

# Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

## 1 Графы

### 1.1 Неориентированные графы

#### Определение

*Неориентированный граф* – множество вершин  $V$  и множество ребер  $E \subset (V \times V \setminus \{(u, u)\}) / \sim$  (факторизованное отношением эквивалентности  $\sim: (u, v) \sim (v, u)$ )

*Путь*  $P$  – последовательность  $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$ , где  $u_i$  – вершина,  $e_i = u_{i-1} u_i$  – ребро

$k := |P|$  или  $k := \text{len}(P)$  – *длина пути*

*Простой путь* – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

*Реберно-простой путь* – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

*Циклический путь* – путь, где  $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\sqsupset P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$   
 $\sqsupset Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$   
 $\sqsupset R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$   
 $P \sim R, P \sim Q$  – равны с точностью до отражения и циклического сдвига
- Пусть если в циклическом пути  $\forall i \ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$ , то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности  $\sim$

*Ациклический граф* – граф без циклов

**Определение**

Пусть  $\exists P : u_0 = u, u_k = v$ . Тогда  $u \rightsquigarrow v$  (отношение связанности путем)

Пусть  $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$ . Тогда  $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$  – конкатенация пути

**Теорема**

Отношение  $\rightsquigarrow$  в неориентированном графе – отношение эквивалентности

**Определение**

Класс эквивалентности по отношению  $\rightsquigarrow$  – *компонента связности*

Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

**Определение**

$u, v$  – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из  $u$  в  $v$

**Теорема**

Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

**Доказательство**

Путь  $u$  (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность

Симметричность очевидна

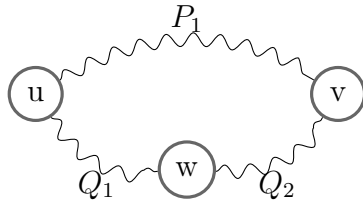
Докажем транзитивность

Рассмотрим  $u, v, w$ , пары  $(u, v), (v, w)$  реберно двусвязные

$P_1, P_2$  – пути между  $u, w$

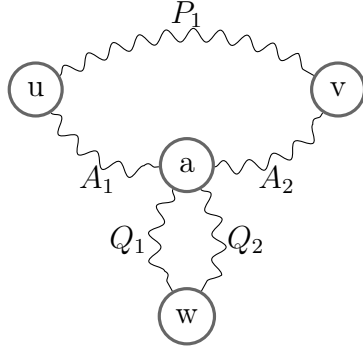
Рассмотрим случаи:

- $w = v \vee w = u$  – очевидно
- $w \in P_2$



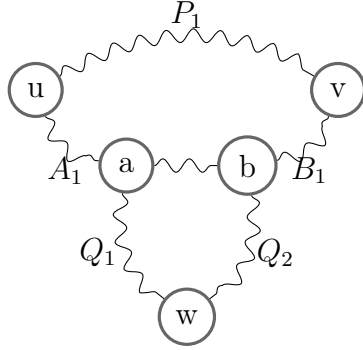
Тогда  $Q_2, P_1 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq v, u, w :$



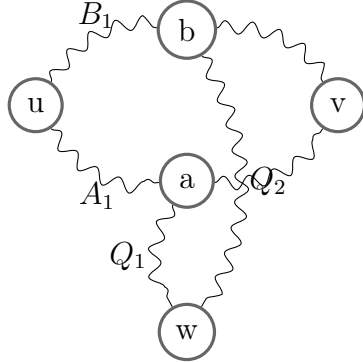
Тогда  $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



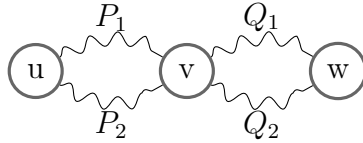
Тогда  $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



Тогда  $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$  реберно не пересекаются

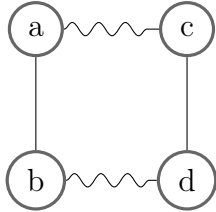
-



Тогда  $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$  реберно не пересекаются

### Определение

Ребра  $ab, cd$  (не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы



### Теорема

Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности

**Доказательство** аналогично предыдущей теореме

### Определение

Рассмотрим  $A = \{a, b : ab \text{ – вершинно двусвязные}\}$  – компоненту вершинной двусвязности (блок)

Точка  $v$  – точка сочленения, если она лежит в нескольких блоках

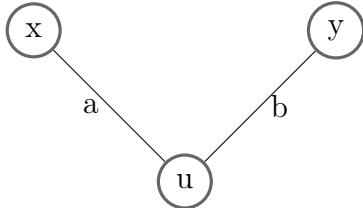
### Теорема

Вершина является точкой сочленения  $\Leftrightarrow$  Ее удаление увеличивает количество компонент связности

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть  $u$  – точка сочленения

Тогда она лежит в нескольких блоках:



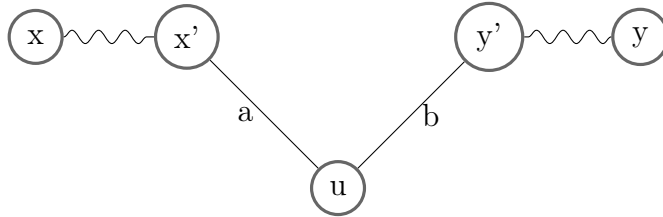
$a, b$  – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках

Тогда не существует пути  $x \rightsquigarrow y$ , не проходящего через  $u$

Отсюда при удалении  $u$   $x$  и  $y$  окажутся в разных компонентах

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Пусть при удалении  $u$  количество компонент увеличилось  
 Возьмем  $x$  и  $y$  такие, что до удаления  $u$  они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных  
 Тогда любой путь из  $x$  в  $y$  проходил через  $u$   
 Выберем какой-то путь из  $x$  в  $y$  и возьмем на нем вершины  $x'$  и  $y'$  – соседей вершины  $u$



