

Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

1 Friends and strangers graph

Рассмотрим связный неориентированный граф G из n вершин

В $n - 1$ вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной

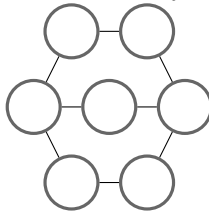
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)

Для каких графов G можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?

Теорема Уилсона

Если граф G :

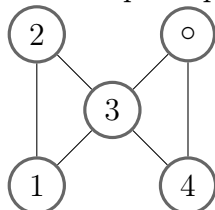
- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины $n \geq 4$
- G – не следующий граф:



то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно

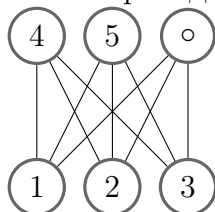
Доказательство необходимости

- Рассмотрим граф



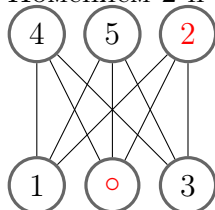
Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

- Рассмотрим двудольный граф



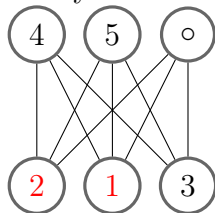
Рассмотрим его как перестановку

Поменяем 2 и \circ местами

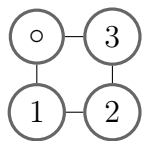


Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится \circ) не изменилась

Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку



- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

Доказательство достаточности

Отсутствует...

Рассмотрим обобщение предыдущей игры:

Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"

Т.е. теперь у нас два графа: "географический" граф X и граф дружбы Y

В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка" с \circ в центре (т.е. \circ дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)

Построим граф $FS(X, Y)$ – граф друзей и врагов

В нем будет $n!$ вершин

Каждая вершина графа – биекция $\sigma : V(X) \rightarrow V(Y)$

Получается, что σ – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к. $V(x)$ – множество вершин, а $V(Y)$ – множество фишек)

Вершины σ и σ' соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским" обменом

Тогда из любой перестановки можно получить любую \Leftrightarrow граф связан

Из теоремы Уилсона: $FS(G, K_{1,n-1})$, G – из теоремы Уилсона, $K_{1,n-1}$ – звездочка с вершиной n в центре

Ответим на другой вопрос: Для каких G граф $FS(G, C_n)$, C_n – цикл длины n – связан

Лемма

Графы $FS(X, Y)$ и $FS(Y, X)$ – изоморфны

Т.е. можно построить биекцию $u \xleftrightarrow{\theta} u'$ такую, что ребра uv и $\theta(u)\theta(v)$ существуют одновременно

Доказательство

Построим биекцию $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$

Теперь рассмотрим граф $FS(C_n, G)$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию:

По кругу стоят $3n$ человек: n семей вида папа-мама-ребенок

Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой

//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

2 Функции и отображения в \mathbb{R}^m

2.1 Линейные отображения

Определение

$\text{Lin}(X, Y)$ – множество линейных отображений из X в Y (линейные пространства)

$\text{Lin}(X, Y)$ – линейное пространство

Обозначение

Пусть $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} |A(x)|$$

Замечание 1

$$\|A\| \in \mathbb{R}$$

Доказательство

Было доказано: $|Ax| \leq C_A |x|$, $C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$

Замечание 2

Из теоремы Вейерштрасса $\sup \leftrightarrow \max$ в конечномерном случае

Замечание 3

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\| |x|$$

Доказательство

Для $x = 0$ очевидно

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|}$$

$$|A\tilde{x}| \leq \|A\|$$

Замечание 4

Если $\exists C : \forall x \quad |Ax| \leq C|x|$, то $\|A\| \leq C$

Пример

- $m = n = 1$
 A – линейное отображение: $x \mapsto ax$
 $\|A\| = |a|$
- $m = 1, n$ – любое
 $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n Ax = x\bar{v}$
 $\|A\| = |\bar{v}|$

- $n = 1, m$ – любое

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда $\exists l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l \rangle$

$$\|A\| = |l|$$

- m, n – любые

$$A = (a_{ij})$$

$$x \mapsto Ax$$

$\|A\|$ так легко не считается((((

Лемма

Пусть X, Y – нормированные линейное пространство

$$A \in \text{Lin}(X, Y)$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A – ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$
2. A – непрерывно в $0 \in X$
3. A – непрерывно на X
4. A – равномерно непрерывное ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon$)

Доказательство

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ – очевидно

Докажем $2 \Rightarrow 1$

Возьмем $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$$

Возьмем $|x| = 1$

$$\|Ax\| = \frac{1}{\delta} \|A(\delta x)\| < \frac{1}{\delta}$$

$$\text{Тогда } \|A\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Докажем $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\|a\|} : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

Теорема о пространстве линейных отображений

- $\|\cdot\|$ – норма в $\text{Lin}(X, Y)$, X, Y – конечномерные нормированные пространства
Т.е.

1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство

$\|A\| \geq 0$ – тривиально

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_C |x| \Rightarrow \|A + B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$$

$$|BAx| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$$

Замечание

В $\text{Lin}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x| < 1} |Ax| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \in$$

$$X \quad |Ax| \leq C|x|\}$$

Теорема Лагранжа (для отображений)

$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – дифференцируема в D – открытом

$a, b \in D, [a, b] \subset D$

Тогда $\exists c \in [a, b]$, т.е. $\exists \theta \in [0, 1] : c = a + \theta(b - a) : |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \|b - a\|$

Доказательство

$$f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1 - 0) = |F'(a + \theta(b - a))(b - a)| \leq \|F'(a + \theta(b - a))\| \|b - a\|$$

Лемма

$B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

$\exists c > 0 : \forall x \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда B – обратим и $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство

Обратимость очевидна, т.к. $\text{Ker } B = \{0\}$. Тогда $\exists B^{-1}$

$$|\underbrace{B^{-1}y}_x| \leq \frac{1}{c} |BB^{-1}y| = \frac{1}{c} |y|$$

Замечание

Ω_m – множество обратимых линейных операторов $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| |Ax|$$

$$\text{Т.е. } |Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x|$$

Теорема об обратимости линейного оператора, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$ – обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$M \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M \text{ – близкий к } L$$

Тогда

- $M \in \Omega_m$ – т.е. Ω_m – открытое
- $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

Доказательство 1 и 2

$$Mx = Lx + (M - L)x$$

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} |x| - \|M - L\| |x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x|$$

1 и 2 следуют из леммы

Доказательство 3

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{lm}$$

$$\text{Аналогично } L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M - L)L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \|M - L\| \|L^{-1}\| \leq \text{из пункта 2}$$

Следствие (непрерывность вычисления обратного оператора)

Отображение $L \mapsto L^{-1}$, заданное на Ω_m , непрерывно

Доказательство

Доказательство по Гейне

Рассмотрим последовательность операторов $B_k : B_k \rightarrow L$

Проверим, что $B_k^{-1} \rightarrow L^{-1}$

$$\text{Н.С.Н.М. } \|B_k - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

$$\|B_k^{-1} - L^{-1}\| \leq \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - B_k\|}}_{\text{огр}} \underbrace{\|L - B_k\|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

Теорема (о непрерывно дифференцируемых отображениях)

$F : \underbrace{D}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, дифф. на D

$F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда $1 \leftrightarrow 2$

1. $F \in C^1(D)$ (все частные производные непрерывны на D)
2. $F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ – непрерывно на D
 $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

Доказательство $1 \rightarrow 2$

Пусть $F \in C^1(D)$

$$\forall i, j \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$$

$$\text{Тогда } \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \leq \sqrt{\sum_{ij} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

Доказательство $2 \rightarrow 1$

Пусть $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

$h = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)^T$

$$\left| \underbrace{(F'(x) - F'(\tilde{x}))h}_{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)} \right| \leq \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \|h\| \leq \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

$$\text{Тогда для } i = i_0 - \left| \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right| \leq \varepsilon$$

3 Экстремумы

Определение

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in D$ – локальный максимум $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) \leq f(a)$
(нестрогий экстремум)

$a \in D$ – локальный строгий максимум $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) < f(a)$ (строгий экстремум)

Теорема Ферма

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } D, f$ – дифференцируема

a – экстремум

Тогда \forall направление $l \ \frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

Доказательство

$g(t) = f(a + tl), t \in \mathbb{R}$ – задана в окрестности 0

$g'(0) = 0$

$$g'(t) = f'l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial l}$$

Следствие (необходимое условие экстремума)

a – локальный экстремум

Тогда $\forall 1 \leq k \leq m \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$

Следствие (т. Ролля)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ – компакт

f – дифференцируема в $\text{Int } K$ ($f : K \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывна)

$f_{\partial K} = \text{const}, \partial K$ – граница компакта

Тогда $\exists x_0 \in \text{Int } K : \text{grad } f(x_0) = 0$

Доказательство

По теореме Вейерштрасса f достигает \max, \min на K

Если оба на ∂K , то $f \equiv \text{const}$ на K

Иначе применим теорему Ферма

Определение

$Q(h) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – квадратичная форма, если она представляет однородный многочлен 2 степени

т.е. $Q(h) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} a_{ij} h_i h_j, a_{ij} = a_{ji}$

Q – положительно определенная $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) > 0$

Q – отрицательно определенная $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) < 0$

Q – неопределенная $\Leftrightarrow \exists h : Q(h) > 0, \exists h : Q(h) < 0$

Q – полуопределенная (положительно определенная вырожденная) $\Leftrightarrow \forall h \ Q(h) \geq 0, \exists h \neq 0 : Q(h) = 0$

Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах

1. $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – кв. форма, $Q > 0$
Тогда $\exists \gamma_Q > 0 : \forall x \ Q(x) \geq \gamma_Q |x|^2$
2. $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – норма
Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \ C_1 |x_1| \leq p(x) \leq C_2 |x_2|$

Доказательство

1. $\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x) > 0$
Тогда $Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \geq \gamma_Q |x|^2, x \neq 0$
2. Проверим, что $p(x)$ непрерывна, чтобы доказать существование минимума и максимума:
 $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p(\sum (x_k - y_k) \bar{e}_k) \leq \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq$
 $M |x - y|, M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$ – по КБШ
 $C_1 = \min_{|x|=1} p(x), C_2 = \max_{|x|=1} p(x)$
 $p(x) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \leq |x| C_2, \geq |x| C_1$

