

# Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

## 1 Friends and strangers graph

Рассмотрим связный неориентированный граф  $G$  из  $n$  вершин

В  $n - 1$  вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной

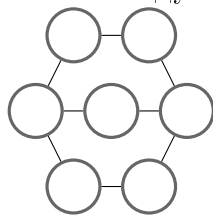
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)

Для каких графов  $G$  можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?

**Теорема Уилсона**

Если граф  $G$ :

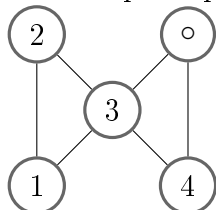
- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины  $n \geq 4$
- $G$  – не следующий граф:



то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно

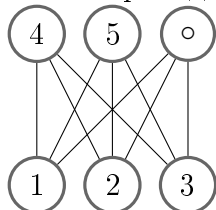
**Доказательство необходимости**

- Рассмотрим граф



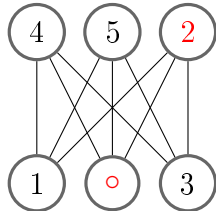
Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

- Рассмотрим двудольный граф



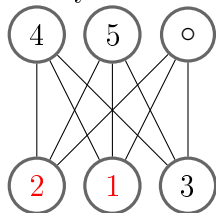
Рассмотрим его как перестановку

Поменяем 2 и 6 местами

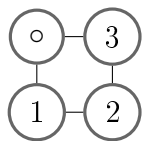


Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится 6) не изменилась

Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку



- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

### Доказательство достаточности

Отсутствует...

Рассмотрим обобщение предыдущей игры:

Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"

Т.е. теперь у нас два графа: "географический" граф  $X$  и граф дружбы  $Y$

В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка" с  $\circ$  в центре (т.е.  $\circ$  дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)

Построим граф  $FS(X, Y)$  – граф друзей и врагов

В нем будет  $n!$  вершин

Каждая вершина графа – биекция  $\sigma : V(X) \rightarrow V(Y)$

Получается, что  $\sigma$  – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к.  $V(x)$  – множество вершин, а  $V(Y)$  – множество фишек)

Вершины  $\sigma$  и  $\sigma'$  соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским" обменом

Тогда из любой перестановки можно получить любую  $\Leftrightarrow$  граф связан

Из теоремы Уилсона:  $FS(G, K_{1,n-1})$ ,  $G$  – из теоремы Уилсона,  $K_{1,n-1}$  – звездочка с вершиной  $n$  в центре

Ответим на другой вопрос: Для каких  $G$  граф  $FS(G, C_n)$ ,  $C_n$  – цикл длины  $n$  – связан

### Лемма

Графы  $FS(X, Y)$  и  $FS(Y, X)$  – изоморфны

Т.е. можно построить биекцию  $u \xleftrightarrow{\theta} u'$  такую, что ребра  $uv$  и  $\theta(u)\theta(v)$  существуют одновременно

### Доказательство

Построим биекцию  $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$

Теперь рассмотрим граф  $FS(C_n, G)$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию:

По кругу стоят  $3n$  человек:  $n$  семей вида папа-мама-ребенок

Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой

//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать  
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

## 2 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

### 2.1 Линейные отображения

#### Определение

$\text{Lin}(X, Y)$  – множество линейных отображений из  $X$  в  $Y$  (линейные пространства)

$\text{Lin}(X, Y)$  – линейное пространство

#### Обозначение

Пусть  $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} |A(x)|$$

#### Замечание 1

$$\|A\| \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство

Было доказано:  $|Ax| \leq C_A |x|$ ,  $C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$

#### Замечание 2

Из теоремы Вейерштрасса  $\sup \leftrightarrow \max$  в конечномерном случае

#### Замечание 3

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\| |x|$$

#### Доказательство

Для  $x = 0$  очевидно

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|}$$

$$|A\tilde{x}| \leq \|A\|$$

#### Замечание 4

Если  $\exists C : \forall x \quad |Ax| \leq C|x|$ , то  $\|A\| \leq C$

#### Пример

- $m = n = 1$   
 $A$  – линейное отображение:  $x \mapsto ax$   
 $\|A\| = |a|$
- $m = 1, n$  – любое  
 $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда  $\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n Ax = x\bar{v}$   
 $\|A\| = |\bar{v}|$

