

Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

1 Линейное отображение

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть V, U - линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

$\mathcal{A} : U \rightarrow V$ - *линейное отображение*, если $\forall \lambda \in K, u_1, u_2 \in U$ $\mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$

Замечания

1. Обозначение: $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$ поточечно определены $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda \mathcal{A}u$

Примеры

1. $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2. $\epsilon v = v$
3. $V, U = P_n$ - множество многочленов степени $\leq n, A = \frac{d}{dt}$ - дифференциальный оператор
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$ - матрица
 $\mathcal{A}u = B \cdot u$

Определение

$L(U, V) = \text{Hom}_K(U, V) = \text{Hom}(U, V)$ – множество всех линейных отображений $U \rightarrow V$

Определим операции

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

$$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$$

$L(U, V)$ – линейное пространство

Определение

$\text{Im } \mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$ – образ линейного отображения

Замечание

$\text{Im } \mathcal{A} \subset V$ – линейное подпространство

Если $\text{Im } \mathcal{A}$ – конечномерное, то $\dim \text{Im } \mathcal{A} =: \text{rg } \mathcal{A}$

Определение

$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$ – ядро линейного отображения (прообраз $\mathbb{0}_V$)

Замечание

$$\text{Ker } \mathcal{A} \neq \emptyset$$

$$\mathbb{0}_U \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$\text{Ker } \mathcal{A} \subset U$ – линейное подпространство

Если $\text{Ker } \mathcal{A}$ конечномерно, то $\dim \text{Ker } \mathcal{A} = \text{def } \mathcal{A}$

Замечание 2

Изоморфизм – частный случай линейного отображения

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{Im } \mathcal{A} = V \\ \text{Ker } \mathcal{A} = \mathbb{0}_U \text{ (тривиально)} \end{cases}$$

Следствие

Если U, V – конечномерные

$$\mathcal{A} \text{ - изоморфизм} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \text{rg } \mathcal{A} = \dim V \\ \text{def } \mathcal{A} = 0 \end{cases}$$

Определение

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

- \mathcal{A} сюръективное $\Leftrightarrow \text{Im } \mathcal{A} = V$
- \mathcal{A} инъективное $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- \mathcal{A} биективно \Leftrightarrow сюръективно + инъективно \Leftrightarrow изоморфизм

- \mathcal{A} эндоморфизм \Leftrightarrow линейный оператор $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in L(V, V) \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{End}_K(V)$
- \mathcal{A} автоморфизм \Leftrightarrow эндоморфизм + изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \text{Aut}_K(V)$

Примеры

1. $0 \in L(U, V)$
2. $\epsilon \in \text{Aut}(V)$ – автоморфизм
3. $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$ – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм
 $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$ – матрица

Определение

$\text{Im } A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ – образ матрицы

$\text{Ker } A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ – ядро матрицы

$\text{def } A = \dim \text{Ker } A$ – дефект матрицы

$\text{rg } A = \dim \text{Im } A$ – согласуется со старыми определениями ранга матрицы

Доказательство

Для $y \in \text{Im } A$

$$y = Ax = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

$$\text{Im } A = \text{span}(A_1, \dots, A_n)$$

$$\dim \text{Im } A = \text{rg } A$$

Утверждение

$\text{Ker } A$ – множество решений $Ax = 0$

Тогда $\text{def } A = \dim \text{Ker}(A) = n - \text{rg } A$

Отображение $u = Av$:

- (a) Сюръекция $\Leftrightarrow \text{rg } A = m$
- (b) Инъекция $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- (c) Биекция $\Leftrightarrow n = m = \text{rg } A$
- (d) Эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m$
- (e) Автоморфизм $n = m = \text{rg } A$

Определение

$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – композиция

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – линейное отображение

Свойства

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
 $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{A}\mathcal{B}_1 + \mathcal{A}\mathcal{B}_2$ – дистрибутивность
2. $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$ – однородность
3. $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ – ассоциативность
4. \mathcal{A}, \mathcal{B} – изоморфизм $\Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ – изоморфизм

Определение

Пусть $\mathcal{A} \in L(U, V)$ – изоморфизм

$\forall v \in V \exists ! u : \mathcal{A}u = v$

Тогда зададим $\mathcal{A}^{-1}v = u$

$\mathcal{A}^{-1} : V \rightarrow U$

\mathcal{A}^{-1} – изоморфизм, обратный к \mathcal{A}

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$

Замечание

$\text{End}(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра

$\text{Aut}(V)$ – ассоциативная унитарная алгебра с делением

Определение

$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$ – линейное подпространство

Тогда $\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow V$ называется сужением на линейное подпространство

U_0 , если $\forall u \in U_0 \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$

Очевидно $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$

$\mathcal{A}_0 =: \mathcal{A}|_{U_0}$

Утверждение

\mathcal{A} изоморфизм $\Rightarrow \mathcal{A}_0$ изоморфизм $\in L(U_0, \text{Im } \mathcal{A}_0)$

Доказательство

$\mathcal{A}_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$ – сюръекция

$\text{Ker } \mathcal{A}_0 \subset \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ – из изоморфизма

Отсюда $\text{Ker } \mathcal{A}_0 = \{0_U\}$

Тогда \mathcal{A}_0 инъекция, а значит изоморфизм

Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

U, V – конечномерные

$A \in L(U, V)$

Тогда $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$

Доказательство

$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$

Дополним U_0 до U : $U = U_0 \oplus U_1$

Пусть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \rightarrow \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\forall u \in U \ u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$ – единственным образом

$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$

Отсюда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

Покажем, что \mathcal{A}_1 изоморфизм:

Сюръекция, т.к. действует в $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$

$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$

Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{0_U\}$ из дизъюнктивности

Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{0_U\}$ – тривиально

Тогда \mathcal{A}_1 инъективно

Отсюда \mathcal{A}_1 изоморфизм, т.е. $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$

Тогда $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$, ч.т.д.

1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные U, V

Определение

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

ξ_1, \dots, ξ_n – базис U

ν_1, \dots, ν_m – базис V

$$\forall u \in U \ u = \sum_{i=1}^n u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$$\forall v \in V \ v = \sum_{i=1}^m v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$\forall v \in \text{Im } \mathcal{A} \quad v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}\xi_i$$

\mathcal{A} , как линейное отображение, полностью определяется значениями \mathcal{A} на базисных векторах

$$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

$A = (A_1 \dots A_n)$ - матрица линейного отображения в базисах (ξ, ν)

Если $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ - линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпадают

$$v = \sum_{j=1}^m v_j \nu_j$$

$$v = \mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \right) \nu_j$$

Т.к. координаты введены единственным образом, то $\forall j \quad v_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} u_i \Leftrightarrow$

$$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$$

Примеры

$$1. \quad \epsilon: \underset{e_1 \dots e_n}{V} \rightarrow \underset{e_1 \dots e_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow E$$

$$2. \quad \epsilon: \underset{\xi_1 \dots \xi_n}{V} \rightarrow \underset{\nu_1 \dots \nu_n}{V}$$

$$\text{Тогда } \epsilon \leftrightarrow T_{\nu \rightarrow \xi} = T_{e \rightarrow e'}$$

Утверждение

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$ - пространство всех матриц $A_{m \times n}$, $\dim U = n$, $\dim V = m$ (при фиксированных базисах U, V)

Доказательство

Соответствие между \mathcal{A} и A взаимнооднозначное

Докажем линейность

$$(\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda \mathcal{B}_{\xi_i} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \nu_j + \lambda \sum_{j=1}^m b_{ji} \nu_j = \sum_{j=1}^m (a_{ji} + \lambda b_{ji}) \nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$$

Утверждение

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \leftrightarrow AB$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \begin{matrix} U \\ \xi_1 \dots \xi_n \end{matrix} & \xrightarrow{B} \begin{matrix} W \\ \theta_1 \dots \theta_r \end{matrix} \xrightarrow{A} \begin{matrix} V \\ \nu_1 \dots \nu_m \end{matrix} \quad (\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^r b_{ki} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^r b_{ki} \mathcal{A}_{\theta_k} = \\ \sum_{k=1}^r b_{ki} \sum_{j=1}^m a_{jk} \nu_j &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^r a_{jk} b_{ki}\right) \nu_i = \sum_{j=1}^m AB_{ji} \nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{A} \in \text{Aut}(V)$

(В одном базисе)

$$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$$

Доказательство

Пусть $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon \leftrightarrow AB = E$$

Отсюда $B = A^{-1}$

Утверждение

A изоморфно $\Rightarrow A_0$ изоморфно

Доказательство

$A_0 : U_0 \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}_0$ – сюръекция

$$\text{Ker } A_0 \subset \text{Ker } A = \{\mathbb{O}_U\}$$

Отсюда $\text{Ker } A_0 = \{\mathbb{O}_U\}$

Отсюда A_0 – инъективно, а значит изоморфизм

Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix} \leftrightarrow A'$$

$T_{\xi \rightarrow \xi'} T_{\nu \rightarrow \nu'}$ – матрицы перехода

$$\text{Тогда } A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Доказательство

Пусть $\xi_U : \begin{matrix} U \\ \xi' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} U \\ \xi \end{matrix}$,

$$\xi_V : \begin{matrix} V \\ \nu \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ \nu' \end{matrix}$$

$$\mathcal{A} = \xi_V \mathcal{A}_{\xi_U}$$

$$A' = T_{\nu' \rightarrow \nu} A T_{\xi \rightarrow \xi'}$$

Следствие

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$\mathcal{A} : \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} V \\ e \end{matrix} \leftrightarrow A$$

$$\mathcal{A} : V \xrightarrow{e'} V \xleftarrow{e'} A'$$

$$A' = T_{e' \rightarrow e} A T_{e \rightarrow e'}$$

Определение

Матрицы $A_{n \times n}, B_{n \times n}$ *подобны*, если $\exists C$ невырожденная: $A = C^{-1} B C$

A и A' – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны

Утверждение

$$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Ker } A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} \leftrightarrow \text{Im } A$$

Доказательство

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{Im } A$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = 0\}$$

$$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } A$$

1.3 Инвариантность линейного отображения

Определение

Инвариантностью/инвариантом называется свойство, которое не меняется при определенном рода преобразованиях

Теорема 1

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\text{rg } A$ и $\text{def } A$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$, не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса

Доказательство

$$\mathcal{A} : U \xrightarrow{\xi} V \xleftarrow{\nu} A$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = \text{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \text{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$$

$$\text{rg } \mathcal{A} = \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim \text{span}(A_1, \dots, A_n) = \text{rg } A$$

$$\text{rg } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = n = \text{rg } A + \text{def } A \Rightarrow \text{def } \mathcal{A} = \text{def } A$$

Следствие

$$\mathcal{A} \text{ изоморфизм} \Leftrightarrow \exists A^{-1}, \text{ где } A \leftrightarrow \mathcal{A}$$

Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V$$

Тогда $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$ – определитель системы векторов в базисе e_1, \dots, e_n

Теорема 2

Значение $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса e_1, \dots, e_n (т.е. является инвариантом), причем $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора в некотором базисе

Доказательство

Выберем базис e_1, \dots, e_n

Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A_{n \times n}$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A \end{aligned}$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в e'_1, \dots, e'_n – базисе V – это тоже верно

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e'} A'$$

$$\det \mathcal{A} = \det A'$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$A' = T^{-1} A T$$

$$\text{Тогда } \det A' = \det(T^{-1} A T) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$$

Следствие

$\forall f$ – n-форма на V

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \quad f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Доказательство

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$$

g – n-форма, т.к. f – n-форма

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \quad (\text{см. доказательство теоремы})$$

$$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det A f(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Следствие 2

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$$

Следствие 3

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$$

$$\text{Причем } \det \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}}$$

$$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$$

Доказательство

$$\mathcal{A} \in \text{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1} \in \text{Aut}(V)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$$

$$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$$

Примеры

1. В V_3

$$f(a, b, c) = (a, b, c) = \text{ориентированный объем} = \det(a, b, c)$$

$$\mathcal{A} : V_3 \rightarrow V_3$$

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a, b, c)$$

$\lambda = \det \mathcal{A}$ – коэффициент пропорциональности объемов

(a) $\mathcal{A}v = \mu v$ – оператор подобия

$$\text{Тогда } \lambda = \mu^3$$

(b) Поворот

Пусть i, j, k перешли в e_1, e_2, e_3 поворотом

$$\text{Тогда } e_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A} \overset{ijk}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix} - \text{матрица поворота}$$

$$f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a, b, c)$$

$$\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1 - \text{смешанное произведение}$$

Отсюда при повороте объем сохраняется

Определение

$$A_{n \times n}$$

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii} - \text{след матрицы}$$

Теорема 3

Если матрицы подобные, то $\text{tr } A = \text{tr } B$

Доказательство

$$A, B - \text{подобные} \Rightarrow \exists \text{ невырожденная } C : A = C^{-1}BC = SBC$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A &= \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n S_{ik} \sum_{m=1}^n B_{km} C_{ki} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} \sum_{i=1}^n C_{mi} S_{ik} = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n B_{km} E_{mk} = \sum_{k=1}^n B_{kk} = \operatorname{tr} B\end{aligned}$$

Следствие

A и A' матрицы $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ в разных базисах

Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$ (из формулы перехода)

Определение

$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$, где A – матрица \mathcal{A} в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

Определение

$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

L называется инвариантным относительно \mathcal{A} , если $\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Если L – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве

Примеры

1. \emptyset, V
2. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}, \operatorname{Im} \mathcal{A}$
3. \mathcal{A} – вращение пространства вокруг оси l на фиксированный угол
Тогда $l, L \perp l$ – инвариантное пространство (L – плоскость)
Линейные многообразия $P = x_0 + L$ – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

Теорема 4

$L \subset V$ – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда \exists базис V такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$, где $A^1_{k \times k}, k = \dim L$

Доказательство

Пусть L – инвариантное линейное подпространство относительно \mathcal{A}

$\forall x \in L \mathcal{A}x \in L$

Пусть e_1, \dots, e_k – базис L

Дополним его до базиса V :

$V = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^k a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что A имеет ожидаемый вид

Следствие 1

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора \mathcal{A} имеет блочно-диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}, \text{ где } A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$$

Доказательство

Пусть e_1, \dots, e_k – базис L_1

e_{k+1}, \dots, e_n – базис L_2

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in 1 \dots k} \in L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A_j^1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}e_{j \in k+1 \dots n} \in L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A_{j-k}^2 \end{pmatrix}$$

Следствие 2

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора \mathcal{A} имеет блочно-диагональный вид (аналогично предыдущему следствию)

Пусть $A|_{L_j} : L_j \rightarrow L_j$ (эндоморфизм)

Тогда $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_j$

Следствие 3

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$\text{Тогда } \text{Im } \mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(A|_{L_j})$$

Доказательство

$$V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$$

$$\forall x \in V \exists ! x_1 \in L_1, \dots, x_m \in L_m : x = \sum_{i=1}^m x_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^m \mathcal{A}x_i$$

$$\mathcal{A}x_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \mathcal{A} = \sum_{i=1}^m \text{Im } \mathcal{A}_i$$

Докажем дизъюнктность

Пусть $y_i \in \text{Im } \mathcal{A}_i$

Тогда $\exists x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$$y_1 + \dots + y_m = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \dots + \mathcal{A}x_m = 0$$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$, т.к. L_i – инвариант

Т.к. $L_1 \dots L_m$ – дизъюнкты, то $\mathcal{A}x_i = 0$

Отсюда $y_i = 0$

Отсюда $\text{Im } \mathcal{A}_i$ дизъюнкты

1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

V – линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

$\lambda \in K$ – *собственное число* $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, если $\exists v \neq 0 \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

v – *собственный вектор* \mathcal{A} , отвечающий собственному числу λ

$$\text{Отсюда } v - \text{СВ} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)v = 0$$

$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon) = (\text{множество всех СВ } \mathcal{A}, \text{ отвечающих } \lambda) \cup \{0\}$ – собственное подпространство \mathcal{A} , отвечающее λ

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность числа λ

$V_\lambda, \gamma_\lambda$ – инвариантны относительно оператора \mathcal{A} и выбора базиса

Примеры

1. Оператор подобия:

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v := \lambda v$$

У него λ – собственное число, $V = V_x$

$$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$$

2. \mathcal{A} – поворот на плоскости относительно начала координат на угол $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
3. $\lambda = 0$ – собственное число \mathcal{A}
 $\Leftrightarrow \text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0\}$
 $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – не изоморфизм
 $\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = 0$
4. v_1, \dots, v_n – базис V , где v_j – СВ \mathcal{A} для стационарного числа λ_j

Научимся находить СЧ и СВ

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \text{tr } A + \dots + \det A$ – характеристический многочлен $\mathcal{A}(A)$ λ – СЧ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$

Из основной теоремы алгебры $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ имеет ровно n корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)

Если $\lambda_{i \in 1 \dots n}$ – корни, то $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ (т.к. свободный член χ)

Т.о. $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_i = 0$

Также из теоремы Виета $\text{tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod_{\lambda - \text{корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$, где $\alpha(\lambda)$ – алгебраическая кратность СЧ λ (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в \mathbb{R}^2 на $\alpha \in (-\pi, \pi)$

Найдем характеристический многочлен:

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos \alpha - t)^2 + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 2t \cos \alpha + t^2 + \sin^2 \alpha = t^2 - 2t \cos \alpha + 1$$

Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ

$$\det A = 1, \text{tr } A = 2 \cos \alpha$$

Теорема 1

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V), \lambda$ – СЧ $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

Доказательство

$1 \leq \gamma(\lambda)$ очевидно, т.к. $\gamma(\lambda) = \dim V_{\lambda} = \gamma$

Пусть v_1, \dots, v_γ – базис V_λ

V_λ – инвариант относительно \mathcal{A}

Тогда существует базис V_λ такой, что A имеет ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$

Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE| |A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t) \chi_{A^2}(t)$

Пусть $v_1, \dots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \dots, e_n$ – наш базис

Т.к. $\mathcal{A}v_{j \in 1 \dots \gamma} = \lambda v_j$, то $A^1 = \lambda E_{\gamma \times \gamma}$

$\chi_{A^1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A^2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma$, т.к. возможно λ – корень $\chi_{A^2}(t)$

Определение

Набор СЧ \mathcal{A} с учетом кратности является спектром оператора \mathcal{A}

Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е. $\forall \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = 1$

Теорема 2

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные СЧ \mathcal{A}

v_1, \dots, v_m – соответствующие СВ

Тогда v_1, \dots, v_n – линейно независимые

Доказательство

Методом математической индукции:

1. $m = 1$ – очевидно (т.к. $v_1 \neq 0$)
2. Пусть верно для m
Докажем для $m + 1$ от противного
Пусть $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j \in 1 \dots m}$, v_{m+1} – соответствует λ_{m+1}
Пусть v_1, \dots, v_{m+1} линейно зависимые
Тогда $v_{m+1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$
//todo

Следствие 1

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различные СЧ \mathcal{A}

Тогда $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_m}$ – дизъюнктные

Доказательство

$v_1 + \dots + v_m = 0, v_i \in V_{\lambda_i}$

Пусть $v_i \neq 0$. Тогда v_i – СВ для λ_i (т.к. $v_i \in V_{\lambda_i}$)

Тогда линейная комбинация СВ $= 0$, чего не может быть из теоремы

Тогда $v_i = 0$, откуда дизъюнктность

Следствие 2

Пусть $V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \text{End}(V_\lambda)$

Тогда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{\lambda - \text{СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$