Напоминание

$$f(x+h) = f(x) + df(x, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, h) + \dots$$

$$d^2 f(x, h) = f''_{x_1 x_1}(x) h_1^2 + \dots + f''_{x_n x_n}(x) h_n^2 + 2f''_{x_1 x_2}(x) h_1 h_2 + \dots$$

Теорема (достаточное условие экстремума)

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int } D, \text{grad } f(a) = 0, f \in C^2(D)$

$Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда $Q > 0 \Rightarrow a$ – локальный минимум

$Q < 0 \Rightarrow a$ – локальный максимум

$Q \leq 0$ – не точка локального экстремума

$Q \geq 0$ – информации недостаточно

Доказательство

$$\forall h \ \exists t \in (0, 1) : f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a, h)}_0 + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) - \text{остаток в}$$

формуле Лагранжа

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(\underbrace{f''_{x_1x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1x_1}(a)h_1^2}_{|\text{б.м.} \cdot h_i^2| = o(|h|^2)} + \dots + \underbrace{f''_{x_1x_2}h_1h_2 - f''_{x_1x_2}(a)h_1h_2}_{|\text{б.м.} \cdot h_i h_j| = o(|h|^2)} + \dots)$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{2}\gamma_Q|h|^2 - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0, \alpha(h) - \text{б.м.}, \text{ при достаточно малых } |h|$$

Пункт 1 доказан

Пункт 2 доказывается заменой $f \rightarrow -f$

Пункт 3: $h : Q(h) > 0, \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$

$$\text{Аналогично п.1. } f(a + s \cdot h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{1}{2}Q(h)s^2 - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h) \cdot s^2$$

С другой стороны $f(a + s \cdot \tilde{h}) < 0$ по аналогичным соображениям

Пункт 4: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, a = (0, 0)$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$$

$$Q(h) = 2h_1^2 - \text{полуопределенный}$$

Тут нет экстремума

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4 - \text{в нуле экстремум}$$

4 Функциональные последовательности и ряды

4.1 Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение

Последовательность функций – отображение $N \rightsquigarrow$ множество функций

Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots : X \rightarrow \mathbb{R}, X$ – любое множество

Последовательность (f_n) сходится поточечно на E – существует функция $f(x)$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Последовательность (f_n) сходится равномерно на E к функции f

$$f_n \rightrightarrows_E f \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \underbrace{\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \rho(f_n, f) \leq \varepsilon}$$

Замечание

$f \rightrightarrows f$ на $E, E_0 \subset E$

Тогда $f_n \rightrightarrows_{E_0}$

Замечание

$f_n \rightrightarrows_E f$

Тогда $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Замечание

$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{огр.}\}$

Тогда $\rightarrow (f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ является метрикой на \mathcal{F}

Доказательство

Первые две аксиомы очевидны

Докажем неравенство треугольника

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \rho(f, g) - \varepsilon < |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

Отсюда $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

Замечание

$f_n \rightrightarrows f$ на E_1 и на E_2

Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $E_1 \cup E_2$

Теорема 1 (Стокса - Зайдля)

X – метрическое пространство

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$c \in X, f_n$ – непрерывная в c

$f_n \rightrightarrows f$ на X

Тогда f – непрерывна в c

Доказательство

Дано утверждение о равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$$

Начиная с некоторого большого n :

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{< \varepsilon}$$

Т.к. f_n непрерывна, то $\exists U(c) : \forall x \in U(c) \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$

Отсюда $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists U(c) : \forall x \in U(c) |f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Замечание

Вместо метрических пространств можно рассматривать топологические пространства (без изменения доказательства)

Следствие

$f_n \in C(X), f_n \Rightarrow f$ на X . Тогда $f \in C(X)$

Следствие 2

$f_n \in C(X), \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$ на $W(c)$. Тогда $f \in C(X)$

Замечание

$f_n \Rightarrow f$ на $X \not\Rightarrow \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$

Пример: $f_n = x^n, x \in (0, 1)$

$f \equiv 0$

Рассмотрим точку x в $(\alpha, \beta), \beta \neq 1$

$\rho(f_n, f) = \beta^n \rightarrow 0$

$f_n(x) \Rightarrow f$ на (α, β)

Но $\rho(f_n, f) = 1$ на $(0, 1)$

$f_n \not\Rightarrow f$ на $(0, 1)$

Теорема

X – компакт

$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ в $C(X)$

Тогда $(C(X), \rho)$ – полное метрическое пространство
(фунд. – это $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$)

Доказательство

Пусть f_n – фундаментальная последовательность в $C(X)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \rho(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Тогда $\forall x_0 \in X$ последовательность $n \mapsto f_n(x_0)$ – фунд. вещ. посл.

Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ – конечная

Проверим, что $f_n \Rightarrow f, f \in C(X)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (предельный переход $m \rightarrow \infty$)

Т.е. $f_n \Rightarrow f$ на X

$f \in C(X)$ по теореме 1

Замечание

$\mathcal{F}(X)$ = пространство ограниченных функций на X

$(\mathcal{F}(X), \rho)$ – полное м.п.

Доказательство

Аналогичное

Теорема (критерий Больцано-Коши)

$f_n \in C(X)$

$\exists f \in C(X) : f_n \Rightarrow f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

4.2 Предельный переход под знаком интеграла

Подумаем о следующем правиле: $f_n \rightarrow f \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

Анти-пример

$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n), x \in [0, 1], f_n \rightarrow f \equiv 0$

$$\int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n) dx \underset{t=x^n}{=} \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

Теорема 2

$f_n \in C[a, b]$

$f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

(по т.1. f – непрерывна)

Доказательство

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f_n - f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup |f_n - f|(b-a) \rightarrow 0$$

Следствие (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall x, y \exists f'_y(x, y)$ и f, f'_y – непрерывные на $[a, b] \times [c, d]$

Тогда для $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ верно, что Φ – дифференцируема на $[c, d]$

и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство

$$\frac{\Phi(y+t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \int_a^b \frac{f(x, y+t_n) - f(x, y)}{t_n} dx \underset{\text{по т.Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, t +$$

$$\Theta_x t_n) dx \xrightarrow{(*)} \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Проверим (*):

Вспомним теорему Кантора о равномерной непрерывности

$f \in C(K)$. Тогда f – равномерно непрерывная

Т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists \delta > 0}_{\exists N: \forall n > N \quad |t_n| < \delta} : \forall x, \bar{x} : \rho(x, \bar{x}) < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

Тогда $\rho((x, y + \Theta_x t_n), (x, y)) < \delta$

И значит $|f(x, y + \Theta_x t_n) - f(x, y)| < \varepsilon$

Т.е. $|\int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n) - \int_a^b f'_y(x, y)| \leq \varepsilon(b - a)$

Теорема 3 (о предельном переходе по знаку производной)

Пусть $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$

$f_n \rightarrow f_0$ поточечно на $\langle a, b \rangle$

$f'_n \Rightarrow \phi$ на $\langle a, b \rangle$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a, b \rangle, f'_0 = \phi$ на $\langle a, b \rangle$

Пояснение

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$$

Доказательство

$[x_0, x_1] \subset \langle a, b \rangle$

$f'_n \Rightarrow \phi$ на $[x_0, x_1]$ (отсюда ϕ непрерывна)

Тогда по т.2 $\int_{x_0}^{x_1} f'_n \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \phi$

$$\underbrace{f_n(x_1) - f_n(x_0)}_{\rightarrow (f_0(x_1) - f_0(x_0))} \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \phi$$

Т.о. f_0 – первообразная ϕ

ϕ – непрерывна по т.1

Отсюда $f'_0 = \phi$

Определение

$u_n(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum u_n(x_0)$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x), S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$S_N \Rightarrow S$ на $E \Leftrightarrow$ ряд равномерно сходится в E

$$\Leftrightarrow M_N = \sup_{x \in E} \left| \sum_{n > N} u_n(x) \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

Теорема (признак Вейерштрасса)

$$\sum u_n(x), x \in E$$

Пусть $\exists (c_n) \in R : \forall x \in E |u_n(x)| \leq c_n$

и $\sum c_n$ – сходится

Тогда u_n равномерно сходится на E

Доказательство

Рассмотрим $M_N = \sup_{x \in E} \left| \sum_{n > N} u_n(x) \right| \leq \sum_{n > N} c_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in E |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| < \varepsilon$

эквивалентно равномерной сходимости

(если нет равномерной сходимости, то нет и критерия Больцано-Коши)

Пример

$$\sum \frac{x}{1 + n^4 x^2}, x \in (0, +\infty)$$

Есть ли равномерная сходимость?

$$c_n = \max_x \frac{x}{1 + n^4 x^2} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\sum c_n = \sum \frac{1}{2n^2} \text{ – сходится (т.е. есть равномерная сходимость)}$$

Пример 2

$$\sum \frac{xn}{1 + n^4 x^2}, x \in (0, +\infty)$$

$$c_n = \frac{1}{2n}, \sum \frac{1}{2n} \text{ – расходится}$$

Применим критерий Больцано-Коши

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{17} : \forall N \exists n > N, m = n, x = \frac{1}{n^2} : |u_{n+1}(x) + \dots + u_{2n}(x)| \geq$$

нижняя оценка числителя

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n^2}}}{1 + (n+1)^4 \frac{1}{n^4}} + \dots + \frac{2n^{\frac{1}{n^2}}}{1 + (2n)^4 \frac{1}{n^4}} \geq n \frac{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{оценка числителя}}}{\underbrace{17}_{\text{верхняя оценка знаменателя}}} = \frac{1}{17}$$

Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов)

$u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, X – метрическое пространство

u_n – непрерывно в $x_0 \in X$

$\sum u_n$ – равномерно сходится в X

Тогда $S(x) = \sum u_n$ – непрерывно в x_0

Доказательство

$f_n \leftrightarrow S_n, f \leftrightarrow S$ + теорема Стокса-Зайдля для функций

Пример

$$\sum \frac{x}{1+n^4x^2} - \text{непрерывно}$$

Пример 2

$$\sum \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

Возьмем $x_0 > 0$ и окрестность $(a, b) : 0 < a < x < b$

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{nb}{1+n^4a^2} =: c_n$$

$$\sum c_n - \text{сходится}$$

Тогда наш ряд равномерно сходится в (a, b)

Тогда он непрерывен

Теорема 2'

$$u_n \in C[a, b]$$

$\sum u_n$ равномерно сходится на $[a, b]$

$$S(x) = \sum u_n(x)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b S(x) dx = \sum \left(\int_a^b u_n(x) dx \right)$$

Доказательство

Применим теорему 2

$$\int_a^b S(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b S$$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b u_k \right)$$