Тогда ребра  $a$  и  $b$  вершинно не двусвязные

### Определение

*Мост* – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности

*Мост* – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

## 1.2 Ориентированные графы

### Определение

*Ориентированный граф* – множество вершин  $V$  и ребер  $E \subset V \times V$  (раз-  
 решаем петли)

В ребре  $w = uv$   $\text{beg } w = u, \text{end } w = v$

*Путь*  $P$  – последовательность  $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$ , где  $u_i$  – вершина,  $e_i = u_{i-1} u_i$  – ребро

*Циклический путь* – путь, где  $u_0 = u_k$

*Цикл* – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига

### Теорема

Если  $G$  – ациклический ориентированный граф, то  $\exists \phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\} :$   
 $uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$

(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вер-  
 шины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вер-  
 шины с большим номером)

### Лемма

$G$  – ациклический ориентированный граф

Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро

### **Доказательство теоремы**

Докажем по индукции

Возьмем вершину, из которой не выходит ребро

Присвоим ей номер  $n$

Удалим ее

Пронумеруем оставшиеся вершины

### **Определение**

*Симметризация*  $G$  – граф  $\overline{G}$  такой, что  $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$

(Т.е. восприятие  $G$  как неориентированного графа (возможно, с петлями))

*Компонента слабой связности* – компонента связности в  $\overline{G}$

*Компонента сильной связности* – компоненты, где существуют пути  $u \rightsquigarrow v$  и  $v \rightsquigarrow u$

Сильная связность – отношение эквивалентности

## **1.3 Деревья**

### **Определение**

*Дерево* – связный неориентированный граф без циклов

### **Теорема**

$G$  – граф, содержащий  $n$  вершин

Рассмотрим утверждения:

1. В нем  $n - 1$  ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связан

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево

### **Лемма**

Пусть  $G$  – дерево, содержащее  $\geq 2$  вершины

Тогда  $\exists$  вершина степени 1

(На самом деле их хотя бы две)

### **Доказательство**

Возьмем вершину  $u_1$ . Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа  $u_2$ . Если у него степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в соседа  $u_3$ , которого мы еще не посещали

Через не более  $n$  шагов мы придем в вершину  $u_i$ , все соседи которой уже посещены

Если  $u_i$  имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда  $u_i$  будет иметь степень 1

### **Доказательство 2**

Рассмотрим самый длинный путь в графе

Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1

Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл

Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

### **Доказательство теоремы**

$$2 + 3 \Rightarrow 1$$

Если  $n = 1$  – очевидно

Если  $n > 1$ : Возьмем вершину степени 1

Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе  $n - 2$  ребра

$$1 + 2 \Rightarrow 3$$

Пусть в графе  $k$  компонент связности

Если в  $i$  компоненте  $n_i$  вершин, то в ней  $n_i - 1$  ребро

Тогда всего ребер в графе  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k = n - 1$

Отсюда  $k = 1$

$$1 + 3 \Rightarrow 2$$

Если  $n = 1$  – очевидно

Если  $n > 1$  и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ациклический

Если  $n > 1$  и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше  $\frac{2 * n}{2} = n$  – противоречие

### **Лемма о рукопожатии**

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \underbrace{\sum_{e \in E} \sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_2 =$$

$$2|E|$$

**Теорема**

$G$  – дерево  $\Leftrightarrow \forall u, v \exists !$  простой путь  $u \rightsquigarrow v$

**Доказательство  $\Rightarrow$** 

Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой  $l_1 + l_2$  минимально

Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)

Тогда эти два пути образуют цикл

**Доказательство  $\Leftarrow$** 

Граф связан

Граф ацикличесен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути

Отсюда это дерево

**Теорема**

$G$  – связан  $\Leftrightarrow G$  связан и любое ребро – мост

**Определение**

$G$  – граф

$H$  – получен удалением из  $G$  вершин и/или ребер

$H$  – *подграф*  $G$

**Определение**

$G$  – граф

$H$  – получен из  $G$  удалением вершин (и ребер, выходящих из них)

$H$  – *индуцированный* подграф  $G$

**Определение  $G$  – граф**

$H$  – получен из  $G$  удалением ребер с сохранением связности

$H$  – *остовный* подграф  $G$

**Теорема**

У любого связного графа есть остовное дерево

**Доказательство 1**

Обойдем граф bfs-ом и получим дерево

**Доказательство 2**

Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер

Утверждается, что он будет деревом

**Доказательство 3 (жадный алгоритм)**

Будем удалять ребра, пока граф связан

Мы получим ациклический связный граф



Научимся считать количество остовных деревьев

Рассмотрим матрицу  $n \times n$ :

На диагонали напишем степень вершины

В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

**Определение**

*Матрица Кирхгофа* – матрица  $n \times n$  такая, что  $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

**Теорема**

Пусть  $G$  – связный граф

Тогда количество остовных деревьев  $G = \widehat{A_{ij}} \forall i, j$  – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы  $A$

**Лемма 1**

Рассмотрим *матрицу инцидентности*  $I_G$

Это матрица  $n \times m, m = |E|$

В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$$(\vec{I}_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(\vec{I}_G \vec{I}_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

$\vec{I}_G \vec{I}_G^T$  = матрица Кирхгофа

**Лемма 2**

Рассмотрим  $\vec{I}_G$

Выберем  $n - 1$  ребро

Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине  $u$  ( $u$  любая)

Мы получили матрицу  $n - 1 \times n - 1$

Обозначим ее как  $B$

Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то  $|B| = \pm 1$ , иначе  $|B| = 0$

### Доказательство

Рассмотрим граф  $T$ , образованный всеми вершинами и выбранными ребрами

Докажем, что если  $T$  не дерево, то  $|B| = 0$

Т.к. это не дерево и в нем  $n - 1$  ребро, то граф не связан

Рассмотрим компоненту связности, не содержащую  $u$

Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты

Утверждается, что сумма  $= 0$

Отсюда матрица вырожденная

Докажем, что если  $T$  – дерево, то  $|B| = \pm 1$

По лемме у дерева есть два листа

Тогда есть как минимум один лист, не равный  $u$ . Назовем его  $v_1$

Переставим строчку, соответствующую  $v$ , на первое место

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Т.к.  $v_1$  – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Рассмотрим дерево  $T_2$ , полученное удалением  $v_1$  из  $T$