Доказательство

$V = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_\lambda$

V_λ – инвариант относительно \mathcal{A}

Тогда существует базис такой, что $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$

$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$

$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$

Тогда $V = \text{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$, где $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$ – базис V_{λ_k}

Тогда базис V – объединение базисов

Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагона- лизируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

Определение

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ называется оператором простой структуры, если существует базис V такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Замечание

\mathcal{A} – ОПС \Leftrightarrow в V существует базис из СВ

Теорема

Если все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$, т.е. являются СЧ (т.е. $\sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda) = n =$

$\deg \chi_{\mathcal{A}}(t)$)

\mathcal{A} – ОПС $\Leftrightarrow \forall \lambda - \text{СЧ } \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$

Доказательство

$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

$$\mathcal{A} - \text{ОПС} \Leftrightarrow \exists \text{ базис из СВ} \Leftrightarrow = \bigoplus_{\lambda - \text{СЧ}} V_{\lambda} \Leftrightarrow n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \gamma(\lambda)$$

$$\text{Отсюда } n = \sum_{\lambda - \text{СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$$

Следствие

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различные СЧ \mathcal{A} , то \mathcal{A} - ОПС

Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$\exists T$ невырожденная : $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_i - СВ

Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица A диагонализируема $\Leftrightarrow A$ - матрица ОПС \mathcal{A} в некотором базисе

Причем $T = T_{e \rightarrow v}$, где e_1, \dots, e_n - базис, в котором была записана A , v_1, \dots, v_n - базис из СВ \mathcal{A} , соответствующих $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Доказательство \Leftarrow

\mathcal{A} - ОПС

e_1, \dots, e_n - базис V , v_1, \dots, v_n - СВ, соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - СЧ, базис V

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A \quad \mathcal{A} \xleftrightarrow{v} A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$T = T_{e \rightarrow v}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

Отсюда A подобна диагональной

Доказательство \Rightarrow

//todo

Определение

Пусть $V = \bigoplus_{i=1}^m L_i$, L_i - линейное подпространство

Тогда $\forall v \in V \exists ! v_1, \dots, v_m : v_i \in L_i, v = \sum_{i=1}^m v_i$

Зададим $\rho_i \in \text{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

ρ_i - оператор проектирования (проектор) на L_i

Свойства:

$$1. \forall i \neq j \quad \rho_i \rho_j = \mathbb{O}$$

$$2. \sum_{i=1}^m \rho_i = \epsilon$$

3. $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$ – идемпотентность

4. $\text{Im } \rho_i = L_i$
 $\text{Ker } \rho_i = \sum_{j \neq i} L_j$

Утверждение

Пусть $\rho_1, \dots, \rho_m \in \text{End}(V)$, удовлетворяющие свойствам 1 и 2

Тогда $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$ (т.е. ρ – проектор на $L_i = \text{Im } \rho_i$)

Доказательство

Докажем $1, 2 \Rightarrow 3$

$$\rho_i = \rho_i \epsilon = \rho_i \sum_{j=1}^m \rho_j = \rho_i^2$$

Докажем, что $V = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$

$$\forall v \in V \quad v = \epsilon v = \sum_{i=1}^m \rho_i v \Rightarrow V = \sum_{i=1}^m \text{Im } \rho_i$$

Докажем дизъюнктность

$$0 = v_1 (\in \text{Im } \rho_1) + \dots + v_m (\in \text{Im } \rho_m)$$

$$\forall i = 1 \dots m \quad v_i = \rho_i \omega_i (\exists \omega_i \in V)$$

$$v_i = \rho_i \omega_i = \text{из свойства 3} = \rho_i \left(\sum_{j=1}^m \rho_j \omega_j \right) = \rho_i \left(\sum_{j=1}^m v_j \right) = \rho_i 0 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

Теорема о спектральном разложении о.п.с.

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ – о.п.с.

Тогда $\mathcal{A} = \sum_{\lambda - \text{С.Ч.}} \lambda \rho_\lambda$, где ρ_λ – проектор на V_λ

Доказательство

Обозначение: Пусть все λ – С.Ч. \mathcal{A} – о.п.с. $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$

$$v = \sum_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$$

$$\forall v \in V \quad \mathcal{A}v = \mathcal{A} \left(\sum_{\lambda} v_\lambda \right) = \sum_{\lambda} (\mathcal{A}v_\lambda) = \sum_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda(v) = \left(\sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda \right) v$$

Отсюда $\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$ – спектральное разложение

Следствие

A – диагонализируема $\Rightarrow \exists \rho_\lambda, \lambda - \text{С.Ч. } A : A = \sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

Определение

$(A_m)_{m=1}^\infty$ – последовательность матриц $A_{n \times n} = (a_{ij}^m)_{n \times n}$, m – индекс, а не степень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A = (a_{ij})_{n \times n} \Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \ a_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^m$$

Немного про ряды

$\sum_{m=1}^\infty a_m$ – числовой ряд ($a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$)

$S_m = \sum_{i=1}^m a_k$ – частичная сумма ряда

Если S_m сходится, то ряд называется сходящимся

Определение

$\sum_{m=1}^\infty A_m$ – ряд из матриц

$\sum_{m=1}^\infty A_m$ – сходится $\Leftrightarrow \forall i, j = 1 \dots n \ \sum_{m=1}^\infty a_{ij}^m$ – сходится

Далее про ряды

$\sum_{n=1}^\infty u_n(x), u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функциональный ряд

При фиксированном x – числовой ряд

Множество x таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда $= E$

$\sum_{m=1}^\infty C_m(x - x_0)^m$ – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$, где R – радиус сходимости

В \mathbb{C} – круг сходимости

В \mathbb{R} – интервал сходимости

Для $\mathbb{R} : \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum_{m=1}^\infty \frac{x^m}{m!}$, сходится при $|x - x_0| \leq \infty$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \text{ сходится при } |x| \leq \infty$$

На окружности (при $|x - x_0| = R$) ряд может как сходиться, так и расходиться

Определение

$$\text{Пусть } f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

$$\text{Тогда } f(A) := \sum_{m=0}^{\infty} C_m A^m \text{ (если ряд сходится)}$$

Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n \times n}$ диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}, \text{ где } \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Доказательство

$A_{n \times n}$ диагонализируема, а значит $\exists T : \Lambda = T^{-1} A T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k, R = \infty$$

$$A^k = (T \Lambda T^{-1})^k = T \Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}$$

Отсюда $S_m = T \operatorname{diag}(\sum_{k=0}^m C_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m C_k \lambda_n^k) T^{-1}$ (т.к. $R = \infty$, то все ряды

сойдутся)

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) T^{-1}$$

Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n \times n}$ диагонализируема

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$$

Тогда если $\forall \lambda - \text{СЧ } |\lambda| < R$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$, где $A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$ – спектральное разложение

Доказательство

A – диагонализируема $\Rightarrow A = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda$

Тогда $A^k = (\sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda \rho_\lambda)^k = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda$

Отсюда $S_m = \sum_{k=0}^m C_k A^k = \sum_{k=0}^m C_k \sum_{\lambda - \text{CЧ}} \lambda^k \rho_\lambda = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} (\sum_{k=0}^m C_k \lambda^k) \rho_\lambda \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda) \rho_\lambda$

Следствие

A – диагонализируема, $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall \lambda - \text{CЧ} \quad |\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall \lambda - \text{CЧ} \quad |t\lambda| < R$

Тогда $f(At) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \dots, f(\lambda_n t)) T^{-1}$

или $f(At) = \sum_{\lambda - \text{CЧ}} f(\lambda t) \rho_\lambda$

Пример

$\exp At = e^{At} = \sum_{\lambda} e^{t\lambda} \rho_\lambda = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) T^{-1}$

Свойства

1. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$
2. $e^{A0} = E$
3. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At} A$

Доказательство

$$(e^{At})' = (\sum_{\lambda} f(\lambda t) \rho_\lambda)' = \sum_{\lambda} \lambda e^{\lambda t} \rho_\lambda = (\sum_{\lambda} \lambda \rho_\lambda) (\sum_{\lambda} e^{\lambda t} \rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At} A$$

Поиск обратной матрицы

Пусть A диагонализируема

$\forall \lambda \quad \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}) T^{-1}$$

$$A^{-1} = \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_{\lambda}$$

Определение

$\sqrt[m]{A}$ – арифметический корень

Если $\forall \lambda \lambda \geq 0$, то результат определен однозначно

$$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$$

1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

V – линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Рассмотрим все ситуации

1. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
Т.е. все корни являются С.Ч. \mathcal{A}
 $\forall \lambda \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, т.е. \mathcal{A} – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)
2. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
Т.е. все корни являются С.Ч. \mathcal{A}
 $\exists \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$, т.е. \mathcal{A} – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)
3. При $K = \mathbb{R}$ не все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$
Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией

Определение

V – вещественное линейное пространство над \mathbb{R}

$$\forall x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$$

$$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$$

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y' \text{ в } V$$

$$0 = 0 + i0 \text{ – нулевой в } V_{\mathbb{C}}$$

$$\forall x \in V \quad V_{\mathbb{C}} \ni x + 0i = x$$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda = \alpha + i\beta \quad \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$$

Утверждение

$V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство

Теорема (о вещественном базисе $V_{\mathbb{C}}$)

Пусть $\dim V = n$, e_1, \dots, e_n – базис V , $e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$

Тогда e_1, \dots, e_n – базис $V_{\mathbb{C}}$ ($\dim V = \dim V_{\mathbb{C}}$)

Доказательство

$\forall z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

$$y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

Отсюда $z = \sum_{j=1}^n (x_j + iy_j) e_j$, т.е. e_1, \dots, e_n – порождающая

//todo Отсюда e_1, \dots, e_n – линейно независимые

Определение

$$z = x + iy$$

Тогда $\bar{z} = x - iy$ – сопряженный вектор

Утверждение

z_1, \dots, z_m – линейно независимые в $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$ – линейно независимые

$$(\Rightarrow \text{rg}(z_1, \dots, z_m) = \text{rg}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m))$$

Доказательство

$$c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m = 0$$

$$\overline{c_1 \bar{z}_1 + \dots + c_m \bar{z}_m} = \bar{0} = 0 = \bar{c}_1 z_1 + \dots + \bar{c}_m z_m \text{ – линейно независимые}$$

$$\text{Отсюда } \bar{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$$

Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

Продолжением \mathcal{A} на $V_{\mathbb{C}}$ называется $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ такой, что

$$\forall z = x + iy \in V_{\mathbb{C}} \quad \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$$

Свойства

1. e_1, \dots, e_n – базис V

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow{e} A = (a_{ij})_{n \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{e} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n \times n}$$

Доказательство

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \dots = \mathcal{A} e_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$$

$$\text{Отсюда } A_{\mathbb{C}} = A$$

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ (т.к. матрицы равны)
3. $\forall z \in V_{\mathbb{C}} \quad \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\bar{z})$
4. $\alpha \pm i\beta$ – пара сопряженных корней $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ – СЧ для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
 Тогда z – СВ, отвечающий СЧ $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \bar{z}$ – СВ, отвечающий СЧ $\alpha - i\beta$

Доказательство

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\bar{z}$$

Тогда:

Т.о. если $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

Нормализованный многочлен – многочлен, старший коэффициент которого 1

Нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется *аннулятором* элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = 0$

$$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0 = \prod_{\lambda - \text{корень многочлена}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}, \text{ где } m(\lambda) -$$

кратность корня

$$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_0\epsilon = \prod_{\lambda - \text{корень}} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

Определение

Минимальный аннулятор x – аннулятор минимальной степени

Теорема о минимальном аннуляторе элемента

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

1. $\forall x \in V \exists!$ минимальный аннулятор x
2. Любой аннулятор x делится на минимальный

Доказательство 1

(алгоритм)

$$1. \ x = \mathbb{O}, \psi \equiv 1$$

$$\epsilon = \psi(\mathcal{A})$$

$$2. \ x \neq \mathbb{O}$$

Пусть $x, \mathcal{A}x, \dots, \mathcal{A}^{m-1}x$ – линейно независимые и m – максимальное

$$\exists ! \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$$

$$(\mathcal{A}^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{O}$$

$$\psi(t) = t^m - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i \text{ – минимальный и определен единственным образом}$$

Доказательство 2

Пусть $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + r(t)$, $\deg r < \deg \phi$ – аннулятор

$$\mathbb{O} = \psi'(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A}) \underbrace{\psi(\mathcal{A})x}_{\mathbb{O}} + r(\mathcal{A})x$$

Отсюда $r(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$

Но т.к. ψ – минимальный, то $r \equiv \mathbb{O}$

Определение

Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором \mathcal{A} , если $\forall v \in V \ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{O}$ (т.е. $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$)

Аннулятор \mathcal{A} минимальной степени – *минимальный многочлен*

Теорема о минимальном многочлене

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$$1. \ \forall \mathcal{A} \exists ! \text{ минимальный многочлен}$$

$$2. \ \text{Любой аннулятор } \mathcal{A} \text{ делится на минимальный многочлен}$$

Доказательство

(алгоритм)

$$1. \ e_1, \dots, e_n \text{ – базис } V$$

По теореме 1 $\forall e_i \exists ! \psi_i(t)$ – минимальный аннулятор e_i

$$\phi(t) := \text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

$$\text{Тогда } \forall j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$$

Докажем, что $\phi(t)$ – аннулятор

$$\forall v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^m v_j e_j = \sum_{j=1}^m \phi(\mathcal{A})v_j e_j = \sum_{j=1}^m a_j(t) \psi_j(t) v_j e_j =$$

\emptyset

Т.о. ϕ – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на ϕ

Пусть $\phi_1(t)$ – аннулятор \mathcal{A}

$\forall v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \emptyset \Rightarrow \forall j = 1 \dots n \phi_1(\mathcal{A})e_j = \emptyset$ – тогда $\phi_1(\mathcal{A})$ – аннулятор e_j

Т.к. $\psi_j(t)$ – минимальный аннулятор e_j , то $\phi_1(t)$ делится на $\psi_j(t)$

Отсюда $\phi_1(t)$ делится на $\text{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$

Отсюда $\deg \phi$ – минимальная из возможных, а значит ϕ – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный

Пусть $\phi_2(t)$ – аннулятор \mathcal{A} такой, что $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$

Тогда $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$ – степень меньше m

Но тогда δ – аннулятор, $\deg \delta < m$ – противоречие

Отсюда $\phi_2 = \phi$

Теорема Кэли-Камильтона

$\forall \mathcal{A} \in V$

$\chi_{\mathcal{A}}$ – аннулятор \mathcal{A} (т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$)

Доказательство

Пусть $\mathcal{A} \xleftrightarrow[e_1, \dots, e_n]{} A$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$$

Пусть μ не корень χ

Тогда $\det(A - \mu E) \neq 0$

$$(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (b_{ij} := A_{ji})$$

b_{ij} – многочлен $n - 1$ степени от μ

Отсюда $(A - \mu E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \mu E)} (\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0)$, где B_i – матрица

$n \times n$

$$\text{Отсюда } \det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

$$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E$$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$

Отсюда $\alpha_0 E = AB_0$

$$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$$

\vdots

$$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$$

$$\alpha_n E = -B_{n-1}$$

$$\chi(A) = \sum_{k=0}^n \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \dots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = 0$$

Следствие

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$ $\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}$

Следствие 2

$$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$$

Теорема (о корнях минимального многочлена)

Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)

Доказательство \Rightarrow

Пусть λ – корень $\chi(t)$

1. Пусть $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ – С.Ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \exists v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda E)v = 0$

Отсюда $\psi(t) = (t - \lambda)$ – минимальный аннулятор элемента v

Т.к. ϕ – минимальный многочлен, то $\phi(\mathcal{A})v = 0 \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулятор v

Тогда по теореме 1 ϕ делится на $\psi \Rightarrow \lambda$ – корень ϕ

2. Пусть $\lambda \notin K$, т.е. $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$

$$V \rightarrow V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$e_1, \dots, e_n - \text{базис } V \rightarrow \text{базис } V_{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{A} \xleftrightarrow[V, e]{V_{\mathbb{C}}, v} A \xleftrightarrow[V_{\mathbb{C}}, v]{V, e} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda - \text{корень } \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda - \text{корень } \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена

$$\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$$

Отсюда λ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

Доказательство \Leftarrow

Пусть λ – корень $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$

Замечание

Получаем второй способ получения С.Ч. \mathcal{A}

$$m(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)} = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(t), \phi_{\lambda}(t) :=$$

$$\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\deg \phi = m = \sum_{\lambda} m(\lambda)$$

Определение

$I_{\lambda} := \{p \in P_{m-1} : p \text{ делится на } \phi_{\lambda}\}$ – главный идеал, порождающий многочлен ϕ_{λ}

I_{λ} – линейное подпространство P_{m-1}

$$I_{\lambda} \ni p(t) = a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$m - 1 \geq \deg p = \deg a_{\lambda} + \deg \phi_{\lambda} = \deg a_{\lambda} + m - m_{\lambda}$$

$$\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$$

$$I_{\lambda} \cong P_{m(\lambda)-1}$$

$$p \leftrightarrow a_{\lambda}$$

$$\dim I_{\lambda} = m(\lambda)$$

Теорема

$$P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}$$

Доказательство

1. Проверим, что I_{λ} дизъюнкты

$$0 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t) \underbrace{\phi_{\lambda}(t)}_{\text{не делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum_{\mu \neq \lambda} a_{\mu}(t) \phi_{\mu}(t)}_{\text{делится на } (t - \lambda)^{m(\lambda)}}$$

Отсюда $a_{\lambda}(t)$ делится на $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$, но $\deg a_{\lambda} \leq m(\lambda) - 1$

Тогда $a_{\lambda}(t) = 0 \Leftrightarrow p_{\lambda}(t) \equiv 0 \Rightarrow$ дизъюнкты

$$\begin{aligned}
2. \quad & \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m \\
& \dim \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda} = \sum_{\lambda} m(\lambda) = m \\
& \text{Отсюда } P_{m-1} = \bigoplus_{\lambda} I_{\lambda}
\end{aligned}$$

Следствие

$$\forall p \in P_{m-1} \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$$

В частности, для $p \equiv 1 \exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, 1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}$ — полиномиальное

разложение единицы (порожденное многочленом ϕ)

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}(t)\phi_{\lambda}(t)$$

Замечание

1. $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_{\lambda}p_{\mu}$ делится на ϕ

Доказательство

$$p_{\lambda}(t) = a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)$$

$$p_{\mu}(t) = a_{\mu}\phi_{\mu}(t)$$

$$p_{\lambda}(t)p_{\mu}(t) = a_{\lambda}(t)a_{\mu}(t)\phi_{\lambda}(t)\phi_{\mu}(t) = b(t)\phi(t)$$

2. Пусть все корни ϕ взаимно-простые, т.е. $\forall \lambda m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\deg a_{\lambda}(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$$

$$\text{Отсюда } a_{\lambda}(t) = \text{const}$$

Теорема Лагранжа

Пусть все корни $\phi(t)$ взаимно простые

$$\text{Т.е. } \forall \lambda : m(\lambda) = 1 \quad \phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\text{Тогда } \forall p \in P_{m-1} \quad p(t) = \sum_{\lambda} \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$(a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$$

Доказательство

$$\exists !(p_{\lambda}) : p_i \in I_i, p(t) = \sum_{\lambda} \underbrace{a_{\lambda}\phi_{\lambda}(t)}_{\phi_{\lambda}(t) \in I_{\lambda}}$$

$$p(\lambda) = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi_{\mu}(\lambda) = a_{\lambda} \phi_{\lambda}(\lambda) \Rightarrow a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi_{\lambda}(\lambda)}$$

$$\phi(t) = \prod_{\mu} (t - \mu) = (t - \lambda) \underbrace{\prod_{\mu \neq \lambda} (t - \mu)}_{\phi_{\lambda}(t)}$$

$$\phi'(t) = \sum_{\mu} \prod_{\xi \neq \mu} (t - \xi)$$

$$\phi'(\lambda) = \prod_{\xi \neq \lambda} (\lambda - \xi) = \phi_{\lambda}(\lambda)$$

Отсюда $a_{\lambda} = \frac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

Следствие

Пусть $\forall \lambda : m(\lambda) = 1$

Тогда $1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \Rightarrow p(t) = t = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$

Доказательство

$$1 = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t)$$

$$t = \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{\phi'(\lambda)} \phi_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}(t)$$

Пусть $\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

Построим полиномиальное разложение 1, порождающее многочлен ϕ

$$1 = \sum_{\lambda} p_{\lambda}(t) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(t)$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \underbrace{p_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\rho\text{- спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \text{операторное разложение единицы (порожденное оператором)}$$

Спектральный оператор действует не на собственное подпространство

Свойства

Пусть $\lambda \neq \mu$

Проверим, что $\rho_{\lambda} \rho_{\mu} = 0$

$$\rho_{\lambda} = p_{\lambda}(\mathcal{A}) = a_{\lambda}(\mathcal{A}) \phi_{\lambda}(\mathcal{A})$$

$$\rho_{\mu} = p_{\mu}(\mathcal{A}) = a_{\mu}(\mathcal{A}) \phi_{\mu}(\mathcal{A})$$

$$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = 0$$

Если λ единственный корень $\phi(t) = (t - \lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$$

Если все корни взаимно простые:

$$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$$

По следствию из т. Лагранжа:

$$\epsilon = \sum_{\lambda} p_\lambda$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$$

Далее покажем, что p_λ – проекторы на V_λ , т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с

Т.е. \mathcal{A} – о.п.с.