Пример

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - \text{равномерно сходится на } [-q, q], \text{ где } 0 < q < 1$$

$$|(-1)^n x^n| \leq q^n, \sum q^n - \text{сходится (т. Вейерштрасса)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \int_0^q \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+q) =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \dots, q \in (-1, 1)$$

Заметим, что формула верна и при $q = 1$, но исходный ряд не будет сходиться, т.к. слагаемые не будут бесконечно малыми нснм

Пример 2

Ряд $q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \dots$ равномерно сходится на $[0, 1]$

по секретному приложению к признаку Лейбница

$$\left| \sum_{n>N} (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n} \right| \leq \frac{q^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0 \text{ (тогда равномерно сходится)}$$

Тогда сумма в правой части непрерывна на $[0, 1]$ по Т.1'

Тогда формула из примера 1 «продолжается» по непрерывности на точку

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру)

$$u_n \in C^1 \langle a, b \rangle$$

$$1. \sum u_n(x) = S(x) - \text{поточечная сходимость на } \langle a, b \rangle$$

$$2. \sum u'_n(x) = \phi(x) - \text{равномерная сходимость на } \langle a, b \rangle$$

Тогда $S(x) \in C^1$ и $S' = \phi$ на $\langle a, b \rangle$

Другими словами, $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$, если исходный ряд равномерно сходится

Доказательство

Применим Т.3:

$$f_n = S_n, f_0 = S$$

$$f'_n = \sum_{k=1}^n u'_k(x), \phi = \phi$$

Пример

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right)$$

$$\left(\ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right)' = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$$

$$\sum -\frac{x}{n(n+x)} - \text{сходится}$$

Проверим, что ряд равномерно сходится при больших x

$m > 0, x \in (0, m)$

$$\left| -\frac{x}{n(n+x)} \right| \leq \frac{M}{n(n+M)}$$

$$\sum \frac{M}{n(n+M)} \leq +\infty$$

По признаку Вейерштрасса $\sum -\frac{x}{n(n+x)}$ – равномерно сходится на $(0, M)$

$\sum (\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$ – дифференцируемо при $x > 0$

$\Gamma(x) = xe^{\gamma x} \exp(\sum (\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}))^{-1}$ – дифференцируемо при $x > 0$ и ее производная непрерывна

На самом деле $\Gamma \in C^\infty$

Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах)

$u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, X$ – м.п.

$x_0 \in E, x_0$ – предельная точка в E

Пусть

1. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$
2. $\sum u_n(x)$ – равномерно сходится на E

Тогда

1. $\sum a_n$ – сходится
2. $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$

Доказательство п.1

Докажем сходимость

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

$$S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим фундаментальность S_n^a

Возьмем $\varepsilon > 0$

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0, \text{ чтобы } \dots < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0, \text{ чтобы } \dots < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{\varepsilon} < \varepsilon$$

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$:

$$\exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Отсюда } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |S_{n+p}^a - S_n^a| < \varepsilon$$

Доказательство п.2

Результат следует из теоремы Стокса-Зайделя

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{u}_n(x)$ – непрерывная в x_0

$$\sup_{E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{n \geq N} \tilde{u}_n(x) \right| \leq \underbrace{\sup_E \left| \sum_{n \geq N} u_n(x) \right|}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left| \sum_{n \geq N} a_n \right|}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$\sum \tilde{u}_n$ – равномерно сходится на $E \cup \{x_0\}$

Теорема 4 (перестановки в предельных переходах)

$f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка E

1. $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$ – конечный
2. $\exists S : E \rightarrow \mathbb{R} : f_n \rightrightarrows S$ на E
 $n \rightarrow +\infty$

Тогда

1. $\exists \lim A_n = A$ – конечный
2. $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

$$\text{Т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Доказательство

Применим теорему 4'

$$f_n(x) \leftrightarrow S_n(x)$$

$$u_n \leftrightarrow f_n - f_{n-1} \text{ (за исключением } u_1 = f_1)$$

$$a_k \leftrightarrow A_k - A_{n-1} \text{ (кроме } a_1 = A_1)$$

$$\sum u_n(x) \leftrightarrow S(x)$$

Замечание

$$f_n \rightrightarrows S \text{ на } E$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Определим равномерный предел при $t \rightarrow t_0$

$f : E \times D \rightarrow \mathbb{R}, E$ – множество, $D \subset Y$ – м.п., t_0 – предельная точка D

$$f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} h(x), \text{ где } h : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U(t_0) : \forall t \in U(t_0) \sup_{x \in E} |f(x, t) - h(x)| < \varepsilon$$

Теорема 4''

$f : E \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset X$ – м.п., $D \subset Y$ – м.п., x_0 – предельная точка E , t_0 – предельная точка D

1. $\forall t \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = A(t)$ – конечный
2. $f(x, t) \rightrightarrows_{t \rightarrow t_0} S(x)$, где $S : E \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда

1. \exists конечный $\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости ряда)

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$, $x \in X$

Пусть

1. $\exists C_A : \forall N \forall x \left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq C_A$
(частичные суммы ряда $\sum a_n(x)$ равномерно ограничены)
2. $b_n(x) \rightrightarrows_{n \rightarrow \infty} 0$ на X и $\forall x$ b_n монотонна при каждом фиксированном x

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x)$ – равномерно сходится на X

Доказательство

$$\sum_{N \leq k \leq M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{N \leq k \leq M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$A_k = a_1 + \dots + a_k$$

Из равномерной сходимости: $\forall \varepsilon > 0 \exists T : \forall M, N > T \sup |b_M(x)| < \varepsilon; \sup |b_{N-1}(x)| < \varepsilon, \sup |b_{M-1}(x)| < \varepsilon, \sup |b_N(x)| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{N \leq k \leq M} a_k(x) b_k(x) \right| \leq |A_M| |b_M| + |A_{N-1}| |b_{N-1}| + \sum |b_k - b_{k+1}| |A_k| \leq C_A (|b_M| + |b_{N-1}| + |b_N|) < 4C_A \varepsilon$$

Следствие (признак Абеля)

$$\sum a_n(x) b_n(x), x \in E$$

1. $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на E
2. b_n монотонно по n при каждом x
 $b_n(x)$ – равномерно ограничена: $\exists C_B : \forall x \forall n |b_n(x)| \leq C_B$

Тогда $\sum a_n(x)b_n(x), x \in E$ равномерно сходится на E

Пример

$$f(x) = \sum \frac{\sin nx}{n^3}, x \in \mathbb{R}$$

f – непрерывно по признаку Вейерштрасса: $|\frac{\sin nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3}, \sum \frac{1}{n^3}$ – сходится

f – дифференцируемо: $f' = \sum \frac{\cos nx}{n^2}$ – это выполнено по теореме 3', т.к. ряд равномерно сходится

Но дважды не дифференцируемо, т.к. нет равномерной сходимости

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{100} : \forall N \exists n > N : \exists m = n \exists x = \frac{1}{n} : \left| \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \dots + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right| > \varepsilon$$

$$\frac{\sin \frac{n+1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin \frac{2n}{n}}{2n} > \frac{1}{20}$$

Тогда докажем локальную равномерную сходимость (в окрестности некоторой точки)

В окрестности не должно быть $2\pi k$, иначе аналогично доказательству

Рассмотрим окрестность $(\alpha, \beta), 2\pi k \notin (\alpha, \beta)$

$$a_n = \sin nx, b_n(x) = \frac{1}{n} - \text{монотонно, } b_n \Rightarrow 0$$

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq |\operatorname{Im}(e^{ix} + \dots + e^{inx})| \leq |e^{ix} \frac{1}{|e^{inx} - 1|}|e^{ix} - 1| \leq$$

$$\frac{2}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{2}{d}, d = \min(|e^{i\alpha} - 1|, |e^{i\beta} - 1|)$$

Т.о. $\forall x_0 \in (0, 2\pi) \exists U(x_0)$ на которой имеется равномерная сходимость

$$\text{Таким образом } f''(x) = \sum -\frac{\sin nx}{n} \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

Спойлер: $\sum \frac{\sin nx}{x}$ – не непрерывна в 0 – там имеется скачок

$$\nexists f''(0)$$

4.3 Степенные ряды

Определение

$$B(z_0, r) \in \mathbb{C} := \{z : |z - z_0| < r\}$$

Степенной ряд: $\sum a_n(z - z_0)^n$, $z_0 \in C$, a_n — комплексная последовательность

Теорема (о круге сходимости степенного ряда)

$$\sum a_n(z - z_0)^n$$

Тогда выполнено ровно одно из трех

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при $z = z_0$
3. $\exists R \in (0, +\infty)$: при $|z - z_0| > R$ — расходится; $|z - z_0| < R$ — ряд сходится абсолютно

Утверждение

$$\sum a_n - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_n, \sum \operatorname{Im} a_n - \text{сходятся}$$

Доказательство

Изучим ряд на абсолютную сходимость

Применим признак Коши: изучим $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \overline{\lim} |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$:

При $\dots < 1$ — абсолютно сходится

При $\dots > 1$ — расходится, т.к. слагаемые $\not\rightarrow 0$

Рассмотрим $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ — всегда сходится (случай 1)
2. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ — тогда сходится при $z = z_0$, иначе расходится (случай 2)
3. $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} =: R$ — сходится в $B(z_0, R)$ (случай 3)

R — радиус сходимости

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} - \text{формула Коши-Адамара}$$

Если применим признак Даламбера, то $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Пример

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$S_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

Сходится при $|z| < 1$

При $|z| = 1$ ряд расходится

$$R = 1$$

$$2. \sum \frac{z^n}{n}, R = 1$$

Рассмотрим $|z| = 1$: $z = 1$ – расходится; $z = -1$ – сходится

$$z = e^{i\phi}: \sum \frac{e^{in\phi}}{n} = \sum \frac{\cos n\phi}{n} + i \sum \frac{\sin n\phi}{n}, \text{ – сходится при } \phi \in (0, 2\pi)$$

Т.е. сходимость при $|z| \leq 1$, кроме $z = 1$

$$3. \sum \frac{z^n}{n^2}, R = 1$$

Рассмотрим $|z| = 1$

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ – сходится при } |z| \leq 1$$

$$4. \sum n! z^n \text{ – сходится при } z = 0$$

$$5. \sum \frac{z^n}{n!}, R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \dots}}} = \frac{1}{\lim \frac{e}{n}} = +\infty \text{ – сходится}$$

