

Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Графы

1.1 Неориентированные графы

Определение

Неориентированный граф – множество вершин V и множество ребер $E \subset (V \times V \setminus \{(u, u)\}) / \sim$ (факторизованное отношением эквивалентности $\sim: (u, v) \sim (v, u)$)

Путь P – последовательность $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1} u_i$ – ребро

$k := |P|$ или $k := \text{len}(P)$ – *длина пути*

Простой путь – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

Реберно-простой путь – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\sqsupset P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$
 $\sqsupset Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$
 $\sqsupset R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$
 $P \sim R, P \sim Q$ – равны с точностью до отражения и циклического сдвига
- Пусть если в циклическом пути $\forall i \ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$, то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности \sim

Ациклический граф – граф без циклов

Определение

Пусть $\exists P : u_0 = u, u_k = v$. Тогда $u \rightsquigarrow v$ (отношение связанности путем)

Пусть $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$. Тогда $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$ – конкатенация пути

Теорема

Отношение \rightsquigarrow в неориентированном графе – отношение эквивалентности

Определение

Класс эквивалентности по отношению \rightsquigarrow – *компонента связности*

Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

Определение

u, v – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из u в v

Теорема

Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

Доказательство

Путь u (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность

Симметричность очевидна

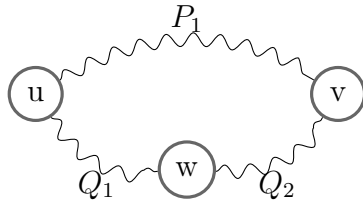
Докажем транзитивность

Рассмотрим u, v, w , пары $(u, v), (v, w)$ реберно двусвязные

P_1, P_2 – пути между u, w

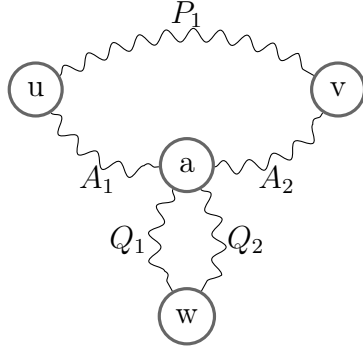
Рассмотрим случаи:

- $w = v \vee w = u$ – очевидно
- $w \in P_2$



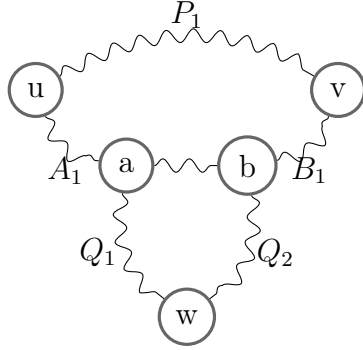
Тогда $Q_2, P_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq v, u, w :$



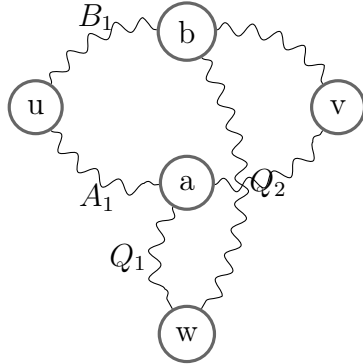
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



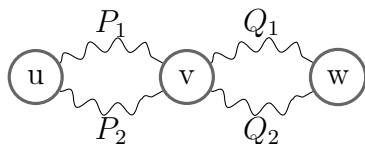
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



Тогда $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$ реберно не пересекаются

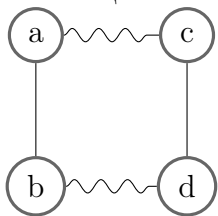
-



Тогда $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

Определение

Ребра ab, cd (не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы



Теорема

Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Определение

Рассмотрим $A = \{a, b : ab \text{ – вершинно двусвязные}\}$ – компоненту вершинной двусвязности (блок)

Точка v – точка сочленения, если она лежит в нескольких блоках

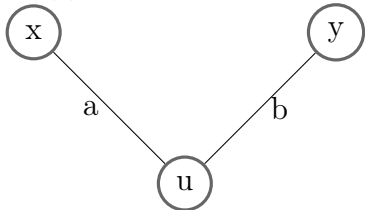
Теорема

Вершина является точкой сочленения \Leftrightarrow Ее удаление увеличивает количество компонент связности

Доказательство \Rightarrow

Пусть u – точка сочленения

Тогда она лежит в нескольких блоках:



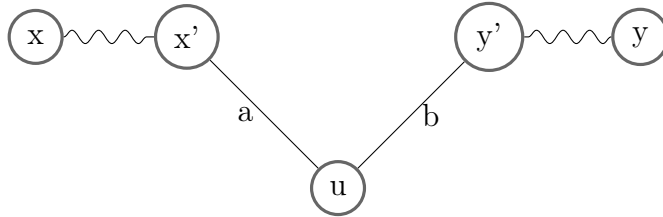
a, b – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках

Тогда не существует пути $x \rightsquigarrow y$, не проходящего через u

Отсюда при удалении u x и y окажутся в разных компонентах

Доказательство \Leftarrow

Пусть при удалении u количество компонент увеличилось
 Возьмем x и y такие, что до удаления u они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных
 Тогда любой путь из x в y проходил через u
 Выберем какой-то путь из x в y и возьмем на нем вершины x' и y' – соседей вершины u



