

# Теория вероятности. Теория

Александр Сергеев

## 1 Вероятностное пространство. Вероятность и ее свойство

### Определение

*Алгебра событий:*

$\Omega$  – множество элементарных исходов

$\mathcal{A}$  – набор подмножеств  $\Omega$

$\mathcal{A}$  – алгебра, если

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A + B \in \mathcal{A}$

Элементы алгебры – *события*

### Операции с событиями

1.  $A \cup B = A + B$
2.  $A \cap B = AB = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$
3.  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
4.  $A \setminus B = A - B = A\bar{B}$

### Определение

$\sigma$ -алгебра

$\mathcal{A}$  – сигма-алгебра

1.  $\mathcal{A}$  – алгебра

$$2. A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$$

### Определение

События  $A, B$  – *несовместные*  $AB = \emptyset$

Набор несовместный, если события попарно несовместные

### Определение(вероятностное пространство)

$\Omega$  – множество элементарных исходов

$\mathcal{A}$  – сигма-алгебра

$P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  – вероятность, если

$$1. P(A) \geq 0$$

$$2. P(\Omega) = 1$$

$$3. P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$

### Определение(вероятностное пространство в широком смысле)

$\Omega$  – множество элементарных исходов

$\mathcal{A}$  – алгебра

$P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  – вероятность, если

$$1. P(A) \geq 0$$

$$2. P(\Omega) = 1$$

$$3. \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

### Теорема о продолжении меры

$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$  – вероятностное пространство в широком смысле

Тогда  $\exists ! Q : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  – вероятность,  $Q \Big|_{\mathcal{A}} = P$ , где  $\sigma(\mathcal{A})$  – сигма-алгебра, содержащая  $\mathcal{A}$

### Определение

$\mathcal{A}$  – система интервалов на  $\mathbb{R}$ , замкнутая относительно конечного объединения и пересечения

$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$  – борелевская сигма-алгебра

### Примеры вероятностных пространств

1. Модель классической вероятности

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega$$

$$P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i) = \frac{1}{N}$$

$$\mathcal{A} = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \frac{M}{N}$$

2.  $\Omega$  – набор  $\{0^i, 1\}, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$P(0^i 1) = q^i p$$

3. Модель геометрической вероятности  $\Omega$  – ограниченное, измеримое по Лебегу множество

$\mathcal{A}$  – измеримое по Лебегу подмножество  $\Omega$

$$P(A) = \frac{\lambda A}{\lambda \Omega}$$

### Теорема (свойство вероятности)

1.  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2.  $P(A) \leq 1$
3.  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
4.  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5.  $P(\emptyset) = 0$
6.  $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

### Доказательство

1.  $P(B) = P(A) + P(B - A)$
2.  $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$
3.  $A \sqcup \bar{A} = \Omega$
4.  $B = AB \sqcup (B \setminus AB)$
5.  $B_1 = A_1 \quad B_2 = A_2 \setminus A_1$   
 $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \quad \bigsqcup B_i = \bigcup A_i$   
 $B_i \subset A_i$   
 $P(\bigcup A_i) = P(\bigsqcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i)$

**Теорема (формула включения/исключения)**

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < \dots < i_n} P(A_{i_1} \dots A_{i_n})$$

**Доказательство**

Доказательство по индукции

**Теорема**

$\mathcal{A}$  – алгебра(?) на  $\Omega$ ,  $p$  – мера

Тогда равносильны

1.  $p$  – счетно-аддитивно
2.  $p$  – конечно-аддитивно  $+\forall (B_n)_{n=1}^\infty : B_{n+1} \subset B_n, B = \bigcap B_n \Rightarrow P(B_n) \rightarrow P(B)$  – непрерывность сверху
3.  $p$  – конечно-аддитивно  $+\forall (A_n)_{n=1}^\infty : A_{n+1} \supset A_n, A = \bigcup A_n \Rightarrow P(A_n) \rightarrow P(A)$  – непрерывность снизу

**Доказательство (непрерывность сверху)  $\Leftrightarrow$  (непрерывность снизу)**

$$A(n) : A_n \subset A_{n+1}; A = \bigcup A_n$$

$$B_n := \overline{A_n}, B := \overline{A}$$

$$B_n \supset B_{n+1}$$

$$B = \overline{A} = \overline{\bigcup A_n} = \bigcap \overline{A_n} = \bigcap B_n$$

$$p(B_n) = 1 - p(A_n) \rightarrow 1 - p(A) = p(B)$$

**Доказательство  $1 \rightarrow 2$**

$$C_1 = B_1 \overline{B_2}$$

$$C_2 = B_2 \overline{B_3}$$

$$C_k = B_k \overline{B_{k+1}}$$

$$B_k = B \sqcup \bigsqcup_{j=k}^\infty C_j$$

$$p(B_k) = p(B) + \underbrace{\sum_{j=k}^\infty p(C_j)}_{\rightarrow 0}$$

$$p(B_k) \rightarrow p(B)$$

**Доказательство  $2 \rightarrow 1$**

$$\sum_{k=1}^\infty p(C_k) = \lim_n \sum_{k=1}^n p(C_k) = \lim_n p\left(\bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = p(B)$$

## 2 Условная вероятность. Формула полной вероятности. Теорема Байеса

**Определение (условная вероятность)**

$(\Omega, \mathcal{A}, p)$  – вероятностное пространство

$B \in \mathcal{A} : p(B) > 0$

$$p_B(A) = p(A|B) := \frac{p(AB)}{p(B)}$$

**Замечание**

$$p(AB) = p(A)p(B|A)$$

**Теорема (формула произведения вероятностей)**

$$p(A_1 \dots A_n) = p(A_1)p(A_2|A_1) \dots p(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

**Доказательство**

Тривиально

**Определение**

$A_1, \dots, A_n$  – независимые, если  $\forall A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \ p(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \dots p(A_{i_k})$

**Теорема (формула полной вероятности)**

$$A \subset \bigsqcup_k B_k \text{ (как правило, } \bigsqcup_k B_k = \Omega \text{)}$$

$$\text{Тогда } p(A) = \sum_k p(A|B_k)p(B_k)$$

**Доказательство**

$$p(A) = p(A \cap \bigsqcup_k B_k) = p(\bigsqcup_k AB_k) = \sum_k p(AB_k) = \sum_k p(A|B_k)p(B_k)$$

**Теорема Байеса**

Краткая форма:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

Полная:

$$A \subset \bigsqcup_k B_k$$

$$\underbrace{p(B_k|A)}_{\text{апостериорные; posterior}} = \frac{\underbrace{p(A|B_k)}_{\text{likelihood}} \underbrace{p(B_k)}_{\text{априорные; prior}}}{\sum_j p(A|B_j)} p(B_j)$$

**Доказательство краткой формы**

$$p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$$

### 3 Схема Бернулли. Полиномиальная схема. Предельные теоремы, связь со схемой Бернулли

#### Определение (независимые испытания)

$n \in \mathbb{N}$

$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1), \dots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, p_n)$  – вероятностные пространства, описывающие виды экспериментов

$$\Omega^{(n)} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$$

$$\mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$$

$$p^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p^{(n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = p_1(A_1) \cdot \dots \cdot p_n(A_n)$$

$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$  – описание  $n$  независимых испытаний

#### Замечание

$\mathcal{A}^{(n)}$  может не быть сигма-алгеброй

$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$  – вероятностное пространство в широком смысле

$\sigma(\mathcal{A}^{(n)})$  – сигма-алгебра

#### Определение (схемы Бернулли)

$n \in \mathbb{N}$

$p \in (0, 1)$  – вероятность успеха

$q = 1 - p$  – вероятность неудачи

$$\Omega = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega$$

$$\Omega^{(n)} = \{0, 1\}^n$$

$w \in \Omega^{(n)}$  – вектор из нуля и единиц

$$p(w) = p^{\sum w_i} q^{n - \sum w_i}$$

$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$  – схема Бернулли

#### Теорема

$S_n$  – количество успехов в  $n$  испытаниях

$$p(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

#### Теорема (о наиболее вероятном $k_*$ )

$$p_k := p(S_n = k)$$

$$\frac{p_k}{p_{k+1}} = \frac{(k+1)q}{(n-k)p} \vee 1$$

$$(k+1)(1-p) \vee (n-k)p$$

$$k + 1 - pk - p \vee np - pk$$

$$k \vee (n + 1)p - 1$$

$$1. \ p(n + 1) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } \exists k_0 : k_0 = p(n + 1) - 1$$

$$\text{Если } k < k_0, \text{ то } p_k < p_{k_0+1}$$

$$\text{Если } k = k_0, \text{ то } p_{k_0} = p_{k_0+1}$$

$$\text{Если } k > k_0, \text{ то } p_k > p_{k_0+1}$$

$$\text{Т.о. } k_0, k_0 + 1 - \text{наиболее вероятные}$$

$$2. \ p(n + 1) \notin \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } \exists k_1 : p_{k_1} < p_{k_1+1}, p_{k_1+1} > p_{k_1+2}$$

$$\text{Т.о. } k_1 - \text{наиболее вероятные}$$

$$\text{Тогда } k_* = \begin{cases} \lceil p(n + 1) - 1 \rceil, & p(n + 1) \notin \mathbb{N} \\ p(n + 1) - 1, p(n + 1), & p(n + 1) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