при всех $z \in \mathbb{R}$

Теорема (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)

$$\sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$$

Тогда

1. Для $r : 0 < r < R$ ряд равномерно сходится на $\overline{B}(z_0, r)$

2. $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ – непрерывна на $B(z_0, R)$

Доказательство

1. по признаку Вейерштрасса

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$$

$\sum |a_n| r^n$ – сходится: подставим в ряд $z := z_0 + r$ – должен абсолютно сходиться

2. Проверим, что $a_n(z - z_0)^n$ – непрерывная функция:

Возьмем $z_1 \in B(z_0, R)$

Возьмем $r : |z_1 - z_0| < r < R$

В круге $\overline{B}(z_0, r)$ есть равномерная сходимость \Rightarrow есть непрерывность

Определение

Будем считать комплексную функцию дифференцируемой, если $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

$A = f'(z)$ (двойной предел)

Эквивалентно $f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$ Т.к. мы ввели другое определение производной, не будем пользоваться теоремой 2

Лемма

Пусть $w, w_0 \in \mathbb{C}, r > 0$

$|w| < r, |w_0| < r$

$|w^n - w_0^n| = |(w - w_0)(w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \dots + ww_0^{n-2} + w_0^{n-1})| \leq |w - w_0|nr^{n-1}$

Теорема (о почленном дифференцировании ряда)

Пусть ряд А: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$

Ряд А': $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда

1. А' имеет тот же радиус сходимости

2. Если $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$, то $\forall z \in B(z_0, R)$ $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

Доказательство

Множество сходимости ряда А' такое же, как у ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

$$R^{(A')} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Возьмем a в окрестности сходимости

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \left[\begin{array}{l} w = z - z_0 \\ w_0 = a - z_0 \end{array} \right] = \sum a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \xrightarrow{w \rightarrow w_0} \sum a_n n w_0^{n-1}$$

– при условии наличия равномерной сходимости в $U(w_0)$

Воспользуемся леммой, взяв $|a - z_0| < r < R$

Тогда при $|w| < r$ (и $|w_0| < r$): $|a_0 \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}| \leq n|a_n|r^{n-1}$

$\sum n a_n r^{n-1}$ – ряд А' в точке $z_0 + r$ – абсолютно сходится

Т.о. в $B(z_0, r)$ ряд $\sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)}$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

Следствие 1

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$$

Тогда $f \in C^\infty(B(z_0, R))$

и все производные получаются почленным дифференцированием

Следствие 2

$$a_n, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n, x \in \mathbb{R} \text{ при } |x - x_0| < R$$

Тогда при почленном интегрировании радиус сходимости сохраняется и

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Теорема (Метод Абеля суммирования рядов)

Пусть $\sum c_n$ сходится

$$f(x) := \sum c_n x^n, x \in (-1, 1)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum c_n$$

Доказательство

Признак Абеля: $a_n(x) \leftrightarrow c_n$

$$b_n(x) = x^n - \text{здесь считаем, что } x \in [0, 1)$$

Отсюда $\sum c_n x^n$ равномерно сходится на $[0, 1)$

Тогда $R \geq 1 \Rightarrow$ равномерно сходится на $(-1, 1)$

По Т.4' о предельном переходе в сумме предел суммы $(\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x))$ равен

сумме пределов $\sum c_n$

Следствие

$$\sum a_n = A$$

$$\sum b_n = B$$

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$$

Пусть ряд $\sum c_n$ сходится и $\sum c_n = C$

Тогда $AB = C$

Доказательство

$$f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n$$

$x \in (0, 1)$ – ряды сходятся абсолютно

Тогда $f(x)g(x) = h(x)$

Тогда из предельного перехода $x \rightarrow 1 - 0$ $AB = C$

Пример

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(xf')' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$xf' = -\ln(1-x) + c$$

Из $f(0) : c = 0$

$$\text{Тогда } f' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\sum \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{1-t}{t} dt$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{1-t}{t} dt$$

5 Ряды Тейлора

Определение

f раскладывается в степенной ряд в окрестности x_0 ,

если $\exists (a_n), U(x_0) : \forall x \in U(x_0) f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$

Замечание

f – раскладывается $\Rightarrow f \in C^\infty(U(x_0))$

Теорема о единственности

f – раскладывается \Rightarrow ряд определен однозначно

$(\exists! a_n)$

Доказательство

$$\sum a_n(x-x_0)^n = f(x)$$

Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Определение

Пусть $f \in C^\infty((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ – ряд Тейлора функции f в точке (окрестности точки) x_0

Замечание

1. Ряд Тейлора может сходиться «не туда» (не к исходной функции)

К примеру, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}, P_k - \text{многочлен степени } \leq 3k$$

По следствию из т. Лагранжа функция k раз дифференцируема и $f^{(k)}(0) = 0$

Тогда у $f(x)$ ряд Тейлора $\equiv 0$

Т.е. существуют $f \in C^\infty$, которые не раскладываются в ряд (функции, раскладывающиеся в ряд – *аналитические*)

2. Ряд Тейлора может расходиться при всех $x \neq x_0$

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+t^2x} dx$$

//todo продолжить 00:55:24

6 Диффеоморфизм

Определение

Область в \mathbb{R}^m – открытое связное множество

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, O – область

f – диффеоморфизм, если f – обратимо, f, f^{-1} – дифференцируема

Замечание

Если это так, то $f^{-1} \circ f = \text{id}$

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$$

Лемма (о «почти» локальной инъективности)

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, O – область, $x_0 \in O$, F – дифференцируемо в x_0
 $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists C > 0, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

Доказательство

1. F – линейное

Утверждение: Матрица Якоби линейного оператора – матрица линейного оператора. Отсюда $\det F \neq 0$, а значит $\exists F^{-1}$

$$\text{Тогда } |h| = |F^{-1} \circ F \cdot h| \leq \|F^{-1}\| |Fh|$$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \frac{1}{\|F^{-1}\|} |h|$$

δ – любое

$$2. |F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq \underbrace{C}_{\text{из п.1}} |h| - |\alpha(h)| |h|$$

$$\text{Берем } \delta, \text{ чтобы } |\alpha(h)| \leq \frac{C}{2}$$

Замечание

$\forall x \quad \det F'(x) \neq 0$, то отсюда не следует инъективность

В далеких точках значения могут совпадать

Пример

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$$

$$\det F'(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Данное отображение склеивает точки

Теорема о сохранении области

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, O – открытое, $\forall x \in O$ F – дифференцируемый в x и $\det F'(x) \neq 0$

Тогда $F(O)$ – открытое множество

Доказательство

Пусть $x_0 \in O, y_0 = F(x_0)$

Проверим, что y_0 – внутренняя точка $F(O)$

По лемме $\exists C, \delta : \forall h \in \overline{B}(0, \delta)$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$$

$$r := \frac{1}{2} \text{dist}(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta))}_{\text{сфера}})}_{\text{компакт}})$$

$r > 0$ – потому что $\text{dist} = \inf$ на компакте, а значит \inf реализуется

Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$

Т.е. проверим, что $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$

Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, y \in B(y_0, r)$ – функция на $\overline{B(x_0, \delta)}$

(надеемся, что она обращается в 0)

$$g(x_0) = |F(x_0) - y| < r^2$$

$$\forall x \in S(x_0, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Тогда $\min g$ достигается (т.к. функция на компакте) внутри $B(x_0, r)$

В этой точке все частные производные = 0

Пусть в точке x достигается минимум

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2(F_1 - y_1) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + 2(F_m - y_m) \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial x_m} = 2(F_1 - y_1) \frac{\partial F_1}{\partial x_m} + \dots + 2(F_m - y_m) \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{cases}$$

$$(F(x) - y)^T F'(x) = 0$$

Т.к. $\det F'(x) \neq 0$, то $g(x) = F(x) - y = 0$

Отсюда $g(x)$ достигает 0

Замечание

F – непрерывное $\Leftrightarrow \forall \underbrace{W}_{\text{откр.}} F^{-1}(W)$ – открытое

(из определения)

Замечание

Если O – связное, F – непрерывное

Тогда $F(O)$ – связное

(Отсюда область переходит в область)

Доказательство

Пусть это не так

Тогда $F(O) = W_1 \cup W_2$

Тогда $O = F^{-1}(W_1) \cup F^{-1}(W_2), F^{-1}(W_1), F^{-1}(W_2)$ – открытые и не пересекающиеся

Но это невозможно из связности

Тогда $F(O)$ – связное

Следствие

$F : \underbrace{O}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, l < m$

$$F \in C^1(O)$$

$$\forall x \in O \operatorname{rg} F'(x) = l \text{ (rg – ранг матрицы)}$$

Тогда $F(O)$ – открытое

Доказательство

Пусть $x_0 \in O$

Проверим, что $F(x_0)$ – внутренняя точка в $F(O)$

$$\operatorname{rg} F'(x_0) = l$$

Н.у.о. пусть ранг реализуется на первых l столбцах

$$\text{T.e. } \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$$

$$\text{Тогда } \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$$

Тогда $F(x_0)$ – внутренняя в $F(U(x_0))$:

Рассмотрим $U_l := \{(t_1, \dots, t_l) : (t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \in U(x_0)\}$ – l -мерная окрестность

$$\tilde{F} : U_l \rightarrow \mathbb{R}^l$$

$$(t_1, \dots, t_l) \mapsto F(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$$

Теорема о дифференцировании обратного отображения

$$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O \text{ – область}$$

$$F \in C^r(O), r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Пусть F – обратимо и невырождено ($\forall x \det F'(x) \neq 0$)

Тогда $F^{-1} \in C^r$ (отсюда $(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$)

Доказательство

Индукция по r

База: $r = 1$

Пусть $S = F^{-1}$

S – непрерывна по теореме о сохранении области (по топологическому определению)

$$\text{Возьмем } x_0 \in O, y_0 = F(x_0) \in O_1, O_1 = F(O)$$

$$\text{По лемме } \exists C, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$$

$$A = F'(x_0)$$

$$\underbrace{F(x)}_y - \underbrace{F(x_0)}_{y_0} = A(\underbrace{x}_{S(y)} - \underbrace{x_0}_{S(y_0)}) + \alpha(x)|x - x_0|$$

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$$

$$\text{Надо проверить: } \beta(y) = |S(y) - S(y_0)|A^{-1}\alpha(S(y)) = o(|y - y_0|)$$