В нем есть как минимум один лист, не равный  $u$ . Назовем его  $v_2$

Переставим строчку, соответствующую  $v_2$ , на второе место

Т.к.  $v_2$  – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место

Повторим действия

В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой  $\pm 1$

Отсюда определитель будет  $\pm 1$

### Лемма 3 (Формула Коши-Бине)

Пусть даны матрицы  $r \times s$  и  $s \times r$ ,  $r \leq s$

$\det AB = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \dots i_r} \det B_{i_1 \dots i_r}$  – оставили только столбцы  $i_1 \dots i_r$ ,  $B_{i_1 \dots i_r}$  – оставили только строки  $i_1 \dots i_r$

**Лемма 4**

$$\widehat{A_i i} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T)$$

Т.к.  $m = |E| \geq n - 1$ , применим лемму 3:

$$\widehat{A_i j} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_G^T \text{ без } i \text{ столбца}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}}^{i_1 \dots i_{n-1}} \det \vec{I}_G^T \text{ без } i \text{ столбца}}_{1, \text{ если образует ост.д, иначе } 0}$$

Отсюда  $\widehat{A_i j}$  = кол-во остовных деревьев

## 1.4 Ориентированные деревья

**Определение**

Пусть  $G$  – ориентированный граф

*Подвешенное корневое дерево* – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень

*Обратное подвешенное корневое дерево* – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину

**Теорема Тутта**

*Лапласиан* графа  $G$  – матрица  $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$  – позволяет

искать исходящие остовные корневые деревья

(Для входящих  $\deg^+$  и  $ji \in E$ )

Количество остовных корневых деревьев с корнем  $i$  равно  $\widehat{L(G)}_{ii}$

**Определение**

Пусть  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

*Функциональный граф* – граф  $G : (i, f(i)) \in E$

В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья

Всего существует  $n^n$  функциональных графов

Число функциональных подграфов =  $\prod_{u \in v} \deg^- u$

## 1.5 Обход графа

**Определение**

*Эйлеров путь/цикл* – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

*Гамильтонов путь/цикл* – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз

Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)

### Теорема

$G$  – Эйлеров  $\Leftrightarrow$  Все его ребра лежат в одной компоненте связности и  $\forall v \deg v$  – четное

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли

Остудя степени четные и компонента связности одна

**Доказательство**  $\Leftarrow$

Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности

Докажем индукцией по числу ребер

Если ребер 0, доказано

Пусть ребер  $> 0$

//todo

### Теорема

$G$  содержит эйлеров путь  $\Leftrightarrow$  Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени

**Доказательство**

Если она одна, то начнем обход в ней

Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее

### Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл  $\Leftrightarrow$  граф слабо связан и  $\forall v \deg^-(v) = \deg^+(v)$

### Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров путь  $\Leftrightarrow$  граф слабо связан и  $\deg^-(v) = \deg^+(v)$  для не более чем двух вершин  $a, b$ , а  $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$  и  $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$

### Задача

Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их  $\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max(\frac{\text{odd}(C)}{2}, 1)$ ,  $\text{odd}(C)$  – кол-во вершин нечетной степени в  $C$

Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты

$$\text{Всего их } \sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max\left(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1\right)$$

### **BEST-Теорема**

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов

$$E = A \prod_{u \in V} (\deg^- u - 1)!$$

## **1.6 Укладки графов**

### **Утверждение**

Компактные многообразия эквивалентны сфере «с ручками»

Пример: сфера с одной ручкой – тор, с двумя – «крэндель»

### **Определение**

Ориентируемое многообразие – поверхность с ручками

Задается числом – количество ручек

### **Определение**

Укладка графа на поверхность  $A$  – инъективное отображение точек графа в точки на поверхности и ребер – в непересекающиеся кривые

$V : V_G \rightarrow A$  – инъекция

$e : E_G \rightarrow C_A$

$\phi \in C_A$  – путь

$\phi : [0, 1] \rightarrow A, \phi(0) = \text{beg}(e), \phi(1) = \text{end}(e)$

$\forall \phi_1, \phi_2 \phi_1[0, 1] \cap \phi_2[0, 1] = \emptyset$

### **Теорема**

Любой граф можно вложить в  $\mathbb{R}^3$

### **Доказательство**

Вложим граф как-то с пересечениями

Для каждого пересечения искривим одно из ребер, чтобы убрать пересечение

### **Доказательство 2**

Воспользуемся вероятностным методом: случайно расположим точки, после чего проведем ребра-отрезки

Вероятность их пересечения равна 0

### **Определение**

Два графа гомеоморфны, если можно превратить  $G_1$  в  $G_2$  следующими

операциями

(кратные ребра разрешены)

1. Удаляем ребро  $uv$ , добавляем вершину  $x$  и ребра  $ux, xv$
2. Берем вершину  $x$  степени 2 с соседями  $u, v$   
Удалим вершину  $x$  и добавим ребро  $uv$

### **Лемма 1**

$G$  можно уложить на  $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$  можно уложить на сфере

#### **Доказательство**

Нарисуем плоскость

Положим на нее сферу

Точка соприкосновения сферы и плоскости =: южный полюс  $S$

Противоположная сторона сферы =: северный полюс  $N$

Возьмем точку  $x$  на плоскости

Построим отрезок  $xN$

Точка пересечения отрезка со сферой  $x'$  – существует и единственная

Т.о. мы построили непрерывную биекцию между сферой  $\setminus \{N\}$  и плоскостью

Теперь положим сферу на плоскость так, чтобы северный полюс не лежал на ребре и не был вершиной