Определение

$K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$ называется корневым подпространством \mathcal{A}

λ – СЧ \mathcal{A}

Очевидно, что $V_\lambda \subset K_\lambda$

$$V_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

Теорема о корневом подпространстве

1. K_λ – инвариантно относительно \mathcal{A}

$$2. \text{Im } \rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V)$$

$$3. (t - \lambda)^{m(\lambda)} \text{ минимальный многочлен для } \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

Доказательство

$$1. x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \mathcal{A} x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} x = 0$$

перестановочные, т.к. многочлены

$$\text{Отсюда } \mathcal{A} x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1} \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^{k-1}$$

$$2. \forall x \in V \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x$$

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\text{Im } \rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A}) \phi_\lambda(\mathcal{A}) x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \phi_\lambda(\mathcal{A}) x}_{\phi(\mathcal{A})=0} =$$

\mathbb{O}

Отсюда $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда $\text{Im } \rho_\lambda \subset K_\lambda$

Обратно

$x \in K_\lambda = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть $\mu \neq \lambda$

$$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} x = \mathbb{O}$$

$$x = \epsilon x = \sum_{\mu} \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \text{Im } \rho_\lambda$$

Отсюда $K_\lambda \subset \text{Im } \rho_\lambda$

$$3. \mathcal{B} = \mathcal{A} \Big|_{K_\lambda} \in \text{End}(K_\lambda)$$

Проверим, что $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен
 $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ – аннулятор \mathcal{B}

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть $(t - \lambda)^k$ – минимальный многочлен, $k < m(\lambda)$

$$\phi_1(t) := (t - \lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg \phi_1 \leq \deg \phi$$

Покажем, что ϕ_1 – аннулятор \mathcal{A}

$$\forall v \in V = \bigoplus_{\mu} K_{\mu} v = \sum_{\mu} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} - \text{раскладывается единственным об-}$$

разом

$$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum_{\mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_{\lambda}(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \in \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_{\mu}}_{\in K_{\mu}} = \sum_{\mu \neq \lambda} (\mathcal{A} -$$

$$\lambda\epsilon)^k b_{\mu}(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_{\mu} + (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^k \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) v_{\lambda} = \mathbb{O}$$

Отсюда ϕ_1 аннулятор \mathcal{A} , причем степени меньше, чем ϕ , что противоречит минимальности ϕ

Отсюда $(t - \lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен \mathcal{B}

Следствие 1

$\forall \lambda \ m(\lambda) \leq \dim K_{\lambda}$ (очевидно из п.3 теоремы)

Следствие 2

\mathcal{A} – о.п.с $\Leftrightarrow \forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

Доказательство \Rightarrow

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$

Пусть $\phi(t) := \prod_{\lambda - \text{СЧ}} (t - \lambda)$

Очевидно аннулятор \mathcal{A} , причем минимальный

$\forall v \in V \ v = \sum_{\lambda} \underbrace{v_{\lambda}}_{\in V_{\lambda}}$ – раскладывается единственным образом

$$\phi(\mathcal{A}) = \prod_{\mu} \prod_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \underbrace{v_{\mu}}_{\in V_{\mu} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \mu\epsilon)} = \prod_{\mu} \prod_{\lambda \neq \mu} (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)(\mathcal{A} - \mu\epsilon)v_{\mu} = 0$$

Доказательство \Leftarrow

$\forall \lambda \ m(\lambda) = 1$

$$\phi(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)$$

$$\forall \lambda \ K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^1 = V_{\lambda}$$

$$\text{Отсюда } \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda} = V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda} \Leftrightarrow \mathcal{A} - \text{о.п.с.}$$

1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

Определение

$\mathcal{B} \in \text{End}(V)$ называется *нильпотентным*, если $\chi_{\mathcal{B}} = t^{\nu}, \nu \geq 1$

ν – индекс нильпотентности ($\nu \leq n$)

(Т.е. $\mathcal{B}^{\nu} = 0$)

Теорема (разложение Жордана)

$\forall \mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$\exists \mathcal{D}$ – оператор простой структуры $\in \text{End}(V)$, \mathcal{B} нильпотентный $\in \text{End}(V)$:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, причем $\mathcal{B}\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{B}$

Доказательство

$\phi(t)$ – минимальный многочлен \mathcal{A} (все корни $\in K$)

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\mathcal{D} := \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}$$

Проверим, что \mathcal{D} – о.п.с.

Достаточно убедиться, что λ – СЧ \mathcal{D} , $\text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$ – собственное подпространство для \mathcal{D}

Пусть $v_{\lambda} \in \text{Im } \rho_{\lambda}$

$$\mathcal{D}v_\lambda = \sum_{\mu} \mu \rho_{\mu} \underbrace{v_\lambda}_{\substack{\in \text{Im } \rho_\lambda \\ \mu \neq \lambda \Rightarrow \dots = 0}} = \lambda \rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda - \text{с.ч. } \mathcal{D}$$

$$V = \bigoplus_{\mu} \text{Im } \rho_{\mu} - \text{дизъюнкты}$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_{\lambda} \subset V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } \rho_{\lambda} \subset \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}} \subset V$$

$$\text{Отсюда } \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$\mathcal{D} - \text{о.п.с.}$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}^{\mathcal{D}}$$

$$D = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \text{спектральное разложение } \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\nu := \max_{\lambda} m(\lambda)$$

$$\text{Покажем, что } \mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}$$

$$(\mathcal{A} - \mathcal{D})^{\nu} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\mathcal{A} \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda})^{\nu} = (\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \rho_{\lambda})^{\lambda} =$$

$$\sum_{\lambda} (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{\nu} \rho_{\lambda} = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(\mathcal{A}) (\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^{m(\lambda)} \phi_{\lambda}(\mathcal{A}) = \mathbb{O}$$

$$\mathcal{B} \mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) = (\sum_{\mu} \mu \rho_{\mu}) (\mathcal{A} - \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}) = \mathcal{D} \mathcal{B}$$

Теорема (единственность разложения Жордана)

Разложение Жордана $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$ возможно единственным образом

Доказательство

$$\text{Пусть } \mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с.}}{\mathcal{D}'} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$$

$$\mathcal{D}' = \sum_{\mu} \mu Q_{\mu} - \text{спектральное разложение}$$

Достаточно доказать, что

$$1. \text{ множество } \mu \text{ с.ч. } \mathcal{D}' \text{ совпадает с множеством с.ч. } \mathcal{A}$$

$$2. \text{ Im } Q_{\lambda} = K_{\lambda} (D = \sum_{\lambda} \lambda \rho_{\lambda}, \text{Im } \rho_{\lambda} = K_{\lambda}) \\ \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$$

$$3. \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$$

$$(\mathcal{A} - \mu\epsilon)Q_\mu = \left(\sum_{\xi} \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon\right)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$$

Покажем, что $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$

$$\exists \lambda \neq \mu \quad (\lambda - \mu)Q_\lambda C Q_\mu = \lambda Q_\lambda C Q_\mu - Q_\lambda C \mu Q_\mu = Q_\lambda D' C Q_\mu - Q_\lambda C D' Q_\mu = Q_\lambda (D' C - C D') Q_\mu = 0$$

Отсюда $Q_\lambda C Q_\mu = 0 = Q_\mu C Q_\lambda, \lambda \neq \mu$

$$\sum_{\lambda} Q_\lambda C Q_\mu = \sum_{\mu} Q_\lambda C Q_\mu$$

При $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$

$$(\mathcal{A} - \mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$$

Пусть $m(\mu)$ – минимальное $k : (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{m(\mu)} = 0$

Такой k найдется, т.к. \mathcal{C} нильпотентный и при каком-то k дает $= 0$

$$\psi_\mu(t) = (t - \mu)^{m(\mu)}$$

$$\forall x \in \text{Im } Q_\mu \quad \psi_\mu(\mathcal{A})x = 0$$

Тогда $\psi_\mu(\mathcal{A})$ – минимальный аннулятор элементов $\text{Im } Q_\mu$

ϕ – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и $\text{Im } Q_\mu$

Тогда ϕ делится на ψ_μ

Тогда $\forall \mu \quad \mu$ – корень ϕ

Рассмотрим $\psi = \prod_{\mu} \psi_\mu(t)$. Покажем, что это аннулятор \mathcal{A}

$$\forall v \in V \quad v = \sum_{\mu} \underbrace{v_\mu}_{\in \text{Im } Q_\mu}$$

$$\psi(\mathcal{A})v = \sum_{\xi} \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum_{\xi} b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = 0$$

Отсюда ψ – аннулятор \mathcal{A}

Тогда ψ делится на ϕ

Т.о. $\psi \equiv \phi$

Докажем пункт 2

$$(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} Q_\lambda = 0$$

$$\text{Im } Q_\lambda \subset \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$$

$$V = \bigoplus_{\lambda} \text{Im } Q_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda} K_\lambda = V$$

$$\text{Im } Q_\lambda = K_\lambda = \text{Im } p_\lambda$$

Теорема 3

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ – разложение Жордана

$$\chi_{\mathcal{A}} \equiv \chi_{\mathcal{D}}$$

Доказательство

$$\mathcal{D} = \sum_{\lambda} \lambda p_{\lambda}$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \mathcal{D}$$

$$\mathcal{B}^{\nu} = \mathbb{O}, \nu = \max m(\lambda)$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ – попарно перестановочные

$$\epsilon = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda}$$

$$\text{Im } p_{\lambda} = K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = (\det \mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} = \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu}$$

$$t \in K, (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu} - t^{\nu} \mathcal{B}^{\nu} = (\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

$$\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B})}_{\text{не зависит от } t} \underbrace{\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$$

$$\text{Отсюда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \text{ и } \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$$

не зависят от t

$$\text{Тогда } \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - t\mathcal{B}) \underset{t=1}{=} \det(\mathcal{A} - \mu\epsilon - \mathcal{B}) = \det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)$$

$$\det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1} + (\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B} + \dots + t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1}) \underset{t=0}{=} \det((\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1})$$

$$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu} = \underbrace{\det(\mathcal{D} - \mu\epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)} \underbrace{\det(\mathcal{A} - \mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$$

$$\text{Отсюда } \chi_{\mathcal{A}}(\mu) = \chi_{\mathcal{D}}(\mu)$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_{\mathcal{D}}(\lambda) = 0$$

Следствие 1

$$\det \mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}}(0) = \chi_{\mathcal{D}}(0) = \det \mathcal{D}$$

Следствие 2

$$\dim K_{\lambda} = \alpha(\lambda)$$

Доказательство

$\alpha(\lambda)$ – кратность корня в $\chi_{\mathcal{A}} \Rightarrow$ в $\chi_{\mathcal{D}}$. А т.к. \mathcal{D} – о.п.с., то $\dim K_{\lambda}^{\mathcal{D}} =$

$$\dim V_{\lambda}^{\mathcal{D}} = \alpha(\lambda)$$

1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис.

Функция от матрицы

Пусть все корни $\chi(t) \in K$

$$V = \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda}$$

$$K_{\lambda} = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$$

Построим в каждом K_λ такой базис, что матрица оператора в нем будет иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda \epsilon) \Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть $K_j = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda \epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда $\text{Ker } \mathcal{B}^r = \text{Ker } \mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \text{rg } \mathcal{B}^r + \dim K_r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда $\text{rg } \mathcal{B}^r = \text{rg } \mathcal{B}^{r+1}$

$\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} \subset \text{Im } \mathcal{B}^r$

Т.о. $\text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \text{Im } \mathcal{B}^r$

Тогда $\text{Im } \mathcal{B}^r = \text{Im } \mathcal{B}^{r+1} = \dots = \text{Im } \mathcal{B}^m = \mathbb{O}$, что противоречит минимальности m

Рассмотрим $K_1 \dots K_m$

Найдем j_m – компоненту, которая лежит в K_m , но не лежит в K_{m-1}

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1} \quad j_r := \mathcal{B} j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \text{Ker } \mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B} j_r$

$\mathcal{B}^{r-1} j_{r-1} = \mathcal{B}^r j_r = \mathbb{O}$

Отсюда $j_{r-1} \in K_{r-1} = \text{Ker } \mathcal{B}^{r-1}$

$\mathcal{B} j_1 = \mathbb{O}$

$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$ – циклический базис, порожденный вектором j_m

Далее повторяем это для всех векторов K_m, K_{m-1}, \dots

Максимальная длина циклического базиса, порожденного $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$ – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора (фундамент башни) – вектора j_m

Крыша башни – вектора j_1

Крыша башни – собственное подпространство

Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу

Если $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то $V_\lambda = K_\lambda$, то замок будет состоять из одной башни высоты 1

$K = K_\lambda = \text{span}(\dots, j_1, j_2, \dots, j_m, \dots)$ – линейная оболочка всех векторов всех башен

$$j_r = \mathcal{B}j_{r+1}$$

$$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)j_{r+1}$$

$$\mathcal{A}j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}j_1 &= \lambda j_1 \\ \mathcal{A}j_2 &= j_1 + \lambda j_2 \\ &\vdots \\ \mathcal{A}j_m &= j_{m-1} + \lambda j_m \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана}$$

m -ого порядка (блок нижнего уровня)

Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера m

Рассмотрим теперь блочную матрицу $\text{diag}(\underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \dots, \underbrace{J_m, \dots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$

– блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству K_λ

Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты

Объединим все блоки верхнего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу

Получим жорданов базис пространства V

Матрица \mathcal{A} в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы

$$T_{e \rightarrow j} = T = (\dots, j_1, \dots, j_m, \dots)$$

$$T^{-1}AT = J$$

$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$

Обоснование алгоритма

Пусть $\mathcal{B}K = \text{Im } \mathcal{B}$

$$Z_0 = \mathcal{B}K$$

$$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \dots m$$

$$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$$

$$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \dots \subseteq Z_m$$

$$\begin{aligned}
\overline{K}_1 &\subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1 \\
\overline{K}_2 &\subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2 \\
\overline{K}_r &\subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K \\
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1) \\
\overline{K}_j &- \text{ опорные подпространства}
\end{aligned}$$

Теорема

$$1 \leq r \leq m$$

$$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$$

Доказательство

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \quad (1)$$

$$\forall x \in K : \exists ! (x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \dots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^m \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \text{Ker } \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^m \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^r \left(\underbrace{\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j}}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} + \mathcal{B}x' \right) &= 0 \\
\sum_{j=r+1}^m \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' &= \sum_{j=1}^m x_j + \mathcal{B}y'
\end{aligned}$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности \overline{K}_j и $\mathcal{B}K \forall j x_j = 0$
 $0 + \mathcal{B}^{r+1} x' = 0$ – дизъюнктность

$$\begin{aligned}
K &= \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K \\
\mathcal{B}K &= \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K \\
&\vdots \\
\mathcal{B}^{m-1} K &= \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{=0}
\end{aligned}$$

Отсюда следствие

Следствие

$$K = \overline{K}_1 \oplus \dots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$$

Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & \overline{K}_m & \\
& & & & & \overline{\mathcal{B}}K_m & \\
& & & & & \vdots & \\
& & \ddots & & \ddots & & \\
& & \overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m & \\
\overline{K}_1 & \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 & \dots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m & &
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$$

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \text{Ker } \mathcal{B} = V_\lambda$$

$$\text{Если } \overline{K}_r \neq \emptyset, \text{ то } J_r = \overline{K}_r \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$$

\overline{K}_r – основание башни (опорное пространство, порожденное J_r)

$$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m \text{ – основание (1 этаж – крыша)}$$

Верхние клетки каждого этажа – основание

$$l\text{-ый этаж: } \overline{K}_l \oplus \overline{\mathcal{B}}\overline{K}_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$$

$$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \emptyset, j = 0 \dots m-l$$

$$\text{Отсюда } \mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$$

Первые j этажей соответствуют K_j

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни имеют одинаковую размерность $d_r = \dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1 \dots r-1$

Доказательство

Рассмотрим \mathcal{B}^j (очевидно, что \mathcal{B}^j – эндоморфизм)

Докажем, что \mathcal{B}^j – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е. $\dim \overline{K}_r = \dim \mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

$$\text{Пусть } x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \emptyset$$

$$\text{Тогда } x \in \text{Ker } \mathcal{B}^j = K^j$$

$$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1 \dots r-1$$

$$K_1, \dots, K_{r-1} \text{ дизъюнкты с } \overline{K}_r$$

$$\text{Т.о. } x = \emptyset$$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

Следствие

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^m d_r$$

$$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum_{r=1}^m r d_r$$

Следствие 2 (теорема Фробениуса)

$$\forall r = 1 \dots m \quad d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$$

(при $r = m \quad d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$)

Доказательство

$$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$$

$$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$$

$$\rho_j = d_{j+1} + \dots + d_m + \rho_{j+1}$$

$$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \dots + d_m$$

$$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$$

$$d_1 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$$

\vdots

$$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$$

$$\text{Отсюда } d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$$

$$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$$

Замечание

На практике удобнее

$$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$$

Рассмотрим башню

$$\dim \overline{K}_r = d_r = d$$

$$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \dots, g_d)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \mathcal{B} \overline{K}_r & \mathcal{B} g_1 & \mathcal{B} g_2 & \dots & \mathcal{B} g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1} \overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1} g_1 & \mathcal{B}^{r-1} g_2 & \dots & \mathcal{B}^{r-1} g_d \end{array} \quad \mathcal{B}^j - \text{изоморфизм, т.е. базис пе-}$$

