

# Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

## 1 Графы

### 1.1 Неориентированные графы

#### Определение

*Неориентированный граф* – множество вершин  $V$  и множество ребер  $E \subset (V \times V \setminus \{(u, u)\}) / \sim$  (факторизованное отношением эквивалентности  $\sim$ :  $(u, v) \sim (v, u)$ )

*Путь*  $P$  – последовательность  $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$ , где  $u_i$  – вершина,  $e_i = u_{i-1} u_i$  – ребро

$k := |P|$  или  $k := \text{len}(P)$  – *длина пути*

*Простой путь* – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

*Реберно-простой путь* – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

*Циклический путь* – путь, где  $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\sqsupset P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$   
 $\sqsupset Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$   
 $\sqsupset R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$   
 $P \sim R, P \sim Q$  – равны с точностью до отражения и циклического сдвига
- Пусть если в циклическом пути  $\forall i \ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$ , то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности  $\sim$

*Ациклический граф* – граф без циклов

**Определение**

Пусть  $\exists P : u_0 = u, u_k = v$ . Тогда  $u \rightsquigarrow v$  (отношение связанности путем)

Пусть  $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$ . Тогда  $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$  – конкатенация пути

**Теорема**

Отношение  $\rightsquigarrow$  в неориентированном графе – отношение эквивалентности

**Определение**

Класс эквивалентности по отношению  $\rightsquigarrow$  – *компонента связности*

Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

**Определение**

$u, v$  – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из  $u$  в  $v$

**Теорема**

Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

**Доказательство**

Путь  $u$  (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность

Симметричность очевидна

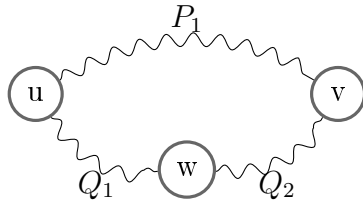
Докажем транзитивность

Рассмотрим  $u, v, w$ , пары  $(u, v), (v, w)$  реберно двусвязные

$P_1, P_2$  – пути между  $u, w$

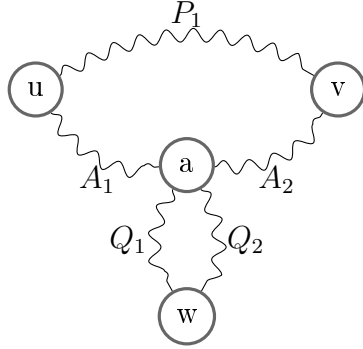
Рассмотрим случаи:

- $w = v \vee w = u$  – очевидно
- $w \in P_2$



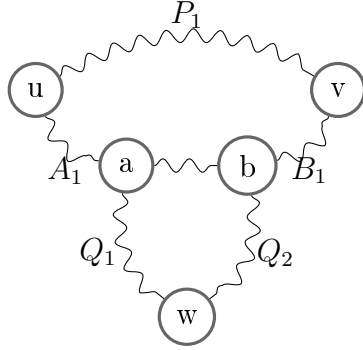
Тогда  $Q_2, P_1 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq v, u, w :$



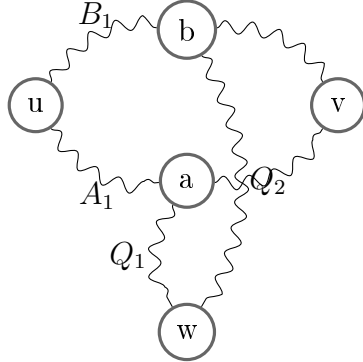
Тогда  $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



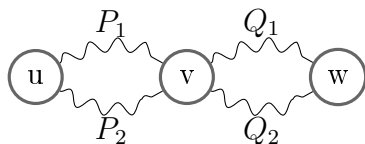
Тогда  $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



Тогда  $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$  реберно не пересекаются