**Утверждение**

$$p(S_n \geq 1) = 1 - q^n$$

**Утверждение**

$$\alpha \in (0, 1)$$

$$p \in (0, 1)$$

$$n : p(S_n \geq 1) \geq \alpha$$

$$\text{Ответ: } n = \lceil \log_q(1 - \alpha) \rceil$$

**Определение (полиномиальная схема)**

$n$  – количество испытаний

$m$  – количество возможных исходов

$p = (p_1, \dots, p_m)$  – вектор вероятностей исходов

$$\sum p = 1$$

$$\Omega = \{(i_1, \dots, i_m)^T \in \{0, 1\}^m : \sum_j i_j = 1\} - \text{множество столбцов с одной}$$

единицей

$$\Omega^{(n)} = \{A \in M_{m \times n} : A_{ij} \in \{0, 1\}, \sum_i A_{ij} = 1\}$$

$$p(A) = p_1^{\sum_j A_{1,j}} \cdot \dots \cdot p_m^{\sum_j A_{m,j}}$$

**Теорема**

$S_{n,j}$  – количество исходов типа  $j$  в  $n$  испытаниях

$$p(S_{n,1} = k_1, \dots, S_{n,m} = k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}, \sum k_j = n$$

**Теорема (закон больших чисел в форме Бернулли)**

$$\forall \varepsilon \ p(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \xrightarrow{n} 0$$

**Теорема (теорема Пуассона)**

$p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}), n \rightarrow \infty$  – схема серий из  $n$  испытаний (вероятность успеха при  $n$  испытаниях)

$$\text{Тогда } p(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} p(S_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} (\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k (1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (n-j)}{n^k} (\lambda + o(\frac{1}{n}))^k \frac{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^n}{(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

**Замечание (о погрешности)**

$$\lambda = np$$

$$\text{Тогда } |p(S_n = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}| \leq np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$$

**Лемма 1**

$$k \rightarrow \infty, (n \geq k \Rightarrow n \rightarrow \infty)$$

$$p_* = \frac{k}{n}$$

$$H(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-p} - \text{энтропия}$$

$$n-k \rightarrow \infty \Rightarrow p(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}} \exp(-nH(p_*))$$

**Доказательство**

$$\begin{aligned} p(S_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} p^k (1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} = \\ &= \frac{n^k n^{n-k} (1-p)^{n-k} p^k}{\sqrt{2\pi p_* n (1-p_*)} k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{\dots}} \exp \ln \frac{n^k p^k}{k^k} \cdot \frac{n^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)^{n-k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} \exp k \ln \frac{p}{p_*} + (n-k) \ln \frac{n(1-p)}{n-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} \exp \underbrace{\left( -n \left( p_* \ln \frac{p}{p_*} + (1-p_*) \ln \frac{1-p_*}{1-p} \right) \right)}_{H(p_*)} \end{aligned}$$

**Лемма 2**

$$H(p_*) = \frac{1}{2p(1-p)} (p-p_*)^2 + O((p-p_*)^3)$$

При  $p_* \rightarrow p$



**Доказательство**

$$H(p) = 0$$

$$H'(x) = \ln \frac{x}{p} - 1 - \ln \frac{1-x}{1-p} + 1; H'(p) = 0$$

$$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}; H''(p) = \frac{1}{p(1-p)}$$

**Теорема (локальная предельная Муавра-Лапласа)**

Требуем Лемму 1 + ( $k - np = o(n^{\frac{2}{3}})$ )

$$\text{Тогда } p(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)}\right)$$

**Доказательство**

$$p_* - p = o(n^{-\frac{1}{3}}) - \text{из } k - np = o(n^{\frac{2}{3}})$$

Применим Л2

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}} \exp(-nH(p_*))}_{\text{из Л1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}} \exp\left(-n\left(\frac{(p-p_*)^2}{2p(1-p)} + O((p-p_*)^3)\right)\right) \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{n(\frac{k}{n} - p)^2}{2p(1-p)} + nO(o(n^{-1}))\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(k - np)^2}{2np(1-p)} + o(1)\right)$$

**Теорема(интегральная Муавра-Лапласа)**

$$F_n(x) = p\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{Тогда } \sup_{-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq +\infty} |F_n(x_2) - F_n(x_1) - \underbrace{(\Phi(x_2) - \Phi(x_1))}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Замечание**

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq C \frac{p(1-p)^3 + (1-p)p^3}{(pq)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}} = C \frac{(1-p)p((1-p)^2 + p^2)}{(pq)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}} \leq$$

$$C \frac{1}{\sqrt{pqn}}$$

По последним оценкам  $C < 1$

## 4 Случайные величины. Распределение случайной величины

### Определение

Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – вероятностное пространство

$\mathcal{B}$  – борелевская сигма-алгебра (минимальная сигма-алгебра, содержащая все интервалы)

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – случайная величина, если  $X$  – измеримо, т.е.  $\forall B \in \mathcal{B}$  – борелевская сигма-алгебра  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

$P_X : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  – распределение случайной величины, если  $P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$  для всех  $B \in \mathcal{B}$

### Замечание (обозначения)

Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами из конца алфавита ( $X, Y, U, W$ ) или маленькими греческими  $\xi, \nu, \eta$

### Замечание

$P_X$  удовлетворяет аксиомам вероятности

### Определение

Функция распределения  $F_X(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega : X(\omega) \leq t\}), t \in \mathbb{R}$

### Теорема (свойства функции распределения)

1.  $F$  не убывает
2.  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3.  $F$  – непрерывна справа

### Доказательство

1.  $t_1 < t_2$   
 $F(t_2) = F(t_1) + P(\{\omega : t_1 < X(\omega) \leq t_2\}) \geq F(t_1)$
2. Пусть  $t_n$  – монотонно возрастает к  $+\infty$   
 $(-\infty, t_n] \subset (-\infty, t_{n+1}]$   
 $\bigcup (-\infty, t_n] = \mathbb{R}$   
Тогда  $F(t_n) \rightarrow P(X \in \mathbb{R}) = 1$   
Пусть  $t_n$  – монотонно убывает к  $-\infty$

$$\begin{aligned}
&(-\infty, t_n] \supset (-\infty, t_{n+1}] \\
&\bigcap (-\infty, t_n] = \emptyset \\
&\text{Тогда } F(t_n) \rightarrow P(X \in \emptyset) = 0
\end{aligned}$$

3. Пусть  $t_n$  – монотонно стремится к 0
- $$\begin{aligned}
&F(x_0 + t_n) \rightarrow F(x_0) \\
&(-\infty, x_0 + t_{n+1}] \subset (-\infty, x_0 + t_n] \\
&\bigcap (-\infty, x_0 + t_n] = (-\infty, x_0] \\
&F(x_0 + t_n) = P(X \leq x_0 + t_n) \rightarrow P(X \leq x_0) = F(x_0)
\end{aligned}$$

### Замечание (непрерывность слева)

Пусть  $t_n$  – монотонно стремится к 0

$$\begin{aligned}
&F(x_0) - F(x_0 - t_n) = P(X \leq x_0) - P(X \leq x_0 - t_n) = P(x_0 - t_n < X \leq x_0) \\
&(x_0 - t_n, x_0] \supset (x_0 - t_{n+1}, x_0] \\
&\bigcap (x_0 - t_n, x_0] = \{x_0\} \\
&\text{Т.о. } F(x_0) - F(x_0 - t_n) \rightarrow P(X = x_0) - \text{иногда не } 0 \\
&\text{Т.о. нет непрерывности слева}
\end{aligned}$$

### Лемма

$$\forall (B_n) : B_{n+1} \subset B_n, B = \bigcap B_n \quad P(B_n) \rightarrow P(B)$$

$$\text{Равносильно } \forall (A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \emptyset \quad P(A_n) \rightarrow 0$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$A_n = B_n \setminus B$$

$$A_{n+1} \subset A_n$$

$$\bigcap A_n = \emptyset$$

$$\underbrace{P(A_n)}_{P(B_n) - P(B)} \rightarrow 0$$

$$P(B_n) - P(B)$$

**Теорема (о достаточности  $F$  для описания вероятностного распределения)**

Пусть  $F$  не убывает,  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0, F$  – непрерывно справа