Тогда ребра a и b вершинно не двусвязные

Определение

Мост – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности

Мост – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

1.2 Ориентированные графы

Определение

Ориентированный граф – множество вершин V и ребер $E \subset V \times V$ (разрешаем петли)

В ребре $w = uv$ $\text{beg } w = u, \text{end } w = v$

Путь P – последовательность $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1} u_i$ – ребро

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Цикл – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига

Теорема

Если G – ациклический ориентированный граф, то $\exists \phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\} : uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$

(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)

Лемма

G – ациклический ориентированный граф

Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро

Доказательство теоремы

Докажем по индукции

Возьмем вершину, из которой не выходит ребро

Присвоим ей номер n

Удалим ее

Пронумеруем оставшиеся вершины

Определение

Симметризация G – граф \overline{G} такой, что $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$

(Т.е. восприятие G как неориентированного графа (возможно, с петлями))

Компонента слабой связности – компонента связности в \overline{G}

Компонента сильной связности – компоненты, где существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$

Сильная связность – отношение эквивалентности

1.3 Деревья

Определение

Дерево – связный неориентированный граф без циклов

Теорема

G – граф, содержащий n вершин

Рассмотрим утверждения:

1. В нем $n - 1$ ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связан

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево

Лемма

Пусть G – дерево, содержащее ≥ 2 вершины

Тогда \exists вершина степени 1

(На самом деле их хотя бы две)

Доказательство

Возьмем вершину u_1 . Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа u_2 . Если у него степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в соседа u_3 , которого мы еще не посещали

Через не более n шагов мы придем в вершину u_i , все соседи которой уже посещены

Если u_i имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда u_i будет иметь степень 1

Доказательство 2

Рассмотрим самый длинный путь в графе

Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1

Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл

Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

Доказательство теоремы

$$2 + 3 \Rightarrow 1$$

Если $n = 1$ – очевидно

Если $n > 1$: Возьмем вершину степени 1

Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе $n - 2$ ребра

$$1 + 2 \Rightarrow 3$$

Пусть в графе k компонент связности

Если в i компоненте n_i вершин, то в ней $n_i - 1$ ребро

Тогда всего ребер в графе $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k = n - 1$

Отсюда $k = 1$

$$1 + 3 \Rightarrow 2$$

Если $n = 1$ – очевидно

Если $n > 1$ и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ациклический

Если $n > 1$ и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше $\frac{2 * n}{2} = n$ – противоречие

Лемма о рукопожатии

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \underbrace{\sum_{e \in E} \sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_2 =$$

$$2|E|$$

Теорема

G – дерево $\Leftrightarrow \forall u, v \exists !$ простой путь $u \rightsquigarrow v$

Доказательство \Rightarrow

Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой $l_1 + l_2$ минимально

Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)

Тогда эти два пути образуют цикл

Доказательство \Leftarrow

Граф связан

Граф ацикличесен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути

Отсюда это дерево

Теорема

G – связан $\Leftrightarrow G$ связан и любое ребро – мост

Определение

G – граф

H – получен удалением из G вершин и/или ребер

H – *подграф* G

Определение

G – граф

H – получен из G удалением вершин (и ребер, выходящих из них)

H – *индуцированный* подграф G

Определение G – граф

H – получен из G удалением ребер с сохранением связности

H – *остовный* подграф G

Теорема

У любого связного графа есть остовное дерево

Доказательство 1

Обойдем граф bfs-ом и получим дерево

Доказательство 2

Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер

Утверждается, что он будет деревом

Доказательство 3 (жадный алгоритм)

Будем удалять ребра, пока граф связан

Мы получим ациклический связный граф

Научимся считать количество остовных деревьев

Рассмотрим матрицу $n \times n$:

На диагонали напишем степень вершины

В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

Определение

Матрица Кирхгофа – матрица $n \times n$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Теорема

Пусть G – связный граф

Тогда количество остовных деревьев $G = \widehat{A_{ij}} \forall i, j$ – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы A

Лемма 1

Рассмотрим *матрицу инцидентности* I_G

Это матрица $n \times m, m = |E|$

В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$$(\vec{I}_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(\vec{I}_G \vec{I}_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

$\vec{I}_G \vec{I}_G^T$ = матрица Кирхгофа

Лемма 2

Рассмотрим \vec{I}_G

Выберем $n - 1$ ребро

Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине u (u любая)

Мы получили матрицу $n - 1 \times n - 1$

Обозначим ее как B

Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $|B| = \pm 1$, иначе $|B| = 0$

Доказательство

Рассмотрим граф T , образованный всеми вершинами и выбранными ребрами

Докажем, что если T не дерево, то $|B| = 0$

Т.к. это не дерево и в нем $n - 1$ ребро, то граф не связан

Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u

Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты

Утверждается, что сумма $= 0$

Отсюда матрица вырожденная

Докажем, что если T – дерево, то $|B| = \pm 1$

По лемме у дерева есть два листа

Тогда есть как минимум один лист, не равный u . Назовем его v_1

Переставим строчку, соответствующую v , на первое место

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Т.к. v_1 – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Рассмотрим дерево T_2 , полученное удалением v_1 из T