- $n = 1, m$  – любое

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда  $\exists l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l \rangle$

$$\|A\| = |l|$$

- $m, n$  – любые

$$A = (a_{ij})$$

$$x \mapsto Ax$$

$\|A\|$  так легко не считается((((

### Лемма

Пусть  $X, Y$  – нормированные линейное пространство

$$A \in \text{Lin}(X, Y)$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $A$  – ограничен, т.е.  $\|A\| < +\infty$
2.  $A$  – непрерывно в  $0 \in X$
3.  $A$  – непрерывно на  $X$
4.  $A$  – равномерно непрерывное ( $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon$ )

### Доказательство

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  – очевидно

Докажем  $2 \Rightarrow 1$

Возьмем  $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$$

Возьмем  $|x| = 1$

$$\|Ax\| = \frac{1}{\delta} \|A(\delta x)\| < \frac{1}{\delta}$$

$$\text{Тогда } \|A\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Докажем  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|} : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

**Теорема о пространстве линейных отображений**

- $\|\cdot\|$  – норма в  $\text{Lin}(X, Y)$ ,  $X, Y$  – конечномерные нормированные пространства  
Т.е.

1.  $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

#### Доказательство

$\|A\| \geq 0$  – тривиально

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_C |x| \Rightarrow \|A + B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$$

$$|BAx| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$$

#### Замечание

В  $\text{Lin}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x| < 1} |Ax| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad |Ax| \leq C|x|\}$$

#### Теорема Лагранжа (для отображений)

$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  – дифференцируема в  $D$  – открытом

$a, b \in D, [a, b] \subset D$

Тогда  $\exists c \in [a, b]$ , т.е.  $\exists \theta \in [0, 1] : c = a + \theta(b - a) : |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \|b - a\|$

#### Доказательство

$$f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1 - 0) = |F'(a + \theta(b - a))(b - a)| \leq \|F'(a + \theta(b - a))\| \|b - a\|$$

#### Лемма

$B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

$\exists c > 0 : \forall x \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда  $B$  – обратим и  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

#### Доказательство

Обратимость очевидна, т.к.  $\text{Ker } B = \{0\}$ . Тогда  $\exists B^{-1}$

$$|\underbrace{B^{-1}y}_x| \leq \frac{1}{c} |BB^{-1}y| = \frac{1}{c} |y|$$

### Замечание

$\Omega_m$  – множество обратимых линейных операторов  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| |Ax|$$

$$\text{Т.е. } |Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x|$$

### Теорема об обратимости линейного оператора, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$  – обратимый линейный оператор  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$M \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M \text{ – близкий к } L$$

Тогда

- $M \in \Omega_m$  – т.е.  $\Omega_m$  – открытое
- $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

### Доказательство 1 и 2

$$Mx = Lx + (M - L)x$$

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} |x| - \|M - L\| |x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x|$$

1 и 2 следуют из леммы

### Доказательство 3

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{lm}$$

$$\text{Аналогично } L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M - L)L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \|M - L\| \|L^{-1}\| \leq \text{из пункта 2}$$

### Следствие

Отображение  $L \mapsto L^{-1}$ , заданное на  $\Omega_m$ , непрерывно

### Доказательство

Доказательство по Гейне

Рассмотрим последовательность операторов  $B_k : B_k \rightarrow L$

Проверим, что  $B_k^{-1} \rightarrow L^{-1}$

$$\text{Н.С.Н.М. } \|B_k - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

$$\|B_k^{-1} - L^{-1}\| \leq \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - B_k\|}}_{\text{огр}} \underbrace{\|L - B_k\|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

**Теорема (о непрерывно дифференцируемых отображениях)**

$F : \underbrace{D}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ , дифф. на  $D$