Тогда  $\exists (\Omega, \mathcal{A}, P), X$  – случайная величина, такие что  $F_X = F$

**Доказательство**

$$\Omega := \mathbb{R}$$

$\mathcal{A}$  – система интервалов вида  $(a, b]$  (+все лучи и  $\mathbb{R}$ ), замкнутая относительно конечного числа  $\sqcup$ , т.е.  $\mathcal{A}$  – алгебра

$$A := \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k], P(A) := \sum_{k=1}^n (F(b_k) - F(a_k))$$

$$P(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

Проверим счетную аддитивность

Пусть  $(A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \emptyset$

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} (a_{nk}, b_{nk}]$$

Пусть все  $A_n \subset [-M, M]$

Тогда  $\exists (B_n) : cl(B_n) \subset A_n$  и  $P(A_n) - P(B_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ ,  $cl(\bullet)$  – замыкание

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{k_n} (a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$$

$$cl(B_n) = \bigcup_{k=1}^{k_n} [a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$$

$$P(A_n) - P(B_n) = \sum_{k=1}^{k_n} F(b_{nk}) - F(a_{nk} - F(b_{nk}) + F(a_{nk} + \delta)) = \sum_{k=1}^{k_n} (F(a_{nk} +$$

$$\delta) - F(a_{nk})) < \frac{\varepsilon}{2^n} - \text{при правильном } \delta, k_n$$

$$cl(B_n) \subset A_n$$

$$\bigcap cl(B_n) \subset \emptyset$$

$$\bigcap cl(B_n) = \emptyset$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} = \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$$

$cl(B_n)$  – открыто

$[-M, M]$  – компакт

$$\text{Тогда } \bigcup_{n=1}^N \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$$

$$\text{Тогда } \bigcap_{n=1}^N cl(B_n) = \emptyset$$

$$\bigcap_{n=1}^N B_n = \emptyset$$

$$P(A_n) = P(A_N \setminus \bigcap_{n=1}^N B_n) + P(\bigcap_{n=1}^N B_n) = P(\bigcup_{n=1}^N (A_N \setminus B_n)) \leq \sum_{n=1}^N P(A_N \setminus B_n) \leq$$

$$\sum_{n=1}^N P(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=1}^N P(A_n) - P(B_n) \leq \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$$

Тогда  $P(A_n) \rightarrow 0$

Теперь пусть  $A_n$  – не ограниченные

$\varepsilon > 0$

$\exists [-M, M] : P(X \in [-M, M]) < \varepsilon$

$N : F(N) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, F(-N) < \frac{\varepsilon}{2}$

$F(N) = F(-N) + P((-N, N]) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

$F(N) = 1 - P((N, +\infty))$

$P((N, +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$

$P(A_n) = P(A_n \cap [-M, M]) + P(A_n \cap [-M, M]) \leq P([-M, M]) < \varepsilon$

Т.о.  $P$  – вероятность

$X(\omega) := \omega$

$F_X(t) = P((-\infty, t]) = F(t)$

**Замечание**

## 5 Дискретные случайные величины и распределения

**Определение**

$X, P_x$  – дискретные, если существует не более чем счетное  $E : P(X \in E) = 1$

$F(t) = P(X \leq t) = \sum_k p(k) \mathbb{1}(t \geq x_k), \mathbb{1}(cond) = (int)(cond)$

**Примеры**

1. Вырожденное:

$$P(X = c) = 1$$

$$X \sim I(c), I_c$$

2. Дискретное равномерное на  $\{x_1, \dots, x_n\}$

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

$$DU(x_1, \dots, x_n)$$

3. Распределение Бернулли

$$Bern(p), p \in (0, 1)$$

$$P(X = 0) = q = 1 - p, P(X = 1) = p$$

4. Биномиальное;  $Bin(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}$$

5. Полиномиальное;  $Poly(n, p)$

$p = (p_1, \dots, p_m)$  – вектор вероятностей

$$P(S_1 = k_1, \dots, S_m = k_m) = \binom{n}{k_1, \dots, k_m} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$$

6. Геометрическое;  $Geom(p)$

$X$  – количество неудач до первого успеха

$$P(X = k) = q^k p, k \in \mathbb{N}_0$$

**Альтернативная интерпретация геометрического распределения**

$X$  – номер первого успеха

$$P(X = k) = q^{k-1} p, k \in \mathbb{N}$$

7. Отрицательное биномиальное;  $NB(r, p), p \in (0, 1), r > 0$

- $r \in \mathbb{N}$  :

$X \sim NB(r, p) \Leftrightarrow X$  – номер  $r$ -ого успеха (начало отсчета в  $r$ )

$P(X = k) = P(\text{успех с номером } r \text{ случился на шаге } k + r) =$

$$\binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k$$

- Если  $r \in \mathbb{R}$ , то  $P(X = k) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(r)k!} p^r q^k$

8. Распределение Пуассона:  $Pois(\lambda), \lambda > 0$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$$

9. Гипергеометрическое

$$HG(M, N, K)$$

$M \in \mathbb{N}$  – количество деталей

$N \in [1 : M]$  – количество «хороших» деталей

$K \in [1 : M]$  – количество деталей, которые мы вытаскиваем (без

возвращения)

$X$  – количество «хороших» деталей, которые мы вытащили

$$P(X = j) = \frac{\binom{N}{j} \binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}, \max(K + N - M, 0) \leq j \leq \min(N, K)$$

Пусть  $M \rightarrow \infty, \frac{N}{M} \rightarrow p$

$$\begin{aligned} P(X = j) &= \frac{N!(M-N)!K!(M-K)!}{j!(N-j)!(K-j)!(M-N-K+j)!M!} \\ &= \binom{K}{j} \frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{M(M-1)\dots(M-N+1)} \frac{(M-K)\dots(M-N-K+j+1)}{M^j} \rightarrow \\ &= \binom{K}{j} p^j (1-p)^{K-j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{j=\max(0, N+K-M)}^{\min(N, K)} j \frac{\binom{N}{j} \binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} = \\ &= \sum_{j=\max(1, N+K-M)}^{\min(N, K)} j \frac{\binom{N}{j} \binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} = \\ &= N \sum_j \frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!} \frac{\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} = \\ &= \frac{NK}{M} \sum_j \frac{\binom{N-1}{j-1} \binom{M-N}{K-j}}{\binom{M-1}{K-1}} = \\ &= \frac{NK}{M} \underbrace{\sum_{i=\max(0, N+K-M-1)}^{\min(N-1, K-1)} \frac{\binom{N-1}{i} \binom{M-N}{K-i-1}}{\binom{M-1}{K-1}}}_1 = \frac{NK}{M} \end{aligned}$$

## 6 Абсолютно непрерывные распределения

### Определение

$X, P_X$  – абсолютно непрерывные, если  $\exists p(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) \geq 0, p(x)$  – интегрируемо по Лебегу на  $\mathbb{R}$

$$P(X \in B) = \int_B p(x) dx, B \in \mathcal{B}$$

$p$  – плотность

### Теорема

1.  $P(X = c) = 0$ , т.к.  $P(X = c) = \int_{\emptyset} \dots = 0$
2. (a)  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(t) \, dt$   
 (b)  $F(x)$  – непрерывна (равномерно непрерывная)  
 (c)  $F'(x) = p(x)$  почти везде
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1$
4.  $P(X \in (x_0, x_0 + h)) = F(x_0 + h) - F(x_0) = p(x_0)h + o(h) \approx p(x_0)h$   
 при малых  $h$

### Определение (носитель)

$E$  – носитель  $(\text{supp } P_X) \Leftrightarrow P(X \in E) = 1, E = \overline{E}, E$  наименьшее по включению

### Замечание

$\lambda$  – мера Лебега

$\nu$  – другая мера, заданная на  $\mathcal{B}, \nu(\mathbb{R}) < +\infty$

$\nu$  – абсолютно непрерывна относительно  $\lambda \Leftrightarrow \lambda(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$

$\nu \ll \lambda$

### Теорема Радона-Никодима

$\nu \ll \lambda \Rightarrow \exists f(x) : \nu(B) = \int_B f(x) \lambda(dx)$

### Пример

1.  $U[a, b]$ : Равномерное на  $[a, b]$

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}(x \in [a, b])$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t p(x) \, dx = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq b \\ 1, & t > b \end{cases}$$

$$X \sim U[a, b]$$

$$Y = cX + d, c > 0$$

$$Y \sim U[ca + d, cb + d]$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(cX + d \leq t) = P(X \leq \frac{t-d}{c}) = F_X(\frac{t-d}{c})$$



2.  $N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ : Нормальное распределение

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$\mu$  – высота графика,  $\sigma$  – ширина