Пусть $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$ – выполнено при y близких к y_0

$$|\beta(y)| = |S(y) - S(y_0)| |A^{-1} \alpha(S(y))| \leq \frac{1}{C} |F(x) - F(x_0)| \|A^{-1}\| |\alpha(S(y))| =$$

$$\frac{\|A^{-1}\|}{C} |y - y_0| |\alpha(S(y))| = o(|y - y_0|)$$

Отсюда S – дифференцируемо

Проверим, что в $S \in C^1, S' = A^{-1}$

$$y \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} S(y) = x \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} T'(x) = A \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} A^{-1}$$

Индукционный переход:

Проведем цепочку вычислений:

$$y \mapsto F^{-1}(y) = x \mapsto F'(x) = A \mapsto A^{-1} = (F'(x))^{-1} = (F^{-1})'(y)$$

Переходы – композиции непрерывных отображений

Т.о.:

Пусть $F^{-1} \in C^{r-1}$

Лемма

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \leq M|h|$$

$$M = \sup_{x_1 \in [x_0, x_0+h]} \|F'(x_1) - F'(x_0)\|$$

//todo доказать

Теорема о локальной обратимости

Пусть $F \in C^1(\underbrace{O}_{\text{область}}, \mathbb{R}^m)$ (Т.е. $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, F \in C^1$)

$x_0 \in O$

$\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists U(x_0) : F \Big|_{U(x_0)} - \text{диффеоморфизм}$

Доказательство

$\exists V(x_0) : \forall x \in V \det F'(x) \neq 0$

(не представляю, откуда)

По предыдущей теореме достаточно построить окрестность x_0 , где F – обратимо

$F'(x_0)$ – невырожденный

Тогда $\exists c : \forall h |F'(x_0)h| \geq c|h|$

Тогда $\exists U(x_0) = V(x_0) \cap B(x_0, r) \subset O$ такая, что $\forall x \in U(x_0) \|F'(x) - F'(x_0)\| < \frac{c}{4}$ и попрежнему $\det F'(x) \neq 0$

Проверяем, что F – обратимо на $U(x_0)$

$x \in U(x_0), y = x + h \in U(x_0)$

$$\begin{aligned}
F(y) - F(x) &= (F(x+h) - F(x) - F'(x)h) + (F'(x)h - F'(x_0)h) + F'(x_0)h \\
|F(y) - F(x)| &\geq |F'(x_0)h| - |F(x+h) - F(x) - F'(x)h| - |(F'(x) - F'(x_0))h| \\
&\quad (\text{неравенство треугольника}) \\
|F(x_0+h) - F(x_0) - F'(x_0)h| &\leq M|h| \\
M &= \sup_{x_1 \in [x_0, x_0+h]} \underbrace{\|F'(x_1) - F'(x_0)\|}_{\leq \|F'(x_1) - F'(x_0)\| + \|F'(x) - F'(x_0)\|} \leq \frac{c}{2} \\
|F(y) - F(x)| &\geq c|h| - \frac{c}{2}|h| - \frac{c}{4}|h| = \frac{c}{4}|h| - \text{т.е. } F(y) \neq F(x), \text{ а значит} \\
&\quad \text{точки не склеиваются}
\end{aligned}$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$
 $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
 $F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируема, O — открытое

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} =: (F'_x, F'_y)$$

Теорема о неявном отображении

$$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$\text{Пусть } (a, b) : F(a, b) = 0$$

$$\det F'_y(a, b) \neq 0$$

Тогда

1. $\exists P \subset \mathbb{R}^m, a \in P, \exists Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$
 $\exists ! \phi : P \rightarrow Q \in C^r$ — гладкое
 $\forall x \in P \ F(x, \phi(x)) = 0$
2. $\phi'(x) = -(F'_y(x, \phi(x)))^{-1} F'_x(x, \phi(x))$

Доказательство

$$\text{Построим } \Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

$$(x, y) \rightarrow (x, F(x, y))$$

$$\Phi(a, b) = (0, 0)$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi'(a, b) \neq 0$$

$$\exists \tilde{U}(a, b) : \Phi \Big|_{\tilde{U}} - \text{диффеоморфизм}$$

Можно считать, что $\tilde{U} = P_1 \times Q$

$\tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$ – открытое

$\exists \Psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}, \Psi = \Phi^{-1} \subset C^r$

Φ, Ψ не меняют первые n координат

$\Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^m, H \in C^r$

Пусть $P = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_n\})$ (подмножество \tilde{V} , где последние n координат – нули)

$\phi(x) := H(x, 0)$

Что $F(x, \phi(x)) = 0$ – тривиально

$$F(x, \phi(x))' = (F'_x, F'_y) \begin{pmatrix} E_m \\ \phi' \end{pmatrix} = 0$$

$$F'_x + F'_y \phi' = 0$$

Докажем единственность

$x \in P, y \in Q$

$$F(x, y) = 0$$

$$\Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi \Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \phi(x))$$

Замечание

Пусть есть система

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{rg } F'(x_0) = m$$

Н.у.о. пусть ранг реализуется на n последних переменных

Обозначим последние n переменных x_i как y_j

Пусть $a = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$

Тогда для $\exists U(a), V(b)$

$\forall x \in U(a) \exists y \in V(b)$ – решение, которое гладко зависит от x

Определение

Пусть $k < m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ – простое k -мерное многообразие в \mathbb{R}^m , если

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$ – область

$\exists \Phi : O \rightarrow M$ – биекция, гомеоморфизм $(\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \rightarrow O$ – непрерывно)

Φ – параметризация

Определение

Пусть $k < m$

$M \subset \mathbb{R}^m$ – простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m , если

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$ – область

$\exists \Phi : O \rightarrow M$

$\Phi \in C^r$ – гомеоморфизм ($\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \rightarrow O$ – непрерывно)

$\forall t \in O \operatorname{rg} \Phi'(t) = k$

Пример

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

- Цилиндр

$$x = R \cos t, y = R \sin t, z = z$$

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, z) \xrightarrow{F} (R \cos t, R \sin t, z)$$

$$dF = \begin{pmatrix} -R \sin t & 0 \\ R \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Шар – не является

Возьмем какую-то точку a в исходном множестве

На шаре ей будет соответствовать точка A

Удалим точку a и A из исходного множества и шара соответственно

В исходном множестве возьмем петлю вокруг точки a

Она не может быть стянута в одну точку

С другой стороны, петля вокруг a на шаре – может

Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k < m$

$1 \leq r \leq +\infty$

Тогда $\forall p \in M$ эквивалентно:

1. $\exists U = U(p) \subset \mathbb{R}^m$ (откр. множество)
 $M \cap U(p)$ – простое k -мерное C^r -гладкое многообразие в \mathbb{R}^m
2. $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ и $\exists f_1, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$

$$x \in M \cap \tilde{U}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_{m-k}(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

и $\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_{m-k}(p)$ – линейно независимые

Доказательство 1 \Rightarrow 2

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r$ – параметризация $M \cap U$

ϕ_1, \dots, ϕ_m – координатные функции Φ

$p = \Phi(t^0)$

Н.у.о. пусть $(\frac{\partial \phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\dots k}$ – невырожденная матрица

(по непрерывности можно считать, что выполнено на всем O)

$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ – проекция $x \mapsto (x_1, \dots, x_k)$

Посмотрим на $L \circ \Phi$:

$$(L \circ \Phi)' = (\frac{\partial \phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\dots k}$$

$\det(L \circ \Phi)' \neq 0$ на O

При необходимости сузим O на окрестность точки t^0 , чтобы $L \circ \Phi$ было диффеоморфизмом

$W \subset O$ – область определения $L \circ \Phi$

$V = L \circ \Phi(W) \subset \mathbb{R}^k$

$\exists \Psi = (L \circ \Phi)^{-1}, \Psi \in C^r$

Для $x \in V$ однозначно задано $\Phi(\Psi(x)) \in M \cap U$

Т.е. множество $\Phi(W)$ – график некоторого $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Для $x' \in V$ $\Phi(\Psi(x)) = (x', H(x')) \Rightarrow H \in C^r$

$\Phi(W)$ – множество, открытое в M , т.к. Φ – гомеоморфизм

Значит $\exists \tilde{U}$ – открытое в $\mathbb{R}^m : \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ (теорема об открытых множествах в пространствах и подпространствах)

Можно считать, что $\tilde{U} \subset \underbrace{V \times \mathbb{R}^{m-k}}_{\text{открытое в } \mathbb{R}^m}$

(пусть это не так. Тогда возьмем $U' := U \cap V \times \mathbb{R}^{m-k}$)

Определим $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}, f_j \in C^r$

Тогда $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow \forall j \ f_j(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k} \end{pmatrix} = (T_{(m-k) \times k} \text{ diag}(-1, \dots, -1)) - \text{градиенты(строки) ли-}$$

нейно независимые

Доказательство $2 \Rightarrow 1$

$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1, \dots, m-k, j=1, \dots, m}$ – матрица, у которой строки – градиенты f_i

Можно считать, что $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{i=1, \dots, m-k, j=k+1, \dots, m} \neq 0$

Тогда из теоремы о неявном отображении:

$\exists P((p_1, \dots, p_k)) \subset \mathbb{R}^k \exists Q((p_{k+1}, \dots, p_m)) \subset \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H : P \rightarrow Q : \Phi(u, H(u)) = 0$, где $u \in P, F = (f_1, \dots, f_{m-k})$, равносильно

$\forall x \in M \cap (P \times Q) F(x) = 0$, т.е. $x = (u, H(u))$

Т.е. $\Phi : P \rightarrow P \times Q \subset \mathbb{R}^m$

$u \mapsto (u, H(u)), H \in C^r$

$\Phi \in C^r$

Φ – гомеоморфизм, т.к. Φ^{-1} – это проекция (а она непрерывна)

$\text{rg } \Phi' = k$

Следствие (о двух параметризациях)

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ – k -мерное простое C^r -гладкое многообразие

$p \in M, \exists U(p)$

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p)$ – параметризация, $\Phi_1 \in C^r$

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p)$ – параметризация, $\Phi_2 \in C^r$

(обе действуют инъективно)

Тогда \exists диффеоморфизм $\Theta : O_1 \rightarrow O_2, \Theta \in C^r$

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство

$\exists \Theta = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ – гомеоморфизм

$\Theta = \Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1 \in C^r$

$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Phi_2 \in C^r$

Лемма

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, O$ – открытое множество

Φ – это C^1 -параметризация некоторого M – простого гладкого многообразия в \mathbb{R}^m

$t_0 \in O, \Phi(t_0) = p \in M$

Тогда $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ – не зависит от Φ и представляет собой k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m