$F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда  $1 \leftrightarrow 2$

1.  $F \in C^1(D)$  (все частные производные непрерывны на  $D$ )
2.  $F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$  – непрерывно на  $D$   
 $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

**Доказательство  $1 \rightarrow 2$**

Пусть  $F \in C^1(D)$

$$\forall i, j \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$$

$$\text{Тогда } \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \leq \sqrt{\sum_{ij} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

**Доказательство  $2 \rightarrow 1$**

Пусть  $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

$h = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)^T$

$$\left| \underbrace{(F'(x) - F'(\tilde{x}))h}_{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)} \right| \leq \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \|h\| \leq \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

$$\text{Тогда для } i = i_0 - \left| \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right| \leq \varepsilon$$

### 3 Экстремумы

**Определение**

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$



$a \in D$  – локальный максимум  $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) \leq f(a)$   
(нестрогий экстремум)

$a \in D$  – локальный строгий максимум  $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) < f(a)$  (строгий экстремум)

**Теорема Ферма**

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } D$ ,  $f$  – дифференцируема

$a$  – экстремум

Тогда  $\forall$  направление  $l \ \frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

**Доказательство**

$g(t) = f(a + tl)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  – задана в окрестности 0

$g'(0) = 0$

$$g'(t) = f'l = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial l}$$

**Следствие (необходимое условие экстремума)**

$a$  – локальный экстремум

Тогда  $\forall 1 \leq k \leq m \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$

**Следствие (т. Ролля)**

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^m$  – компакт

$f$  – дифференцируема в  $\text{Int } K$  ( $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна)

$f_{\partial K} = \text{const}$ ,  $\partial K$  – граница компакта

Тогда  $\exists x_0 \in \text{Int } K : \text{grad } f(x_0) = 0$

**Доказательство**

По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает  $\max, \min$  на  $K$

Если оба на  $\partial K$ , то  $f \equiv \text{const}$  на  $K$

Иначе применим теорему Ферма

**Определение**

$Q(h) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – квадратичная форма, если она представляет однородный многочлен 2 степени

т.е.  $Q(h) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} a_{ij} h_i h_j, a_{ij} = a_{ji}$

$Q$  – положительно определенная  $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) > 0$

$Q$  – отрицательно определенная  $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) < 0$

$Q$  – неопределенная  $\Leftrightarrow \exists h : Q(h) > 0, \exists h : Q(h) < 0$

$Q$  – полуопределенная (положительно определенная вырожденная)  $\Leftrightarrow \forall h \ Q(h) \geq 0, \exists h \neq 0 : Q(h) = 0$

### Лемма

1.  $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – кв. форма,  $Q > 0$   
Тогда  $\exists \gamma_Q > 0 : \forall x \ Q(x) > \gamma_Q |x|^2$
2.  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – норма Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \ C_1 |x_1| \leq p(x) \leq C_2 |x_2|$

### Доказательство

1.  $\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x) > 0$   
Тогда  $Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \geq \gamma_Q |x|^2, x \neq 0$
2. Проверим, что  $p(x)$  непрерывна, чтобы доказать существование минимума и максимума:  
 $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p(\sum (x_k - y_k) \bar{e}_k) \leq \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq M |x - y|, M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$  – по КБШ  
 $C_1 = \min_{|x|=1} p(x), C_2 = \max_{|x|=1} p(x)$   
 $p(x) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \leq |x| C_2, \geq |x| C_1$

### Напоминание

$$f(x+h) = f(x) + d f(x, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, h) + \dots$$

$$d^2 f(x, h) = f''_{x_1 x_1}(x) h_1^2 + \dots + f''_{x_n x_n}(x) h_n^2 + 2 f''_{x_1 x_2}(x) h_1 h_2 + \dots$$

### Теорема (достаточное условие экстремума)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int } D, \text{grad } f(a) = 0, f \in C^2(D)$

$Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда  $Q > 0 \Rightarrow a$  – локальный минимум

$Q < 0 \Rightarrow a$  – локальный максимум

$Q \leq 0$  – не точка локального экстремума

$Q \geq 0$  – информации недостаточно

### Доказательство

$$\forall h \ \exists t \in (0, 1) : f(a+h) = f(a) + \underbrace{d f(a, h)}_0 + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) - \text{остаток в}$$