Тогда биекция ребра переводит в кривые-ребра, а вершины – в точки-вершины

#### **Определение**

Грани – области, полученные разрезанием поверхности по ребрам

#### **Теорема (Формула Эйлера)**

В связном графе на плоскости  $V + F - E = 2$

$V$  – число вершин

$E$  – число ребер

$F$  – число граней

#### **Доказательство**

Будем рисовать наш граф постепенно

При добавлении ребра количество ребер увеличивается на 1 ( $E+ = 1$ ) и число граней увеличивается на 1 ( $F+ = 1$ )

При добавлении вершины число ребер увеличивается на 1 ( $E+ = 1$ ) и число вершин увеличивается на 1 ( $V+ = 1$ )

Тогда  $V + F - E = 2$

#### **Теорема**

$K_5$  нельзя уложить на плоскости

**Доказательство**

$$V = 5$$

$$E = 10$$

$$\text{Отсюда } F = 7$$

С точки зрения теории графов грань – это цикл

Цикл имеет длину хотя бы 3

Пройдем по каждому циклу, соответствующему грани

Тогда суммарно мы пройдем хотя бы по 21 ребру

С другой стороны, ребро лежит на границе двух граней

Значит по каждому ребру мы должны пройти по 2 раза

Т.е. мы должны пройти суммарно по 20 ребрам

**Теорема 2**

$K_{3,3}$  нельзя уложить на плоскости

**Доказательство**

В двудольном графе цикл имеет длину хотя бы 4

Применяем тот же трюк

**Теорема**

В произвольном графе  $G$   $3V - 6 \geq E$

В произвольном двудольном графе  $G$   $2V - 4 \geq E$

**Лемма**

$G_1, G_2$  гомеоморфны

$G_1$  можно уложить  $\Leftrightarrow G_2$  можно уложить

**Лемма**

$G$  – подграф  $H$

$H$  можно уложить  $\Rightarrow G$  можно уложить

**Лемма**

$G$  можно уложить на плоскости и  $u$  – вершина  $G$ , то  $G$  можно уложить так, чтобы  $u$  была инцидентна(смежна) внешней грани

**Доказательство**

Переложим граф на плоскости

Переложим его на сферу

Повернем сферу так, чтобы грань, инцидентная  $u$ , содержала северный полюс

Переложим граф на плоскость

**Лемма**

$G$  можно уложить на плоскости и  $uv$  – ребро  $G$ , то  $G$  можно уложить так, чтобы  $u$  было инцидентно(смежно) внешней грани

**Определение**

$G$  – планарный, если его можно уложить на плоскость

**Лемма**

Если все компоненты реберной двусвязности  $G$  планарны, то  $G$  планарен

**Доказательство**

Докажем по индукции

База ( $n = 1$ ) – очевидно

Переход: Удалим мост  $uv$

Тогда в каждой компоненте связности  $\leq n - 1$  компонента реберной двусвязности

Уложим их так, чтобы  $u$  и  $v$  оказались инцидентны внешней грани

Проведем ребро  $uv$

**Лемма**

Если все компоненты вершинной двусвязности  $G$  планарны, то  $G$  планарен

**Доказательство**

Докажем по индукции

База ( $n = 1$ ) – очевидно

Переход: Разобьем граф по какой-либо точке сочленения  $v$  на два графа

В каждой будет своя копия вершины  $v - v_i$  Уложим их так, чтобы  $v_i$  лежали во внешней грани

Теперь удалим все  $v_i$ , кроме  $v_1$  и «притянем» все ребра из  $v_i$  к  $v_1$

**Теорема**

$G$  можно уложить на  $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow G$  не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  и  $K_{3,3}$

**Доказательство  $\Leftarrow$** 

Очевидно

**Доказательство  $\Rightarrow$** 

\*слишком сложно описать доказательство, просто поверьте\*

## 1.7 Раскраска

**Определение**

$c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  – раскраска

Раскраска *правильная*, если  $\forall uv \ c(u) \neq c(v)$

По умолчанию будем говорить о правильных раскрасках

**Определение**



$G$  раскрашиваемый в  $k$  цветов, если существует правильная раскраска в  $k$  цветов

$k = 1$  – граф изолированный

$k = 2$  – граф двудольный

### Теорема

Граф двудольный  $\Leftrightarrow$  любой цикл четный

### Определение

Пусть есть граф  $G$

Хроматическая функция  $p_G(t)$  – число способов раскрасить  $G$  в  $t$  цветов (можно использовать не все цвета)

$$p_{K_n}(t) = t(t-1) \dots (t-n+1) = t^n = \frac{t!}{(t-n)!}$$

### Определение

$G/uv$  – стягивание графа по  $uv$

Стягивание означает, что мы заменяем вершины  $u$  и  $v$  одной вершиной

Если цвета  $u$  и  $v$  равны, то стягивание не влияет на раскраски

### Лемма

Пусть  $uv$  – ребро в  $G$

$$p_G(t) = p_{G \setminus \{uv\}}(t) - p_{G/uv}(t)$$

### Теорема о хроматическом многочлене

Пусть  $G$  – неориентированный граф с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами,  $k$  компонентами связности

Тогда  $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - p_{n-3}t^{n-3} + \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$  (коэффициенты знакопереваются)

### Доказательство

Индукция по числу вершин и ребер

Если  $n = 0, m = 0$ , то  $p_G(t) = t^n$

Если  $m > 0$

Рассмотрим ребро  $uv$

$$p_G(t) = p_{G \setminus uv}(t) - p_{G/uv}(t)$$

Если  $uv$  – не мост

$$\begin{aligned} p_{G \setminus uv}(t) &= t^n - (m-1)t^{n-1} + q_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm q_k t^k \\ -p_{G/uv}(t) &= -t^{n-1} + r_{n-2}t^{n-2} + \dots \pm r_k t^k \end{aligned}$$