В нем есть как минимум один лист, не равный u . Назовем его v_2

Переставим строчку, соответствующую v_2 , на второе место

Т.к. v_2 – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место

Повторим действия

В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой ± 1

Отсюда определитель будет ± 1

Лемма 3 (Формула Коши-Бине)

Пусть даны матрицы $r \times s$ и $s \times r$, $r \leq s$

$\det AB = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \dots i_r} \det B_{i_1 \dots i_r}$ – оставили только столбцы $i_1 \dots i_r$, $B_{i_1 \dots i_r}$ – оставили только строки $i_1 \dots i_r$

Лемма 4

$$\widehat{A_i i} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T)$$

Т.к. $m = |E| \geq n - 1$, применим лемму 3:

$$\widehat{A_i j} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_G^T \text{ без } i \text{ столбца}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}}^{i_1 \dots i_{n-1}} \det \vec{I}_{G i_1 \dots i_{n-1}}^T \text{ без } i \text{ столбца}}_{1, \text{ если образует ост.д, иначе } 0}$$

Отсюда $\widehat{A_i j}$ = кол-во остовных деревьев

1.4 Ориентированные деревья

Определение

Пусть G – ориентированный граф

Подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень

Обратное подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину

Теорема Тутта

Лапласиан графа G – матрица $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$ – позволяет

искать исходящие остовные корневые деревья

(Для входящих \deg^+ и $ji \in E$)

Количество остовных корневых деревьев с корнем i равно $\widehat{L(G)}_{ii}$

Определение

Пусть $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Функциональный граф – граф $G : (i, f(i)) \in E$

В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья

Всего существует n^n функциональных графов

Число функциональных подграфов = $\prod_{u \in v} \deg^- u$

1.5 Обход графа

Определение

Эйлеров путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

Гамильтонов путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз

Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)

Теорема

G – Эйлеров \Leftrightarrow Все его ребра лежат в одной компоненте связности и $\forall v \deg v$ – четное

Доказательство \Rightarrow

Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли

Остудя степени четные и компонента связности одна

Доказательство \Leftarrow

Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности

Докажем индукцией по числу ребер

Если ребер 0, доказано

Пусть ребер > 0

//todo

Теорема

G содержит эйлеров путь \Leftrightarrow Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени

Доказательство

Если она одна, то начнем обход в ней

Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл \Leftrightarrow граф слабо связан и $\forall v \deg^-(v) = \deg^+(v)$

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров путь \Leftrightarrow граф слабо связан и $\deg^-(v) = \deg^+(v)$ для не более чем двух вершин a, b , а $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$ и $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$

Задача

Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max(\frac{\text{odd}(C)}{2}, 1)$, $\text{odd}(C)$ – кол-во вершин нечетной степени в C

Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты

$$\text{Всего их } \sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max\left(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1\right)$$

BEST-Теорема

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов

$$E = A \prod_{u \in V} (\deg^- u - 1)!$$

1.6 Укладки графов

Утверждение

Компактные многообразия эквивалентны сфере «с ручками»

Пример: сфера с одной ручкой – тор, с двумя – «крэндель»

Определение

Ориентируемое многообразие – поверхность с ручками

Задается числом – количество ручек

Определение

Укладка графа на поверхность A – инъективное отображение точек графа в точки на поверхности и ребер – в непересекающиеся кривые

$V : V_G \rightarrow A$ – инъекция

$e : E_G \rightarrow C_A$

$\phi \in C_A$ – путь

$\phi : [0, 1] \rightarrow A, \phi(0) = \text{beg}(e), \phi(1) = \text{end}(e)$

$\forall \phi_1, \phi_2 \phi_1[0, 1] \cap \phi_2[0, 1] = \emptyset$

Теорема

Любой граф можно вложить в \mathbb{R}^3

Доказательство

Вложим граф как-то с пересечениями

Для каждого пересечения искривим одно из ребер, чтобы убрать пересечение

Доказательство 2

Воспользуемся вероятностным методом: случайно расположим точки, после чего проведем ребра-отрезки

Вероятность их пересечения равна 0

Определение

Два графа гомеоморфны, если можно превратить G_1 в G_2 следующими

операциями

(кратные ребра разрешены)

1. Удаляем ребро uv , добавляем вершину x и ребра ux, xv
2. Берем вершину x степени 2 с соседями u, v
Удалим вершину x и добавим ребро uv

Лемма 1

G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ можно уложить на сфере

Доказательство

Нарисуем плоскость

Положим на нее сферу

Точка соприкосновения сферы и плоскости =: южный полюс S

Противоположная сторона сферы =: северный полюс N

Возьмем точку x на плоскости

Построим отрезок xN

Точка пересечения отрезка со сферой x' – существует и единственная

Т.о. мы построили непрерывную биекцию между сферой $\setminus \{N\}$ и плоскостью

Теперь положим сферу на плоскость так, чтобы северный полюс не лежал на ребре и не был вершиной