$N(0, 1)$  – стандартный нормальный закон

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

**Доказательство**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{-x} \dots + \int_{-x}^x \dots = \int_{-\infty}^{-x} \dots + 2 \int_0^x \dots = \int_{-\infty}^{-x} \dots + 2 \left( \int_{-\infty}^x \dots - \int_{-\infty}^0 \dots \right) = \Phi(-x) + 2\left(\Phi(x) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функция Лапласа; } \Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y_{\text{изм}} = y_{\text{реал}} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

$$P(|y_{\text{изм}} - y_{\text{реал}}| > \delta) = P(|\varepsilon| > \delta)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Y = aX + b$$

$$F_Y(t) = P(aX + b \leq t) \underset{a>0}{=} P\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_x\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$p_Y(t) = \left(F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)\right)'_t = p_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a} = \dots$$

$$Y \sim N(a\mu + b, \sigma^2 a^2)$$

Для  $a < 0$  аналогично

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow U \sim N(0, 1)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) = P(-k\sigma < X - \mu < k\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \in (-k, k)\right) =$$

$$\Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k) - 1$$

3.  $\text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ : Экспоненциальное/показательное

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}(x \geq 0)$$

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}(x \geq 0)$$

4.  $\Gamma(\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$ : Гамма-распределение

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}(x \geq 0)$$

$$\Gamma(1, \beta) = \text{Exp}(\beta)$$

$$\beta = \text{rate}$$

$$\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{распределение Эрланга порядка } k$$

5.  $\text{Cauchy}(x_0, \gamma)$ : Распределение Коши

$$x_0 \in \mathbb{R} - \text{сдвиг}$$

$$\gamma > 0 - \text{scale}$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi \gamma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2}$$

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi \gamma} \int_{-\infty}^t \frac{dx}{1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2} = \left| \frac{\frac{x-x_0}{\gamma} = a}{dx = \gamma du} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{t-x_0}{\gamma}} \frac{du}{1+u^2} =$$

$$\frac{1}{\pi} \arctg u \Big|_{-\infty}^{\frac{t-x_0}{\gamma}} = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{t-x_0}{\gamma} + \frac{1}{2}$$

**Пример**

$$X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$$

$$Y = \frac{1}{X}$$

$$F_Y(t) = P\left(\frac{1}{X} \leq t\right) = P\left(\frac{1}{X} \leq t, X < 0\right) + P\left(\frac{1}{X} \leq t, X > 0\right)$$

$$P\left(\frac{1}{X} \leq t, X < 0\right):$$

$$t \geq 0 \Rightarrow P(\dots) = P(X < 0) = \frac{1}{2}$$

$$t < 0 \Rightarrow P(X \leq 1, X < 0) = P(X \geq \frac{1}{t}, X < 0) = F(0) - F\left(\frac{1}{t}\right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{1}{t} = -\frac{1}{\pi} \arctg \frac{1}{t}$$

$$P\left(\frac{1}{X} \leq t, X > 0\right):$$

$$t \leq 0 \Rightarrow P(\dots) = 0$$

$$t > 0 \Rightarrow P(X \geq \frac{1}{t}, X > 0) = P(X \geq \frac{1}{t}) = 1 - F(\frac{1}{t}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$$

$$\text{T.o. } P(\frac{1}{X} \leq t, X > 0) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}, & t > 0 \end{cases}$$

### Теорема

Пусть  $p_x$  – плотность с.в.  $X$

$Y = g(X), g \in C^1$

$g'$  строго монотонна

Тогда  $p_Y(y) = p_x(g^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y}(g^{-1}(y)) \right| = p_x(g^{-1}(y)) \frac{1}{|g'_x(g^{-1}(y))|}$

### Доказательство

Пусть  $g' \geq 0$

$F_Y(t) = P(g(X) \leq t) = P(X \leq g^{-1}(t)) = F_X(g^{-1}(t))$

$p_Y(t) = (F_Y(t))'_t = p_X(g^{-1}(t)) \frac{\partial g^{-1}(t)}{\partial y}$

Пусть  $g' < 0$

$F_Y(t) = 1 - F_X(g^{-1}(t))$

$p_Y(t) = -p_X(g^{-1}(t)) \frac{\partial g^{-1}(t)}{\partial y}$

## 7 Сингулярное распределение

### Определение

$X, P_X$  – сингулярное  $\Leftrightarrow \operatorname{supp} P_X = E$  &  $\lambda E = 0$  и  $\forall x \in E P(X \in E) = 0$

### Замечание

Сингулярное  $\Leftrightarrow \lambda\{x : F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0\} = 0 \forall \varepsilon$

### Теорема Лебега о разложении $F$

$F$  – функция распределения

Тогда  $\exists c_1, c_2, c_3 \geq 0 : c_1 + c_2 + c_3 = 1, F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x), F_1$

– функция распределения дискретной величины,  $F_2$  – функция распределения, абсолютно непрерывная,  $F_3$  – функция распределения сингулярного закона

### Замечание

У  $F$  могут быть только скачки, не более чем счетное количество

## 8 Случайные векторы

### Определение

$X = \{X_1, \dots, X_n\}$  – случайный вектор (многомерная случайная величина), если  $X_i$  – случайная величина

$P_X(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$  – распределение случайного вектора (совместное распределение случайных величин  $X_1, \dots, X_n, B_i \in \mathcal{B}$ )

$P_X : \sigma(\mathcal{B}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

### Определение

$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$  – совместная функция распределения

### Свойства

1.  $x_i \rightarrow -\infty$  для некоторого  $i \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0$
2.  $x_i \rightarrow +\infty$  для всех  $i \Rightarrow F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow 1$
3.  $F$  – непрерывна справа по каждой переменной
4.  $\Delta_i F(x_1, \dots, x_i + \delta_i, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)$   
 $\Delta_1, \dots, \Delta_n F \geq 0 \forall x_1, \dots, x_n \forall \delta_1, \dots, \delta_n \geq 0$

### Теорема

$F$  – функция, для которой справедливы свойства 1 – 3

Тогда существует вероятностное пространство и случайная величина с данной функцией распределения

### Определение

$X_i, P_X$  – дискретно, если  $\text{supp } P_X$  – не более чем счетный

### Замечание

$\text{supp } P_X \neq \times_{i=1}^n \text{supp } P_x$

Одномерное распределение = *Маргинальное* распределение

### Пример

Полиномиальное:  $\text{Poly}(n, p)$

$n \in \mathbb{N}$

$p = (p_1, \dots, p_n), \sum p_j = 1$

$S_n = (S_{n,1}, \dots, S_{n,m})$

$P(S_{n,1} = k_1, \dots, S_{n,m} = k_m) = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$

$\sum k_i = n, k_i \geq 0$

$$S_{nj} \sim \text{Bin}(n, p_j)$$

**Определение**

$X, P_X$  – абсолютно непрерывная  $\Leftrightarrow \exists p(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  – плотность распределения

$$P(X \in B) = \int_B p(x) \, dx$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, \dots, t_n) \, dt_1 \dots dt_n$$

$$p(t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

$$P(G(X) \in B) = \int_{x: F(x) \in B} p(x) \, dx, G - \text{некая функция}$$

**Определение (равномерное распределение на подмножестве)**

$$U(E) : p(x) = \frac{1}{\mu E} \mathbb{1}(x \in E), \mu - \text{мера}$$

**Теорема (о плотности функции от непрерывного случайного вектора)**

Пусть  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g$  – гладкая биекция

$$\text{Тогда } p_{g(U)}(t) = p_U(g^{-1}(t)) |\det(g^{-1})'(t)| = \frac{p_U(g^{-1}(t))}{|\det g'(g^{-1}(t))|}$$

**Определение (многомерное нормальное распределение/гауссовский вектор)**

1.  $X = (X_1, X_n)$  – стандартный гауссовский вектор, если  $p_X = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2), \|x\|^2 =$

$$x^T x = \sum x_i^2$$

$$X \sim N(0, E_n), 0 \in \mathbb{R}^n$$

2.  $X \sim N(0, E_n), Y = AX + b, A \in M_{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Y \sim N(b, AA^T)$

3.  $U \sim N(\mu, \Sigma), \text{ где } \mu \in \mathbb{R}^n, \Sigma \in M_{n \times n}$

$$\Sigma = \Sigma^T, \Sigma > 0$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i \geq 0$$

$$\Lambda = L^T \Sigma L, L = (u_1, \dots, u_n) - \text{ОНБ}, L^T L = E$$

$$\Sigma = L \Lambda L^T = L = \underbrace{L \sqrt{\Lambda} L^T}_{\sqrt{\Sigma}} \underbrace{L \sqrt{\Lambda} L^T}_{\sqrt{\Sigma}}$$

$$U = \sqrt{\Sigma} X + \mu, X \sim N(0, E)$$

$$\Sigma > 0 \Rightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\det \Sigma}} \exp -\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)$$

$$\begin{aligned}
X &= \sqrt{\Sigma}^{-1}(X - \mu) \\
Y' &= (\sqrt{\Sigma})^{-1} \\
\det \Sigma &= \det \sqrt{\Sigma}^2 \\
|\det \sqrt{\Sigma}| &= \sqrt{\det \Sigma} \\
p_U(t) &= \frac{p_X(g^{-1}(t))}{|\det g'(g^{-1}(t))|} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{\Sigma})^{-1}(t - \mu)^T(\sqrt{\Sigma})^{-1}(t - \mu)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(t - \mu)^T \Sigma^{-1}(t - \mu)\right)
\end{aligned}$$

