \neg X_i$

- Переход:
  $\alpha = \phi \star \psi, (|\Xi|) \vdash (|\phi|)$ и $(|\Xi|) \vdash (|\psi|)$
  Тогда построим вывод
  Сначала запишем доказательство $(|\phi|)$
  Потом припишем доказательство $(|\psi|)$
  Потом припишем доказательство леммы о связках