Тогда биекция ребра переводит в кривые-ребра, а вершины – в точки-вершины

Определение

Грани – области, полученные разрезанием поверхности по ребрам

Теорема (Формула Эйлера)

В связном графе на плоскости $V + F - E = 2$

V – число вершин

E – число ребер

F – число граней

Доказательство

Будем рисовать наш граф постепенно

При добавлении ребра количество ребер увеличивается на 1 ($E+ = 1$) и число граней увеличивается на 1 ($F+ = 1$)

При добавлении вершины число ребер увеличивается на 1 ($E+ = 1$) и число вершин увеличивается на 1 ($V+ = 1$)

Тогда $V + F - E = 2$

Теорема

K_5 нельзя уложить на плоскости

Доказательство

$$V = 5$$

$$E = 10$$

$$\text{Отсюда } F = 7$$

С точки зрения теории графов грань – это цикл

Цикл имеет длину хотя бы 3

Пройдем по каждому циклу, соответствующему грани

Тогда суммарно мы пройдем хотя бы по 21 ребру

С другой стороны, ребро лежит на границе двух граней

Значит по каждому ребру мы должны пройти по 2 раза

Т.е. мы должны пройти суммарно по 20 ребрам

Теорема 2

$K_{3,3}$ нельзя уложить на плоскости

Доказательство

В двудольном графе цикл имеет длину хотя бы 4

Применяем тот же трюк

Теорема

В произвольном графе G $3V - 6 \geq E$

В произвольном двудольном графе G $2V - 4 \geq E$

Лемма

G_1, G_2 гомеоморфны

G_1 можно уложить $\Leftrightarrow G_2$ можно уложить

Лемма

G – подграф H

H можно уложить $\Rightarrow G$ можно уложить

Лемма

G можно уложить на плоскости и u – вершина G , то G можно уложить так, чтобы u была инцидентна(смежна) внешней грани

Доказательство

Переложим граф на плоскости

Переложим его на сферу

Повернем сферу так, чтобы грань, инцидентная u , содержала северный полюс

Переложим граф на плоскость

Лемма

G можно уложить на плоскости и uv – ребро G , то G можно уложить так, чтобы u было инцидентно(смежно) внешней грани

Определение

G – планарный, если его можно уложить на плоскость

Лемма

Если все компоненты реберной двусвязности G планарны, то G планарен

Доказательство

Докажем по индукции

База ($n = 1$) – очевидно

Переход: Удалим мост uv

Тогда в каждой компоненте связности $\leq n - 1$ компонента реберной двусвязности

Уложим их так, чтобы u и v оказались инцидентны внешней грани

Проведем ребро uv

Лемма

Если все компоненты вершинной двусвязности G планарны, то G планарен

Доказательство

Докажем по индукции

База ($n = 1$) – очевидно

Переход: Разобьем граф по какой-либо точке сочленения v на два графа

В каждой будет своя копия вершины $v - v_i$ Уложим их так, чтобы v_i лежали во внешней грани

Теперь удалим все v_i , кроме v_1 и «притянем» все ребра из v_i к v_1

Теорема

G можно уложить на $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$ не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$

Доказательство \Leftarrow

Очевидно

Доказательство \Rightarrow

слишком сложно описать доказательство, просто поверьте

1.7 Раскраска

Определение

$c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ – раскраска

Раскраска *правильная*, если $\forall uv \ c(u) \neq c(v)$

По умолчанию будем говорить о правильных раскрасках

Определение

G раскрашиваемый в k цветов, если существует правильная раскраска в k цветов

$k = 1$ – граф изолированный

$k = 2$ – граф двудольный

Теорема

Граф двудольный \Leftrightarrow любой цикл четный

Определение

Пусть есть граф G

Хроматическая функция $p_G(t)$ – число способов раскрасить G в t цветов (можно использовать не все цвета)

$$p_{K_n}(t) = t(t-1) \dots (t-n+1) = t^n = \frac{t!}{(t-n)!}$$

Определение

G/uv – стягивание графа по uv

Стягивание означает, что мы заменяем вершины u и v одной вершиной

Если цвета u и v равны, то стягивание не влияет на раскраски

Лемма

Пусть uv – ребро в G

$$p_G(t) = p_{G \setminus \{uv\}}(t) - p_{G/uv}(t)$$

Теорема о хроматическом многочлене

Пусть G – неориентированный граф с n вершинами, m ребрами, k компонентами связности

Тогда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$ (коэффициенты знакопереваются)

Доказательство

Индукция по числу вершин и ребер

Если $n = n, m = 0$, то $p_G(t) = t^n$

Если $m > 0$

Рассмотрим ребро uv

$$p_G(t) = p_{G \setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$$

Если uv – не мост

$$\begin{aligned} p_{G \setminus uv}(t) &= t^n - (m-1)t^{n-1} + q_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm q_k t^k \\ -p_{G/uv}(t) &= -t^{n-1} + r_{n-2}t^{n-2} + \dots \pm r_k t^k \end{aligned}$$

Отсюда $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$

Если uv – мост, то $q_k = 0$, но это ничего не меняет

Теорема

G – дерево $\Leftrightarrow p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$

