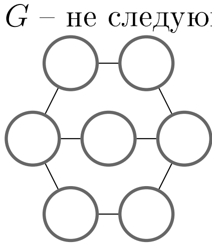
Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

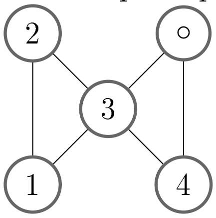
1 Friends and strangers graph

Рассмотрим связный неориентированный граф G из n вершин
В $n-1$ вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)
Для каких графов G можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?
Теорема Уилсона
Если граф G:

- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины $n \geq 4$
- G – не следующий граф:


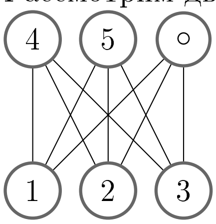
то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно
Доказательство необходимости

- Рассмотрим граф

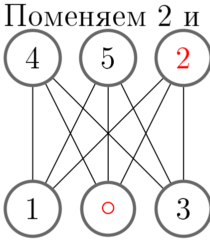
  

  Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

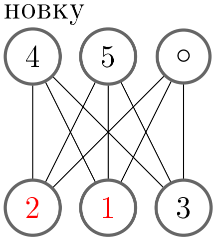
- Рассмотрим двудольный граф

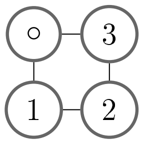
  Рассмотрим его как перестановку
  Поменяем 2 и ○ местами

  Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится ○) не изменилась
  Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку

- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

Доказательство достаточности

Отсутствует...

Рассмотрим обобщение предыдущей игры:

Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"

Т.е. теперь у нас два графа: "географический"граф X и граф дружбы Y

В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка"с $\circ$ в центре (т.е. $\circ$ дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)

Построим граф $FS(X, Y)$ – граф друзей и врагов

В нем будет $n!$ вершин

Каждая вершина графа – биекция $\sigma : V(X) \to V(Y)$

Получается, что σ – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к. $V(x)$ – множество вершин, а $V(Y)$ – множество фишек)

Вершины σ и σ' соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским"обменом

Тогда из любой перестановки можно получить любую $\Leftrightarrow$ граф связен

Из теоремы Уилсона: $FS(G, K_{1,n-1}), G$ – из теоремы Уилсона, $K_{1,n-1}$ – звездочка с вершиной n в центре

Ответим на другой вопрос: Для каких G граф $FS(G, C_n), C_n$ – цикл длины n – связен

Лемма

Графы $FS(X, Y)$ и $FS(Y, X)$ – изоморфны

Т.е. можно построить биекцию $u \overset{\theta}{\leftrightarrow} u'$ такую, что ребра uv и $\theta(u)\theta(v)$ существуют одновременно

Доказательство

Построим биекцию $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$

Теперь рассмотрим граф $FS(C_n, G)$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию:

По кругу стоят $3n$ человек: n семей вида папа-мама-ребенок

Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой

//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

2 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

2.1 Линейные отображения

Определение
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – множество линейных отображений из X в Y (линейные пространства)
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – линейное пространство
Обозначение
Пусть $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
$\|A\| := \sup\limits_{|x|=1} |A(x)|$
Замечание 1
$\|A\| \in \mathbb{R}$
Доказательство
Было доказано: $|Ax| \leq C_a|x|, C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$
Замечание 2
Из теоремы Вейерштрасса $\sup \leftrightarrow \max$ в конечномерном случае
Замечание 3
$\forall\, x \in \mathbb{R}^m \ |Ax| \leq \|A\||x|$
Доказательство
Для $x = 0$ очевидно
$\widetilde{x} := \dfrac{x}{|x|}$
$|A\widetilde{x}| \leq \|A\|$
Замечание 4
Если $\exists\, C : \forall\, x \ |Ax| \leq C|x|$, то $\|A\| \leq C$
Пример