реходит в базис

$$\mathcal{B}^j g_1 \dots \mathcal{B}^j g_d - \text{базис } \mathcal{B}^j \overline{K}^r - \text{циклический базис}$$

$$\text{Тогда } J_r = \bigoplus_{i=1}^d \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i)$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda \epsilon) \mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$$

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow J_r - \text{клетка Жордана размерности } r \times r - \\ \text{в цикл. базисе} \\ \text{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i, \dots, \mathcal{B}g_i, g_i) \\ \text{блок нижнего уровня} \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\underbrace{J_r(\lambda), \dots, J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda) \\ J_i \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \left| \begin{array}{l} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda), \dots, \mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda) \\ K = \bigoplus_{r=1}^m J_r \end{array} \right. \\
\mathcal{A} \leftrightarrow \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J} \\
// \text{todo 13:11 16.03}
\end{array}$$

1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$$

$$\sqcap T(j_1, \dots, j_n), A = T \mathcal{J} T^{-1}$$

Пусть $\mathcal{J} = \text{diag}(\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_n)$ Тогда $\mathcal{J}^k = \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$$A^k = T \text{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k, \dots, \mathcal{J}(\lambda_n)^k) T^{-1}$$

$$f(A) = T \text{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)), \dots, f(\mathcal{J}(\lambda_n))) T^{-1}$$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r \times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } J_r^k &= (\lambda E_{r \times r} + I_r)^k = \sum_{m=0}^k C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + \\ & C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_k^0 \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1} \lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ // \text{todo 23.03 10:27} \end{aligned}$$

2 Черная магия

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } (\ln |y|)' &= \frac{y'}{y} \\ y' &= y(\ln |y|)' \text{ (удобно)} \end{aligned}$$

3 Тензоры

3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

V – линейное пространство над $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

Линейная функция $f : V \rightarrow K$ называется *линейной формой* (линейным функционалом)

Т.е. $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$

Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор

2. $A_{n \times n}, f : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$
 $f(A) = \text{tr } A$

3. $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$

Пусть $f^j = P_n \rightarrow \mathbb{R}, f^j(p) = \frac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$

Тогда f^0, f^1, \dots – линейная форма

4. $f : \underbrace{C}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\delta(f) := f(0)$ – δ -функция Дирака

$\delta(f)$ – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$

$V^* = \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ – линейная форма}\}$

$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$

$\forall f \in V^* \quad (-f) \in V^*$

Тогда V^* – линейное пространство над полем K

V^* – сопряженное (дуальное) к V

Вспоминаем правило Эйнштейна

Выражение $\alpha^i \beta_i := \sum_i \alpha_i \beta_i$

иначе: $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$

$\forall x \in V \quad f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$

$a := f(e_i)$ называется коэффициентами линейной формы f

Тогда $f(x) = x^i a_i - f$ полностью описывается значениями на базисных элементах

Тогда $f \leftrightarrow a = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ – зависит от выбора базиса

Сопоставление – изоморфизм

Факт

Естественный изоморфизм – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай

$V^* \cong K_n(K^n)$ – пространство n -мерных строк

Определение

$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$

$\forall x \in V \omega^i(x) = x_i$ – координатные функции

(очевидно, что $\omega^i \in V^*, \omega^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$)

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{если } i=j \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_i & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема

$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*

Доказательство

$\omega^1, \dots, \omega^n$ – линейно независимые

$$\alpha_i \omega^i = 0$$

$$\alpha_i \in K$$

$$j = 1 \dots n \quad \alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

$$\dim V^* = n \Rightarrow \text{базис}$$

Следствие

a_i – координаты f в базисе $\omega^1 \dots \omega^n$

Доказательство

$$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$$

Определение

$\omega = (\omega^1 \dots \omega^n)$ называется *сопряженным (дуальным)* базисом к базису e пространства V

Вопрос: есть другой базис в V^* . Будет ли он сопряженным к некоторому базису V

Теорема

$\omega'^1, \dots, \omega'^n$ – базис V^*

Тогда $\exists e'_1, \dots, e'_n$ – базис в V такой, что ω' сопряжен с e'

Доказательство

Пусть e'_1, \dots, e'_n – базис в V

Базис V $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряжен с e

$$\omega'^1, \dots, \omega'^n \text{ – базис } V^* \Rightarrow (\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = \underbrace{T_{\omega \rightarrow \omega'}^T}_{=: S_{\omega \rightarrow \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис e'

$$T_{e \rightarrow e'} = S^{-1} = T$$

$$(e'_1 \dots e'_n) := (e_1 \dots e_n) T - \text{тоже базис по определению}$$

Покажем, что ω' сопряжен к e' , т.е. ω'^i – координатные функции по отношению к e'

$$\text{Пусть } s_j^i = s_{ij}, t_j^i = t_{ij}$$

$$\forall x \in V \quad \omega'^i(x) = s_k^i \omega^k(x) = s_k^i x^k = \underbrace{s_k^i t_j^k}_{(ST)_{j= \delta_j^i}^i} x'^j = x'^i$$

Отсюда ω'^i – координатная функция \Rightarrow базис сопряженный

Замечание

Вообще говоря, базис e' существует и единственный (очевидно из доказательства)

Следствие

$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T_{\omega \rightarrow \omega'}^T$$

$$\text{Тогда } a' = aT$$

$$T = S^{-1} = T_{e \rightarrow e'}$$

$$x' = Sx$$

Доказательство

$$X' = SX \text{ очевидно } (X = TX' = S^{-1}X')$$

$$(\omega'^1 \dots \omega'^n) = (\omega^1 \dots \omega^n) T_{\omega \rightarrow \omega'}$$

$$a^T = T_{\omega \rightarrow \omega'}(a')^T \quad a = a' T_{\omega \rightarrow \omega'}^T = a' S \Leftrightarrow a' = a S^{-1} a T$$

Определение

Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону (т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным (согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*

Элементы V^* – это ковекторы (линейная форма \equiv ковектор)

В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, противоположному (т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контрвариантным* или про-

сто вектором

Элементы V – контрвариантные векторы

Принято писать индекс координаты контрвектора сверху, а ковариантного – снизу

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = x^i a'_i = s_k^i x^k a_m t_i^m = \underbrace{t_i^m s_k^i}_{\delta_k^m} x^k a_m = x^k a_k$$

Т.о. форма записи f – инвариант относительно замены базиса

Определение

$$V^{**} = (V^*)^*$$

$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$ – можем построить изоморфизм между V и V^{**}

Теорема 3 (естественный изоморфизм V и V^{**})

Вместо обозначения " x " буду использовать $\langle x \rangle$

$$\forall x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$$

$$\forall f \in V^* \quad \langle x \rangle (f) = f(x)$$

Отсюда $x \leftrightarrow \langle x \rangle$

$$V \cong V^{**}$$

Доказательство

$$\forall f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K \quad \langle x \rangle (f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) = \langle x \rangle (f_1) + \lambda \langle x \rangle (f_2)$$

Отсюда $\langle x \rangle \in (V^*)^*$

Покажем, что V линейно вложено в V^{**} , т.е. $x \in V \rightarrow \langle x \rangle \in V^{**}$

//todo 12:00 23.03

Покажем, что базис V e_1, \dots, e_n перейдет в базис V^{**}

$$e_j \rightarrow \langle e_j \rangle$$

$\forall f \in V^* \quad \langle e_j \rangle (f) = f(e_j) = a_j$ – координата f в базисе $\omega^1, \dots, \omega_n$, сопр. с e

Т.о. $\langle e_j \rangle$ – координатная функция в пространстве V^* относительно $\omega^1, \dots, \omega_n$

Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства

Т.о. $\langle e_j \rangle$ – базис V^{**}

Базис V $e_1, \dots, e_n \rightarrow$ базис V^{**} $\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$

Т.о. отображение линейно, то изоморфизм

Замечание

1. принято отождествлять элементы V и V^{**} с помощью изоморфиз-

ма, описанного в теореме 3

Поэтому $\langle \rangle$ не пишут

$$\forall f \in V^*, x \in V \quad f(x) = a_i x^i = f(e_i) x^i = e_i(f) x^i = x(f)$$

$$a_i = f(e_i)$$

$$x^i = x(\omega^i)$$

$$2. \quad \omega^i(e_j) = \delta_j^i = e_j(\omega^i)$$

Как найти на практике?

$$e_1, \dots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} - \text{столбцы}$$

$$w^i(e_j) = \underbrace{(\dots)}_a \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}_x = \delta_j^i$$

$$\text{Отсюда } \underbrace{\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}}_{S=T^{-1}} \underbrace{(e_1 \dots e_n)}_T = E$$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса дуальны

ω сопряженный базис к e

e сопряженный базис к ω

(здесь подразумевается элементы V^{**})

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$$

$$\forall x \in V \quad \exists ! x = \sum_{\lambda} x_{\lambda}, x_{\lambda} \in V_{\lambda}$$

$$\rho_{\lambda} : V \rightarrow V, \text{Im } \rho_{\lambda} = V_{\lambda}, \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} = \epsilon$$

$$\forall x \in V \quad \rho x := x_{\lambda}, \underbrace{\rho_{\lambda} \rho_{\mu}}_{\lambda \neq \mu} = 0$$

v_1, \dots, v_n – базис V = объединение базисов V_{λ}

$$x = x^i v_i = \sum_{\lambda} \underbrace{\sum_{m_{\lambda}} x^{m_{\lambda}} v_{m_{\lambda}}}_{x_{\lambda}} = \omega^1, \dots, \omega^n - \text{сопряженный базис} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} \omega^{m_{\lambda}}(x) v_{m_{\lambda}} \\
& \omega^{m_{\lambda}} \leftrightarrow (a_i^{m_{\lambda}})_i - \text{строка} \\
& x \leftrightarrow X \\
& \omega^{m_{\lambda}}(x) = a^{m_{\lambda}} X \\
& v_{m_{\lambda}} \leftrightarrow (V_{m_{\lambda}, i})_i - \text{столбец} \\
& x = \sum_{\lambda} \sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \underbrace{\left(\sum_{m_{\lambda}} V_{m_{\lambda}} a^{m_{\lambda}} \right)}_{\rho_{\lambda}} X = \sum_{\lambda} \left(\sum_{m_{\lambda}} \underbrace{(a^{m_{\lambda}} x)}_{\omega^{m_{\lambda}}(x)} V_{m_{\lambda}} \right)
\end{aligned}$$

3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

Определение

V, V^* – сопряженные линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$f : V^p \times (V^*)^q \rightarrow K, p, q \geq 0$ – линейная по каждому аргументу

f – тензор порядка (p, q) или p раз ковариантом, q раз контрвариантным

Множество таких функций обозначим $T_{(p,q)}$

p, q – валентности

$r = p + q$ – полная валентность/ранг тензора (не наш rg)

$f \in T_{p,0}$ – ковариантный тензор валентности p

$f \in T_{0,q}$ – контрвариантный тензор валентности q

$r = 0$ – тензор нулевого ранга. $f = \text{const} \in K$

Пример

$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_V$ – столбец

$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$ – строка

$f(x, a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1,1)}$

\mathbb{O} – нулевой тензор

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \nu^1, \dots, \nu^q \in V^* \quad \mathbb{O}(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = 0$

$\forall f \in T_{(p,q)} \quad - f \in T_{(p,q)}$

$T_{(p,q)}$ – линейное пространство

e_1, \dots, e_n – базис V

$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*

e, ω – сопряженные

Для $\xi \in V$ $\xi = \xi^i e_j$

Для $\nu \in V^*$ $\nu = \nu_i \omega^j$

Тогда $f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \dots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_q})$

$= \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$ – любой тензор определяется значениями на всевозможных наборах e_j, ω^i

$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} := f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_q})$ – коэффициенты тензора f относительно базисов e, ω

$f(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \dots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

Определение

S – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$, где $i_k, j_m \in (1, \dots, n)$ называется $p + q$ -мерной матрицей порядка n

Пример

$n = 3$, трехмерная матрица

1. S^{ijk}
2. S_k^{ij}
3. S_{jk}^i
4. S_{ijk}

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q})$ – изоморфизм

$T_{(p,q)} \cong S_{(p+q)}$

Правило записи элементов тензора в многомерной записи

В $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы

Для двумерных матриц:

1. строка
2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой

Запись: $\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$

Для четырехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой
4. срез

Запись: $\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$

//todo 11:59 30.03

$$\forall \xi \in V \quad \xi = \xi^i e_i = \xi^{ij} e_j^i$$

$$\xi^i = t_j^i \xi^{lj}$$

$$\forall \eta \in V^* \quad \eta = \eta_i \omega^i = n'_j \omega'^j$$

$$\eta_i = s_i^j \eta'_j$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^* \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$$

$$\dots \eta_{i_q}^q = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \xi_1^{u_1} \dots t_{u_p}^{j_p} \xi_p^{u_p} \cdot s_{i_1}^{r_1} \eta_{r_1}^1 \dots s_{i_q}^{r_q} \eta_{r_q}^q$$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

$$f(e'_{u_1}, \dots, e'_{u_p}, \omega'^{r_1}, \dots, \omega'^{r_q}) = \alpha_{u_1, \dots, u_p}^{r_1, \dots, r_q}$$

Нижние индексы – ковариантные, т.к. при смене базиса соответствующая координата пересчитывается по ковариантному закону (т.е. через T)

Верхние индексы – контрвариантные

Пример

$\forall x \in V \cong V^{**}, x$ – линейное отображение

$$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \alpha, x \in T_{(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'^r &= \alpha^i s_i^r \\
\alpha' &= S\alpha \Rightarrow \alpha = T\alpha' \\
\forall f \in V^*, f &- \text{линейное отображение} \\
f \leftrightarrow a &= (a_1 \ \dots \ a_n), f \in T_{(0,1)} \\
a'_u &= a_j t_u^j \\
a' &= aT \Rightarrow a = a'S
\end{aligned}$$

Определение 2

Геометрический объект на линейном пространстве V над полем K , описываемый $p+q$ -мерной матрицей размерности $n (= \dim V)$ с элементами из поля K , которая при смене пространства V пересчитывается по формуле $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q}$, где $(t_j^i) = T_{e \rightarrow e'}$, $S = T^{-1}$, называется тензором типа (p, q) или p раз ковариантным и q раз контрвариантным

Пусть \mathbb{O} – нулевая матрица, $-\alpha$ – противоположная матрица, задано умножение на скаляр и сложение

Докажем, что $+$ и $\lambda \cdot$ сохраняют свойство тензоров

$$\begin{aligned}
\alpha, \beta &\in T_{(p,q)}, \forall \lambda \in K \\
(\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} &= \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} + \lambda\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \\
(\alpha + \lambda\beta)_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} &= (\alpha + \lambda\beta)_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_q}^{r_q} = \alpha'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} + \lambda\beta'_{u_1, \dots, u_p}{}^{r_1, \dots, r_q} - \text{верно}
\end{aligned}$$

3.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свойства тензоров

Определение

$$\begin{aligned}
\alpha &\in T_{(p_1, q_1)} \\
\beta &\in T_{(p_2, q_2)} \\
\gamma &= \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+q_1, p_2+q_2)} \\
\gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} &= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}}
\end{aligned}$$

Доказательство корректности произведения

$$\begin{aligned}
\gamma_{u_1 \dots u_{p_1} v_1 \dots v_{p_2}}^{r_1 \dots r_{q_1} \sigma_1 \dots \sigma_{q_2}} &= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}} \\
&= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{v_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{r_{q_1}}^{r_{q_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}} t_{v_1}^{m_1} \dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{k_1}^{\sigma_1} \dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}} \\
&= \alpha_{u_1, \dots, u_{p_1}}^{r_1, \dots, r_{q_1}} \beta_{v_1, \dots, v_{p_2}}^{\sigma_1, \dots, \sigma_{q_2}}
\end{aligned}$$

Замечание

$$1. \ \lambda \in K \leftrightarrow \lambda \in T_{(0,0)}$$

$$\forall \alpha \in T_{(p,q)} \quad \lambda \otimes \alpha = \lambda \alpha$$

2. \oplus ассоциативно, не коммутативно, дистрибутивно по сложению

$$\alpha \in T_{(p_1, q_1)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \rightarrow K - \text{полилинейная}$$

$$\beta \in T_{(p_2, q_2)} \xleftrightarrow{e_1, \dots, e_n} f : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \rightarrow K - \text{полилинейная}$$

$$\text{Тогда } \gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2, q_1+q_2)} \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \rightarrow R$$

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$$

$$t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

$$= \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}}^{i_1, \dots, i_{q_1}, k_1, \dots, k_{q_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \theta_{k_1}^1 \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2}$$

$$= \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}^{i_1, \dots, i_{q_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta_{i_1}^{q_1} \dots \eta_{i_{q_1}}^{q_1} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}}^{k_1, \dots, k_{q_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_{p_2}} \theta_{k_1}^1 \dots \theta_{k_{q_2}}^{q_2}$$

$$= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$$

$$\text{Отсюда } \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow t = fg$$

В частности:

$$\forall f^1, \dots, f^p \in V^*, g_1, \dots, g_q \in V \quad f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\eta_1) \dots f^p(\eta_p) g_1(\eta^n) \dots g_q(\eta^q)$$

Пусть e_1, \dots, e_n – базис V

$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*

$$\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$$

Теорема о базисе пространства тензоров

Набор тензоров $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ по всем возможным i, j – базис $T_{(p,q)}$

Доказательство

$$\omega^j \in T_{(1,0)}, e_i \in T_{(0,1)}$$

$$\{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\} - \text{набор из } n^{p+q}$$

Система порождающая:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$$

$$\forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$$

$$\forall f \in T_{(p,q)} \quad f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q}_{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} (\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q)}$$

$$\text{Отсюда } f = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\text{в будущем: координата}} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

Система линейно независимая

Рассмотрим $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

Применим к $e_{u_1}, \dots, e_{u_p} \in V, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q} \in V^*$

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \underbrace{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}}_{\delta_{u_1}^{j_1} \dots \delta_{u_p}^{j_p} \delta_{i_1}^{r_1} \dots \delta_{i_q}^{r_q}}(e_{u_1}, \dots, e_{u_p}, \omega^{r_1}, \dots, \omega^{r_q}) = 0$$

Отсюда $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = 0$

Тогда все $\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ нули \Rightarrow линейно независимые

Следствие

$$\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}$$

Замечание

//todo 14:20 30.03

Определение

Пусть $\alpha \in T(p, q), p, q \neq 0$

Тензор $\beta \in T_{p-1, q-1}$ называется сверткой тензора α , если

$$\beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} := \sum_{\kappa} \alpha_{j_1, \dots, \underbrace{\dots}_{m\text{-ая позиция}}^{\kappa}, \dots, \underbrace{\dots}_{k\text{-ая позиция}}^{\kappa}, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \dots, i_q}, \text{ где } \hat{i}_k - \text{отсутствие } i_k$$

Доказательство корректности определения

$$\begin{aligned} \beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} &= \alpha_{u_1, \dots, \kappa, \dots, u_p}^{r_1, \dots, \kappa, \dots, r_q} = \alpha_{u_1, \dots, j_m, \dots, u_p}^{r_1, \dots, i_k, \dots, r_q} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_m} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_k}^{\kappa} \dots s_{i_q}^{r_q} \\ t_{\kappa}^{j_m} s_{i_k}^{\kappa} &= \delta_{i_k}^{j_m} \\ \beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q} &= \underbrace{\alpha_{u_1, \dots, \omega, \dots, u_p}^{r_1, \dots, \omega, \dots, r_q}}_{\beta_{j_1, \dots, \hat{j}_m, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_q}} t_{u_1}^{j_1} \dots t_{\kappa}^{j_m} \dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \dots s_{i_k}^{\kappa} \dots s_{i_q}^{r_q} \end{aligned}$$