Доказательство \Leftarrow

$$p_G(t) = t^n - (n-1)t^{n-1} + \dots + t$$

Отсюда $n = n, m = n-1, k = 1$ – дерево

Доказательство \Rightarrow

Возьмем в графе лист a и удалим его

$$p_{\{v\}} = t$$

$$p_{G \setminus a}(t) = t(t-1)^{n-2}$$

$$p_G(t) = (t-1)p_{G \setminus a}(t)$$

Лемма

В планарном графе $\exists u : \deg u \leq 5$

Доказательство

$$E \leq 3v - 6$$

Пусть это не так

$$\text{Тогда } 6V \leq 2E \leq 6V - 12$$

Теорема (super light)

Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов

Доказательство

Рассмотрим вершину степени не более 5

Удалим ее из графа

Планарность не ломается

Остаток раскрасим в 6 цветов

Потом добавим вершину обратно вершину

Для нее всегда можно выбрать какой-то цвет

Теорема Хивуда (medium)

Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов

Доказательство

Рассмотрим вершину степени не более 5

Если степень меньше 5, применим трюк из прошлого доказательства

Если степень ровно 5, удалим ее

Раскрасим граф в 5 цветов

Вернем ее

Если есть 2 соседа одного цвета, то мы победили

Пусть все соседи разных цветов

Пусть по часовой стрелке расположены соседи цветов 1, 2, 3, 4, 5

Возьмем соседа цвета 1, запустим DFS по вершинам цвета 1 и 3

Если мы не дошли до соседа цвета 3, то в дереве DFS'а поменяем все 1 и 3 местами

Тогда нашу вершину покрасим в цвет 1

Пусть мы дошли до соседа цвета 3 (т.е. нашли цикл)

Тогда повторим аналогичные действия с вершинами цвета 2 и 4

Из планарности цикл в обходе невозможен

Теорема (hard)

Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета

Доказательство слишком сложное

Определение

Регулярный граф – граф, где все степени одинаковые

$\deg G = d$

Лемма

Пусть G – граф, $\deg v \leq d, \exists u : \deg u < d$

Тогда его можно раскрасить в d цветов

Доказательство

Запустим из u DFS

Построим остовное дерево с корнем в u

Будем раскрашивать вершины с листьев к корню

Вершину будем красить, если все ее дети уже покрашены

У каждой вершины всегда есть один непокрашенный сосед – ее родитель

Тогда мы сможем покрасить дерево

Теорема (Брукс)

Пусть G – связный граф

$\deg v \leq d$

$G \neq K_n$

$G \neq C_{2n+1}$ (цикл)

Тогда \exists раскраска G в d цветов

Доказательство

Какая-то глина

1.8 Паросочетания в произвольных графах

Определение

$I \subset V : \forall u, v \in I \ uv \notin E$ – независимое множество (антиклика)

$\alpha(G)$ – максимальный размер независимого множества в графе

Определение

$C \subset V : \forall uv \in E \ u \in C \vee v \in C$ – вершинное покрытие

$\beta(G)$ – минимальный размер вершинного покрытия

Теорема

$\alpha(G) + \beta(G) = n$

Лемма

A – вершинное покрытие $\Leftrightarrow V \setminus A$ – независимое множество

Доказательство

Для каждого ребра верно, что один его конец лежит в A

Тогда не существует такого ребра uv , что $u, v \notin A$

Тогда $V \setminus A$ для каждого ребра содержит не более одного его конца

Определение

Паросочетание – $M \subset E : \forall e, f \in M \ e, f$ не имеют общих концов

$\alpha'(G)$ – размер максимального паросочетания в G

Определение

Реберное покрытие – $F \subset E : \forall u \exists e \in F : e = uv$

$\beta'(G)$ – размер минимального реберного покрытия

Теорема

$$\alpha'(G) + \beta(G) = n$$

Определение

Будем рассматривать связные графы

Рассмотрим паросочетание размера $\alpha'(G)$

Для каждой изолированной вершины добавим свое ребро

Мы получим реберное покрытие

$$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G)$$

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$$

Теперь возьмем минимальное реберное покрытие

Теперь выберем в этом графе максимальное паросочетание (пусть его размер – k)

$$k \leq \alpha'(G)$$

Заметим, что для любого ребра в покрытии паросочетанием покрыта ровно один его конец:

Если оба конца покрыты, то это ребро не может лежать в минимальном покрытии

Если ни один конец не покрыт, то паросочетание не максимальное

$$\text{Тогда } \beta'(G) = n - 2k + k$$

$$n \leq \alpha'(G) + \beta'(G)$$

Определение

Доминирующее множество $D \subset V : \forall u \ u \in D \vee \exists v \in D : uv \in E$