формуле Лагранжа

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(\underbrace{f''_{x_1x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1x_1}(a)h_1^2}_{|\text{б.м.} \cdot h_i^2| = o(|h|^2)} + \dots + \underbrace{2f''_{x_1x_2}h_1h_2 - 2f''_{x_1x_2}(a)h_1h_2}_{|\text{б.м.} \cdot h_i h_j| = o(|h|^2)} + \dots)$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{2}\gamma_Q|h|^2 - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0, \alpha(h) - \text{б.м.}, \text{ при достаточно малых } |h|$$

Пункт 1 доказан

Пункт 2 доказывается заменой  $f \rightarrow -f$

Пункт 3:  $h : Q(h) > 0, \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$

$$\text{Аналогично п.1. } f(a + s \cdot h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{1}{2}Q(h)s^2 - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h) \cdot s^2$$

С другой стороны  $f(a + s \cdot \tilde{h}) < 0$  по аналогичным соображениям

Пункт 4:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, a = (0, 0)$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$$

$$Q(h) = 2h_1^2 - \text{полуопределенный}$$

Тут нет экстремума

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 - \text{в нуле экстремум}$$

## 4 Функциональные последовательности и ряды

### 4.1 Равномерная сходимость последовательностей и функций

#### Определение

Последовательность функций – отображение  $N \rightsquigarrow$  множество функций

Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots : X \rightarrow \mathbb{R}, X$  – любое множество

Последовательность  $(f_n)$  сходится поточечно на  $E$  – существует функция  $f(x)$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Последовательность  $(f_n)$  сходится равномерно на  $E$  к функции  $f$

$$f_n \xRightarrow{E} f \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \underbrace{\forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \rho(f_n, f) \leq \varepsilon}$$

**Замечание**

$f \rightrightarrows f$  на  $E, E_0 \subset E$

Тогда  $f_n \rightrightarrows_{E_0} f$

**Замечание**

$f_n \rightrightarrows_E f$

Тогда  $f_n \xrightarrow{E} f$

**Замечание**

$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{огр.}\}$

Тогда  $\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$  является метрикой на  $\mathcal{F}$

**Доказательство**

Первые две аксиомы очевидны

Докажем неравенство треугольника

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \rho(f, g) - \varepsilon < |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

Отсюда  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

**Замечание**

$f_n \rightrightarrows f$  на  $E_1$  и на  $E_2$

Тогда  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E_1 \cup E_2$

**Теорема 1 (Стокса - Зайдля)**

$X$  – метрическое пространство

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$c \in X, f_n$  – непрерывная в  $c$

$f_n \rightrightarrows f$  на  $X$

Тогда  $f$  – непрерывна в  $c$

**Доказательство**

Дано утверждение о равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$$

Начиная с некоторого большого  $n$  :

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{< \varepsilon}$$

Т.к.  $f_n$  непрерывна, то  $\exists U(c) : \forall x \in U(c) |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$

Отсюда  $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists U(c) : \forall x \in U(c) |f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

**Замечание**

Вместо метрических пространств можно рассматривать топологические пространства (без изменения доказательства)

**Следствие**

$f_n \in C(X), f_n \Rightarrow f$  на  $X$ . Тогда  $f \in C(X)$

**Следствие 2**

$f_n \in C(X), \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$  на  $W(c)$ . Тогда  $f \in C(X)$

**Замечание**

$f_n \Rightarrow f$  на  $X \not\Rightarrow \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$

Пример:  $f_n = x^n, x \in (0, 1)$

$f \equiv 0$

Рассмотрим точку  $x$  в  $(\alpha, \beta), \beta \neq 1$

$\rho(f_n, f) = \beta^n \rightarrow 0$

$f_n(x) \Rightarrow f$  на  $(\alpha, \beta)$

Но  $\rho(f_n, f) = 1$  на  $(0, 1)$

$f_n \not\Rightarrow f$  на  $(0, 1)$