Свертка может быть по нескольким парам индексов

Если в результате свертки получится тензор $(0,0)$, т.е. число, то свертка *полная*

3.4 Транспонирование тензоров. Кососимметричные и симметричные тензоры

$$\alpha = (\alpha_{ij}) \rightsquigarrow A^T = B = (\beta_{ij}), \beta_{ij} = \alpha_{ji}$$

Обобщим операцию транспонирования

Пусть $\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\alpha_{j_1, \dots, *, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$ – зафиксируем все, кроме $*$, δ

Т.о. мы извлекли из матрицы тензора слой – двумерную матрицу

Получили матрицу $\tilde{\alpha}_{*\delta}$

Протранспонируем ее

Т.о. $\beta_{j_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}$

Определение

$\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$

$\beta = \sigma(\alpha)$ называется тензором, полученным транспонированием тензора

α по перестановке σ , если $\beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} = \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q}$

Замечание

Любая перестановка σ – конечное число транспозиций 2-х элементов

Заметим, что не любая многомерная матрица – тензор

Проверим, что β – тензор

Корректность

Достаточно проверить для σ – транспозиции двух элементов

Возьмем $\beta_{m_1, \dots, \underbrace{*}_{r\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\delta}_{l\text{-ая}}, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$

$\beta_{m_1, \dots, *, \dots, \delta, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q}$ Т.к. α – тензор:

$\alpha_{m_1, \dots, \delta, \dots, *, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \underbrace{\alpha_{j_1, \dots, j_r, \dots, j_l, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}}_{\beta_{j_1, \dots, j_l, \dots, j_r, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}} t_{m_1}^{i_1} \dots t_{\delta}^{j_r} \dots t_{*}^{j_l} \dots t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{k_1} \dots s_{i_q}^{k_q}$

Теперь посмотрим на операцию транспонирования с точки зрения полилинейной функции

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \forall \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$

$\beta = \sigma(\alpha)$

$\beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \beta_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q$

$= \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}}^{i_1, \dots, i_q} \xi_{\sigma_1}^{j_{\sigma_1}} \dots \xi_{\sigma_p}^{j_{\sigma_p}} \eta_{i_1}^1 \dots \eta_{i_q}^q = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$

Замечание

1. Транспонирование тензора можно определить по аналогии по верхним индексам, если $q \geq 2$
2. Тензоры можно транспонировать только по одному типу индексов: либо по верхним, либо по нижним, в отличие от произвольной многомерной матрицы
3. Мы будем работать только с нижними индексами, но все свойства и теоремы работают и для верхних индексов

Свойства

1. Из определения очевидно, что σ – линейная операция

$$\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)$$

2. $\alpha = f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes \tilde{\alpha} \in T_{(p,q)}, f^i \in V^*, \tilde{\alpha} \in T_{(0,q)}$

$$\text{Тогда } \forall \sigma : \beta = \sigma(\alpha) \forall \xi_i \in V \forall \eta^j \in V^* \beta(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$= f^1(\xi_{\sigma_1}) \cdot \dots \cdot f^p(\xi_{\sigma_p}) \cdot \tilde{\alpha}(\eta^1, \dots, \eta^q) = f^{\sigma_1^{-1}}(\xi_1) \dots f^{\sigma_p^{-1}}(\xi_p) \alpha(\eta^1, \dots, \eta^q)$$

$$\text{Отсюда } \beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \tilde{\alpha}$$

α – называется симметричным тензором, если $\forall \sigma \sigma(\alpha) = \alpha$

α – кососимметричная (антисимметричная / альтернированная), если $\forall \sigma \sigma(\alpha) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} \alpha$

Заметим, что симметричность \Leftrightarrow симметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

Заметим, что кососимметричность \Leftrightarrow кососимметричность при транспозиции (свапе)

$$\Leftrightarrow \forall (n, k) : \alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots) = -\alpha(\xi_1, \dots, \underbrace{\nu}_{m\text{-ая}}, \dots, \underbrace{\mu}_{k\text{-ая}}, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots)$$

Теорема

α кососимметричная $\Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha(\dots, \mu, \dots, \mu, \dots, \nu^1, \dots) = 0 \Leftrightarrow \forall (k, m) \alpha_{\dots, i, \dots, i, \dots} = 0$

Доказательство

Смотри доказательство для полилинейной ассиметричной формы

Примеры

1. $f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) : V_3^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \in T_{(3,0)}$$

f – кососимметричный тензор

2. $\beta \in T_{(3,0)}, n = 3, \beta$ – кососимметричная

Тогда тензор имеет следующий вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), b = \beta(e_1, e_2, e_3)$$

3. $A = (\alpha_{ij}) \in T_{(2,0)}$. Тогда симметричность и антисимметричность согласуется с свойствами матриц

$$4. (\alpha_{ijk}) \in T_{(3,0)}, n = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c & a & d & a & x & b & d & b & y \\ a & x & b & x & e & z & b & z & g \\ d & b & y & b & z & g & y & g & f \end{array} \right)$$

3.5 Операция sim и alt для тензоров

Определение

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{sim } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(\alpha)$ – симметрирование для тензора α по нижним индексам

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \text{alt } \alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)$ – альтернирование для тензора α по нижним индексам

Замечание

1. Т.к. σ – линейный оператор, то sim, alt – линейные
2. Для α – симметричной $\text{sim } \alpha = \alpha$
Для α – кососимметричной $\text{alt } \alpha = \alpha$
3. Операции sim, alt можно проводить не по всем индексам. Тогда набор индексов, по которым проводится операция, заключается в круглые (для симметрирования) или квадратные (для альтернирования) скобки. Если какие-то индексы внутри скобок не участвуют, их выделяют вертикальными чертами
4. Очевидно, что можно определить аналогичные операции по верхним индексам
5. Пусть $\gamma = \text{sim } \alpha$
Тогда $\forall \sigma \quad \gamma_{i_1, \dots, i_p} = \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$
Пусть $\gamma = \text{alt } \alpha$
Тогда $\forall \sigma \quad \gamma_{i_1, \dots, i_p} = (-1)^{\text{inv } \sigma} \gamma_{i_{\sigma_1}, \dots, i_{\sigma_p}}$

Теорема о перестановочности σ и sim, alt

$\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \forall \sigma \quad \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{sim}(\alpha)) = \text{sim } \alpha$
 $\forall \alpha \in T_{(p \geq 2, q)} \quad \forall \sigma \quad \text{alt}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\text{alt}(\alpha)) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$

Доказательство

Доказать проще, чем затеять

Следствие 1

$\forall \alpha$ $\text{sim } \alpha$ – симметричный, $\text{alt } \alpha$ – кососимметричный

Доказательство

$\forall \alpha$ $\sigma(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$ – симметричный

$\forall \alpha$ $\sigma(\text{alt } \alpha) = (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt } \alpha$ – кососимметричный

Следствие 2

α – симметричный $\Leftrightarrow \alpha = \text{sim } \alpha$ α – кососимметричный $\Leftrightarrow \alpha = \text{alt } \alpha$

Следствие 3

$\text{sim}(\text{sim } \alpha) = \text{sim } \alpha$

$\text{alt}(\text{alt } \alpha) = \text{alt } \alpha$

$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = 0$

$\text{alt}(\text{sim } \alpha) = 0$

Доказательство

$$\text{sim}(\text{alt } \alpha) = \text{sim}\left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(\alpha)\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{sim}(\sigma(\alpha)) = \text{sim } \alpha \underbrace{\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\text{inv } \sigma}}_{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} =$$

0

$\text{alt}(\text{sim}(\alpha))$ – аналогично

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}$ – симметрирование T по фиксированному набору

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}, T_{(p,q)}^{\text{кососим}}$ – линейные подпространства $T_{(p,q)}$

Для перестановки (k, m) (транспозиция):

$$T_{(p,q)}^{\text{сим}} \oplus T_{(p,q)}^{\text{кососим}} = T_{(p,q)}$$

Свойства sim, alt сохраняются, если они производятся не по всем индексам

3.6 р-формы. Внешнее произведение р-формы**Определение**

f – р-форма, если $f \in T_{(p,0)}, f$ – кососимметричный (или $p = 1$)

$f : V^p \rightarrow K$

$f \in V^*$ – 1-форма

$\underbrace{T_{(p,0)}^{\text{кососим}}}_{\text{линейное подпространство } T_{(p,0)}}$

$\Lambda^p V^*$ – пространство р-форм

Определение

$f - p_1$ – форма ($f \in \Lambda^{p_1} V^*$)
 $g - p_2$ – форма ($g \in \Lambda^{p_2} V^*$)
 $f \wedge g := \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \text{alt}(\underbrace{f \otimes g}_{\in T_{(p_1+p_2, 0)}}) \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$ – внешнее произведение

Свойства

1. $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$
 В частности $f, g \in \Lambda^1 V^*(V^*)$
 $f \wedge g = -g \wedge f$
 $f \wedge f = 0$

Доказательство

$$\begin{aligned}
 f \in \Lambda^{p_1} V^* &\leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}}) \\
 g \in \Lambda^{p_2} V^* &\leftrightarrow \beta = (\beta_{j_2, \dots, j_{p_2}}) \\
 f \otimes g &\leftrightarrow \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow \gamma_{j_1, \dots, j_{p_1}, m_1, \dots, m_{p_2}} = \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \\
 g \otimes f &\leftrightarrow \theta = \beta \otimes \alpha \leftrightarrow \theta_{m_1, \dots, m_{p_2}, j_1, \dots, j_{p_1}} = \beta_{m_1, \dots, m_{p_2}} \alpha_{j_1, \dots, j_{p_1}} \\
 \text{alt } f \otimes g &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\sigma} \sigma(\gamma) \\
 \text{alt } g \otimes f &= \frac{1}{(p_1 + p_2)!} \sum_{\tau} \tau(\theta) \\
 // \text{todo 13.04 13:12}
 \end{aligned}$$

2. $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$
 $f \wedge (g + h) = f \wedge g + f \wedge h$
3. $(\lambda f) \wedge g = \lambda(f \wedge g) = f \wedge (\lambda g)$
4. $f \wedge \underbrace{\mathbb{0}}_{p_1\text{-форма}} = \mathbb{0} \wedge f = \underbrace{\mathbb{0}}_{(p_1+p_2)\text{-форма}}$
5. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

Доказательство

$$\begin{aligned}
 f \wedge g &= \frac{1}{p_1! p_2!} \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \\
 (f \wedge g) \wedge h &= \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{(p_1 + p_2)! p_1! p_2! p_3!} \text{alt} \left(\sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right) \\
 \text{Рассмотрим } \text{alt} \left(\sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h \right) &= \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \text{alt}(\underbrace{\sigma(f \otimes g) \otimes h}_{\tau(f \otimes g \otimes h)}) = \\
 \dots
 \end{aligned}$$

Возьмем τ – перестановку такую, что первые $p_1 + p_2$ индексов переставляются, а последние p_3 индекса не меняются

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\text{inv } \sigma} = (-1)^{\text{inv } \tau} \\
& \dots = \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\text{inv } \sigma} (-1)^{\text{inv } \tau} \text{alt}(f \otimes g \otimes h) = \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \sum_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} 1 = \\
& (p_1 + p_2)! \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& (f \wedge g) \wedge h = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{alt}(f \otimes g \otimes h) \\
& \text{Аналогично } f \wedge (g \wedge h) = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \text{alt}(f \otimes g \otimes h)
\end{aligned}$$

Пусть $f^i \in V^* = \Lambda^1 V^*$ – 1-форма, $j = 1 \dots p$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \frac{p!}{1! \dots 1!} \text{alt}(f^1 \otimes \dots \otimes f^p) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = p! \text{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}) \in \Lambda^p V^*$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = 2 \text{alt}(\omega^i \otimes \omega^j) = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^j \otimes \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega^j = -\omega^j \wedge \omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega_i = 0$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = -\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^m \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{\kappa} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = 0$$

Теорема (о базисе пространства внешних форм)

$\{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} : j_1 < \dots < j_p\}$ – базис пространства $\Lambda^p V^*$

Доказательство

$$\forall f \in \Lambda^p V^* \Leftrightarrow \begin{cases} f \in T_{p,0} \\ \text{alt } f = f \end{cases}$$

$$f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}$$

$$\text{alt } f = \alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \text{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p})$$

$$= \frac{\alpha_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1}}{p!} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} \omega^{j_{\sigma_1}} \wedge \dots \wedge \omega^{j_{\sigma_p}}$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$= \underbrace{\sum_{j_1 < \dots < j_p} \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1} \dots j_{\sigma_p}} (-1)^{\text{inv } \sigma} \right) \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}_{\beta_{j_1, \dots, j_p}} - \text{порождающая}$$

Существуют координаты р-формы f относительно базиса $\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}, j_1 < \dots < j_p$

Проверим линейную независимость

$$0 = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \frac{\underbrace{\omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}}_{\substack{p! \operatorname{alt}(\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p}) \\ \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \omega^{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}}}}} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \sigma_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \omega^{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}}$$

$\dots \otimes \omega^{j_{\sigma_p}}$

Т.к. базис $T_{(p,0)}$, $\forall \alpha_{j_1, \dots, j_p} = 0$

$\beta_{j_1, \dots, j_p} = 0$

Тогда линейно независимые

Следствие 1

$$\dim \Lambda^p V^* = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Следствие 2

$\forall f \in \Lambda^p V^*$

$$f = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \beta_{j_1, \dots, j_p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}), j_1 < \dots < j_p$$

Доказательство

Из доказательства теоремы:

$$\beta_{j_1, \dots, j_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{j_{\sigma_1}, \dots, j_{\sigma_p}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} = \alpha_{[j_1, \dots, j_p]}, j_1 < \dots < j_p$$

$$f = \operatorname{alt} f \Rightarrow \alpha_{[j_1, \dots, j_p]} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}, \text{ т.к. } j_1 < \dots < j_p$$

Теорема

$f^i \in \Lambda^1 V^*, j = 1 \dots p-1$ -формы

$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V$

$$(f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix}$$

$f^j \leftrightarrow a^j = (a_1^j \dots a_p^j)$ – координатные строки в V^* относительно ω^i

$\xi_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_i^1 \\ \vdots \\ \xi_i^n \end{pmatrix}$ – координаты в V относительно e_j

$$f^j(\xi_i) = a_k^j \xi_i^k = a^j \xi_i$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \dots \xi_p)$$

Замечание

Если $p = n$: $f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det A \det \xi$

Доказательство

$$\begin{aligned} f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p) &= p! \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} (f^1 \otimes \dots \otimes f^p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes f^{\sigma_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\text{inv } \sigma} f^{\sigma_1}(\xi_1) \dots f^{\sigma_p}(\xi_p) = \\ &= \det(f^i(\xi_j)) \end{aligned}$$

Следствие 1

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in V \quad \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

Следствие 2

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}}_{\beta_{j_1, \dots, j_p} \text{ для } f^1 \wedge \dots \wedge f^p} \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_p}$$

Доказательство

$$\beta_{j_1 < \dots < j_p} = \alpha_{j_1, \dots, j_p} = (f^1 \wedge \dots \wedge f^p)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{vmatrix} f^1(e_{j_1}) & \dots & f^1(e_{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(e_{j_1}) & \dots & f^p(e_{j_p}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}, \text{ т.к. } a_j^i = f^i(e_j) \text{ по определению коэффициентов формы } f$$

В частности, при $p = n$: $f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det A \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$

Следствие 3

$$\det \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot (\xi_1 \quad \dots \quad \xi_p) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \dots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \dots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \dots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \dots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

В частности, при $p = n$: $\det(A\xi) = \det A \det \xi$

Определение

Пусть $g \in T_{0,q}$, $\text{alt } g = g$:

g называется *поливектор* (q -вектор)

Если $q \in T_{(0,1)} - g - 1$ -вектор

Линейное пространство q -векторов $\mathcal{V}^q V$

Аналог внешнего произведения: $g_1 \in \mathcal{V}^{q_1}V, g_2 \in \mathcal{V}^{q_2}V, g_1 \vee g_2 = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1!p_2!} \text{alt}(g_1 \otimes$

$g_2)$ – по верхним индексам

$\{e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_q}, i_1 < \dots < i_q\}$ – базис \mathcal{V}^qV

Пусть $p = q$

$\forall f^1, \dots, f^p \in V^*$

$V \cong V^{**} \forall \xi \in V \xi(f) = f(\xi)$

$\xi \in \mathcal{V}^1V$

$$\xi_1 \vee \dots \vee \xi_p(f^1, \dots, f^p) = \begin{vmatrix} \xi_1(f^1) & \dots & \xi_p(f^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(f^p) & \dots & \xi_p(f^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \dots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \dots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} =$$

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^p(\xi_1, \dots, \xi_p)$$

3.7 Евклидовы и унитарные пространства

3.7.1 Скалярное и псевдоскалярное произведение. Евклидово и унитарное пространство. Норма в евклидовом и унитарном пространстве

Определение

Пусть V – линейное пространство над \mathbb{R} (вещественное линейное пространство)

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если

$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$ – симметричность
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Следствие

Линейность по второму аргументу

$(V, (\cdot, \cdot))$ – вещественное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением – Евклидово пространство

Определение

Пусть V – линейное пространство над \mathbb{C}

$(\cdot, \cdot) : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ называется псевдоскалярным произведением, если
 $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) = \overline{(x, x)} \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$
 $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Следствие

$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ – аддитивность по второму аргументу
 $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$

Вместе: полуторилинейность

$(\mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ – унитарное пространство (псевдоевклидово)

Замечание

Иногда будем называть псевдоскалярное пространство скалярным (читай контекст)

Примеры

1. $V_3, (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \phi$
2. $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$
 $(x, y) := \sum x_i y_i$
3. $\mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}$
 $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$

Определение

Норма $\|\cdot\| : V \rightarrow K, V - V$ – линейное пространство над полем K

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ – невырожденность
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ – однородность

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово/унитарное пространство

$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ – евклидова норма

Докажем аксиомы

1. Очевидно

$$2. \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda \bar{\lambda})(x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|$$

3. К.Б.Ш.