Отсюда  $p_G(t) = t^n - mt^{n-1} + p_{n-2}t^{n-2} - \dots \pm p_k t^k, p_i > 0$

Если  $uv$  – мост, то  $q_k = 0$ , но это ничего не меняет

### Теорема

$G$  – дерево  $\Leftrightarrow p_G(t) = t(t-1)^{n-1}$

Доказательство  $\Leftarrow$

$$p_G(t) = t^n - (n-1)t^{n-1} + \dots + t$$

Отсюда  $n = n, m = n-1, k = 1$  – дерево

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Возьмем в графе лист  $a$  и удалим его

$$p_{\{v\}} = t$$

$$p_{G \setminus a}(t) = t(t-1)^{n-2}$$

$$p_G(t) = (t-1)p_{G \setminus a}(t)$$

**Лемма**

В планарном графе  $\exists u : \deg u \leq 5$

**Доказательство**

$$E \leq 3v - 6$$

Пусть это не так

$$\text{Тогда } 6V \leq 2E \leq 6V - 12$$

**Теорема (super light)**

Любой планарный граф можно раскрасить в 6 цветов

**Доказательство**

Рассмотрим вершину степени не более 5

Удалим ее из графа

Планарность не ломается

Остаток раскрасим в 6 цветов

Потом добавим вершину обратно вершину

Для нее всегда можно выбрать какой-то цвет

**Теорема Хивуда (medium)**

Любой планарный граф можно раскрасить в 5 цветов

**Доказательство**

Рассмотрим вершину степени не более 5

Если степень меньше 5, применим трюк из прошлого доказательства

Если степень ровно 5, удалим ее

Раскрасим граф в 5 цветов

Вернем ее

Если есть 2 соседа одного цвета, то мы победили

Пусть все соседи разных цветов

Пусть по часовой стрелке расположены соседи цветов 1, 2, 3, 4, 5

Возьмем соседа цвета 1, запустим DFS по вершинам цвета 1 и 3

Если мы не дошли до соседа цвета 3, то в дереве DFS'а поменяем все 1 и 3 местами

Тогда нашу вершину покрасим в цвет 1

Пусть мы дошли до соседа цвета 3 (т.е. нашли цикл)

Тогда повторим аналогичные действия с вершинами цвета 2 и 4

Из планарности цикл в обходе невозможен

### **Теорема (hard)**

Любой планарный граф можно раскрасить в 4 цвета

**Доказательство слишком сложное**

### **Определение**

Регулярный граф – граф, где все степени одинаковые

$\deg G = d$

### **Лемма**

Пусть  $G$  – граф,  $\deg v \leq d, \exists u : \deg u < d$

Тогда его можно раскрасить в  $d$  цветов

### **Доказательство**

Запустим из  $u$  DFS

Построим остовное дерево с корнем в  $u$

Будем раскрашивать вершины с листьев к корню

Вершину будем красить, если все ее дети уже покрашены

У каждой вершины всегда есть один непокрашенный сосед – ее родитель

Тогда мы сможем покрасить дерево

### **Теорема (Брукс)**

Пусть  $G$  – связный граф

$\deg v \leq d$

$G \neq K_n$

$G \neq C_{2n+1}$  (цикл)

Тогда  $\exists$  раскраска  $G$  в  $d$  цветов

### **Доказательство**

Какая-то глина

## **1.8 Паросочетания в произвольных графах**

### **Определение**

$I \subset V : \forall u, v \in I \ uv \notin E$  – независимое множество (антиклика)

$\alpha(G)$  – максимальный размер независимого множества в графе

### **Определение**

$C \subset V : \forall uv \in E \ u \in C \vee v \in C$  – вершинное покрытие

$\beta(G)$  – минимальный размер вершинного покрытия

### **Теорема**

$\alpha(G) + \beta(G) = n$

### **Лемма**

$A$  – вершинное покрытие  $\Leftrightarrow V \setminus A$  – независимое множество

**Доказательство**

Для каждого ребра верно, что один его конец лежит в  $A$

Тогда не существует такого ребра  $uv$ , что  $u, v \notin A$

Тогда  $V \setminus A$  для каждого ребра содержит не более одного его конца

**Определение**

Паросочетание –  $M \subset E : \forall e, f \in M \ e, f$  не имеют общих концов

$\alpha'(G)$  – размер максимального паросочетания в  $G$

**Определение**

Реберное покрытие –  $F \subset E : \forall u \exists e \in F : e = uv$

$\beta'(G)$  – размер минимального реберного покрытия

**Теорема**

$$\alpha'(G) + \beta(G) = n$$

**Определение**

Будем рассматривать связные графы

Рассмотрим паросочетание размера  $\alpha'(G)$

Для каждой изолированной вершины добавим свое ребро

Мы получим реберное покрытие

$$\beta'(G) \leq \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G)$$

$$\alpha'(G) + \beta'(G) \leq n$$

Теперь возьмем минимальное реберное покрытие

Теперь выберем в этом графе максимальное паросочетание (пусть его размер –  $k$ )

$$k \leq \alpha'(G)$$

Заметим, что для любого ребра в покрытии паросочетанием покрыта ровно один его конец:

Если оба конца покрыты, то это ребро не может лежать в минимальном покрытии

Если ни один конец не покрыт, то паросочетание не максимальное

$$\text{Тога } \beta'(G) = n - 2k + k$$

$$n \leq \alpha'(G) + \beta'(G)$$

**Определение**

Доминирующее множество  $D \subset V : \forall u \ u \in D \vee \exists v \in D : uv \in E$

$\gamma(G)$  – размер минимального доминирующего множества

**Определение**

Клика –  $C \subset V : \forall u, v \in C : uv \in E$

$\omega(G)$  – максимальная клика

**Определение**

Паросочетание *совершенное*, если оно покрывает все вершины

**Определение**

Пусть зафиксировано множество ребер  $M$

Путь *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из  $M$  и не из  $M$

Цикл *чередующийся*, если в нем чередуются ребра из  $M$  и не из  $M$

Чередующийся путь *дополняющий*, если его крайние ребра не в  $M$

Чередующийся путь *сбалансированный*, если ровно одно его крайнее ребро не в  $M$