$\gamma(G)$ – размер минимального доминирующего множества

Определение

Клика – $C \subset V : \forall u, v \in C : uv \in E$

$\omega(G)$ – максимальная клика

Определение

Паросочетание *совершенное*, если оно покрывает все вершины

Определение

Пусть зафиксировано множество ребер M

Путь *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из M и не из M

Цикл *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из M и не из M

Чередующийся путь *дополняющий*, если его крайние ребра не в M

Чередующийся путь *сбалансированный*, если ровно одно его крайнее ребро не в M

Чередующийся путь *антидополняющий*, если его крайние ребра в M

Определение

M – максимальное \Leftrightarrow не существует дополняющих путей

$$|M| = \alpha'(G)$$

Доказательство

$M_1 \oplus M_2$ – множество ребер, которые входят ровно в одно паросочетание

Компоненты связности в получившемся графе – циклы и пути, дополняющие для M_1, M_2 или сбалансированные

Докажем \Rightarrow

Пусть M – максимальный

Возьмем $M \oplus M_2$

В этом графе нет дополняющих путей: если бы они были, то M был бы не максимальным

Докажем \Leftarrow

Пусть не существует дополняющих путей

Возьмем M_{max}

$$|M_{max}| \geq |M|$$

Т.к. нет дополняющих путей, то в $M \oplus M_{max}$ есть только циклы, сбалансированные и антидополняющие пути

В каждом цикле/пути ребер из M не меньше, чем из $|M_{max}|$

$$\text{Тогда } |M| \geq |M_{max}|$$

$$\text{Тогда } |M| = |M_{max}|$$

$$\text{Отсюда } |M_{max}| = |M|$$

Определение

$T \subset V$ – множество Татта, если $\text{odd}(G \setminus T) > |T|$, где odd – количество компонент нечетного размера

Теорема Татта

G содержит совершенное паросочетание $\Leftrightarrow \forall S \subset V \text{ odd}(G \setminus S) \leq |S|$
(граф содержит множество Татта)

Доказательство \Rightarrow

Пусть это не так

Пусть в графе содержится множество Татта T , и есть совершенное паросочетание

Удалим его из графа

Тогда у нас получился $\text{odd}(G \setminus T)$ компонент с нечетным количеством вершин

Внутри них нет совершенного паросочетания

Тогда в каждой компоненте существует вершина, которая в совершенном паросочетании связана с вершиной из T

Но таких вершин больше, чем $|T|$

Отсюда множества Татта быть не может

Лемма

Рассмотрим $uv \notin E$

$$\text{odd}(G \cup \{uv\}) \leq \text{odd}(G)$$

Лемма 2

G – не содержит множество Татта, $uv \notin E$

Тогда $G \cup \{uv\}$ не содержит множество Татта

Доказательство

Рассмотрим $S \in V$

$$\text{odd}((G \cup \{uv\}) \setminus S) = \text{odd}\left(\begin{array}{c} G \setminus S \\ G \setminus S \cup \{uv\} \end{array}\right) \leq \text{odd}(G \setminus S)$$

Доказательство \Leftarrow

Пусть в графе G не содержится множество Татта и не содержится совершенного паросочетания

Среди всех таких графов выберем G с минимальным числом ребер, а затем с максимальным числом вершин

G содержит четное число вершин – иначе \emptyset – множество Татта

Тогда $G \neq K_n$ (иначе бы в нем содержалось совершенное паросочетание)

$$U := \{v : \deg v = n - 1\}, U \neq V$$

Лемма 3

Компоненты связности $G \setminus U$ – полные графы

Рассмотрим эти компоненты

В четных компонентах выберем паросочетания

В нечетных выберем паросочетания, оставив одну вершину

Т.к. множества Татта нет, то $|U| \geq \text{odd}(G \setminus U)$

Но вершины U связаны со всеми

Соединим вершины U с оставшимися вершинами из компонент в паросочетании

сочетание

Возможно, в U остались изолированные вершины

Соединим их в паросочетание (это возможно, т.к. в графе четное число вершин)

Т.о. мы построили совершенное паросочетание – противоречие

Доказательство леммы 3

В графе $G \setminus U$ каждая вершина хотя бы с какой-то не связана

Предположим, что в какой-то компоненте $G \setminus U$ есть компонента, не являющаяся полным графом

Тогда в ней хотя бы два ребра

Выберем эти ребра $xy, xz : zy \notin E$

Возьмем $w : xw \notin E$

Вспомним, что G – граф с максимальным числом ребер

Тогда при добавлении ребра в G должно появиться множество Татта (невозможно по леммам) или идеальное паросочетание

Тогда при добавлении yz в графе должно появиться идеальное паросочетание

Назовем это паросочетание M_1 ($yz \in M_1$)

Уберем yz и добавим xw

Назовем это паросочетание M_2 ($xw \in M_2$)

$M_1 \oplus M_2$

$yz, xw \in M_1 \oplus M_2$

Заметим, что в $M_1 \oplus M_2$ нет путей: если есть путь, то его конец лежит только в одном паросочетании, но покрыты все вершины

Тогда компоненты связности – циклы

1. yz, xw – в разных компонентах

Тогда возьмем из компоненты yz ребра M_2 , а из компоненты xw – ребра M_1

Из других компонент возьмем или ребра M_1 , или ребра M_2

Мы получили совершенное паросочетание – противоречие

2. yz, xw – в одной компоненте

Утверждается, что можно взять в этой компоненте ребра так, что при добавлении ребра xz или xy возникает паросочетание – противоречие