Доказательство

$\forall \Phi$ – гладкая параметризация $\text{rg } \Phi' = k$ – образ k -мерный

Пусть есть Φ_1 и Φ_2 – две параметризации

$\exists \psi$ – диффеоморфизм

$$\psi : O_1 \rightarrow O_2$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$$

$$\Phi'_1 = \Phi'_2 \psi'$$

Заметим, что $E = (\psi^{-1}\psi)' = (\psi^{-1})'\psi'$

Тогда ψ' и $(\psi^{-1})'$ – обратимые

$$\Phi'_1(\mathbb{R}^k) = \Phi'_2\psi'(\mathbb{R}^k) = \Phi'_2(\mathbb{R}^k) \text{ (т.к. } \psi(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k)$$

Определение

M – простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^m

$p \in M$, Φ – параметризация, $\Phi(t_0) = p$

Рассмотрим в \mathbb{R}^m подпространство $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^k)$

Оно называется *касательным подпространством* к M в точке p

Обозначается $T_p M$

Множество $p + T_p M$ будем называть *аффинным* пространством (касательное линейное многообразие)

Замечание

1. Если есть $v \in T_p M$, то \exists гладкий путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$, $\gamma_v(0) = 0$ и $\gamma'_v(0) = v$

Доказательство

$$\operatorname{rg} \Phi'(t_0) = k \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^j : \Phi'(t_0)u = v$$

$$\tilde{\gamma}_v(s) = t_0 + t_0 + us$$

$$\gamma_v = \Phi \circ \tilde{\gamma}_v$$

$$\gamma'_v(0) = \Phi' \tilde{\gamma}'_v(0) = \Phi'(u) = v$$

2. $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$ – гладкий путь

$$\gamma(0) = p$$

$$\text{Тогда } \gamma'(0) \in T_p M$$

Доказательство

Что-то рукомахательное

3. Рассмотрим касательное пространство к графику

$$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$(x, y = f(x))$ – поверхность в \mathbb{R}^{m+1} – это простое k -мерное гладкое многообразие в \mathbb{R}^{m+1} :

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \Phi(x) = (x, f(x)) \text{ – параметризация}$$

Тогда линейное касательное многообразие в (x_0, y_0) , где $y = f(x_0)$,

$$\text{задается уравнением } y - y_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0)(x_m - x_m^0)$$

Доказательство

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} & E_m & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} f \end{pmatrix}$$

$$a \in \mathbb{R}^m$$

$$\Phi'(x) \cdot a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} a + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} a \end{pmatrix}$$

Линейное многообразие – множество векторов, перпендикулярных

$$\text{вектору } \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0), -1 \right)$$

$$\text{Тогда надо проверить, что } \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0), -1 \right) \cdot \Phi'(x)a = 0$$

4. $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, O$ – открытое

$$p \in O$$

$U(p)$ – $m - 1$ -мерное простое гладкое многообразие в \mathbb{R}^m заданное уравнением $f(x) = 0$

При это выполняется:

$$f(p) = 0$$

$$\text{grad } f(p) \neq 0$$

$$\text{Тогда линейное касательное многообразие в точке } p \text{ есть } (*) f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + f'_{x_m}(p)(x_m - p_m) = 0$$

Доказательство

$$\text{Н.у.о. пусть } f'_{x_m}(p) \neq 0$$

$\exists \phi : U(p_1, \dots, p_{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – вычисляет последнюю координату

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U(p), \text{ где}$$

$$x_m = \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

Т.е. $U(p)$ – есть график ϕ над $U(p_1, \dots, p_{m-1})$

Тогда уравнение касательного линейного многообразия $(**) \ x_m - p_m = \phi'_{x_1}(x_1 - p_1) + \dots + \phi'_{x_{m-1}}(x_{m-1} - p_{m-1})$
Мы знаем, что $f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$
 $f'_{x_1} + f'_{x_m} \phi'_{x_1} = \dots = f'_{x_{m-1}} + f'_{x_m} \phi'_{x_{m-1}} = 0$
Домножим $(**) \cdot f'_{x_m} = (*)$, ч.т.д.

6.1 Относительный (= условный) экстремум

Определение

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$M_\Phi = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : \Phi(x) = 0\}$$

($\Phi(x) = 0$ – уравнения связи)

$$x_0 \in E$$

$$\Phi(x_0) = 0, \text{ т.е. } x_0 \in M_\Phi$$

x_0 – точка относительного локального максимума, если x_0 – локальный

максимум $f \Big|_{M_\Phi}$

$$\text{Т.е. } \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) : \Phi(x) = 0 \ f(x_0) \geq f(x)$$

7 Экспонента

Определение

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$$

Свойства

$$1. \exp(0) = 1$$

$$2. \exp(z)' = \exp(z)$$

$$3. \overline{\exp(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$$

$$4. \forall z, w \in \mathbb{C} \ \exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \exp z \exp w &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!} + \frac{z^{k-1}w^1}{(k-1)!1!} + \dots + \frac{w^k}{k!} \right) = \dots - \\ &\text{по теореме Коши о произведении рядов} \\ \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k!z^k}{k!} + \frac{k!z^{k-1}w^1}{(k-1)!1!} + \dots + \frac{k!w^k}{k!} \right) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (C_k^0 z^k + C_k^1 z^{k-1} w^1 + \\ &\dots + C_k^k w^k) \frac{1}{k!} = \sum \frac{(z+w)^k}{k!} \end{aligned}$$

Тогда из 1, 2, 4 \exp – показательная функция из теоремы о существовании показательной функции

Следствие

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) \neq 0$$

Доказательство

$$\text{Пусть } \exists z : \exp(z) = 0$$

$$\text{Тогда } \forall w \quad \exp(z+w) = \exp(z) \exp(w) = 0$$

$$\text{Пусть } w = u - z$$

$$\text{Тогда } \forall u \quad \exp(z+u-z) = \exp(u) = \exp(z) \exp(u-z) = 0$$

$\exp(u) \equiv 0$ – что неверно

Пусть $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Обозначим } e^{ix} = \alpha(x) + i\beta(x)$$

$$\text{Тогда } e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \alpha(x) - i\beta(x)$$

$$\alpha(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\beta(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{Тогда } \alpha(x) = \frac{1}{2} \sum \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ (похоже на } \cos x \text{)}$$

$$\beta(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \text{ (похоже на } \sin x \text{)}$$

(желающие могут думать, что $x \in \mathbb{C}$)

$$\text{Заметим, что } \alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y) - \beta(x)\beta(y)$$

$$\beta(x+y) = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$$

$$\alpha^2(x) + \beta^2(y) = 1$$

$$(e^{ix})' = ie^{ix}$$

Отображение ie^{ix} – вектор скорости

Тогда e^{ix} описывает движение с постоянной скоростью по окружности единичной длины

8 Теория меры

8.1 Системы множеств

Обозначение

1. $A \sqcup B$ – дизъюнктивное объединение
2. 2^X – множество всех подмножеств X

Определение

$\mathcal{P} \subset 2^X$ – полукольцо, если

1. $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
2. $\emptyset \in \mathcal{P}$
3. $\forall A, A' \in \mathcal{P} \quad \exists$ конечное $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$

Определение

$[a, b) \subset \mathbb{R}^m$ – ячейка, если $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \quad a_i \leq x_i < b_i\}$

Пример

$X = \mathbb{R}^m, \mathcal{P}$ – множество ячеек

\mathcal{P} – полукольцо

Свойства

1. $A, B \in \mathcal{P}$
Отсюда не следует, что $A^C \in \mathcal{P}, A \cup B \in \mathcal{P}, A \setminus B \in \mathcal{P}, A \oplus B \in \mathcal{P}$
2. $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$
Тогда $A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$ представимо в виде дизъюнктивного объединения элементов \mathcal{P}

Определение

$\mathcal{A} \subset 2^X$ – алгебра, если

1. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
2. $X \in \mathcal{A}$

Свойства

1. $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
3. $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
4. $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C \in \mathcal{A}$
5. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
6. Алгебра – полукольцо

Определение

$\mathcal{A} \subset 2^X$ – сигма-алгебра, если

1. \mathcal{A} – алгебра
2. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Свойства

1. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^C \right)^C \in \mathcal{A}$
2. $E \in \mathcal{A}$ – сигма-алгебра
Тогда $\{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$ – сигма-алгебра

8.2 Объем

Определение

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – аддитивна, если

1. μ не принимает одновременно $+\infty$ и $-\infty$
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $A = \sqcup_{\text{конеч.}} A_i, A_i \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$

Определение

\mathcal{P} – полукольцо

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

μ – аддитивная, $\mu \geq 0$

Тогда μ – объем

Замечание

Если $X \in \mathcal{P}$, $\mu X < +\infty$ – μ конечный объем

Замечание

Если \mathcal{P} – алгебра, то свойство 3 можно заменить на:

$A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$

Пример

Классический объем в \mathbb{R}^m :

\mathcal{P}^m – ячейки в \mathbb{R}^m

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

Замечание

Если $B \subset A$, то $\mu B \leq \mu A$ – монотонность

Доказательство

Если в алгебре, то $A = B \sqcup (A \setminus B) \Rightarrow \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B) \geq \mu B$

Теорема

\mathcal{P} – полукольцо, $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – объем

Тогда выполняется

1. Усиленная монотонность: $\forall A \in \mathcal{P}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} : A \supset \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ Тогда

$$\sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность
 $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} \quad A \subset \bigsqcup_{i=1}^n A_i$

$$\text{Тогда } \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}, \mu B < +\infty$ – конечное
Тогда $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

Доказательство

$$1. A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{\text{конеч.}} B_j \quad A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \left(\bigsqcup_{\text{конеч.}} B_j \right) \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i + \left(\sum \mu B_j \right) \geq \sum \mu A_i$$

$$2. B_i = A \cap A_i \in \mathcal{P}$$

$$\text{Тогда } A = \bigcup B_i$$

Сделаем эти B_i дизъюнктными

$$C_1 = B_1$$

$$C_2 = B_2 \setminus B_1, \dots, C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right)$$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup C_k$$

$$\text{По замечанию } C_k = B_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_{k_j - \text{конеч.}}^{k-1} D_{k_j} \quad \text{Теперь } A = \bigsqcup_{k,j} D_{k_j}$$

$$\mu A = \sum_{k,j} \mu D_{k_j}$$

$$\sum_j \mu D_{k_j} \leq \mu B_k \leq \mu A_k$$

$$\text{Отсюда } \mu A \leq \sum_k \mu A_k$$

$$3. (a) B \subset A$$

Это аддитивность

$$(b) B \not\subset A$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), A \cap B \in \mathcal{B}$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B \geq \mu A$$