## 9 Независимые случайные величины

### Определение

$X_1, \dots, X_n$  – независимые, если  $\forall B_1, \dots, B_n \ P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$

Последовательность независима, если любой ее префикс независимый

### Теорема (общий критерий независимости)

Величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы  $\Leftrightarrow F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$

**Доказательство**  $\Rightarrow$  очевидно

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Докажем для размерности 2

$$\begin{aligned}
P(X_1 \in (a_1, a_1 + \delta_1], X_2 \in (a_2, a_2 + \delta_2]) &= \\
\Delta_1 \Delta_2 F(a_1, a_2) &= \Delta_1 [F(a_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1, a_2)] = \\
F(a_1 + \delta_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1, a_2 + \delta_2) - F(a_1 + \delta_1, a_2) + F(a_1, a_2) &= \\
F_1(a_1 + \delta_1) F_2(a_2 + \delta_2) - F_1(a_1) F_2(a_2 + \delta_2) - F_1(a_1 + \delta_1) F_2(a_2) + F_1(a_1) F_2(a_2) &= \\
(F_1(a_1 + \delta_1) - F_1(a_1))(F_2(a_2 + \delta_2) - F_2(a_2)) &= \\
P(X_1 \in (a_1, a_1 + \delta_1]) P(X_2 \in (a_2, a_2 + \delta_2]) &
\end{aligned}$$

### Теорема (критерий независимости дискретных величин)

Дискретные  $X_1, \dots, X_n$  – независимые  $\Leftrightarrow P(X_1 \in \{x_{1,1}, \dots, x_{1,m_1}\}, \dots, X_n \in \{x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}\}) = \prod_{j=1}^n P(X_j \in \{x_{j,1}, \dots, x_{j,m_j}\})$

$$\{x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}\} = \prod_{j=1}^n P(X_j \in \{x_{j,1}, \dots, x_{j,m_j}\})$$

**Доказательство**  $\Rightarrow$  очевидно

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} P(X_1 = x_{1,i_1}, \dots, X_n = x_{n,i_n}) = \sum_j \prod_i P(X_j = x_{j,i})$$

$$x_{j,i}) = \prod_i \sum_j P(X_j = x_{j,i}) = \prod_i P(X_i \in B_i)$$

**Теорема (критерий независимости непрерывных величин)**

Непрерывные  $X_1, \dots, X_n$  – независимые  $\Leftrightarrow p(x_1, \dots, x_n) = \prod_i p_i(x_i)$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) = \left( \int_{-\infty}^{x_1} p_1(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{x_2} p_2(y) dy \right) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_1(x)p_2(y) dx dy$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$  очевидно (наверное)

**Пример**

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2), \sigma_i > 0$$

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1^2 \dots \sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T (\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2) x\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)$$

**Лемма**

$X, Y$  – независимые целочисленные

$$\text{Тогда } P(X + Y = K) = \sum_i P(X = i)P(Y = K - i) = \sum_i P(X = K - i)P(Y = i)$$

**Доказательство**

$$P(X + Y = K) = \sum_i P(X + Y = K | X = i)P(X = i) = \sum_i P(X = K - i)P(Y = i)$$

**Пример**

$$1. S_n \sim \text{Bin}(n, p)$$

$X_n = X_1 + \dots + X_n, X_i = \text{Bern}(p), X_i$  – независимые

$$P(S_{n+1} = k) = P(S_n = k)P(X_{n+1} = 0) + P(S_n = k - 1)P(X_{n+1} = 1)$$

$$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k+1} + \binom{n}{k-1} p^k q^{n-k+1} = \binom{n+1}{k} p^k q^{n-k+1}$$

$$2. X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$Y \sim \text{Pois}(\mu)$$

$$X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$$

$$3. X \sim \text{NB}(r_1, p), Y \sim \text{NB}(r_2, p)$$

Тогда  $X + Y \sim \text{NB}(r_1 + r_2, p)$

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{NB}(n, p), X_i \sim \text{NB}(1, p) = \text{Geom}(p)$$

$$P(X_1 + X_2 = K) = \binom{(K+2)-1}{1} p^2 q^{K-1}$$

$$P(S_n + X_{n+1} = K) = \binom{n+k}{n} q^k p^n$$

### Лемма

$X, Y$  – независимые

Тогда  $p_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} p_X(u) p_Y(t-u) \, du$

### Доказательство

$$F_{X+Y}(t) = P(X+Y \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(u) \int_{-\infty}^{t-u} p_Y(v) \, dv$$

### Пример

1.  $X, Y$  – независимые,  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Тогда  $X+Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

$X+Y = \sigma_X U_X + \mu_X + \sigma_Y U_Y + \mu_Y, U_X, U_Y \sim N(0, 1)$

$$\sigma_Y^2 u^2 + \sigma_X^2 (t-u)^2 = \underbrace{\left( \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} u - \frac{\sigma_X^2 t}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} \right)^2}_y + \frac{t^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_X U_X + \mu_X + \sigma_Y U_Y + \mu_Y}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\sigma_X^2} + \frac{(t-u)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right) \, du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}\left(y^2 + \frac{t^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)\right) \, du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_X^2 \sigma_Y^2}\right) \, dy\right)}_1 \\ p_{U+\mu_X+\mu_Y}(t) &= p_U(t-\mu_X-\mu_Y) |t'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t-\mu_X-\mu_Y)^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right) \end{aligned}$$

### Утверждение

$X_1, \dots, X_n$  – независимые

$X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$

Тогда  $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$  – распределение Эранга порядка  $n$

$$P_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) p_2(t-x) \, dx = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbb{1}(t \geq 0)$$

$$P_{S_n+X_{n+1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \mathbb{1}(x \geq 0) \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbb{1}(t-x \geq 0) \, dx = \frac{\lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda t}}{n!} \mathbb{1}(t \geq 0)$$



## 10 Симуляция (моделирование случайных величин)

Пусть есть  $\text{rand}() : U[0, 1]$  – независимые

```
1 def Bern(p):
2     return rand() <= p
3
4
5 def Bin(n, p):
6     return sum(Bern(p) for _ in range(n))
7
8 def Geom(p):
9     res = 0
10    while(!Bern(p)):
11        res += 1
12    return res
13
14 def Discrete(p_1, p_2, ..., p_n, x_1, ..., x_n):
15     v = rand()
16     if p_1 + ... + p_{n-1} < v: return x_n
17     if p_1 + ... + p_{n-2} < v: return x_{n-1}
18     ...
19     if p_1 < v: return x_2
20     return x_1
21
22 def Poly(1, p): ... #аналогично
23
24 def Poly(n, p):
25     return sum(Poly(1, p) for _ in range(n))
26
27 def U(a, b):
28     return a + (b - a) * rand()
29
30 def Exp(lmbda):
31     return -ln(rand())/lmbda
32
33 def Gamma(n, lmbda):
34     return sum(Exp(lmbda) for _ in range(n))
35
36 # Случайная величина с распределением F
37 def Generic(F):
38     G = reversed(F) #обратная функция
39     return G(rand())
```

```

1  def N(0, 1):
2      # n -- какое-то большое, p -- любое
3      return (Bin(n, p) - n*p) / sqrt(n * p * (1 - p))

```

### Утверждение

$X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1)$  – независимые

$X = \max\{n : X_1 + \dots + X_n < \lambda\}, \lambda \geq 0$

Тогда  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

### Доказательство

$$P(X \leq k) = P(\underbrace{X_1 + \dots + X_{k+1}}_{\sim \Gamma(k+1, 1)} \geq \lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} dx = -\frac{x^k e^{-x}}{k!} \Big|_{\lambda}^{+\infty} +$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} (k-1)! dx = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \dots + \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$$

## 11 Вероятностные интегралы

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P_X)$

$P_X(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$

$g \geq 0$  – борелевская, т.е.  $\forall B \in \mathcal{B} \ g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

$$\underbrace{\int_{\Omega} g(X(\omega)) P(d\omega)}_{\lim_{\text{diam } V(\omega_k) \rightarrow 0} \sum g(X(\omega_k)) P(V(\omega_k))} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} g(x) P_X(dx)}_{\lim_{\text{diam } V(x_k) \rightarrow 0} \sum g(x_k) P(X \in V(x_k))}, V(\cdot) \text{ – какая-то окрестность}$$