Определение

$\text{def } G = n - 2\alpha'(G)$ – дефицит G – количество вершин, не покрытых

максимальным паросочетанием

Теорема (Формула Бержа)

$$\text{def } G = \max_{S \subseteq V} (\text{odd}(G \setminus S) - |S|)$$

Замечание

$$\text{def } G \geq \text{odd}(G) - |\emptyset| \geq 0$$

//todo 1:22

1.9 Паросочетания №2

Определение

G – фактор-критический, если $\forall u \in V$ $G \setminus u$ содержит совершенное паросочетание

$$\text{def } G = 1$$

$$\alpha'(G) = \frac{n-1}{2}$$

$$\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$$

Лемма Татта

$$\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G) \Rightarrow G \text{ – фактор-критический}$$

Лемма

Пусть $\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$

$S \neq \emptyset \Rightarrow S$ – не множество Татта

Доказательство

Рассмотрим $v \in S$

$$G' = G \setminus v$$

$$S' = S \setminus v$$

$$\text{def } G' \geq \text{odd}(G' \setminus S') - |S'| = \text{odd}(G \setminus S) - |S| + 1 = \text{def } G + 1$$

Но дефицит не может увеличиться

Отсюда $S = \emptyset$

Отсюда $\text{def } G = 1$

Отсюда G – фактор-критический

Декомпозиция Эдмондса-Галлаи

$D = \{v : \exists M \text{ – максимальное паросочетание, } M \text{ – не покрывает } v\}$

A – соседи D

$$C = V \setminus (A \cup D)$$

Теорема

Пусть M – совершенное паросочетание в V

Тогда M покрывает все вершины C , причем вершины из C находятся в паросочетании с вершинами C

В каждой компоненте связности D покрыты все вершины, кроме одной (которая единственная может быть связана с вершиной из A)

M покрывает все вершины из множества A

Компоненты в D – фактор-критические

A – множество Татта

Лемма

$a \in A$

Удалим ее

$D(G \setminus a) = D(G)$

$A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$

$C(G \setminus a) = C(G)$

$\alpha(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1$

Доказательство

//todo

1.10 Факторизация

Определение

Регулярный остов степени k – k -фактор графа

0-фактор – изолированные вершины

1-фактор – совершенное паросочетание

2-фактор – разбиение на циклы

Определение

f -фактор, где f -вектор длины n

Остов, где $\deg i = f_i$

Алгоритм

Заменим i -ую вершину на $\deg i$ вершин

Теперь соединим эти вершины, чтобы при конденсации получился исходный граф (степени каждой вершины должны быть 1)

Найдем в полученном графе паросочетания

Далее для каждой вершины создадим $\deg i - d_i$ вершин и соединим каждую из них со всеми вершинами i из предыдущего шага

Теперь найдем совершенное паросочетание

Удалим вершины из предыдущего шага и выполним конденсацию

2 Матроиды

Определение

Пусть есть множество X – носитель

Рассмотрим подмножества X

Пусть «хорошие» подмножества – независимые

«плохие» – зависимые

Множество хороших подмножеств $I \subset 2^X$

I должно удовлетворять следующим свойствам:

1. $\emptyset \in I$ – аксиома нетривиальности

2. $A \in I, B \subset A \Rightarrow B \in I$

Такая система называется предматроидом или Inheritance system

Но в такой системе не будет работать жадный алгоритм

Добавим еще одну аксиому:

$A \in I, B \in I, |A| > |B|$

Тогда $\exists x \in A \setminus B : B \cup x \in I$ – аксиома замены

Пример 1 (матричный матроид)

F^m, F – поле

I – множества линейно независимых векторов

Пример 2 (графовый матроид)

Рассмотрим G – неориентированный граф $\langle V, E \rangle$

$X = E, I$ – ациклическое множество

Докажем аксиому замены

$|V| = n, |E| = m$ Пусть есть множества A и $B, |A| > |B|$

Рассмотрим компоненты связности в графе G_A и G_B

Количество компонент связности $C_A = n - |A|, C_B = n - |B|$

$C_A < C_B$

Значит в A существует компонента связности, содержащая вершины из двух компонент в B

Тогда в A есть ребро, соединяющее разные компоненты из B

Утверждение

Рассмотрим $X_1, I_1 \subset 2^{X_1}$

$X_2, I_2 \subset 2^{X_2}$

Существует биекция $\phi : X_1 \rightarrow X_2$

$A \in I_1 \Leftrightarrow \phi(A) \in I_2$

Тогда пусть M – матроид X_1, I_1

N – система подмножеств X_2, I_2 и существует изоморфизм N и M

Тогда N – матроид

Лемма

Графовый матроид изоморфен матричному матроиду

Доказательство

Рассмотрим матрицу инцидентности

Представим ее как множество векторов из 0 и 1 (сложение по модулю 2)

Докажем, что подграф ациклический \Leftrightarrow множество векторов линейно независимое