8.3 Мера

Определение

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – мера, если μ – объем и μ – счетно-аддитивна:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}, A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \in \mathcal{P}, \mu A = \sum \mu A_i$$

Замечание

1. Можно считать, что индексация с помощью любого произвольного счетного множества

2. Счетная аддитивность не следует из конечной

Пример

$X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{P} – множество ограниченных множеств и их дополнений

$$\mu(\text{огр}) = 0, \mu(\text{неогр}) = 1$$

В этом множестве нет счетной аддитивности, но есть конечная

Пример (дискретная мера)

X – любое множество, $\mathcal{P} = 2^X$

$$A_1, A_2, \dots \in X$$

$$h_1, h_2, \dots > 0$$

$$\mu U := \sum_{i: A_i \in E} h_i \text{ – мера}$$

Теорема 1

$$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ – объем}$$

Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность
2. Имеет место счетная полуаддитивность

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$$

$$A \in \mathcal{P}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

Доказательство $1 \Rightarrow 2$

Как в предыдущей теореме

Доказательство $2 \Rightarrow 1$

Проверим, что μ – мера

$$\text{Пусть } A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Из свойства 2 } \mu A \leq \sum \mu A_i$$

$$\text{Из усиленной монотонности } \mu A \geq \sum \mu A_i$$

Следствие

$$A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P}, \mu A_n = 0$$

$$A \subset \bigcup A_n$$

$$\text{Тогда } \mu A = 0$$

Теорема 2

\mathcal{A} – алгебра

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – объем

Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2. μ – непрерывна снизу

$$A, A_i \in \mathcal{A}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

Теорема 3

\mathcal{A} – алгебра

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ – конечным объем

Тогда эквивалентны:

1. μ – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2. μ – непрерывна сверху

$$A, A_i \in \mathcal{A}$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

Контр-пример для неконечного объема

μ – дискретная мера

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mu(k) = 1$$

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \mu A = \sum_{k \in A} 1$$

$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

$$A_i = [i, +\infty)$$

$$\mu A_i = +\infty$$

$$A = \bigcap A_i = \emptyset$$

$$\mu A = 0$$

Доказательство $1 \Rightarrow 2$

$$B_k := A_i \setminus A_{k+1}$$

$$A_i = \bigsqcup B_k \sqcup A$$

$$\mu A_1 = \underbrace{\sum \mu B_k} + \mu A$$

$$A_n = \bigsqcup_{k \geq n} K_k \sqcup A$$

$$\mu A_n = \sum_{k \geq n} \mu B_k + \mu A, n \rightarrow +\infty$$

Доказательство $2 \Rightarrow 2' \Rightarrow 1$

$2'$: непрерывность сверху на \emptyset

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap A_n = \emptyset \Rightarrow \mu A_n \rightarrow 0$$

$2 \Rightarrow 2'$ – тривиально

Проверим счетную аддитивность

$$C = \bigsqcup_i C_i$$

$$\text{Пусть } A_k := \bigsqcup_{i=k}^{\infty} C_i$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots, \bigcap A_k = \emptyset$$

$$C = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_{k-1} \sqcup A_k$$

$$\mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i + \mu A_k \Rightarrow \mu C = \sum_{i=1}^{\infty} \mu C_i$$

8.4 Продолжение меры

Определение

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – мера

Мера полная, если $\forall A \in \mathcal{A}, \mu A = 0 \Rightarrow \forall B \subset A, B \in \mathcal{A} \text{ и } \mu B = 0$

$A \in \mathcal{A}$. Тогда A – измеримое множество

Определение

μ – σ -конечная, если $\exists P_k \in \mathcal{A} \mu P_k < +\infty, X = \bigcup P_k$

Теорема о стандартном продолжении меры

Пусть X – множество, \mathcal{P}_0 – полукольцо его подмножеств

$\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – σ -конечная мера на \mathcal{P}_0

Тогда $\exists \sigma$ -алгебра \mathcal{A} и мера $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такое, что

$$1. \left. \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}, \mu \right|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$$

2. μ – полная

3. Если $\mathcal{P} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ и μ_1 – продолжение μ_0 на \mathcal{P} , тогда $\mu \Big|_{\mathcal{P}} = \mu_1$

4. Если μ_1 – полная мера на σ – алгебре $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{P}_0$ и μ_1 – продолжает μ_0 , то $\mu \Big|_{\mathcal{A}} = \mu_1$

5. $A \in \mathcal{A}, \mu A = \inf(\sum \mu_0 P_i : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \in \mathcal{P}_0)$

Доказательство

$\forall A \subset X$ наведем $\mu^* : \mu^* A = \inf(\sum \mu_0 P_i : A \subset \bigcup P_i)$

Она не аддитивна

Она счетно полуаддитивна

Будем говорить, что A – хорошо разбивающаяся, если $\forall B \subset X \mu^* B = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^C)$

$\mathcal{A} = \{A : A \text{ – хорошо разбивающаяся}\}$

Замечание

Пусть μA – конечное

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists (P_k^\varepsilon) : P_k^\varepsilon \in \mathcal{P}_0, \mu A \leq \sum \mu P_k^\varepsilon \leq \mu A + \varepsilon (A \subset \bigcup P_k^\varepsilon)$

Тогда пусть $B_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k^{\frac{1}{n}}$

$A \subset B_n, \mu A \leq \mu B_n \leq \mu A + \frac{1}{n}$

$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

$A \subset B, \mu(B \setminus A) = 0$

$\forall n B \setminus A \subset B_n \setminus A$

8.5 Мера Лебега

Определение

\mathcal{P}^m – полукольцо ячеек в \mathbb{R}^m

Классический объем: $\mu_0[a, b] = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m)$

Теорема

Классический объем в \mathbb{R}^m есть σ -конечная мера на \mathcal{P}^m

Доказательство

σ -конечность – смотри на листик в тетради)

Проверим счетную полуаддитивность

$$P = [a, b], P_n = [a_n, b_n], P \subset \bigcup P_n$$

Пусть $P \neq \emptyset$

Возьмем b' чуть меньше b : $[a, b'] \subset [a, b]$, чтобы $\mu_0(\underbrace{[a, b] \setminus [a, b']}) < \varepsilon$
 $\sqcup D_i, \sum \mu D_i < \varepsilon$

Чуть уменьшим a_n : $(a'_n, b'_n) \supset [a_n, b_n)$

$$\mu([a'_n, b_n] \setminus [a_n, b_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$[a, b'] \subset \bigcup (a'_n, b_n)$$

$[a, b']$ – компакт. Тогда н.у.о. $\exists k : [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^k [a'_n, b_n)$

$$\text{Тогда } \mu_0[a, b'] \leq \sum_{\substack{\geq \mu([a, b]) - \varepsilon}} \mu_0[a'_n, b_n)$$

$$\mu([a, b]) - \varepsilon \leq \mu_0[a, b'] \text{ по лемме}$$

$$\sum \mu_0[a'_n, b_n) \leq \sum (\mu_0[a_n, b'_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leq \sum \mu_0[a_n, b_n) + \varepsilon$$

Для произвольного ε

Тогда возьмем $\varepsilon \rightarrow 0$

Определение

Мера Лебега в \mathbb{R}^m – стандартное продолжение классического объема

λ_m – мера Лебега в \mathbb{R}^m

σ -алгебра, где она задана – \mathcal{M}^m – σ -алгебра множеств, измеримых по Лебегу

Свойства

1. \mathcal{M} – σ -алгебра, т.е. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{M}, A_1 \cap A_2 \cap \dots \in \mathcal{M}$
 $\forall n \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$ и есть полнота: $B \subset \bigcup A_n \Rightarrow B$ – измеримо и $\lambda B = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}^m \{x\}$ – измеримо и $\lambda\{x\} = 0$
 $Q \in \mathbb{R}^1$ – измеримо и $\lambda_1(Q) = 0$
 $A \subset \mathbb{R}^m$ – счетно $\Rightarrow A$ – измеримо

2. \mathcal{M}^m содержит все открытые и замкнутые множества

Лемма

- (a) $O \subset \mathbb{R}^m$ – открытое. Тогда \exists кубические ячейки $Q_o : O \subset \bigcup Q_i$ и при этом (по желанию) $\overline{Q_i} \subset O$ и (по желанию) Q_i – двоичные рациональные ячейки (т.е. концы задаются рациональными числами со знаменателем – степенью 2)
- (b) $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $\lambda E = 0$
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists Q_i$ – кубические ячейки : $E \subset \bigcup Q_i, \sum \lambda Q_i < \varepsilon$
Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists B_i$ – шары : $E \subset \bigcup B_i, \sum \lambda B_i < \varepsilon$

Доказательство

- (a) $\forall x \in O$ Пусть $Q(x)$ – кубическая ячейка : $x \in Q(x) \subset O$, Q – двоичная рациональная
Тогда $O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$. Заметим, что Q – счетное множество.
Тогда объединение счетное
Заменим объединение на конечное дизъюнктное
 $Q_1 \rightarrow Q_1$
 $Q_2 \rightarrow Q_2 \setminus Q_1$. $Q_2 \setminus Q_1$ – не ячейка. Тогда представим как конечное объединение ячеек
 $Q_n \rightarrow Q_n \setminus Q_1 \dots Q_{n-1}$
- (b) $0 = \lambda E = \inf \{ \sum \lambda P_i : E \subset \bigcup P_i \}$
Подберем покрытие E параллелепипедами $P_i : \sum \lambda P_i < \varepsilon$
Теперь для P_i подберем множество ячеек Q_k , чтобы $P_i \subset \bigcup Q_k$
Мы можем подбирать Q_i так, чтобы $\lambda(\bigcup Q_k \setminus P_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$
Чтобы покрыть шарами, опишем шар вокруг ячейки. Т.к. сам шар можно вписать в ячейку, то мы можем оценить меру шара сверху и снизу

3. Пример

$K \subset [0, 1]$ – канторово множество

$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (выкинули среднюю треть)

$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (выкинули средние части имеющих отрезков)

$$K_3 = \dots$$

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

Все концы всех отрезков содержатся в K

K – измеримо

$$\forall n : \lambda K \leq \lambda K_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Отсюда $\lambda K = 0$