Чередующийся путь *антидополняющий*, если его крайние ребра в  $M$

**Определение**

$M$  – максимальное  $\Leftrightarrow$  не существует дополняющих путей

$$|M| = \alpha'(G)$$

**Доказательство**

$M_1 \oplus M_2$  – множество ребер, которые входят ровно в одно паросочетание

Компоненты связности в получившемся графе – циклы и пути, дополняющие для  $M_1, M_2$  или сбалансированные

Докажем  $\Rightarrow$

Пусть  $M$  – максимальный

Возьмем  $M \oplus M_2$

В этом графе нет дополняющих путей: если бы они были, то  $M$  был бы не максимальным

Докажем  $\Leftarrow$

Пусть не существует дополняющих путей

Возьмем  $M_{max}$

$$|M_{max}| \geq |M|$$

Т.к. нет дополняющих путей, то в  $M \oplus M_{max}$  есть только циклы, сбалансированные и антидополняющие пути

В каждом цикле/пути ребер из  $M$  не меньше, чем из  $|M_{max}|$

$$\text{Тогда } |M| \geq |M_{max}|$$

$$\text{Тогда } |M| = |M_{max}|$$

$$\text{Отсюда } |M_{max}| = |M|$$

**Определение**

$T \subset V$  – множество Татта, если  $\text{odd}(G \setminus T) > |T|$ , где  $\text{odd}$  – количество компонент нечетного размера

**Теорема Татта**

$G$  содержит совершенное паросочетание  $\Leftrightarrow \forall S \subset V \text{ odd}(G \setminus S) \leq |S|$   
(граф содержит множество Татта)

**Доказательство**  $\Rightarrow$

Пусть это не так

Пусть в графе содержится множество Татта  $T$ , и есть совершенное паросочетание

Удалим его из графа

Тогда у нас получился  $\text{odd}(G \setminus T)$  компонент с нечетным количеством вершин

Внутри них нет совершенного паросочетания

Тогда в каждой компоненте существует вершина, которая в совершенном паросочетании связана с вершиной из  $T$

Но таких вершин больше, чем  $|T|$

Отсюда множества Татта быть не может

### **Лемма**

Рассмотрим  $uv \notin E$

$$\text{odd}(G \cup \{uv\}) \leq \text{odd}(G)$$

### **Лемма 2**

$G$  – не содержит множество Татта,  $uv \notin E$

Тогда  $G \cup \{uv\}$  не содержит множество Татта

### **Доказательство**

Рассмотрим  $S \in V$

$$\text{odd}((G \cup \{uv\}) \setminus S) = \text{odd}\left(\begin{array}{c} G \setminus S \\ G \setminus S \cup \{uv\} \end{array}\right) \leq \text{odd}(G \setminus S)$$

### **Доказательство $\Leftarrow$**

Пусть в графе  $G$  не содержится множество Татта и не содержится совершенного паросочетания

Среди всех таких графов выберем  $G$  с минимальным числом ребер, а затем с максимальным числом вершин

$G$  содержит четное число вершин – иначе  $\emptyset$  – множество Татта

Тогда  $G \neq K_n$  (иначе бы в нем содержалось совершенное паросочетание)

$$U := \{v : \deg v = n - 1\}, U \neq V$$

### **Лемма 3**

Компоненты связности  $G \setminus U$  – полные графы

Рассмотрим эти компоненты

В четных компонентах выберем паросочетания

В нечетных выберем паросочетания, оставив одну вершину

Т.к. множества Татта нет, то  $|U| \geq \text{odd}(G \setminus U)$

Но вершины  $U$  связаны со всеми

Соединим вершины  $U$  с оставшимися вершинами из компонент в паросочетании

сочетание

Возможно, в  $U$  остались изолированные вершины

Соединим их в паросочетание (это возможно, т.к. в графе четное число вершин)

Т.о. мы построили совершенное паросочетание – противоречие

### **Доказательство леммы 3**

В графе  $G \setminus U$  каждая вершина хотя бы с какой-то не связана

Предположим, что в какой-то компоненте  $G \setminus U$  есть компонента, не являющаяся полным графом

Тогда в ней хотя бы два ребра

Выберем эти ребра  $xy, xz : zy \notin E$

Возьмем  $w : xw \notin E$

Вспомним, что  $G$  – граф с максимальным числом ребер

Тогда при добавлении ребра в  $G$  должно появиться множество Татта (невозможно по леммам) или идеальное паросочетание

Тогда при добавлении  $yz$  в графе должно появиться идеальное паросочетание

Назовем это паросочетание  $M_1$  ( $yz \in M_1$ )

Уберем  $yz$  и добавим  $xw$

Назовем это паросочетание  $M_2$  ( $xw \in M_2$ )

$M_1 \oplus M_2$

$yz, xw \in M_1 \oplus M_2$

Заметим, что в  $M_1 \oplus M_2$  нет путей: если есть путь, то его конец лежит только в одном паросочетании, но покрыты все вершины

Тогда компоненты связности – циклы

1.  $yz, xw$  – в разных компонентах

Тогда возьмем из компоненты  $yz$  ребра  $M_2$ , а из компоненты  $xw$  – ребра  $M_1$

Из других компонент возьмем или ребра  $M_1$ , или ребра  $M_2$

Мы получили совершенное паросочетание – противоречие

2.  $yz, xw$  – в одной компоненте

Утверждается, что можно взять в этой компоненте ребра так, что при добавлении ребра  $xz$  или  $xy$  возникает паросочетание – противоречие

### **Определение**

$\text{def } G = n - 2\alpha'(G)$  – дефицит  $G$  – количество вершин, не покрытых