$\lim_{\text{diam } V(\omega_k) \rightarrow 0} \sum g(X(\omega_k)) P(V(\omega_k))$   $\lim_{\text{diam } V(x_k) \rightarrow 0} \sum g(x_k) P(X \in V(x_k))$

### Интеграл Стильеса

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) = \lim_{x_{k+1} - x_k \rightarrow 0, x_k^* \in [x_k, x_{k+1}]} \sum g(x_k^*) (F(x_{k+1}) - F(x_k)) =$$

$$= \begin{cases} \sum g(x_i) P(X = x_i), & \text{дискретный случай} \\ \int g(x) p(x) dx, & \text{непрерывный случай} \end{cases}$$

$g \geq 0 \Rightarrow$  интеграл либо конечный, либо  $+\infty$

$$g = g_+ - g_-, I = \int_{\mathbb{R}^n} g_+(x) P(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} g_-(x) P(dx)$$

$$\bullet \ I_+, I_- < +\infty \Rightarrow I = I_+ - I_-$$

$$\bullet \ I_+ = +\infty, I_- < +\infty \Rightarrow I = +\infty$$

- $I_+ < +\infty, I_i = +\infty \Rightarrow I = -\infty$
- $I_+, I_i = +\infty \Rightarrow I$  не определено

### Свойства

- $\int af + bg = a \int f + b \int g$
- $\int_{A \sqcup B} = \int_A + \int_B$
- $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

### Теорема Фубини для независимых величин

$X, Y$  – независимые  $\Rightarrow g(x, y)P(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x, y)P_Y(\mathrm{d}y) \right) P_X(\mathrm{d}x)$

### Пример (свертка распределений)

$X, Y$  – независимые

$$F_{X+Y}(t) = P(X + Y \leq t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}(x + y \leq t) P(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(x + y \leq t) P_X(\mathrm{d}x) P_Y(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} P(X \leq t - y) P_Y(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} F_X(t - y) \mathrm{d}F_Y(y)$$

$$\text{Аналогично } F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(t - x) \mathrm{d}F_X(x)$$

## 12 Математическое ожидание

### Определение

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}F(x) = \int x P_X(\mathrm{d}x)$$

Дискретный случай:  $EX = \sum x_k p_k$

Непрерывный случай:  $EX = \int x p(x) \mathrm{d}x$

### Свойства

1.  $Ef(X_1, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) P(\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n) = \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{d}F_Y(y), y = f(x_1, \dots, x_n)$
2.  $E(aX) = aEx$

$$3. E(X + Y) = EX + EY$$

$$4. X, Y - \text{независимые} \Rightarrow E(XY) = (EX)(EY)$$

$$5. \underbrace{X \geq 0}_{P(X \geq 0)=1} \Rightarrow EX \geq 0$$

$$6. \underbrace{X \geq Y}_{P(X \geq Y)=1} \Rightarrow EX \geq EY$$

7. Теорема (неравенство Маркова)

$$X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq c) \leq \frac{EX}{c}$$

**Доказательство**

$$EX = \int_0^{+\infty} x \, dF(x) = \int_0^c x \, dF(x) + \int_{c+\infty}^{+\infty} x \, dF(x) \geq 0 + c \int_c^{+\infty} dF(x) = cP(X \geq c)$$

$$8. X \geq 0, EX = 0 \Rightarrow \underbrace{X=0}_{P(X=0)=1}$$

**Доказательство**

$$P(X \geq c) \leq \frac{0}{c} = 0 \Rightarrow P(X < c) = 1 \forall c \Rightarrow P(X = 0) = 1$$

$$9. \text{supp } X = \mathbb{N} \Rightarrow EX = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

$$10. \text{supp } X = [0, +\infty)$$

$$EX = \int_0^{+\infty} P(X \geq r) \, dr$$

**Доказательство**

$$\int_0^{+\infty} P(X \geq r) \, dr = \int_0^{+\infty} (1 - F(r)) \, dr = \underbrace{x(1 - F(x)) \Big|_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} xp(x) \, dx$$

**Определение**

$X, Y$  – некоррелированные  $\Leftrightarrow E(XY) = (EX)(EY)$

**Определение**

$$\text{Var } X = E(X - EX)^2 = \begin{cases} \sum_k (x_k - EX)^2 p_k \\ \int (x - EX)^2 p(x) dx \end{cases}$$

$$Ef(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) P_X(d x_1, \dots, d x_n)$$

$\sqrt{\text{Var } X}$  – среднее квадратическое(стандартное) отклонение

**Свойства**

$$1. \text{Var } X = EX^2 - (EX)^2$$

**Доказательство**

$$\text{Var } X = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$2. \text{Var } X \geq 0$$

$$3. \text{Var } X = 0 \Rightarrow X = c$$

**Доказательство**

$$(X - EX)^2 = 0 \Rightarrow X = EX$$

$$4. \text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var } X$$

$$5. \text{Var}(X \pm Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2(E(XY) - EX \cdot EY)$$

**Доказательство**

$$\text{Var}(X \pm Y) = E(X^2 \pm 2XY + Y^2) - ((EX)^2 \pm 2EX \cdot EY + (EY)^2) = \text{Var } X + \text{Var } Y \pm 2(E(XY) - EX \cdot EY)$$

$$6. \text{Var}(X_1 + \dots + V_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var } X_i + 2 \sum_{i < j} (E(X_i X_j) - EX_i EX_j)$$

**Теорема (неравенство Чебышева)**

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}$$

**Свойства**

$$1. P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\text{Var } X}{\varepsilon^2}$$

$$2. P(|X - EX| < k\sqrt{\text{Var } X}) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

3. ЗБЧ (слабый)

$X_1, \dots, X_n$  – независимые

$$EX_i = \mathcal{M}$$

$$\text{Var } X_i = \sigma^2$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\text{Тогда } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathcal{M}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

$$E\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum EX_i = \mathcal{M}$$

$$\text{Var } \frac{S_n}{n} = \frac{n \text{Var } X_1}{n^2} = \frac{\text{Var } X_1}{n}$$

**Пример**

Дискретные:

- $I(c)$

$$EX = 1c = c$$

$$\text{Var } X = 0$$

- $Bern(p)$

$$EX = 1p + 0q = p$$

$$EX^2 = p$$

$$\text{Var } X = p - p^2 = pq$$

- $Bin(n, p)$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$X_i \sim Bern(p)$  – независимые

$$ES_n = nEX_1 = np$$

$$\text{Var } S_n = n \text{Var } X_1 = npq$$

- $Pois(\lambda)$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda+\lambda} \lambda = \lambda$$

$$E(X(X-1)) = EX^2 - EX = EX^2 - (EX)^2 + (EX)^2 - EX = \text{Var } X + (EX)^2 - EX \Rightarrow \text{Var } X = E(X(X-1)) - (EX)^2 + EX$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2$$

$$\text{Var } X = \lambda^2 - \lambda^2 + \lambda = \lambda$$

- $Geom(p)$

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} P(X = j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} q^j p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k p}{1 - q} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1 - q}$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^k p = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right)'' =$$

$$pq^2 \left( \frac{1}{1 - q} \right)'' = \frac{2pq^2}{(1 - q)^3} = 2 \frac{q^2}{p^2} \text{ Тогда } \text{Var } X = 2 \frac{q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p} + (1 + \frac{q}{p}) = \frac{q}{p^2}$$

- $S_n \sim NB(r, p), r \in \mathbb{N}$

$X_1, \dots, X_n$  — независимые,  $X_i \sim Geom(p)$

$$\text{Тогда } EX = \frac{rq}{p}, \text{Var } S_n = \frac{rq}{p^2}$$

Равномерные:

- $U[0, 1]$

$$EX = \frac{1}{2}$$

$$EX^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var } X = \frac{1}{12}$$

- $U[a, b]$

$$EX = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Var } X = \frac{(b - a)^2}{12}$$

- $N(0, 1)$

$$EX = 0$$

$$EX^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

1

- $N(\mu, \sigma^2)$   
 $X = \sigma N(0, 1) + \mu$   
Тогда  $EX = \mu, \text{Var } X = \sigma^2$
- $\Gamma(\alpha, \lambda)$   

$$p(x) = \frac{x^{\alpha-1} \lambda^\alpha e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}(x \geq 0)$$

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty \frac{x^\alpha \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$EX^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+2} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$\text{Var } X = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$
- $\text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$   
 $EX = \frac{1}{\lambda}, \text{Var } X = \frac{1}{\lambda^2}$
- $\text{Cauchy}(0, 1)$   
 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x}{1+x^2} dx \neq 0$  – потому что интеграл расходится  
Матожидания не существует