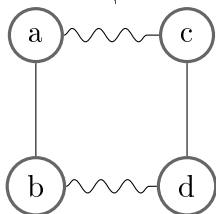
-



Тогда  $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

### Определение

Ребра  $ab, cd$  (не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы



### Теорема

Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности

**Доказательство** аналогично предыдущей теореме

### Определение

Рассмотрим  $A = \{a, b : ab \text{ – вершинно двусвязные}\}$  – компоненту вершинной двусвязности (блок)

Точка  $v$  – точка сочленения, если она лежит в нескольких блоках

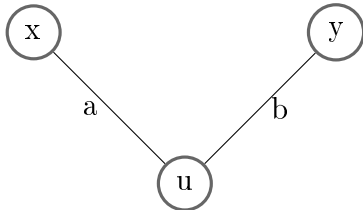
### Теорема

Вершина является точкой сочленения  $\Leftrightarrow$  Ее удаление увеличивает количество компонент связности

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $u$  – точка сочленения

Тогда она лежит в нескольких блоках:



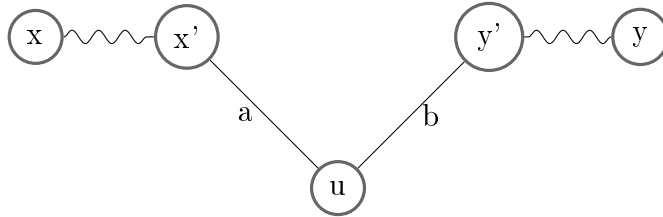
$a, b$  – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках

Тогда не существует пути  $x \rightsquigarrow y$ , не проходящего через  $u$

Отсюда при удалении  $u$   $x$  и  $y$  окажутся в разных компонентах

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть при удалении  $u$  количество компонент увеличилось  
 Возьмем  $x$  и  $y$  такие, что до удаления  $u$  они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных  
 Тогда любой путь из  $x$  в  $y$  проходил через  $u$   
 Выберем какой-то путь из  $x$  в  $y$  и возьмем на нем вершины  $x'$  и  $y'$  – соседей вершины  $u$



Тогда ребра  $a$  и  $b$  вершинно не двусвязные

#### Определение

*Мост* – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности

*Мост* – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

## 1.2 Ориентированные графы

#### Определение

*Ориентированный граф* – множество вершин  $V$  и ребер  $E \subset V \times V$  (разрешаем петли)

В ребре  $w = uv$   $\text{beg } w = u, \text{end } w = v$

*Путь*  $P$  – последовательность  $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$ , где  $u_i$  – вершина,  $e_i = u_{i-1} u_i$  – ребро

*Циклический путь* – путь, где  $u_0 = u_k$

*Цикл* – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига

#### Теорема

Если  $G$  – ациклический ориентированный граф, то  $\exists \phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\} : uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$

(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)

#### Лемма

$G$  – ациклический ориентированный граф

Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро

### **Доказательство теоремы**

Докажем по индукции

Возьмем вершину, из которой не выходит ребро

Присвоим ей номер  $n$

Удалим ее

Пронумеруем оставшиеся вершины

### **Определение**

*Симметризация*  $G$  – граф  $\overline{G}$  такой, что  $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$

(Т.е. восприятие  $G$  как неориентированного графа (возможно, с петлями))

*Компонента слабой связности* – компонента связности в  $\overline{G}$

*Компонента сильной связности* – компоненты, где существуют пути  $u \rightsquigarrow v$  и  $v \rightsquigarrow u$

Сильная связность – отношение эквивалентности

## **1.3 Деревья**

### **Определение**

*Дерево* – связный неориентированный граф без циклов

### **Теорема**

$G$  – граф, содержащий  $n$  вершин

Рассмотрим утверждения:

1. В нем  $n - 1$  ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связан

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево

### **Лемма**

Пусть  $G$  – дерево, содержащее  $\geq 2$  вершины

Тогда  $\exists$  вершина степени 1

(На самом деле их хотя бы две)