максимальным паросочетанием

**Теорема (Формула Бержа)**

$$\text{def } G = \max_{S \subseteq V} (\text{odd}(G \setminus S) - |S|)$$

**Замечание**

$$\text{def } G \geq \text{odd}(G) - |\emptyset| \geq 0$$

//todo 1:22

## 1.9 Паросочетания №2

**Определение**

$G$  – фактор-критический, если  $\forall u \in V$   $G \setminus u$  содержит совершенное паросочетание

$$\text{def } G = 1$$

$$\alpha'(G) = \frac{n-1}{2}$$

$$\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$$

**Лемма Татта**

$$\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G) \Rightarrow G \text{ – фактор-критический}$$

**Лемма**

Пусть  $\forall u \in V \alpha'(G \setminus u) = \alpha'(G)$

$S \neq \emptyset \Rightarrow S$  – не множество Татта

**Доказательство**

Рассмотрим  $v \in S$

$$G' = G \setminus v$$

$$S' = S \setminus v$$

$$\text{def } G' \geq \text{odd}(G' \setminus S') - |S'| = \text{odd}(G \setminus S) - |S| + 1 = \text{def } G + 1$$

Но дефицит не может увеличиться

Отсюда  $S = \emptyset$

Отсюда  $\text{def } G = 1$

Отсюда  $G$  – фактор-критический

**Декомпозиция Эдмондса-Галлаи**

$D = \{v : \exists M \text{ – максимальное паросочетание, } M \text{ – не покрывает } v\}$

$A$  – соседи  $D$

$$C = V \setminus (A \cup D)$$

**Теорема**

Пусть  $M$  – совершенное паросочетание в  $V$

Тогда  $M$  покрывает все вершины  $C$ , причем вершины из  $C$  находятся в паросочетании с вершинами  $C$



В каждой компоненте связности  $D$  покрыты все вершины, кроме одной (которая единственная может быть связана с вершиной из  $A$ )

$M$  покрывает все вершины из множества  $A$

Компоненты в  $D$  – фактор-критические

$A$  – множество Татта

**Лемма**

$a \in A$

Удалим ее

$D(G \setminus a) = D(G)$

$A(G \setminus a) = A(G) \setminus a$

$C(G \setminus a) = C(G)$

$\alpha(G \setminus a) = \alpha'(G) - 1$

**Доказательство**

//todo

## 1.10 Факторизация

**Определение**

Регулярный остов степени  $k$  –  $k$ -фактор графа

0-фактор – изолированные вершины

1-фактор – совершенное паросочетание

2-фактор – разбиение на циклы

**Определение**

$f$ -фактор, где  $f$ -вектор длины  $n$

Остов, где  $\deg i = f_i$

**Алгоритм**

Заменим  $i$ -ую вершину на  $\deg i$  вершин

Теперь соединим эти вершины, чтобы при конденсации получился исходный граф (степени каждой вершины должны быть 1)

Найдем в полученном графе паросочетания

Далее для каждой вершины создадим  $\deg i - d_i$  вершин и соединим каждую из них со всеми вершинами  $i$  из предыдущего шага

Теперь найдем совершенное паросочетание

Удалим вершины из предыдущего шага и выполним конденсацию

## 2 Матроиды

### Определение

Пусть есть множество  $X$  – носитель

Рассмотрим подмножества  $X$

Пусть «хорошие» подмножества – независимые

«плохие» – зависимые

Множество хороших подмножеств  $I \subset 2^X$

$I$  должно удовлетворять следующим свойствам:

1.  $\emptyset \in I$  – аксиома нетривиальности

2.  $A \in I, B \subset A \Rightarrow B \in I$

Такая система называется предматроидом или Inheritance system

Но в такой системе не будет работать жадный алгоритм

Добавим еще одну аксиому:

$A \in I, B \in I, |A| > |B|$

Тогда  $\exists x \in A \setminus B : B \cup x \in I$  – аксиома замены

### Пример 1 (матричный матроид)

$F^m, F$  – поле

$I$  – множества линейно независимых векторов

### Пример 2 (графовый матроид)

Рассмотрим  $G$  – неориентированный граф  $\langle V, E \rangle$

$X = E, I$  – ациклическое множество

Докажем аксиому замены

$|V| = n, |E| = m$  Пусть есть множества  $A$  и  $B, |A| > |B|$

Рассмотрим компоненты связности в графе  $G_A$  и  $G_B$

Количество компонент связности  $C_A = n - |A|, C_B = n - |B|$

$C_A < C_B$

Значит в  $A$  существует компонента связности, содержащая вершины из двух компонент в  $B$

Тогда в  $A$  есть ребро, соединяющее разные компоненты из  $B$

### Утверждение

Рассмотрим  $X_1, I_1 \subset 2^{X_1}$

$X_2, I_2 \subset 2^{X_2}$

Существует биекция  $\phi : X_1 \rightarrow X_2$

$A \in I_1 \Leftrightarrow \phi(A) \in I_2$

Тогда пусть  $M$  – матроид  $X_1, I_1$

$N$  – система подмножеств  $X_2, I_2$  и существует изоморфизм  $N$  и  $M$

Тогда  $N$  – матроид

### **Лемма**

Графовый матроид изоморфен матричному матроиду

### **Доказательство**

Рассмотрим матрицу инцидентности

Представим ее как множество векторов из 0 и 1 (сложение по модулю 2)

Докажем, что подграф ациклический  $\Leftrightarrow$  множество векторов линейно независимое

Если  $A$  содержит цикл, то сложение(хор) векторов дает 0

Если  $A$  не содержит цикл, то это лес. Там есть лист. Тогда хор не даст 0

**Пример 3 (матроид паросочетаний)** Рассмотрим  $G$  – двудольный граф

$X, Y$  – вершины двух долей

$E$  – множество ребер

Пусть  $X$  – носитель

$I$  – подмножество  $X$ , которое может быть покрыто одним паросочетанием

Докажем свойство 3

Пусть  $A$  покрывается паросочетанием  $M_A$

$B$  – паросочетанием  $M_B$

Рассмотрим  $M_A \oplus M_B$

В таком графе пути будут иметь вид  $ab...aba(b)$ , где  $a$  – ребро из  $A$ ,  $b$  – ребро из  $B$