$|(x, x)| \leq \|x\| \|y\|$, причем $|(x, x)| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимых

Доказательство

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha} (x, x) + \alpha \bar{\beta} (x, y) + \bar{\alpha} \beta (y, x) + \beta \bar{\beta} (y, y) = \dots$$

Пусть $\alpha := (y, y) \in \mathbb{R}$

$\beta := -(x, y) \in \mathbb{C}$

$$\dots = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 - \underbrace{(x, y)(x, y)}_{|(x, y)|^2} - (x, y)(y, x) + |(x, y)|^2) = \alpha (\|x\|^2 \|y\|^2 -$$

$$(x, y)^2) \geq 0$$

$$\alpha \geq 0$$

Отсюда $\|x\| \|y\| \geq (x, y)$

Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство 0

Если $x, y \neq 0$, $|(x, y)| = \|x\| \|y\|$

$$\alpha, \beta \neq 0 \text{ Тогда } 0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{(\|y\|^2 \|x\|^2 - |(x, y)|^2)}_0 = 0$$

Тогда $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \|\alpha x + \beta y\| = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0 \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимые

Пусть $\exists \alpha, \beta \neq 0 : \alpha x + \beta y = 0$

$$\begin{cases} \underbrace{\alpha(x, x)}_{\neq 0} + \beta(y, x) = 0 \Rightarrow \alpha \|x\|^2 = -\beta(y, x) \\ \alpha(x, y) + \underbrace{\beta(y, y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \beta \|y\|^2 = -\alpha(x, y) \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \alpha \beta \|x\|^2 \|y\|^2 = \alpha \beta (y, x)(x, y) = |(x, y)|^2$$

Доказательство выполнения аксиомы

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 +$$

$$\begin{aligned} \|y\|^2 + 2 \underbrace{\Re((x, y))}_{\leq |(x, y)|} &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \\ &(\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Определение

$\forall x, y \in (V, (\cdot, \cdot))$

$\|x\|$ – длина вектора

$\cos \angle(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}$ – косинус угла между векторами

$|\cos \angle(x, y)| \leq 1$ – по КБШ

3.7.2 Процесс ортогональный Грама-Шмидта. О.Н.Б. (орто-нормированный базис). Ортогональное дополнение

Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово/унитарное

$\forall x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$

\mathbb{O} ортогонален всем векторам

Определение

Система векторов v_1, \dots, v_m называется ортогональной, если вектора попарно ортогональны

Система векторов называется ортонормированными, если вектора попарно ортогональны и нормированы ($\|v_i\| = 1$)

Утверждение

Ненулевые v_1, \dots, v_m ортогональны $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ система линейно независимая

Доказательство

Пусть $\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k = \mathbb{O}$

$$v_j \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k v_k \right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \mathbb{O}$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k v_j v_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k \underbrace{v_j v_k}_{\mathbb{O} \text{ при } k \neq j} = \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\neq 0}$$

Тогда $\forall i \alpha_i = 0$

Отсюда вектора линейно независимые

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)

Любую систему векторов a_1, \dots, a_m можно заменить на систему ортогональных векторов b_1, \dots, b_k таким образом, что $\text{span}(a_1, \dots, a_m) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$, причем $k \leq m$, $k = m \Leftrightarrow$ система линейно независимая

Доказательство

1. Пусть a_1, \dots, a_m линейно независимые. Построим b индукционно:

(а) Возьмем a_1, a_2

$$b_1 := a_1$$

$$b_2 := a_2 - c_1 a_1$$

$$c_1 : (b_2, b_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = (a_2, b_1) - c_1(a_1, a_1) \Leftrightarrow c_1 = \frac{(a_2, b_1)}{(a_1, a_1)}$$

$$\text{span}(a_1, a_2) = \text{span}(b_1, b_2), \text{ т.к. } b_2 \text{ линейно независим с } a_1, a_2$$

(б) $a_1, \dots, a_k \rightarrow b_1, \dots, b_k$ — ортогональные

$$\underbrace{\text{span}(a_1, \dots, a_k)}_{\text{линейно независимый}} = \underbrace{\text{span}(b_1, \dots, b_k)}_{\text{попарно орт.}} \Rightarrow \text{линейно независимые}$$

(с) Покажем для $k+1$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k c_i b_i$$

$$c_i \text{ такой, чтобы } \forall i = 1 \dots k \ (b_{k+1}, b_i) = 0 \quad c_i := \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$$

$$b_{k+1} \in \text{span}(a_1, \dots, a_{k+1})$$

$$b_{k+1} \perp b_j, j = 1 \dots k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$b_{k+1} \text{ линейно независимый с } (a_1, \dots, a_k)$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \text{span}(b_1, \dots, b_{k+1})$$

2. Если a_1, \dots, a_m линейно зависимые, предварительно выполним прополку a

Если без прополки, то некоторые b_i будут $\mathbb{0}$

Следствие 1

В $(V, (\cdot, \cdot))$ всегда существует о.н.б.

Доказательство

Применим Грама-Шмидта и нормируем

Следствие 2

В $(V, (\cdot, \cdot))$ любую ортогональную систему можно дополнить до ортонормированного базиса

Определение

$L \subset V$ – линейное подпространство

$L^\perp = \{y \in V : (x, y) = 0 \forall x \in L\}$ – ортогональное дополнение

Свойства

1. L^\perp – линейное подпространство

Доказательство

$\forall y_1, y_2 \in L^\perp, \lambda \in K, x \in L \quad (x, \lambda y_1 + y_2) = \underbrace{\bar{\lambda}(x, y_1)}_0 + \underbrace{(x, y_2)}_0$ Отсюда

$\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$ – линейное подпространство

2. $V = L \oplus L^\perp$

Доказательство

Докажем, что L, L^\perp – дизъюнктные

$y \in L \cap L^\perp \Rightarrow (y, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ – дизъюнктные

Пусть $L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$

Дополним a_1, \dots, a_k векторами a_{k+1}, \dots, a_n до базиса V

Тогда $V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

$\forall a_{k+j} \quad (a_i, a_{k+j}) = 0$

Тогда $(a_i, \sum_{j=1}^{n-k} \alpha_j a_{k+j}) = 0$

Тогда $(\sum_{i=1}^k \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j}) = 0$

Отсюда $\text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n) \subset L^\perp$

$V = L \oplus \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n), L, L^\perp$ – дизъюнктные

Тогда $L^\perp = \text{span}(a_{k+1}, \dots, a_n)$

Тогда $V = L \oplus L^\perp$

3. $(L^\perp)^\perp = L$

Доказательство

$L \oplus L^\perp = V = L \perp \oplus (L^\perp)^\perp$

$\forall x \in L, y \in L^\perp \quad (x, y) = 0 \Rightarrow x \in (L^\perp)^\perp \Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$

Тогда $L = L^\perp$

4. $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$
 $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Доказательство

Докажем 1

Пусть $y \in (L_1 + L_2)^\perp$

Тогда $\forall \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2} \in L_1 + L_2 \quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$

(a) $x_2 = 0$

$\forall x_1 \in L_1 \quad (x_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L^\perp$

$(x_2, y) = 0$

Тогда $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Отсюда $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp$ Обратно: $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$

$\forall x_1 \quad (x_1, y) = 0$

$\forall x_2 \quad (x_2, y) = 0$

Отсюда $(x_1 + x_2, y) = 0 \Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp$

$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp$

(b) Из предыдущего пункта

$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$

$L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$

5. $0^\perp = V, V^\perp = 0$

3.8 Матрица Грама и ее свойства. Ортогональные и унитарные матрицы

$(V, (\cdot, \cdot))$

e_1, \dots, e_n – базис

$\forall x, y \in V \quad x \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$y \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \right) = \sum_i \sum_j x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$

Пусть $g_{ij} = (e_i, e_j)$

$\Gamma = (g_{ij})$ – матрица Грама базиса e_1, \dots, e_n

$(x, y) = x^\perp \Gamma \bar{y}$ – координатная форма записи скалярного произведения

В частности, если e – о.н.б., то $g_{ij} = \sigma_{ij}$

$$\Gamma = E$$

$$(x, y) = x^\perp \bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

$$(x, x) = x^\perp \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Замечание

Если V евклидово пространство, то, очевидно, все комплексные сопряжения можно убрать

Определение

$$A_{n \times n}$$

A^* называется сопряженной к A , если $A^* = \overline{A^T}$

$*$ – операция сопряжения

$$(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda} B^*$$

Определение

Матрица $A_{n \times n}$ – самосопряженная, если $A^* = A$

Если $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то самосопряженная = симметричная

Если $a_{ij} \in \mathbb{C}$, то самосопряженная = эрмитова

Очевидно, что $\Gamma^* = \Gamma$, т.е. самосопряженная

Определение

$$a_1, \dots, a_k \in V$$

$G(a_1, \dots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k \times k}$ – матрица Грама для системы векторов

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$G = G^*$$

Теорема об определителе матрица Грама

$$g(a_1, \dots, a_k) := \det G(a_1, \dots, a_k)$$

Применим к векторам алгоритм Грама-Шмидта

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{Тогда } g(a_1, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

Доказательство

$$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

на b_1

2 строка \leftarrow 1 строка $\cdot c_1$

$$\text{Тогда } \forall j = 2 \dots k \quad \begin{aligned} (a_2, a_j) - c_1(b_1, a_j) &= (a_2 - c_1 b_1, a_j) = (b_2, a_j) \\ (a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) &= (b_2, b_1) = 0 \end{aligned}$$

2 столбец \leftarrow 1 столбец $\cdot c_1$

$$\forall j = 3 \dots k \quad \begin{aligned} (a_j, a_2) - c_1(a_j b_1) &= (a_j, a_2 - c_1 b_1) = (a_j, b_2) \\ (b_1, a_2) - c_1(b_1, a_1) &= (b_1, b_2) = 0 \end{aligned}$$

Тогда после этих двух шагов в матрице не осталось a_2

Применим аналогичные действия, зная, что $b_i = a_i - c_1 b_1 - \dots - c_{i-1} b_{i-1}$

Таким образом мы получим матрицу, где вместо a_i будут b_i

По построению определитель не поменялся

$$\text{Тогда } g(a_1, \dots, a_k) = g(b_1, \dots, b_k) = \det \text{diag}(\|b_1\|^2, \dots, \|b_k\|^2) = \prod_{i=1}^k \|b_i\|^2$$

Следствие 1

$$a_1, \dots, a_k - \text{линейно независимые} \Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0$$

Доказательство

Если a_1, \dots, a_k линейно независимые $\xleftrightarrow{\text{Г.Ш.}} b_1, \dots, b_k$ - линейно независимые

$$\Leftrightarrow \|b_i\|^2 > 0$$

Следствие 2

a_1, \dots, a_{k-1} - линейно независимые

$$\|b_k\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

Свойства матрицы Грама

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$, e - базис

1 + 2 - положительно определенная матрица ($\Gamma > 0$)

$$1. \Gamma = \Gamma^*$$

$$2. \forall x \neq 0 \quad x^T \Gamma x > 0$$

$$3. \forall \delta k = g(e_1, \dots, e_k) \quad \delta k > 0$$

δk - угловой минор

В частности, при $k = n$ $\delta k = g > 0$, т.е. Γ невырожденная

Доказательство

$$e_1, \dots, e_k - \text{линейно независимые} \Leftrightarrow g(e_1, \dots, e_k) > 0$$

$$4. e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n - \text{базисы } V$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$$

$$\Gamma' = G(e'_1, \dots, e'_n)$$

$$\text{Тогда } \Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$$

Доказательство

$$(x, y) = x^T \Gamma' \bar{y}' = x^T \Gamma \bar{y}$$

$$\Gamma' = (g'_{ij})$$

$$g'_{ij} = (e'_1, \dots, e'_j) = T_i^T \Gamma \bar{T}_j \Leftrightarrow \Gamma' = T^T \Gamma \bar{T}$$

В частности, если $e, e' - \text{o.n.b. } V$

$$\Gamma' = E = \Gamma$$

$$T^T \bar{T} = E \Leftrightarrow \bar{T}^T T = E \Leftrightarrow T^* T = E \Leftrightarrow T^{-1} = T^*$$

Определение

Невырожденная матрица Q вещественная/комплексная называется ортогональной/унитарной, если $Q^* = Q^{-1}$

Свойства унитарной/ортогональной матрицы

1. Q – унитарна/ортогональна \Leftrightarrow строки(столбцы) попарно ортогональны в стандартном скалярном произведении пространств $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

Доказательство

$$Q \text{ унитарна/ортогональна} \Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E$$

$$\text{Пусть } Q = (Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n)$$

$$Q^* Q = \overline{Q^T} Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix} \cdot (Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_n) = ((Q_i, Q_j)) = E$$

2. Q унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow Q^{-1}$ унитарна ортогональна
 $\bar{A} \cdot (\bar{A})^{-1} A A^{-1} = \bar{E} = E \quad (Q^{-1})^* = (\overline{Q^{-1}})^T = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q$
 Тогда $Q = (Q^{-1})^{-1} = Q^{-1*}$

3. Q унитарна/ортогональна $\Rightarrow |\det Q| = 1$
 В частности, если Q ортогональная, то $\det Q = \pm 1$

Доказательство

$$Q^* Q = E$$

$$\det Q^* \det Q = 1$$

$$\det Q^* = \det(\overline{Q^*}) = \overline{\det Q}$$

$$\det Q (\det Q) = |\det Q|^2 = 1$$

4. Q, R унитарная/ортогональная $\Rightarrow QR$ унитарная/ортогональная

Доказательство

$$(QR)^* = \overline{(QR)^T} = \overline{R^T Q^T} = \overline{R^T} \overline{Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$$

5. $e, e' - \text{о.н.б. } V, T = T_{e \rightarrow e'}$

Тогда T унитарна/ортогональна (см. свойство матрицы Γ)

3.9 Теорема Пифагора. Задача о наилучшем приближении и перпендикуляре. Расстояние от точки до линейного подпространства и многообразия. Объем k -мерного параллелепипеда в n -мерном пространстве

Теорема Пифагора

$$\forall y, z \in V : (y, z) = 0$$

$$\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$$

Доказательство

$$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \underbrace{(z, y)}_0 + \underbrace{(y, z)}_0 + \|z\|^2$$

2

Следствие

x_1, \dots, x_k попарно ортогональны

$$\|x_1 + \dots + x^k\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$$

Пусть $L \subset V$ – линейное подпространство

$$V = L \oplus L^\perp$$

$$\forall x \in V \exists! x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$$

$$(y, z) = 0$$

y – ортогональная проекция x на L

z – ортогональной составляющей x относительно L или перпендикуляром, опущенном из x на линейное подпространство L

Теорема о наилучшем приближении

$L \subset V$ – линейное подпространство

$$\forall x \in V \exists! y \in L, z \in L^\perp : x = y + z$$

$$\forall l \neq y \in L \|x - y\| \leq \|x - l\|$$

Т.е. y является наилучшим приближением к x из элементов простран-

ства L

(Любая наклонная длиннее перпендикуляра)

Доказательство

$\forall l \neq y \in L$

$$\|x - l\|^2 = \|y + z - l\|^2 = \|y - l\|^2 + \|z\|^2 > \|z\|^2 = \|x - y\|^2$$

Как найти перпендикуляр?

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$, a – базис

$x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$

Пусть $y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$

$$x = \sum_{i=1}^k c_i a_i + z$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_0$$

$$(x, a_j) = \sum_{i=1}^k c_i (a_i, a_j)$$

$$G^T(a_1, \dots, a_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix} - \text{СЛНУ относительно } c_i$$

a_1, \dots, a_k – линейно независимые $\Leftrightarrow g(a_1, \dots, a_k) > 0 \Leftrightarrow G(a_1, \dots, a_k) -$

невырожденная $\Leftrightarrow \exists!$ решение $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^k c_i a_i$ – определен однозначно

Определение

$$\text{dist}(x, L) = \min_{l \in L} \|x - l\| = \|x - y\| = \|z\|$$

Теорема о расстоянии до линейного подпространства

$L = \text{span}(a_1, \dots, a_k)$, a – базис

$$\text{dist}^2(x, L) = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

Доказательство

$$\text{dist}^2(x, L) = \|z\|^2$$

$$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$$

$$\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$$

$$z = x - \underbrace{\sum_{i=1}^k c_i a_i}_z = x - \sum_i \tilde{c}_i b_i$$

$$(z, y) = 0$$

$$a_1, \dots, a_k, x = b_1, \dots, b_k, z =: b_{k+1}$$

$$\|b_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 = \frac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$$

Определение

$P = x_0 + L$ – линейное многообразие

$$\text{dist}(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \underbrace{=} \min_{\substack{u = x_0 + l, l \in L}} \|x - x_0 - l\| = \text{dist}(x - x_0, L)$$

Пусть $P_1, P_2 : P_i = x_i + L_i, L_i \subset V, x_i \in V$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \min_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_1 - u_2\| = \min_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_1 - x_2 - (l_1 + l_2)\| =$$

$$\text{dist}(x_1 - x_2, L_1 + L_2) = \frac{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2)}}{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}} = \frac{V(\Pi(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2))}{V(\Pi(a_1, \dots, a_k))}$$

Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово

a_1, \dots, a_k – линейно независимые

$$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]\} - k\text{-мерный параллелепипед}$$

пед

(считаем, что все a_1, \dots, a_k приложены к какой-то одной точке, к \mathbb{O} , натянутой на векторы a_1, \dots, a_k)

Определение

$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}$ – объем k -мерного параллелепипеда

$$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = V(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1})) \|h\|$$

$$\|h\| = \frac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$$

$h \perp \text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$ из алгоритма Г.Ш.

h – перпендикуляр, опущенный из a_k на подпространство $\text{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$

Пусть e_1, \dots, e_n – о.н.б V

$\Pi(a_1, \dots, a_k)$ – параллелепипед

$$a_j \xleftrightarrow{e} A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$A = (A_1 \ \dots \ A_k) \quad V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)}$$

$$(a_i, a_j) = A_i^T A_j$$

$$\text{Тогда } G = A^T A$$

$$\text{Отсюда } V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \underbrace{A^T}_{k \times n} \underbrace{A}_{n \times k}}$$

$$\text{В частности, если } k = n, \text{ то } V(\Pi(a_1, \dots, a_n)) = |\det A|$$

Также можно задать ориентацию базиса: если определитель матрицы перехода из одного базиса в другой > 0 , то базисы в одной ориентации.