### **Доказательство**

Возьмем вершину  $u_1$ . Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа  $u_2$ . Если у него степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в соседа  $u_3$ , которого мы еще не посещали

Через не более  $n$  шагов мы придем в вершину  $u_i$ , все соседи которой уже посещены

Если  $u_i$  имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда  $u_i$  будет иметь степень 1

### Доказательство 2

Рассмотрим самый длинный путь в графе

Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1

Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл

Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

### Доказательство теоремы

$$2 + 3 \Rightarrow 1$$

Если  $n = 1$  – очевидно

Если  $n > 1$ : Возьмем вершину степени 1

Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе  $n - 2$  ребра

$$1 + 2 \Rightarrow 3$$

Пусть в графе  $k$  компонент связности

Если в  $i$  компоненте  $n_i$  вершин, то в ней  $n_i - 1$  ребро

Тогда всего ребер в графе  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k = n - 1$

Отсюда  $k = 1$

$$1 + 3 \Rightarrow 2$$

Если  $n = 1$  – очевидно

Если  $n > 1$  и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ациклический

Если  $n > 1$  и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше  $\frac{2 * n}{2} = n$  – противоречие

### Лемма о рукопожатии

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \underbrace{\sum_{e \in E} \sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_2 =$$

$$2|E|$$

**Теорема**

$G$  – дерево  $\Leftrightarrow \forall u, v \exists !$  простой путь  $u \rightsquigarrow v$

**Доказательство  $\Rightarrow$** 

Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой  $l_1 + l_2$  минимально

Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)

Тогда эти два пути образуют цикл

**Доказательство  $\Leftarrow$** 

Граф связан

Граф ацикличесен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути

Отсюда это дерево

**Теорема**

$G$  – связан  $\Leftrightarrow G$  связан и любое ребро – мост

**Определение**

$G$  – граф

$H$  – получен удалением из  $G$  вершин и/или ребер

$H$  – *подграф*  $G$

**Определение**

$G$  – граф

$H$  – получен из  $G$  удалением вершин (и ребер, выходящих из них)

$H$  – *индуцированный* подграф  $G$

**Определение  $G$  – граф**

$H$  – получен из  $G$  удалением ребер с сохранением связности

$H$  – *остовный* подграф  $G$

**Теорема**

У любого связного графа есть остовное дерево

**Доказательство 1**

Обойдем граф bfs-ом и получим дерево

**Доказательство 2**

Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер

Утверждается, что он будет деревом

**Доказательство 3 (жадный алгоритм)**

Будем удалять ребра, пока граф связан

Мы получим ациклический связный граф



Научимся считать количество остовных деревьев

Рассмотрим матрицу  $n \times n$ :

На диагонали напишем степень вершины

В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

**Определение**

*Матрица Кирхгофа* – матрица  $n \times n$  такая, что  $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

**Теорема**

Пусть  $G$  – связный граф

Тогда количество остовных деревьев  $G = \widehat{A_{ij}} \forall i, j$  – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы  $A$

**Лемма 1**

Рассмотрим *матрицу инцидентности*  $I_G$

Это матрица  $n \times m, m = |E|$

В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$$(\vec{I}_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(\vec{I}_G \vec{I}_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

$\vec{I}_G \vec{I}_G^T$  = матрица Кирхгофа

**Лемма 2**

Рассмотрим  $\vec{I}_G$

Выберем  $n - 1$  ребро

Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине  $u$  ( $u$  любая)

Мы получили матрицу  $n - 1 \times n - 1$

Обозначим ее как  $B$

Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то  $|B| = \pm 1$ , иначе  $|B| = 0$