K – имеет мощность континуума

Возьмем произвольную бинарную последовательность

Пусть 0 соответствует левому подотрезку, 1 – правому

Будем начинать в K_1

Если видим 0, спускаемся в первую треть отрезка, иначе – в третью

Это отображение – биекция

Т.о. мы сопоставили бинарную последовательность элементу из K

Это пример континуального множества меры 0

4. \exists неизмеримые множества

Рассмотрим \mathbb{R}

Пусть $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$

Рассмотрим $\mathbb{R} \cap [0, 1] / \sim$

A – множество, где из каждого класса эквивалентности $\mathbb{R} \cap [0, 1] / \sim$

взяты один элемент

Пусть A измеримо

Тогда $\forall t$ $A + t$ измеримо ($A + t = \{a + t : a \in A\}$)

Возьмем $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}, q \in [-1, 1]} (A + q) \subset [-1, 2]$

Заметим, что объединение правды дизъюнктивное: $a + q_1 = b + q_2 \Leftrightarrow$

$a - b = q_2 - q_1$, а это значит, что не может быть, чтобы $a \in A$ и $b \in A$

$[0, 1] \subset \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}, q \in [-1, 1]} : x \in [0, 1] \Rightarrow \exists a \in A : x - a = q \in \mathbb{Q}, q \in [-1, 1]$

Если $\lambda A = \alpha_0 > 0$

Тогда, с одной стороны, $\sum_q \lambda(A + q) \leq 3$

С другой стороны, $\sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \alpha_0 = +\infty$

Если $\lambda A = 0$

Тогда, с одной стороны, $\sum_q \lambda(A + q) \geq 1$

С другой стороны, $\sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \alpha_0 = 0$

5. Регулярность меры Лебега

Лемма

$A \in \mathcal{M}^m$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ откр. $\Gamma_\varepsilon : A \subset \Gamma_\varepsilon, \lambda(\Gamma_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists$ замк. $F_\varepsilon : A \subset F_\varepsilon, \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство 1

A – ограничено $\Rightarrow \lambda A$ – конечное

$$\lambda A = \int (\sum \lambda P_k : A \subset \bigcup P_k)$$

Из технического описания $\inf: \forall \varepsilon > 0 \exists (P_k) : \lambda A \leq \sum \lambda P_k < \lambda A + \frac{\varepsilon}{2}$

Ячейки $P_k = [a_k, b_k)$ заменим на $(a_k^*, b_k) \supset P_k$ так, чтобы мера увеличилась на $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$

$$\Gamma_\varepsilon := \bigcup (a_k^*, b_k)$$

Если A – не ограниченное

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i$$

$$A = \bigsqcup A \cap Q_i$$

$$\lambda A = \sum \lambda(A \cap Q_i)$$

$$A \cap Q_i \subset G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Gamma_\varepsilon = \bigcup G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$A = \bigcup (A \cap Q_i) \subset \bigcup G_{i, \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup (G_{i, \frac{\varepsilon}{2}} \setminus (A \cap Q_i))$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \leq \sum \lambda(\dots) \leq \sum \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

8.6 Криволинейный интеграл в \mathbb{R}^m

Определение

Векторное поле $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – непрерывное

Определение

Интеграл векторного поля по пути $I(V, \gamma) := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$ $V =$

$$(V_1, \dots, V_m)$$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \sum_i V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt$$

Обозначение: $I(V, \gamma) = \int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$

Свойства

1. Линейность по полю:

$$I(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \gamma) = \alpha_1 I(V_1, \gamma) + \alpha_2 I(V_2, \gamma)$$

2. Аддитивность по дроблению:

$$a < c < b$$

$$\gamma_1 = \gamma \Big|_{[a, c]}, \gamma_2 = \gamma \Big|_{[c, b]}$$

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

Отсюда может рассматривать кусочно-гладкие пути

3. Замена переменной

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$$

$$\phi : [p, q] \rightarrow [a, b], \phi \in C^1$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [p, q] \rightarrow E$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

Доказательство

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \phi'(s) \rangle ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \phi'(s) \rangle ds$$

4. $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$$

$$\text{Определим } \gamma = \gamma_2 \gamma_1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

5. Противоположный путь

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\gamma_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m - \text{обратный путь}$$

$$\gamma_-(t) = \gamma(a + b - t)$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma_-) = -I(V, \gamma)$$

6. Оценка интеграла пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in \gamma([a, b])} |V(x)| l(\gamma), \text{ где } \gamma([a, b]) - \text{носитель пути, } l(\gamma) - \text{длина пути}$$

Доказательство

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max |V(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

8.7 Потенциальные векторные поля

Определение

$O \subset \mathbb{R}^m$ – область, $V : O \rightarrow \mathbb{R}^m$ – векторное поле

V – потенциальное, если $\exists f : O \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in O \text{ grad } f = V$

f – потенциал

"Загадка"

Если f_1 и f_2 – потенциалы на области O

Тогда $f_1 - f_2 \equiv \text{const}$

Теорема (обобщенная формула Ньютона-Лейбница)

$V : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – потенциальное поле

f – потенциал, γ – кусочно-гладкий путь

$\gamma : [a, b] \rightarrow O, \gamma(a) = A, \gamma(b) = B$

Тогда $\int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i = f(B) - f(A)$

Доказательство

1. Если γ – гладкий путь

$$\int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) \Big|_a^b = f(B) - f(A)$$

2. Если γ – кусочно-гладкий

Разобьем область определения на отрезки: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

Посчитаем каждый интеграл и сложим

Определение

Интеграл поля V не зависит от пути в области O , если $\forall a, b \in O \forall \gamma_1, \gamma_2$

– кусочно-гладкие пути из A в B $\int_{\gamma_1} \sum_i V_i di = \int_{\gamma_2} \sum_i V_i di$

Теорема (характеризация потенциальных векторных полей в

терминах интегралов)

//Лекция 21 0:20. Дальше там ничего не видно

//Лекции 22-23 тоже скипаю, мне лень.

//Вот конспект, там есть <https://github.com/Jovvik/M3137year2019/blob/pdfs/analysis/3sem/final.pdf>

9 Метод Лапласа

Лемма о локализации

f – непрерывная(суммируемая) на $[a, b]$, $f \geq 0$

f – «не исчезает» вблизи a : $\exists U(a) : \forall x \in U(a), x > a \int_a^x f(t) dt > 0$

ϕ – убывает на $[a, b]$ «почти строго»:

$$\forall t \in (a, b) \phi(t) < \phi(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \phi(x)$$

(отсюда $\exists t_1 \in (a, t) : \phi(t) < \phi(t_1) < \phi(a+0)$)

$$\text{Тогда } \forall c \in (a, b) \int_a^b f(t)e^{A\phi(t)} dt \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} dt$$

Доказательство

$$M := \int_a^b |f| dt < +\infty$$

$$\int_a^b f(t)e^{A\phi(t)} dt \leq e^{A\phi(c)} \int_c^b f \leq e^{A\phi(c)} M \text{ Выберем } c_1 \in (a, c) : \phi(c_1) > \phi(c)$$

$$\int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} dt \geq \int_a^{c_1} f(t)e^{A\phi(t)} dt \geq e^{A\phi(c_1)} \underbrace{\int_a^{c_1} f dt}_{:=m>0}$$

$$e^{A\phi(c)} M = o(e^{A\phi(c_1)} m) \text{ при } A \rightarrow +\infty$$

Следствие

В условиях леммы при фиксированном $c \in (a, b)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 : \forall A > A_0 \int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} dt < \int_a^b f(t)e^{A\phi(t)} dt < (1+\varepsilon) \int_a^c f(t)e^{A\phi(t)} dt$$

Замечание

$$g = O(f) \text{ при } t \rightarrow a$$

$$\text{Тогда } \int_a^b g(t)e^{A\phi(t)} dt = O\left(\int_a^b f e^{A\phi}\right), A \rightarrow +\infty$$

То же верно при $g = o(f)$, $f \sim g$

Теорема (метод Лапласа)

$f \geq 0$ – непрерывная(суммируемая) на $[a, b]$

$$f(t) \sim L(t-a)^q, t \rightarrow a, L \in \mathbb{R}, q > -1$$

ϕ – монотонно убывающая

$$\phi(a) - \phi(t) \sim c(t-a)^p, p > 0$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(t) e^{A\phi(t)} dt \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} e^{A\phi(a)} \int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt$$

Доказательство

Возьмем $\varepsilon > 0$

$$\text{Выбираем } s : \forall t \in [a, a+\varepsilon] \quad 1-\varepsilon < \frac{f(t)}{L(t-a)^q} < 1+\varepsilon, 1-\varepsilon < \frac{\phi(a) - \phi(t)}{c(t-a)^p} < 1+\varepsilon$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \exists A_0 - \text{из следствия} : \forall A > A_0 \quad \int_a^b f e^{A\phi} &< (1+\varepsilon) \int_a^{a+s} f e^{A\phi} = \\ (1+\varepsilon) e^{A\phi(a)} \int_a^{a+s} f e^{-A(\phi(a)-\phi(t))} dt &\underset{\text{по следствию}}{<} (1+\varepsilon) e^{A\phi(a)} (1+\varepsilon) L \int_a^{a+s} (t-a)^q e^{-A(1-\varepsilon)c(t-a)^p} dt \end{aligned}$$

Сделаем замену $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{p}}(t-a) \rightarrow t-a$

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon) e^{A\phi(a)} (1+\varepsilon) L \int_a^{a+s} (t-a)^q e^{-A(1-\varepsilon)c(t-a)^p} dt &= (1+\varepsilon)^2 e^{A\phi(a)} L \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}} \int_a^{a+s(1-q)^{\frac{1}{p}}} (t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt \\ &< \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}} e^{A\phi(a)} L \int_a^b (t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } \int_a^b f e^{A\phi} &> \int_a^{a+s} f e^{A\phi} > (1-\varepsilon) L e^{A\phi(a)} \int_a^{a+s} (t-a)^q e^{-Ac(1+\varepsilon)(t-a)^p} dt = \\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon^{\frac{p+1}{q}}} L e^{A\phi(a)} \int_a^{a+s(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} (t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt &> \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon^{\frac{p+1}{q}}} L e^{A\phi(a)} \int_a^{a+s} (t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt \\ &> \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}+1}} e^{A\phi(a)} \int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 : \forall A > A_0 \quad \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}+1}} &< \frac{\int_a^b f(t) e^{A\phi(t)} dt}{e^{A\phi(a)} \int_a^b L(t-a)^q e^{-Ac(t-a)^p} dt} < \\ \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^{\frac{p+1}{q}}} \end{aligned}$$