Т.к.  $|M_A| > |M_B|$ , то найдется путь, начинающийся и заканчивающийся на  $a$

Назовем его  $P$

В  $M_B \oplus P$  найдется изолированная вершина

Добавим ее в  $B$

**Пример 4 (универсальный матроид)**

$U_{n,k}$

$X = \{1, \dots, n\}$

$I$  – подмножества  $X$  не более  $k$

**Пример 5 (разноцветный матроид)**

$X$  – множество пар  $\langle i, c_i \rangle$ ,  $i$  – предмет,  $c_i$  – цвет

$c_i \in C$

$I$  – множества предметов различных цветов

**Определение** $A \subset X$  $\text{base}(A) = B : B \in I, B \subset A, |B| - \text{максимально}$ 

В матричном матроиде: базис

В графовом матроиде: остовный лес

 $\text{base}(X)$  – база матроида**Лемма** $A \subset X$  $B$  – максимальное по включению подмножество  $A, B \in I$ Тогда  $B$  – база  $A$ **Доказательство**Пусть есть  $B'$  – база  $A$ Если  $|D| > |B|$ , то по аксиоме 3  $\exists x : x \in D \setminus B, B \cup x \in I$  – что невозможно

Из данной леммы следует, что мы можем применять жадные алгоритмы

**Определение**Взвешенный матроид – пара из матроида и  $w : X \rightarrow \mathbb{R}$  – весовая функция

$$w(A) = \sum_{x \in A} w(x)$$

Как найти базу минимального веса?

**Алгоритм (Жадный, Радо-Эдмондса)**

```

1  sort X
2  for x in X
3      if (B ∪ {x}) ∈ I:
4      B.insert(x)

```

**Лемма**Пусть  $A_k$  – независимое множество минимального веса мощности  $k$  $y$  – элемент минимального веса такой, что  $A_k \cup y \in I, y \notin A_k$ Тогда  $A_{k+1} := A_k \cup y$ **Доказательство**Рассмотрим  $A_k$  и  $A_{k+1}$ По аксиоме замены  $z = A_{k+1} \setminus A_k$ Если  $w(y) < w(z)$ , то  $w(A_k \cup y) < w(A_{k+1})$ Тогда  $A_{k+1}$  – не минимального веса**Доказательство корректности алгоритма**

По индукции

## 2.1 Аксиоматизация матроида

### Определение

Ранговая функция:  $r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$

$$r(A) = \max\{|B| : B \subset A, B \in I\}$$

$$r(M) = r(X)$$

$B$  матричном матроиде: ранг – классический

$B$  графовом матроиде:

цикл – классический

$\text{rg} = n - k$  – количество вершин - количество компонент связности

$B$  циклическом матроиде:  $\text{rg}(A) = \min(k, |A|)$

цикл – множество мощности  $k + 1$

### Теорема (О базах)

$B$  – базы  $M$

1.  $B_1, B_2 \in B, B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$
2.  $B_1, B_2 \in B$   
Тогда  $\forall x \in B_1 \setminus B_2 \exists y \in B_2 \setminus B_1 : B_1 \setminus x \cup y \in B$

### Теорема (аксиоматизация базами)

$X, B \subset 2^X, B \neq \emptyset$

Если для  $B$  выполнена предыдущая теорема, то  $B$  – база некоторого матроида

### Теорема (о рангах)

$r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$  для матроида  $M$

1.  $0 \leq r(A) \leq |A|$
2.  $A \subset B \Rightarrow \text{rg}(A) \leq \text{rg}(B)$
3.  $\text{rg}(A \cup B) + \text{rg}(A \cap B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$

### Лемма

Пусть  $A \in I$

Тогда  $\exists$  база  $B : A \subset B$

### Теорема (аксиоматизация рангами)

Если  $r : 2^X \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и выполнены аксиомы из предыдущей теоремы, то  $r$  – ранговая функция некоторого матроида

### Теорема о циклах

$Cyc$  – множество циклов матроида  $M$

1.  $C_1, C_2 \in \text{Cyc}, C_1 \subset C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
2.  $C_1, C_2 \in \text{Cyc}, C_1 \neq C_2$   
 $\forall p \in C_1 \cap C_2 \exists C_3 \in \text{Cyc} : C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p$

**Доказательство**

$$r((C_1 \cup C_2) \setminus p) \leq r(C_1 \cup C_2) \leq r(C_1) + r(C_2) - r(C_1 \cap C_2) = |C_1| - 1 + |C_2| - 1 - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus p|$$

**Лемма**

$A \notin I \Rightarrow \exists C \in \text{Cyc} : C \subset A$

**Лемма**

$B$  – база матроида  $M$

$p \in X \setminus B$

Тогда  $\exists! C \subset B \cup p, C \in \text{Cyc}$

**Доказательство**

Существование очевидно

Пусть  $C_1, C_2 \subset B \cup p$

$p \in C_1 \cap C_2$

Тогда  $\exists C : C \subset (C_1 \cup C_2) \setminus p \subset B$  – противоречие

**Теорема о базах усиленная**

Пусть  $B$  – базы матроида  $M$

$B_1, B_2 \in B$

Тогда  $\forall y \in B_2 \setminus B_1 \exists x \in B_1 \setminus B_2 : B_1 \cup y \setminus x \in B$

**Доказательство**

Возьмем  $y$  и добавим в  $B_2$

$B_1 \cup y$  содержит единственный цикл  $C$

$\exists x \in (B_1 \setminus B_2) \cap C$

Тогда  $B_1 \cup y \setminus x$  не содержит циклов  $\Rightarrow$  база

**Определение**

$\langle A \rangle = A \cup \{p : \text{rg}(A \cup p) = \text{rg}(A)\}$  // Доказательства конспектировать  
 лень