### Определение (мода)

Дискретный случай:  $\text{mod } X = x_k \Leftrightarrow P(X = x_k) - \text{наибольшая}$

Непрерывный случай:  $\text{mod } X = x_* \Leftrightarrow x_* = \arg\max p(x)$

Унимодальность – плотность имеет одну точку локального максимума

Бимодальность – плотность имеет две точки локального максимума (но мода все равно одна)

### Определение (квантиль)

$\alpha \in [0, 1]$

$q_\alpha$  – квантиль порядка  $\alpha \Leftrightarrow P(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha, P(X \leq q_\alpha) \geq \alpha$

### Замечание

$F$  строго монотонна  $\Rightarrow F(q_\alpha) = \alpha, F^{-1}(\alpha) = q_\alpha$

$F$  – не строго монотонна

$$F^{-1}(\alpha) := \begin{cases} \sup\{x : F(x) \leq \alpha\} \\ \inf\{x : F(x) \leq \alpha\} \end{cases}$$

### Определение

$\text{med } X = q_{\frac{1}{2}}$

### Утверждение



$$\text{Var } X = \min_{a \in \mathbb{R}} \underbrace{E(X - a)^2}_{f(a)} \Leftrightarrow EX = \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} E(X - a)^2$$

$$f(a) = EX^2 - 2aEX + a^2$$

$$a_{\min} = EX$$

**Утверждение**

$$\operatorname{med} X = \operatorname{argmin}_{a \in \mathbb{R}} E|X - a|$$

**Доказательство**

$$\text{Н.у.о. } \operatorname{med} X = 0$$

$$\text{Проверим, что } E|X - c| \geq E|X|$$

$$c \geq 0 : |X - C| - |X| = \begin{cases} -c, & X > c \\ c - 2X, & 0 < X \leq c \\ c, & X \leq 0 \end{cases}$$

$$E(|X - c| - |X|) =$$

$$E((|X - c| - |X|)\mathbb{1}(X > c)) + E((|X - c| - |X|)\mathbb{1}(0 < X \leq c)) + E((|X - c| - |X|)\mathbb{1}(X \leq 0)) =$$

$$-cE\mathbb{1}(X > c) + E((|X - c| - |X|)\mathbb{1}(0 < X \leq c)) + cE(\mathbb{1}(X \leq 0)) \geq$$

$$-cP(X > c) - cP(0 < X \leq c) + cP(X \leq 0) =$$

$$c(P(X \leq 0) - P(X > 0)) = c(2P(X \geq 0) - 1) \geq 0$$

**Определение**

$EX^k$  –  $k$ -ый момент

$E|X|^k$  –  $k$ -ый абсолютный момент

$E(X - EX)^k$  –  $k$ -ый абсолютный центральный момент

$E(X - EX)^k$  –  $k$ -ый центральный момент

$$\gamma = \frac{E(X - EX)^3}{\sigma^3} - \text{коэффициент асимметрии}$$

$\gamma = 0$  – график симметричный

$\gamma > 0$  – правый «хвост» длиннее левого

$\gamma < 0$  – левый «хвост» длиннее правого

$$\beta = \frac{E(X - EX)^4}{\sigma^4} - 3 - \text{коэффициент эксцесса}$$

(константа 3 для нормировки:  $\beta_{N(0,1)} = 0$ )

$\beta > 0$  – плотности более сконцентрированы в центре

$\beta < 0$  – плотности более распределены

## 13 Числовые характеристики случайных величин

### Определение

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$$

### Свойства

1.  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY$
2. Билинейность
3.  $\text{Cov}(X, c) = 0$
4.  $\text{Cov}(X, X) = \text{Var } X$
5.  $X, Y$  – независимые  $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

### Пример

$$X \sim N(0, 1), Y = X^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = EX^2 - EXEX^2 = 0, \text{ но } X, Y \text{ не независимые}$$

### Определение

$$\text{коэффициент корреляции } \rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}}$$

### Замечание

$X$  – нерожденная

$$P(Y = c) = 1$$

$$P(X \in B, Y = 1) = P(X \in B)P(Y = 1)$$

$$P(X \in B, Y = 0) = 0 = P(X \in B)P(Y = 1)$$

Тогда они независимые

Тогда пусть  $\rho(X, Y) = 0$

### Теорема

- $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \text{ sign } a = \text{sign } \rho(X, Y)$

### Доказательство 1

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}} = \frac{\text{Cov}(X - EX, Y - EY)}{\sqrt{\text{Var } X \text{Var } Y}} = \text{Cov } \tilde{X}, \tilde{Y}$$
$$\tilde{X} = \frac{X - EX}{\sqrt{\text{Var } X}}$$

$$\tilde{Y} = \frac{Y - EY}{\sqrt{\text{Var } Y}}$$

$$E\tilde{X} = 0 = E\tilde{Y}$$

$$\text{Var } \tilde{X} = \frac{\text{Var } \tilde{Y}}{(\sqrt{\text{Var } \tilde{Y}})^2} = 1$$

$$\text{Var}(\tilde{X} + \tilde{Y}) = \text{Var } \tilde{X} + \text{Var } \tilde{Y} + 2 \text{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 2(1 + \rho(X, Y)) \geq 0$$

$$\text{Var}(\tilde{X} - \tilde{Y}) = 2(1 - \rho(X, Y)) \geq 0$$

**Доказательство 2(⇒)**

$$\rho(X, Y) = 1 \Rightarrow \text{Var}(\tilde{X} - \tilde{Y}) = 0 \Rightarrow \tilde{X} - \tilde{Y} = c$$

$$\rho(X, Y) = -1 \Rightarrow \tilde{X} + \tilde{Y} = c$$

**Доказательство 2(⇐)**

$$a \neq 0 : \rho(aX + b, X) = \frac{\text{Cov}(aX + b, X)}{\sqrt{\text{Var}(aX + b) \text{Var } X}} = \frac{a \text{Cov } X, X}{\sqrt{a^2 \text{Var}^2 X}} = \frac{a}{|a|} = \text{sign } a$$

$a = 0$  – очевидно

**Определение**

$X = (X_1, \dots, X_n)^T$  – случайный вектор

$EX = (EX_1, \dots, EX_n)^T$  – вектор математических ожиданий

**Замечание**

$X$  – случайная матрица

$EX = (EX_{ij})$  – матрица математических ожиданий

**Свойства**

$E(AX + b) = AEX + b$  – линейность

**Определение**

$X = (X_1, \dots, X_n)^T$  – случайный вектор

$\text{Var } X = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j} = E((X - EX)(X - EX)^T)$

**Свойства**

$$1. \text{Var } X = (\text{Var } X)^T$$

$$2. \text{Var } X \geq 0, \text{ т.е. } \forall t \in \mathbb{R}^n t^T \text{Var } X t \geq 0$$

**Доказательство**

$$t^T \text{Var } X t = t^T (E(X - EX)(X - EX)^T) t = Et^T (X - EX)(X - EX)^T t = E(t^T (X - EX))^2 \geq 0$$

$$3. \text{Var}(AX + b) = A \text{Var}(X) A^T$$

$$4. X, Y - \text{независимые} \Rightarrow \text{Var } X \pm Y = \text{Var } X + \text{Var } Y$$

**Доказательство**

$$\text{Cov}(X_i \pm Y_i, X_j \pm Y_j) = \text{Cov}(X_i, X_j) \pm \underbrace{\text{Cov}(X_i, Y_j) \pm \text{Cov}(X_j, Y_i)}_0 + \text{Cov}(X_j, Y_j)$$

### Пример (гауссовский вектор)

$$X \sim N(\mu, \Sigma), \mu \in \mathbb{R}^n, \Sigma = \Sigma^T > 0$$

Тогда  $X = \sqrt{\Sigma}Y + \mu, Y \sim N(0, E)$  – стандартный гауссовский вектор