- $m = n = 1$
  A – линейное отображение: $x \mapsto ax$
  $\|A\| = |a|$

- $m = 1, n$ – любое
  $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists\,\overline{v}\in\mathbb{R}^n Ax = x\overline{v}$
$\|A\| = |\overline{v}|$

- $n = 1, m$ – любое
  $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
  Тогда $\exists\, l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l\rangle$
  $\|A\| = |l|$

- m, n – любые
  $A = (a_{ij})$
  $x \mapsto Ax$
  $\|A\|$ так легко не считается((((

Лемма
Пусть X, Y – нормированные линейное пространство
$A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$
Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A – ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$
2. A – непрерывно в $\mathbb{0} \in X$
3. A – непрерывно на X
4. A – равномерно непрерывное ($\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 : \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon$)

Доказательство
$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ – очевидно
Докажем $2 \Rightarrow 1$
Возьмем $\varepsilon = 1$
$\exists\,\delta > 0 :\ \forall\, x : |x| < \delta\ |Ax| < 1$
Возьмем $|x| = 1$
$Ax| = \dfrac{1}{\delta}|A(\delta x)| < \dfrac{1}{\delta}$
Тогда $\|A\| \leq \dfrac{1}{\delta}$
Докажем $1 \Rightarrow 4$
$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|a\|} :\ \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$
$|Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \leq \|A\||x_1 - x_2| < \varepsilon$
Теорема о пространстве линейных отображений

- $\|\cdot\|$ – норма в $\mathrm{Lin}(X,Y), X, Y$ – конечномерные нормированные пространства
  Т.е.
  1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
  2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
  3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство
$\|A\| \geq 0$ – тривиально
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$
$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{C} |x| \Rightarrow \|A+B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$
$|BAx| \leq \|B\||Ax| \leq \|B\|\|A\||x|$
Замечание
В $\mathrm{Lin}(X,Y)$
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax| = \sup\limits_{|x|\leq 1} |Ax| = \sup\limits_{|x|<1} |Ax| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X\ |Ax| \leq C|x|\}$
Теорема Лагранжа (для отображений)
$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируема в D – открытом
$a, b \in D, [a,b] \subset D$
Тогда $\exists\, c \in [a,b]$, т.е. $\exists\, \theta \in [0,1] : c = a + \theta(b-a) :\ \ |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\||b-a|$
Доказательство
$f(t) = F(a + t(b-a)), t \in [0,1]$
$f'(t) = F'(a + t(b-a))(b-a)$
$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1-0) = |F'(a+\theta(b-a))(b-a)| \leq \|F'(a+\theta(b-a))\||b-a|$
Лемма
$B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
$\exists\, c > 0 : \forall\, x\ |Bx| \geq c|x|$
Тогда B – обратим и $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$
Доказательство

Обратимость очевидна, т.к. $\operatorname{Ker} B = \{\mathbb{0}\}$. Тогда $\exists\, B^{-1}$

$|\underbrace{B^{-1}y}_{x}| \le \dfrac{1}{c}|BB^{-1}y| = \dfrac{1}{c}|y|$

Замечание

Ω_m – множество обратимых линейных операторов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$|x| = |A^{-1}Ax| \le \|A^{-1}\||Ax|$

Т.е. $|Ax| \ge \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}|x|$

Теорема об обратимости линейного операторого, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$ – обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$M \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \le \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$ – M – близкий к L

Тогда

- $M \in \Omega_m$ – т.е. Ω_m – открытое
- $\|M^{-1}\| \le \dfrac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \le \dfrac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}\|L - M\|$

Доказательство 1 и 2

$Mx = Lx + (M - L)x$

$|Mx| \ge |Lx| - |(M-L)x| \ge \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|M-L\||x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|)|x|$

1 и 2 следуют из леммы

Доказательство 3

$\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{m-l}{lm}$

Аналогично $L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$

$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M-L)L^{-1}\| \le \|M^{-1}\|\|M - L\|\|L^{-1}\| \le$ из пункта 2

Следствие

Отображение $L \mapsto L^{-1}$ задано на Ω_m и непрерывно

//todo лекции 3 и 4