Иначе в разных

Тогда $\det A = +V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$, если a_1, \dots, a_n и базис в одной ориентации

$$\text{Иначе } \det A = -V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$$

Пусть $\mathcal{B} \in \text{End}(V)$ – невырожденный (изоморфизм)

$$x \in \Pi(a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]$$

$$\mathcal{B}x = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{B}a_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i \in \Pi(b_1, \dots, b_k)$$

$$\mathcal{B}(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \Pi(b_1 := \mathcal{B}a_1, \dots, b_k := \mathcal{B}a_k)$$

$$V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = \sqrt{g(b_1, \dots, b_k)} = \sqrt{\det(BA)^T(BA)} = \sqrt{\det A^T B^T B A}$$

$$\text{Если } k = n, \text{ то } V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = |\det A| |\det B| = V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) |\det B|$$

3.10 Коэффициенты Фурье. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. Ортогональные проекторы. Полиномы Лежандра

$(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово пространство

e_1, \dots, e_n – ортогональный базис

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n \chi_i e_i$$

$$\forall x \in V \quad (x, e_j) = \sum_{i=1}^n \chi_i (e_i, e_j) = \chi_j (e_j, e_i) = \chi_j \|e_j\|^2$$

$\chi_j = \frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициент Фурье элемента относительно ортогонального базиса

$$L_i = \text{span}(e_i), i = 1 \dots n$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n L_i$$

$$\forall x \in V \exists !(x_i) : x = \sum_{i=1}^n x_i, x_i - \text{ортогональная проекция } x \text{ на } e_i$$

$$x = \chi_i e_i$$

$$\text{Тогда по т. Пифагора } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\chi_i|^2 \|e_i\|^2 - \text{тождество Парсеваля}$$

$$\text{Неравенство Бесселя: } \forall k = 1 \dots n \sum_{i=1}^k |\chi_i| \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2 - \text{квадрат длины}$$

вектора не меньше суммы квадратов длин его проекций

В частности, если e – ортонормированный базис

$\chi_j = (x, e_j)$ – проекция x на вектор e_j

$$x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

$$x_j = \chi_j e_j - \text{проекция } x \text{ на вектор } e_j$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\chi_i|^2$$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\chi_i|^2$$

$\rho_i : V \rightarrow V$ – проектор

$$\forall x \in V \rho x := x_i$$

$$\exists !(x_i) : x = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\in L_i}$$

ρ_i – оператор ортогонального проектирования

$V = \bigoplus_{i=1}^k L_i, L_i \subset V$ – попарно ортогональные линейные подпространства

$V = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ – о.н.б.

$$\forall x \in V \rho_i x = \sum_{e_j \in L_j} (x_i, e_j) e_j$$

Примеры ортогональных систем

1. Рассмотрим множество полиномов степени не более n

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt$$

Рассмотрим многочлены $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$

Найдем ортогональный базис

$$\underbrace{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, \dots}_{\text{полиномы Лежандра}}$$

$l_k = \lambda_k ((t^2 - 1)^k)^{(k)}$, $\deg l_k = k$ – общая формула полиномов Лежандра

Покажем, что $q_k(t) := ((t^2 - 1)^k)^{(k)}$ ортогональны $1, \dots, t^{k-1}$

$$(q_k, t^m) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} t^m dt = \int_{-1}^1 t^m d((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} =$$

$$= t^m \underbrace{\left(((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} \right) \Big|_{-1}^1}_{\pm 1 - \text{корни}} - m \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} t^{m-1} dt = \dots$$

$$= (-1)^m m! \underbrace{\int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k-m)} dt}_{\left((t^2 - 1)^k \right)^{(k-m-1)} \Big|_{-1}^1}$$

$$q_k \perp \text{span}(1, \dots, t^{k-1}) \Rightarrow q_k \perp \text{span}(l_1, \dots, l_{k-1}) \Rightarrow l_k \perp \text{span}(l_1, \dots, l_{k-1})$$

$$(uv)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m u^{(m)} v^{(k-m)} - \text{формула Лейбница}$$

$$q_k(1) = \left((t^2 - 1)^k \right)^{(k)} \Big|_{t=1} = \left((t-1)^k (t+1)^k \right)^{(k)} \Big|_{t=1} = \sum_{m=0}^k C_k^m \left((t-1)^k \right)^{(m)} \left((t+1)^k \right)^{(k-m)} \Big|_{t=1} = C_k^k \underbrace{\left((t-1)^k \right)^{(k)}}_{k!} \underbrace{\left((t+1)^k \right)^{(0)}}_{2^k} \Big|_{t=1} = k! 2^k =$$

$$(2k)!!$$

$$l_k = \frac{((t^2 - 1)^k)^{(k)}}{k! 2^k}, l_k(1) = 1 - \text{формула многочлена Лежандра в форме Родрига}$$

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\begin{aligned}
\|l_k\|^2 &= \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} dt = \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} ((t^2 - 1)^k)^{(k)} dt \\
&= \frac{1}{(2^k k!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k)} d((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} = -\frac{1}{((2k)!!)^2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)^k)^{(k-1)} ((t^2 - 1)^k)^{(k+1)} dt \\
&= \dots = \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k \underbrace{((t^2 - 1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!} dt = \\
&= \frac{(-1)^k (-1)^k (2k)!}{((2k)!!)^2} 2 \int_0^1 \frac{t(1 - t^2)^k}{t} dt = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \underbrace{\int_0^1 (1 - t)^k t^{-\frac{1}{2}} dt}_{B(k+1, \frac{1}{2})} = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\underbrace{\Gamma(k+1+\frac{1}{2})}_{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+\dots+\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}} \\
&= \frac{(2k)! k! 2^{k+1}}{((2k)!!)^2 (2k+1)!!} = \frac{2(2k)!(2k)!!}{(2k+1)!(2k)!!} = \frac{2}{2k+1}
\end{aligned}$$

2. $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$
 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$
 $f \in L^1(-\pi, \pi) \vee f \in L^2(-\pi, \pi)$

(а) вещественная ортогональная тригонометрическая система
 $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots$ – бесконечномерная ортогональная система

Несложно проверить, что $(\sin kt, \cos mt) = (\sin kt, \sin mt) = (\cos kt, \cos mt) = 0, k \neq m$

$$\|\cos kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kt}{2} dt = \pi, k \neq 0$$

$$\|1\|^2 = 2\pi$$

$$\|\sin kt\|^2 = \pi$$

Пусть $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ – ряд Фурье

$c_j = \frac{(f, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициенты Фурье

$$\text{Тогда } a_k := \frac{(f, \cos kt)}{\|\cos kt\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt$$

$$b_k := \frac{(f, \sin kt)}{\|\sin kt\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

Теперь забудем на сходимость и сопоставим f с последователь-

ностью коэффициентов

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ – ряд Фурье по классической тригонометрической системе

(b) комплексная ортогональная тригонометрическая система

$$c_k = \widehat{f(k)} = \frac{1}{\|e^{ikt}\|^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt$$

$$\|e^{ikb}\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt = 2\pi$$

$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ – комплексный ряд Фурье

(c) $L^2([-1, 1], \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}})$

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$T_n(t) = \cos(n - \arccos t)$ – полиномы Чебышева

$\deg T_n = n$

3.11 Изометрия евклидовых/унитарных пространств.

Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидова пространства своему сопряженному

$$(V, (\cdot, \cdot)_V), (V', (\cdot, \cdot)_{V'})$$

Определение

V, V' изометричны, если V, V' изоморфны и сохраняется скалярное произведение

$$x, y \in V \leftrightarrow x', y' \in V' \Rightarrow (x, y)_V = (x', y')_{V'}$$

Отсюда $\|x - y\|_V = \sqrt{(x, y)_V^2} = \sqrt{(x', y')_{V'}^2} = \|x' - y'\|_{V'}$ – расстояния сохраняются

Теорема

Любые два конечномерных линейных пространства одной размерности изометричны

Доказательство

Пространства изоморфны

Пусть e – о.н.б. V

$e' - \text{о.н.б. } V'$

Тогда $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i e'_i = x'$

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n) = E = G(e'_1, \dots, e'_n) = \Gamma'$

$(x, y)_v = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = (x', y')_{V'}$

Зафиксируем $y \in V$

$\forall x \in V (x, y) =: f(x) \in V^*$

$(\cdot, y) : V \rightarrow V^*$

Теорема Рисса

$\forall f \in V^* \exists! y \in V : f(x) = (x, y) \forall x \in V$

Т.е. $V \leftrightarrow V^*$ – взаимнооднозначное сопоставление

Доказательство

Докажем единственность

Пусть $y_1, y_2 \in V : f(x) = (x, y_1) = (x, y_2) \forall x \in V$

Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0$

Пусть $x = y_1 - y_2$

Тогда $\|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Докажем существование

Пусть $e_1, \dots, e_n - \text{о.н.б. в } V$

$\forall x \in V x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$\forall f \in V^* f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$

Пусть $y_i = \overline{f(e_i)}$

$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$

$f(x) = (x, y)$

Т.о. мы сопоставили f и y

Если $V - \text{евклидово (вещественное)}$, то $V \overset{P}{\cong} V^*$ (изоморфизм)

Замечание

$e_1, \dots, e_n - \text{о.н.б. } V$

$\forall x \in V \omega^i(x) = \chi^i = (x, e_i)$

$x = \chi^i e_i$

Тогда $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e_i$

3.12 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрические тензоры. Взаимные базисы. Операции опускания и поднимания индексов. Евклидовы тензоры

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово

e_1, \dots, e_n – базис V

$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n) = (g_{ij})$

$g_{ij} = (e_i, e_j)$

Γ – тензор $\in T_{(2,0)}$ – 2 раза ковариантный метрический тензор

Покажем, что Γ – тензор

$T = T_{e \rightarrow e'}$

$\Gamma' = T^T \Gamma T$

$g'_{ij} = t_i^k g_{km} t_j^m = g_{km} t_i^k t_j^m$ – действительно тензор

$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) \in T_{(0,2)}$ – 2 раза контрвариантный метрический тензор

$\Gamma^{-1} \Gamma = E$

$(\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = (T^T)^{-1} \Gamma^{-1} T^{-1} = S^T \Gamma^{-1} S$

$g'^{ij} = s_k^i g^{km} s_m^j = g^{km} s_k^i s_m^j$

Свойства

1. $\Gamma = \Gamma^T$
 $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1})^T$
 $g^{ij} = g^{ji}, g_{ij} = g_{ji}$
2. $\Gamma \Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1} \Gamma \Rightarrow g^{ik} g_{kj} = g^{ki} g_{kj} = g^{ki} g_{jk} = g^{ik} g_{jk} = \sigma_i^j$
3. $\forall x, y \in V (x, y) = g_{ij} x^i y^j, (x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0) \Rightarrow (x \neq 0 \Rightarrow g_{ij} x^i x^j > 0)$

Определение

Пусть e_1, \dots, e_n – базис V

e^1, \dots, e^n – базис V

e_i, e^j – взаимные базисы, если $(e_i, e^j) = \sigma_i^j$

Теорема

$\forall e_1, \dots, e_n$ – базис $V \exists ! e^1, \dots, e^n$ – взаимный базис

Доказательство

Пусть e^1, \dots, e^n – базис V

$T_{e_i \rightarrow e^i} = (x^{km})_{n \times n}$

$(e^1 \dots e^n) = (e_1 \dots e_n) T_{e_i \rightarrow e^i}$

$$(e_i, e^j) = (e_i, x^{kj} e_k) = x^{kj} \underbrace{(e_i, e^k)}_{g_{ik}} = \sigma_i^j$$

$$g_{ik} x^{kj} = \sigma_i^j \Leftrightarrow \Gamma T_{e_i \rightarrow e^i} = E$$

$$T_{e_i \rightarrow e^i} = \Gamma^{-1}$$

e^1, \dots, e^n – взаимнооднозначное с e_1, \dots, e_n

Следствие 1

1. e_i, e^i – взаимные базисы

$$\begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \Leftrightarrow e^j = g^{kj} e_k = g^{jk} e_k$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & \dots & e^n \end{pmatrix} \Gamma \Leftrightarrow e_j = g_{kj} e^k = g_{jk} e^k$$

2. $\Gamma^{-1} = G(e^1, \dots, e^n)$

Доказательство

$$(e^i, e^j) = (e^i, g^{jk} e_k) = g^{jk} (e^i, e_k) = g^{jk} \sigma_k^j = g^{ji} \in \Gamma^{-1}$$

Следствие 2

e_1, \dots, e_n – о.н.б.

Тогда $e^i = e_i$

Доказательство

Очевидно, $\Gamma = E = \Gamma^{-1}$

Замечание

1. на практике скалярное произведение, в свою очередь, может быть задано какой-то матрицей Грамма, относительно какого-то другого базиса

2. e_1, \dots, e_n и e'_1, \dots, e'_n – имеют один класс ориентации, если $\det T_{e \rightarrow e'} > 0$

Отсюда взаимные базисы принадлежат к одному классу ориентации

Теорема 2

Если e_1, \dots, e_n – базис пространства V

$\omega^1, \dots, \omega^n$ – сопряженный базис V^*

Тогда $\omega^i \xrightarrow{P} e^i \in V \Rightarrow e^1, \dots, e^1, \dots, e^n$ – взаимный с e_1, \dots, e_n

Доказательство

$$\forall \omega^i \in V^* \exists ! e^i \in V : \omega^i(x) = (x, e^i) \forall x \in V$$

Пусть $x = e_j$ $\underbrace{\omega^i(e_j)}_{\sigma_i^j} = (e_j, e^i) \Rightarrow$ взаимный базис

Замечание

e – о.н.б. из теоремы Рисса такой, что $\omega^i \xleftrightarrow{P} e_i$

$$\omega^i \xleftrightarrow{P} e^i$$

Отсюда $e^i = e_i$ (снова следствие 2)

Определение

e_1, \dots, e_n и e^1, \dots, e^n – взаимные базисы

$$\forall x = x^i e_i = x^j e^j$$

x_j – ковариантные координаты

x^i – контрвариантные координаты

координатная функция относительно базиса $e^i \leftrightarrow (x, e_i) = (x_j e^j, e_i) =$

$$x_j(e^j, e_i) = x_j \sigma_i^j = x_i$$

$$\omega^j \leftrightarrow (x, e^j) = (x^i e_i, e^j) = x^i(e_i, e^j) = x^i \sigma_i^j = x^j$$

$$x = (x, e_i) e^i = (x, e^j) e_j \text{ – формула Гибса}$$

$$T = T_{e \rightarrow e'}$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} \text{ – контрвариантный}$$

$$\omega^j \xrightarrow{P} e^j$$

$$x_j \omega^j \cong x_j e^j$$

$$(x_1 \dots x_n) = (x'^1 \dots x'^n) S \text{ – ковариантный}$$

Рассмотрим координаты как тензоры

$$(x^i) \leftrightarrow T_{(0,1)}$$

$$(x_i) \leftrightarrow T_{(1,0)}$$

Рассмотрим свертку с соответствующим метрическим тензором

$$g_{ki} x^i = (e_k, e_i) x^i = (e_k, e_i x^i) = (e_k, x) = (x, e_k) = x_k$$

Свертка контрвариантного тензора с ковариантным метрическим тензором

дает ковариантный тензор – опускание индекса

$$g^{jk} x_j = (e^j, e^k) x_j = (x_j e^j, e^k) = (x, e^k) = x^k$$

Свертка ковариантного тензора с контрвариантным метрическим тензором

дает контрвариантный тензор – поднятие индекса

Определим операции для произвольных тензоров

Рассмотрим $\alpha \in T_{(p,q)}$

Операцией опускания поднятия индекса называется преобразование мат-

рицы тензора в результате его свертки с ковариантным/контрвариантным метрическим тензором. При этом, чтобы сохранить соответствия записи элементов в матрице тензора применяют следующие правила записи

1. Если опускается крайний правый верхний индекс, он становится крайним левым нижним

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q-1}, \kappa} g_{\kappa, j_0} = \alpha_{j_0, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q-1}}$$
2. Если поднимается крайний левый нижний индекс, он становится крайним правым верхним

$$\alpha_{\kappa, j_2, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} g^{\kappa, i_{q+1}} = \alpha_{j_2, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q+1}}$$
3. Если происходит опускание или поднятие остальных индексов, его прежняя позиция обозначается точкой. Сам индекс при этом занимает крайнюю левую нижнюю/правую верхнюю позицию

$$\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \kappa, \dots, i_q, \kappa} g_{\kappa, j_0} = \alpha_{j_0, \dots, j_p}^{i_1, \dots, \bullet, \dots, i_q}$$

$$\alpha_{j_1, \dots, \kappa, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} g^{\kappa, i_{q+1}} = \alpha_{j_1, \dots, \bullet, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_{q+1}}$$
4. Если опускаются/поднимаются несколько индексов то их прежние позиции обозначаются точками, а сами они записываются по тем же правилам с сохранением исходного порядка

Если базис ортонормированный, то поднятие/опускание индексов не меняет тензор

Если $e_1, \dots, e_n; e'_1, \dots, e'_n$ – о.н.б. базисы, то $T = T_{e \rightarrow e'}$ – ортогональная (т.е. $T^{-1} = T^T$)

Тогда $\alpha_{m_1, \dots, m_p}^{k_1, \dots, k_q} = \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} s_{i_1}^{j_1} \dots s_{i_q}^{j_q} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_q} \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} t_{m_1}^{j_1} \cdot t_{m_p}^{j_p} t_{j_p}^{i_1} \dots t_{k_q}^{i_q}$

После приведения к о.н.б. в V получаем тензоры, которые отличаются только расположением тензора сверху/снизу. Такие тензоры называются *евклидовы* ранга $r = p + q$

Для них нет разницы, сверху или снизу индексы (пока мы переходим по ортонормированным базисам), поэтому пишем все внизу

4 Линейные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

4.1 Сопряженные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

Определение

$$\mathcal{A} \in L(U, V)$$

$\mathcal{A}^* : V^* \rightarrow U^*$ – сопряженное к \mathcal{A}

$$\forall f \in V^* \forall x \in U (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x)$$

Заметим, что \mathcal{A} – линейное отображение

Пусть $\mathcal{A}^* f = g$

$$g(x) = f(\mathcal{A}x) \in K \text{ – линейно по } x, \text{ т.к. } \mathcal{A}, f \text{ – линейные}$$

Тогда $g \in U^*$

Тогда $\mathcal{A}^* : V^* \rightarrow U^*$

$$\forall \lambda \in K \forall f_1, f_2 \in V^*$$

$$\forall x \in U (\mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2))(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \lambda f_1(\mathcal{A}x) + f_2(\mathcal{A}x) = \lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x) + (\mathcal{A}^* f_2)(x)$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathcal{A}} & V \\ x & \mathcal{A}x & \\ U^* & \xleftarrow{\mathcal{A}^*} & V^* \\ g=\mathcal{A}^* f & \mathcal{A}^* & f \end{array}$$

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово, $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$

$V^* \xrightarrow{P} V$ – естественный изоморфизм

$$f \in V^* \xrightarrow{P} y \in V$$

$$\forall x \in V f(x) = (x, y)$$

$$\mathcal{A}^* : V^* \rightarrow V^*$$

$$\exists! z \in V \xrightarrow{P} g \in V^*$$

$$\exists! y \in V \xrightarrow{P} f \in V^*$$

$$\forall x \in V g(x) = (x, z), f(x) = (x, y)$$

$$\text{По определению } \mathcal{A}^* : g(x) = (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$$

$$\mathcal{A}^* : \underbrace{V^*}_{\xrightarrow{P} V} \rightarrow \underbrace{V^*}_{\xrightarrow{P} V}$$

Определение

$$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$$

$\mathcal{A}^* \in \text{End}(V)$ называется сопряженным к \mathcal{A} , если $\forall x, y \in V (x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)$

Замечание

\mathcal{A}^* зависит от скалярного произведения

При фиксированном скалярном произведении \mathcal{A}^* определен однозначно

Если поменять скалярное произведение, получим другое евклидово/унитарное пространство

Тогда и \mathcal{A}^* будет другим

Свойства сопряженного оператора

1. $A, A^{(*)}$ – матрицы \mathcal{A} и \mathcal{A}^* в некотором базисе e_1, \dots, e_n пространства V

$$\text{Тогда } A^{(*)} = \overline{\Gamma^{-1} A^* \Gamma} = \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma}$$

Доказательство

$$\forall x, y \in V$$

$$(x, \mathcal{A}^* y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n g_{ij} x_i \overline{A^{(*)} y_j} = x^T \Gamma \overline{\mathcal{A}^{(*)} y}$$

$$(\mathcal{A} x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} (Ax)_i \overline{y_j} = (Ax)^T \Gamma y$$

$$x^T \Gamma A^{(*)} \overline{y} = x^T A^T \Gamma \overline{y}$$

$$\text{Пусть } x = e_i, y = e_j$$

$$(\Gamma \overline{A^{(*)}})_{ij} = (A^T \Gamma)_{ij}$$

$$\Gamma \overline{A^{(*)}} = A^T \Gamma$$

$$\overline{A^{(*)}} = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

$$\text{В частности, если о.н.б., то } T = E \Rightarrow A^{(*)} = A^* = \overline{A^T}$$

2. $\forall \lambda \in K (\mathcal{A} + \lambda \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \overline{\lambda} \mathcal{B}^*$

Если евклидово пространство, то $*$ – линейное, если унитарное – полутороллинейное

3. $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*$

4. Если $\exists \mathcal{A}^{-1}$, то $\exists (\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

Доказательство

$$(\mathcal{A} \mathcal{A}^{-1})^* = (E)^* = \varepsilon$$

$$(\mathcal{A}^{-1})^* \mathcal{A}^* = \varepsilon$$

$$\text{Отсюда } \exists (\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$$

5. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

Доказательство

$$\overline{(x, \mathcal{A}^* y)} = \overline{(\mathcal{A} x, y)}$$

$$\overline{(\mathcal{A}^* y, x)} = \overline{(y, \mathcal{A} x)}$$

$$\overline{(\mathcal{A}^* y, x)} = \overline{(y, \mathcal{A} x)}$$

Тогда по определению $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$

$$6. \text{ Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$$

$$\text{Im } \mathcal{A}^* = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp$$

Доказательство

Пусть $y \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$

$$(x, \underbrace{\mathcal{A}^* y}_0) = (\mathcal{A} x, y)$$

Тогда $y \perp \mathcal{A} x \Rightarrow y \perp \text{Im } \mathcal{A}$

Тогда $\text{Ker } \mathcal{A}^* \subset (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A}^* = \dim \text{Ker } A^{(*)} = \dim \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = n - \text{rg}(\Gamma^{-1} A^T \Gamma) = n -$$

$$\text{rg } A^T = n - \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$$

Тогда $\text{Ker } \mathcal{A}^* = (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = (\text{Im } \mathcal{A}^*)^\perp$$

Тогда $\text{Im } \mathcal{A}^* = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp$

$$7. \chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda) = 0$$

Доказательство

$$\chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \det(\mathcal{A}^{(*)} - tE) = \det(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} - tE) = \overline{\det(\Gamma^{-1} A^T \Gamma) - \underbrace{\bar{t} \Gamma^{-1} \Gamma}_E} =$$

$$\overline{\det(\Gamma^{-1} (A^T - \bar{t} E) \Gamma)} = \overline{\det(A^T - \bar{t} E)} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\bar{t})}$$

$$8. \lambda - \text{с.ч.}, u - \text{с.в. } \mathcal{A}$$

$$\mu \neq \bar{\lambda} - \text{с.ч.}, v - \text{с.в. } \mathcal{A}^*$$

Тогда $u \perp v$

Доказательство

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A} u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \mu v) = \bar{\mu}(u, v)$$

$$(\lambda - \bar{\mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0$$

$$9. L \subset V - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A} \Rightarrow L^\perp - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A}^*$$

Доказательство

$$\forall x \in L, y \in L^\perp \quad (x, \mathcal{A}^* y) = (u \underbrace{\mathcal{A} x}_{\in L}, \underbrace{y}_{\in L^\perp}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* y \in L^\perp$$

4.2 Нормальные операторы и их свойства

Определение

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$

\mathcal{A} – нормальный, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Или $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$

Свойства

1. \mathcal{A} – нормальный $\Leftrightarrow A^{(*)}A = AA^{(*)}$, где $A, A^{(*)}$ – матрицы операторов в некотором базисе

2. $\text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$

$$\text{Im } \mathcal{A}^* = \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{Ker } \mathcal{A}^2 = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Тогда } V = \text{Ker } \mathcal{A} \oplus \text{Im } \mathcal{A}$$

Доказательство

$$x \in \text{Ker } \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \mathcal{A}^*$$

$$(\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Im } \mathcal{A} = (\text{Ker } \mathcal{A})^\perp = \text{Im } \mathcal{A}^*$$

$$\text{Пусть } x \in \text{Ker } \mathcal{A}^2 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x, \mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in \text{Im } \mathcal{A}} \in \text{Ker } \mathcal{A}^* = \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}x \in \text{Im } \mathcal{A} \cap \text{Ker } \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = 0$$

$$x \in \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Тогда } \text{Ker } \mathcal{A}^2 \subset \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Очевидно также, что } \text{Ker } \mathcal{A}^2 \supset \text{Ker } \mathcal{A}$$

$$\text{Отсюда } \text{Ker } \mathcal{A} = \text{Ker } \mathcal{A}^2$$

3. Если \mathcal{A} – нормальный, то $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\varepsilon$ – нормальный оператор

Доказательство

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\varepsilon$$

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)(\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\varepsilon) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{A} + |\lambda|^2\varepsilon$$

$$\text{Аналогично } \mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \bar{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\varepsilon$$

Отсюда ч.т.д.

4. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A} \Rightarrow \bar{\lambda}$ – с.ч., u – с.в. \mathcal{A}^*

Доказательство

$$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\bar{\lambda}) = 0$$

$$u - \text{с.в. } \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}u = \lambda u \Leftrightarrow \mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker } \mathcal{B} = \text{Ker } \mathcal{B}^* \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*u = \bar{\lambda}u \Leftrightarrow u - \text{с.в. } \mathcal{A}^*$$

5. $\lambda - \text{с.ч.}, u - \text{с.в. } \mathcal{A}$

$\mu\lambda - \text{с.ч.}, v - \text{с.в.}$

Тогда $u \perp v$

Т.о. собственные подмножества $V_\lambda \perp V_\mu$

Доказательство

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \bar{\mu}v) = \mu(u, v)$$

Отсюда $(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в унитарном пространстве

$\mathcal{A} \in \text{End}(V), (V, (\cdot, \cdot)) - \text{унитарное}$

$\mathcal{A} - \text{нормальный оператор} \Leftrightarrow \exists \text{ о.н.б. такой, что матрицы оператора } \mathcal{A}$
в этом базисе будет иметь диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Причем, матрица \mathcal{A}^* в этом базисе также будет иметь диагональный вид $\bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$

Замечание $\lambda_1, \dots, \lambda_n - \text{с.ч. } \mathcal{A}$

$\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n - \text{с.ч. } \mathcal{A}^*$

$\mathcal{A} - \text{нормальный} \Rightarrow \mathcal{A} - \text{о.п.с.}, \text{ но не наоборот}$

о.н.б. – из собственных векторов

Доказательство

Пусть $\lambda_1, v_1 - \text{с.ч. и с.в. } \mathcal{A}$

Рассмотрим $L = \text{span}(v_1), V = LL^\perp$

$L - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A} \Rightarrow L^\perp - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A}^*$

Также по свойству 4 $v_1 - \text{с.в. } \mathcal{A}^* \Rightarrow L - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp - \text{инвариантное относительно } \mathcal{A}$

Тогда $\mathcal{A} \Big|_{L^\perp}, \mathcal{A}^* \Big|_{L^\perp} - \text{остаются взаимосопряженными и нормальными}$

Применим метод математической индукции:

База: $n = 1 - \text{очевидно}$

Пусть для $n = k$ выполнено. Докажем для $k + 1$

Пусть $\lambda_1, v_1 - \text{с.ч. и с.в. } \mathcal{A}$

$L = \text{span}(v_1)$

$V = L \oplus L^\perp, \dim L^\perp = k$

По индукционному предположению для $\mathcal{A} \Big|_{L^\perp}$ \exists о.н.б. v_2, \dots, v_{k+1} в L^\perp

из с.в., матрицы $\mathcal{A} \Big|_{L^\perp}$ имеет диагональный вид $\text{diag}(\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$

Т.к. $V = L \oplus L^\perp$, матрица \mathcal{A} имеет диагональный вид $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1})$
 $v_1 \perp v_2, \dots, v_{k+1}$

В обратную сторону очевидно

Следствие 1

\mathcal{A} – нормальный в унитарном пространстве $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}, V_{\lambda} \perp V_{\mu}, \lambda \neq \mu$

Следствие 2

$AA^* = A^*A$ – нормальная матрица

$a_{ij} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ унитарная матрица $T : T^*AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$
 – с.ч. \mathcal{A}

Доказательство

A^* – матрица \mathcal{A}^* в о.н.б.

A – матрица \mathcal{A}

Тогда по теореме существует базис и о.н.с.в. A

$T = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ – о.н.с.в. $= T_{e \rightarrow v}$

$T^{-1} = AT = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – т.к. v_1, \dots, v_n – попарно ортогональны
 и нормированы

$\Leftrightarrow T$ – унитарная матрица $\Leftrightarrow T^{-1} = \overline{T^T} = T^*$

Что будет в евклидовом пространстве?

A – вещественная матрица $\Rightarrow \chi_A$ – вещественные коэффициенты

Не все корни χ_A – собственные числа, а только вещественные

Определение

V – линейное пространство над \mathbb{R}

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация V

$\forall z = x + iy, w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}, x, y, u, v \in V \ (z, w) := (x, y) + (y, v) + i(-(x, v) + (y, u))$

$(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$ – унитарное пространство

Упражнение

$\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z_1}, \overline{z_2})$

$\mathcal{A} \in \text{End}(V) \ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Напоминание

e_1, \dots, e_n – базис $V \Rightarrow$ базис $V_{\mathbb{C}}$

$$\chi_A(t) = \chi_{A_{\mathbb{C}}}(t)$$

$$\overline{A_{\mathbb{C}}z} = A_{\mathbb{C}}(\bar{z})$$

λ, z – с.ч., с.в. $A_{\mathbb{C}} \Rightarrow \bar{\lambda}, \bar{z}$ – с.ч., с.в. $A_{\mathbb{C}}$

$$A_{\mathbb{C}}\bar{z} = \overline{A_{\mathbb{C}}z} = \bar{\lambda}z = \bar{\lambda}\bar{z}$$

Свойства

1. $\lambda \in \mathbb{R}, V_{\lambda}$ – с.ч. и собственное подпространство $A \Rightarrow \lambda, (V_{\lambda})_{\mathbb{C}}$ – с.ч. и с.п. $A_{\mathbb{C}}$

Доказательство //todo 12:10 11.05

2. λ, z – с.ч. и с.в. A

$\bar{\lambda}, \bar{z}$ – с.ч. и с.в. $A_{\mathbb{C}}$

$$z = u + iv, \bar{z} = u - iv$$

$$\text{Тогда } (z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$$

Доказательство

$$0 = (z, \bar{z}) = (u + iv, u - iv) = \underbrace{(u, u) - (v, v)}_0 + \underbrace{i(v, u) + i(u, v)}_0$$

3. $(A_{\mathbb{C}})^* = (A^*)_{\mathbb{C}}$

Доказательство

$$e_1, \dots, e_n \text{ – о.н.б. } V \rightarrow e_1, \dots, e_n \text{ – о.н.б. в } V_{\mathbb{C}}$$

$$A \leftrightarrow A, A^* \leftrightarrow A^T \Rightarrow (A^*)_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A^T$$

$$A_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A, (A_{\mathbb{C}})^* \leftrightarrow A^T$$

4. $(AB)_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}}B_{\mathbb{C}}$

Доказательство

$$(AB)_{\mathbb{C}}z = (AB)x + i(AB)y = A_{\mathbb{C}}(Bx + iBy) = A_{\mathbb{C}}B_{\mathbb{C}}z$$

5. $\exists A^{-1} \Rightarrow (A_{\mathbb{C}})^{-1}$, причем $(A_{\mathbb{C}})^{-1} = (A^{-1})_{\mathbb{C}}$

Доказательство

$$\chi_A = \chi_{A_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \exists (A_{\mathbb{C}})^{-1}$$

$$A_{\mathbb{C}}A_{\mathbb{C}}^{-1} = \varepsilon = (AA^{-1})_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}}(A^{-1})_{\mathbb{C}}$$

6. A нормальный $\Rightarrow A_{\mathbb{C}}$ нормальный

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве

$\mathcal{A} \in \text{End}(V)$, $(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство

\mathcal{A} – нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. пр-ва V такой, что матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1, \dots, \Phi_m)$, где $\lambda_i \in \mathbb{R}$ – с.ч. \mathcal{A}

$\Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, где $\alpha_i \pm i\beta_i$ – комплексные сопряженные корни характеристического многочлена \mathcal{A}

Причем, матрица \mathcal{A}^* имеет вид $\Lambda^* = \Lambda^T = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1^T, \dots, \Phi_m^T)$

Доказательство \Leftarrow

$$\text{Очевидно: } \Phi_i^T \Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 + \beta_i^2 & 0 \\ 0 & \alpha_i^2 + \beta_i^2 \end{pmatrix} = \Phi_i \Phi_i^T$$

Доказательство \Rightarrow

Если все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные, все очевидно

Иначе применим комплексификацию

\mathcal{A} – нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ нормальный, $V_{\mathbb{C}}$ – унитарное пространство

Тогда по теореме \exists о.н.б. w_1, \dots, w_n из с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ такой, что матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет иметь диагональный вид

$$V = \bigoplus_{\lambda \text{ – с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} V_{\lambda} = \bigoplus_{i=1, \lambda_i \in \mathbb{R}}^k V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\mu, \bar{\mu}} \text{span}(z_j^{\mu}, \bar{z}_j^{\bar{\mu}})$$

$\mu, \bar{\mu}$ – комплексные сопряженные корни $\chi_{\mathcal{A}}$

z, \bar{z} – с.в., пусть они нормированные

$$(z, \bar{z}) = 0$$

$$z = u + iv, u, v \in V$$

$$V_{\lambda} \perp V_{\mu}$$

$$V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} = \text{по свойству } 1 = (V_{\lambda_i})_{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \dots, \omega_k)$$

$$(z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$$

$$\text{span}^{\mathbb{C}}(z, \bar{z}) = \text{span}^{\mathbb{C}}(u, v) = (\text{span}(u, v))_{\mathbb{C}}$$

$$\text{Тогда } V_{\mu}^{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_r) \perp V_{\bar{\mu}}^{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r)$$

$$V_{\mathbb{C}} = \text{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \dots, \omega_k, u_1, v_1, u_2, v_2, \dots), \omega, u, v \text{ – вещественные вектора}$$

$$\|z_i\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 + \|v_i\|^2, \|u_i\| = \|v_i\| \Rightarrow \|u_i\| = \|v_i\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \leftrightarrow \mathcal{A}$ – в вещественном базисе

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \mu_i z_i$$

$$\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(z_i + \bar{z}_i) = \frac{1}{2}(\mu_i z_i + i\bar{z}_i) = \text{Re}(\mu_i z_i) = \text{Re}((\alpha_i + i\beta_i)(u_i + ib_i)) =$$

$$\alpha_i u_i - \beta_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ -\beta_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} v_i = \frac{1}{2i} \mathcal{A}_{\mathbb{C}} (z_i - \bar{z}_i) = \frac{1}{2i} (\mu_i z_i - \bar{\mu}_i \bar{z}_i) = \text{Im}(\mu_i z_i) = \beta_i u_i + \alpha_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_i \\ \alpha_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Осталось ортогонализировать базис. Заменяем u_i на $\sqrt{(2)}u_i$, v_i на $\sqrt{(2)}v_i$.
Т.о. мы получили матрицу из теоремы

Следствие

$$AA^* = A^*A (AA^T = A^T A)$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Тогда \exists ортогональная матрица T такая, что $T^T A T = \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_i, \dots, \Phi_m)$

Доказательство

$$T = (\omega_1 \dots \omega_k \ u_1 \ v_1 \dots)$$

$$T - \text{ортогональная матрица} \Leftrightarrow T^{-1} = T^* = T^T$$

4.3 Самосопряженные операторы и их свойства. Изометрические операторы и их свойства

Определение

\mathcal{A} – называются самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Если V унитарное, то – эрмитовый

Если V евклидово, то – симметричный

$$\Leftrightarrow (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \text{ Замечание}$$

Если \mathcal{A} – самосопряженный, то \mathcal{A} – нормальный

Свойства

1. \mathcal{A} – самосопряженный $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что $A^* = A$

2. \mathcal{A}, \mathcal{B} самосопряженные $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \mathcal{A} + \lambda \mathcal{B}$ – самосопряженный
3. \mathcal{A}, \mathcal{B} – самосопряженные и перестановочные $\Rightarrow \mathcal{AB}, \mathcal{BA}$ – самосопряженные
4. Если $\exists \mathcal{A}^{-1}$, \mathcal{A} – самосопряженный $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ – самосопряженный

Доказательство

$$(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A})^* = \varepsilon^* = \varepsilon$$

$$\mathcal{A}^* (\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon$$

$$\mathcal{A} (\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{A}^{-1}$$

5. \mathcal{A} самосопряженный $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ нормальный и все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные

Доказательство для унитарного пространства

По теореме о каноническом виде матрицы

$$\mathcal{A} \Leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\mathcal{A}^* \Leftrightarrow \overline{\Lambda}^T = \overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_n$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda}^T \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda}_i \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Доказательство для евклидова пространства

По теореме о каноническом виде матрицы

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda^T$$

$$\Phi_i = \Phi_i^T \Leftrightarrow \beta_i = 0$$

Тогда нет блоков $\Phi_i \Rightarrow \Lambda$ – диагональная $\Rightarrow \lambda_i$ вещественные

6. $L \subset V$ – линейное подпространство
 L – инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ инвариантно относительно \mathcal{A}

//todo 11.05 13:56 **Следствие 2**

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Rightarrow \exists$ унитарная/ортогональная T такая, что $T^* \mathcal{A} T$ имеет диагональный вид

Определение

Q невырожденная $\in \text{End}(V)$ называется изометрической, если $Q^{-1} = Q^*$

Если V – унитарная, то называется унитарным

Если V – евклидово, то называется ортогональным

$$\Leftrightarrow (Qx, Qy) = (x, Q^* Qy) = (x, y)$$

Замечание

Изометрический \Rightarrow нормальный **Свойства**

1. Q изометрический \exists базис такой, что $\overline{Q}^T = Q^* = Q^{-1}$

2. Q изометрический \Rightarrow переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис

Доказательство \Rightarrow

e_1, \dots, e_n – о.н.б.

$$(Qe_i, Qe_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Доказательство \Leftarrow

e_1, \dots, e_n – о.н.б.

$\forall x, y \in V \quad Qe_1, \dots, Qe_n$ – о.н.б.

Тогда $(Qe_i, Qe_j) = \delta_{ij}$

$$(Qx, Qy) = \sum_{ij} x_i \overline{y_j} (Qe_i, Qe_j) = \sum_i x_i \overline{y_i} = (x, y)$$

3. Q, R – изометрические $\Rightarrow QR$ – изометрические

4. Q – изометрический $\Rightarrow Q^{-1}$ – изометрический

5. Q – изометрический $\Leftrightarrow Q$ – нормальный и все корни χ_Q по модулю равны 1

Доказательство для унитарного пространства

По теореме о каноническом виде

\exists о.н.б. такой, что $Q \leftrightarrow \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$Q^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \text{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$$

$$QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda \overline{\Lambda^T} = E = \text{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_n\|^2) \Rightarrow \|\lambda\| = \pm 1$$

Доказательство для евклидова пространства $QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda \overline{\Lambda^T} =$

$$E = \text{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_k\|^2, |\Phi_1 \Phi_1^T|, \dots, |\Phi_k \Phi_k^T|)$$

$$\Phi_i \Phi_i^T = \text{diag}(\alpha_i^2 + \beta_i^2, \alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1 \text{ В частности, если корни } \chi_Q \text{ вещественные, то } \pm 1$$

6. $L \subset V$ – линейное подпространство, инвариантное относительно Q .

Тогда L^\perp инвариантно относительно Q

Доказательство

//todo 11.05 14:19

Теорема о каноническом виде матрицы изометрического оператора

$Q \in \text{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово

Q – изометрический $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что матрица имеет диагональный/блочный диагональный вид $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) / \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \Phi_1, \dots, \Phi_m), \lambda_i =$

$$\pm 1 \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix}, \cos_i \pm i \sin \phi_i - \text{корни } \chi_Q$$

Доказательство

$$\Lambda^{-1} = \overline{\Lambda^T} \quad \textbf{Замечание}$$

Q ортогональный в евклидовом пространстве \Rightarrow композиция поворотов и отображений

Следствие

$Q^* = Q^{-1}$ – унитарная/ортогональная матрица

Тогда \exists унитарная/ортогональная матрица T такая, что $T^*QT = \Lambda$ – из теоремы