$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  – стандартный гауссовский вектор  $\Leftrightarrow Y_i \sim N(0, 1), Y_i$  – независимые

$$EY = 0$$

$$\text{Var } Y = E_n$$

$$EX = \sqrt{\Sigma}EY + \mu = \mu - \text{вектор математических ожиданий}$$

$$\text{Var } X = \sqrt{\Sigma} \text{Var } Y (\sqrt{\Sigma})^T = \Sigma$$

### Пример

$X$  – гауссовский вектор

Покажем, что  $X_i, X_j$  – независимые  $\Leftrightarrow \text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \forall i, j$

$$i := 1, j := 2$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_{12}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_{12}} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow (X_1, X_2)^T \sim N((\mu_1, \mu_2)^T, \Sigma_{12})$$

$$(X_1, X_2)^T \sim N((\mu_1, \mu_2)^T, \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2))$$

$$\sigma_1^2 = \text{Var } X_1$$

$$\sigma_2^2 = \text{Var } X_2$$

$$p(X_1, X_2) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}))}{\sqrt{2\pi}^2 \sigma_1 \sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_X} & \sqrt{\Sigma_{XY}} \\ \sqrt{\Sigma_{XY}} & \sqrt{\Sigma_Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

$$X = \sqrt{\Sigma_X}U_1 + \sqrt{\Sigma_{XY}}U_2 + \mu_X$$

$$\text{Var } X = \sqrt{\Sigma_X} \sqrt{\Sigma_{XY}} \frac{\sqrt{\Sigma_X}}{\sqrt{\Sigma_{XY}}} = \sqrt{\Sigma_X}^2 + \sqrt{\Sigma_{XY}}^2$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_X} & \sqrt{\Sigma_{XY}} \\ \sqrt{\Sigma_{XY}} & \sqrt{\Sigma_Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_X} & \sqrt{\Sigma_{XY}} \\ \sqrt{\Sigma_{XY}} & \sqrt{\Sigma_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Sigma_X}^2 + \sqrt{\Sigma_{XY}}^2 & \sqrt{\Sigma_{XY}}(\sqrt{\Sigma_X} + \sqrt{\Sigma_Y}) \\ \sqrt{\Sigma_{XY}}(\sqrt{\Sigma_X} + \sqrt{\Sigma_Y}) & \sqrt{\Sigma_Y}^2 + \sqrt{\Sigma_{XY}}^2 \end{pmatrix}$$

## 14 Условное распределение числовых характеристик

### Определение

$(X, Y)$  – случайный вектор

Дискретный случай:  $P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}$

$$P(Y = y_j) = \sum_k P(Y = y_j | X = x_k) P(X = x_k)$$

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{\sum_k P(Y = y_j | X = x_k) P(X = x_k)} - \text{теорема Байеса}$$

Непрерывный случай:  $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$

$$p_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{Y|X}(y|x) p_X(x) dx$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} p_{Y|X}(y|x) p_X(x) dx} - \text{теорема Байеса}$$

### Определение

$$E(X|Y = y) = E(X|Y) = \begin{cases} \sum_i x_i P(X = x_i | Y = y) \\ \int_{\mathbb{R}} xp(x|y) dx \end{cases}$$

Условное математическое ожидание – случайная величина

### Свойства

1.  $E(aX + bY | U) = aE(X|U) + bE(Y|U)$
2.  $E(X|Y) = \operatorname{argmin}_{f(Y)} E(X - f(Y))^2$
3.  $E(X|X) = X$
4.  $X, Y$  – независимые  $\Rightarrow E(X|Y) = E(X)$
5.  $EX = E_Y(E_{X|Y}(X|Y))$

### Доказательство

$$\begin{aligned} EX &= \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k \sum_j P(X = x_k | Y = y_j) P(Y_j) = \\ &= \sum_j P(Y = y_j) \sum_k x_k P(X_k | Y = y_k) = \sum_j P(Y = y_j) E(X|Y = y_j) = \\ &= E_Y(E(X|Y)) \end{aligned}$$

**Пример**

$$(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

Тогда  $E(Y|X) = aX + b$

$$E(Y|X) = E(Y - aX + aX|X) = E(Y - aX|X) + E(aX|X) = E(Y - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}) + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}X = (X - \mu_X)\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} + \mu_X$$

$$\begin{pmatrix} Y - aX \\ X \end{pmatrix} \sim N(\cdot, \cdot)$$

$$0 = \text{Cov}(Y - aX, X) = \text{Cov}(Y, X) - a \text{Cov}(X, X) \Rightarrow a = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

**Определение**

$$\text{Var}(X|Y) = E((X - E(X|Y))|Y) = E(X^2|Y) - (E(X|Y))^2$$

$$\text{Var } X = \text{Var } E(X|Y) + E \text{Var}(X|Y)$$

**15 Сходимости**

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Leftrightarrow P(\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\pi)\}) = 1 - \text{почти наверное}$$

$$X_n \xrightarrow{p} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0 - \text{по вероятности}$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow E|X_n - X|^p \rightarrow 0, \geq 1$$

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow F_n(x) \rightarrow F(x), x \in C(F) - \text{по распределению}$$

$$F_n \Rightarrow F \Leftrightarrow \forall f - \text{непр.} \int f d F_n(x) \rightarrow \int f d F(x) - \text{слабая}$$

**Теорема**

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

$\mathcal{F}$  – множество функций распределения

$$\mathcal{G} = \{G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | G - \text{монот. возр, непр. справа, } G(-\infty) \geq 0, G(+\infty) \leq 1\}$$

– расширенные распределения

Распределения:

$$P(X \in \mathbb{R}) = G(+\infty) - G(-\infty)$$

$$P(X = -\infty) = G(-\infty)$$

$$P(X = +\infty) = 1 - G(+\infty)$$

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2}$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -n \\ \frac{1}{2}, & -n \leq x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

$$F_n(x) \xrightarrow{d} \frac{1}{2}$$

$$F_n(x) \not\xrightarrow{d} \frac{1}{2}$$

**Замечание**

1.  $\xrightarrow{d} \Rightarrow$  можно задать на  $\mathcal{G}$
2.  $G_n, G \in \mathcal{G} (G_n \Rightarrow G) \Rightarrow G_n \xrightarrow{d} G$   
В обратную сторону не действует

**Теорема (Хелли)**

$G_n \in G \Rightarrow \exists G_{n_k}, G \in G : G_{n_k} \Rightarrow G$   
(без доказательства)

**Следствие**

Если всякая слабо сходящаяся подпоследовательность сходится к одной и той же точке  $G$ , то  $G_n \Rightarrow G$

**Определение (плотные распределения)**

$F_n \in \mathcal{G}$

$\{F_n\}$  – плотная, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists M : \inf_n \underbrace{(F_n(M) - F_n(-M - 0))}_{P(M \leq X_n \leq M)} > 1 - \varepsilon$

Т.е. «хвосты» равномерно маленькие

**Определение**

Пусть  $L$  – подмножество непрерывных и ограниченных функций

$L$  – определяет распределение  $\Leftrightarrow F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}, \forall f \in L \int f dF =$

$\int f dG \Rightarrow F = G$

**Теорема (Критерий существования слабого предела из  $\mathcal{F}$ )**

$F_n \in \mathcal{F}, L$  – определяет распределение Тогда  $\exists F \in \mathcal{F} : F_n \Rightarrow F \Leftrightarrow$

1.  $\{F_n\}$  – плотное
2.  $\exists \lim_n \int f dF_n \forall f \in L$

**Доказательство**  $\Rightarrow$

2 выполнено

$$\int f \, d F_n \rightarrow \int f \, d F \, \forall f$$

$$F_n \xrightarrow{d} F$$

$$\exists M > 0 : M, -M \in C(F), F_n(+M) - F_n(-M-0) \rightarrow F(M) - F(-M) > 1 - \varepsilon$$

**Доказательство**  $\Leftarrow$

$$\exists F_{n_k} : F_{n_k} \Rightarrow G \in \mathcal{G}$$

$$\text{Тогда } F_{n_k} \xrightarrow{d} G$$

$$F_{n_j} \Rightarrow F \in \mathcal{F}$$

$$\exists \lim \int f \, d F_n$$

$$\int f \, d F_{n_k} \Rightarrow A$$

$$\int f \, d F_{n_k} \Rightarrow \int f \, d G$$

$$\int f \, d F_{n_j} \Rightarrow A$$

$$\int f \, d F_{n_j} \Rightarrow \int f \, d F$$

$$\text{Тогда } G = F$$

**Следствие**

$L$  – определяет распределение

$$\int f \, d F_n \rightarrow \int f \, d F$$

Пусть верно одно из трех условий

1.  $\{F_n\}$  – плотное
2.  $F \in \mathcal{F}$
3.  $1 \in L$

$$\text{Тогда } F_n \Rightarrow F \in \mathcal{F}$$

**Доказательство 1**

По теореме

**Доказательство 2**

Тогда выполнено 1

**Доказательство 3**



$$\underbrace{\int \mathrm{d} F_n}_1 \rightarrow \int \mathrm{d} F$$

Тогда  $\int \mathrm{d} F = 1$

$$\int \mathrm{d} F = F(+\infty) - F(-\infty)$$

Тогда  $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$

Тогда выполнено условие 2

### Теорема

Пусть  $F_n \xrightarrow{d} F \in \mathcal{F}$

Т.е.  $F_n(x) \rightarrow F(x) \forall x \in C(F)$

Покажем, что  $\forall f \in \tilde{C}_1^0(\mathbb{R}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d} F_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d} F(x)$

### Доказательство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d} F(x) = \underbrace{fF \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} F \mathrm{d} f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d} F_n(x) = \underbrace{fF_n \Big|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{d} f(x)$$

Тогда  $F_n \Rightarrow F$