### Доказательство

Рассмотрим граф  $T$ , образованный всеми вершинами и выбранными ребрами

Докажем, что если  $T$  не дерево, то  $|B| = 0$

Т.к. это не дерево и в нем  $n - 1$  ребро, то граф не связан

Рассмотрим компоненту связности, не содержащую  $u$

Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты

Утверждается, что сумма  $= 0$

Отсюда матрица вырожденная

Докажем, что если  $T$  – дерево, то  $|B| = \pm 1$

По лемме у дерева есть два листа

Тогда есть как минимум один лист, не равный  $u$ . Назовем его  $v_1$

Переставим строчку, соответствующую  $v$ , на первое место

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Т.к.  $v_1$  – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Рассмотрим дерево  $T_2$ , полученное удалением  $v_1$  из  $T$

В нем есть как минимум один лист, не равный  $u$ . Назовем его  $v_2$

Переставим строчку, соответствующую  $v_2$ , на второе место

Т.к.  $v_2$  – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место

Повторим действия

В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой  $\pm 1$

Отсюда определитель будет  $\pm 1$

### Лемма 3 (Формула Коши-Бине)

Пусть даны матрицы  $r \times s$  и  $s \times r$ ,  $r \leq s$

$\det AB = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \dots i_r} \det B_{i_1 \dots i_r}$  – оставили только столбцы  $i_1 \dots i_r$ ,  $B_{i_1 \dots i_r}$  – оставили только строки  $i_1 \dots i_r$

**Лемма 4**

$$\widehat{A_i i} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T)$$

Т.к.  $m = |E| \geq n - 1$ , применим лемму 3:

$$\widehat{A_i j} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}}^{i_1 \dots i_{n-1}} \det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^{i_1 \dots i_{n-1}}}_{1, \text{ если образует ост.д, иначе } 0}$$

Отсюда  $\widehat{A_i j}$  = кол-во остовных деревьев

## 1.4 Ориентированные деревья

**Определение**

Пусть  $G$  – ориентированный граф

*Подвешенное корневое дерево* – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень

*Обратное подвешенное корневое дерево* – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину

**Теорема Тутта**

*Лапласиан* графа  $G$  – матрица  $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$  – позволяет

искать исходящие остовные корневые деревья

(Для входящих  $\deg^+$  и  $ji \in E$ )

Количество остовных корневых деревьев с корнем  $i$  равно  $\widehat{L(G)}_{ii}$

**Определение**

Пусть  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

*Функциональный граф* – граф  $G : (i, f(i)) \in E$

В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья

Всего существует  $n^n$  функциональных графов

Число функциональных подграфов =  $\prod_{u \in v} \deg^- u$

## 1.5 Обход графа

**Определение**

*Эйлеров путь/цикл* – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

*Гамильтонов путь/цикл* – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз

Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)

### Теорема

$G$  – Эйлеров  $\Leftrightarrow$  Все его ребра лежат в одной компоненте связности и  $\forall v \deg v$  – четное

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли

Остудя степени четные и компонента связности одна

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности

Докажем индукцией по числу ребер

Если ребер 0, доказано

Пусть ребер  $> 0$

//todo

### Теорема

$G$  содержит эйлеров путь  $\Leftrightarrow$  Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени

**Доказательство**

Если она одна, то начнем обход в ней

Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее

### Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл  $\Leftrightarrow$  граф слабо связан и  $\forall v \deg^-(v) = \deg^+(v)$

### Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров путь  $\Leftrightarrow$  граф слабо связан и  $\deg^-(v) = \deg^+(v)$  для не более чем двух вершин  $a, b$ , а  $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$  и  $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$

### Задача

Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их  $\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max(\frac{\text{odd}(C)}{2}, 1)$ ,  $\text{odd}(C)$  – кол-во вершин нечетной степени в  $C$

Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их 
$$\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max\left(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1\right)$$

### **BEST-Теорема**

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов

$$E = A \prod_{u \in V} (\deg^- u - 1)!$$

### **Доказательство**

Выберем стартовое ребро  $xr$

//todo лекция 3