Если A содержит цикл, то сложение(хор) векторов дает 0

Если A не содержит цикл, то это лес. Там есть лист. Тогда хор не даст 0

Пример 3 (матроид паросочетаний) Рассмотрим G – двудольный граф

X, Y – вершины двух долей

E – множество ребер

Пусть X – носитель

I – подмножество X , которое может быть покрыто одним паросочетанием

Докажем свойство 3

Пусть A покрывается паросочетанием M_A

B – паросочетанием M_B

Рассмотрим $M_A \oplus M_B$

В таком графе пути будут иметь вид $ab...aba(b)$, где a – ребро из A , b – ребро из B

Т.к. $|M_A| > |M_B|$, то найдется путь, начинающийся и заканчивающийся на a

Назовем его P

В $M_B \oplus P$ найдется изолированная вершина

Добавим ее в B

Пример 4 (универсальный матроид)

$U_{n,k}$

$X = \{1, \dots, n\}$

I – подмножества X не более k

Пример 5 (разноцветный матроид)

X – множество пар $\langle i, c_i \rangle$, i – предмет, c_i – цвет

$c_i \in C$

I – множества предметов различных цветов

Определение

$A \subset X$

$\text{base}(A) = B : B \in I, B \subset A, |B| - \text{максимально}$

В матричном матроиде: базис

В графовом матроиде: остовный лес

$\text{base}(X)$ – база матроида

Лемма

$A \subset X$

B – максимальное по включению подмножество $A, B \in I$

Тогда B – база A

Доказательство

Пусть есть B' – база A

Если $|D| > |B|$, то по аксиоме 3 $\exists x : x \in D \setminus B, B \cup x \in I$ – что невозможно

Из данной леммы следует, что мы можем применять жадные алгоритмы

Определение

Взвешенный матроид – пара из матроида и $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ – весовая функция

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$$

Как найти базу минимального веса?

Алгоритм (Жадный, Радо-Эдмондса)

```
1  sort X
2  for x in X
3      if (B ∪ {x}) ∈ I:
4      B.insert(x)
```

Лемма

Пусть A_k – независимое множество минимального веса мощности k

y – элемент минимального веса такой, что $A_k \cup y \in I, y \notin A_k$

Тогда $A_{k+1} := A_k \cup y$

Доказательство

Рассмотрим A_k и A_{k+1}

По аксиоме замены $z = A_{k+1} \setminus A_k$

Если $w(y) < w(z)$, то $w(A_k \cup y) < w(A_{k+1})$

Тогда A_{k+1} – не минимального веса

Доказательство корректности алгоритма

По индукции

2.1 Аксиоматизация матроида

Определение

Ранговая функция: $r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$

$$r(A) = \max\{|B| : B \subset A, B \in I\}$$

$$r(M) = r(X)$$

B матричном матроиде: ранг – классический

B графовом матроиде:

цикл – классический

$\text{rg} = n - k$ – количество вершин - количество компонент связности

B циклическом матроиде: $\text{rg}(A) = \min(k, |A|)$

цикл – множество мощности $k + 1$

Теорема (О базах)

B – базы M

1. $B_1, B_2 \in B, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$
2. $B_1, B_2 \in B$
Тогда $\forall x \in B_1 \setminus B_2 \exists y \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus x \cup y \in B$

Теорема (аксиоматизация базами)

$X, B \subset 2^X, B \neq \emptyset$

Если для B выполнена предыдущая теорема, то B – база некоторого матроида

Теорема (о рангах)

$r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ для матроида M

1. $0 \leq r(A) \leq |A|$
2. $A \subset B \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \text{rg}(B)$
3. $\text{rg}(A \cup B) + \text{rg}(A \cap B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$

Лемма

Пусть $A \in I$

Тогда \exists база $B : A \subset B$

Теорема (аксиоматизация рангами)

Если $r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ и выполнены аксиомы из предыдущей теоремы, то r – ранговая функция некоторого матроида

Теорема о циклах

Cyc – множество циклов матроида M

1. $C_1, C_2 \in \text{Cyc}, C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
2. $C_1, C_2 \in \text{Cyc}, C_1 \neq C_2$
 $\forall p \in C_1 \cap C_2 \exists C_3 \in \text{Cyc} : C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p$

Доказательство

$$r((C_1 \cup C_2) \setminus p) \leq r(C_1 \cup C_2) \leq r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus p|$$

Лемма

$A \notin I \Rightarrow \exists C \in \text{Cyc} : C \subset A$

Лемма

B – база матроида M

$p \in X \setminus B$

Тогда $\exists! C \subset B \cup p, C \in \text{Cyc}$

Доказательство

Существование очевидно

Пусть $C_1, C_2 \subset B \cup p$

$p \in C_1 \cap C_2$

Тогда $\exists C : C \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p \subset B$ – противоречие

Теорема о базах усиленная

Пусть B – базы матроида M

$B_1, B_2 \in B$

Тогда $\forall y \in B_2 \setminus B_1 \exists x \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \cup y \setminus x \in B$

Доказательство

Возьмем y и добавим в B_2

$B_1 \cup y$ содержит единственный цикл C

$\exists x \in (B_1 \setminus B_2) \cap C$

Тогда $B_1 \cup y \setminus x$ не содержит циклов \Rightarrow база

Определение

$\langle A \rangle = A \cup \{p : \text{rg}(A \cup p) = \text{rg}(A)\}$ // Доказательства конспектировать
 лень