Линейная алгебра. Практика

Александр Сергеев

Пример

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \end{cases}$ - Система линейных неоднородных уравнений.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \\ (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a21} \\ x_2 = \dfrac{b_1a_{21} - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \end{cases}$$

Δ_i - определитель матрицы, где i-ый столбец заменен на столбец свободных членов.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}$$

Определение

$\det A = \sum (-1)^{inv(\sigma)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$, где $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $inv(S)$ - количество пар $(a, b) : a, b \in S, a > b$

Теорема Крамера

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists!$ решение $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где

Δ_i - определитель матрицы, где i-ый столбец заменен на столбец свободных членов.

Свойства:

1. $|A| = |A^T|$
2. Все свойства строк выполняются для столбцов
3. $|\ldots, A_i + B_i, \ldots| = |\ldots, A_i, \ldots| + |\ldots, B_i, \ldots|$, где A_i, B_i - столбцы - свойство аддитивности по столбцам
4. $|\ldots, k \cdot A_i, \ldots| = k \cdot |\ldots, A_i, \ldots|$
5. Если в матрице есть нулевой столбец, то определитель $= 0$
6. $|\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots| = -|\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots|$
7. Отслюда $|\ldots, S, \ldots, S, \ldots| = 0$
8. $|\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots| = |\ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots|$ - линейное преобразование
9. $\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$
   где $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - дополнение,
   M_{ij} - минор(матрица, полученная вычеркиванием i строки и j столбца).

Теорема
Пучок плоскостей, проходящих через $\alpha_1 \cap \alpha_2$ задается уравнением $a(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + b(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

Пересечение линейных пространств
Пусть $L_1, L_2 \subset V$ - линейные подпространства линейного пространства $L_1 = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_k), a_1, \ldots, a_k$ - базис $L_2 = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_m), b_1, \ldots, b_k$ - базис

Рассмотрим $u \in L_1 \cap L_2$
$u = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$
$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i - \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = 0$ - СЛОУ

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & -b_1 & \dots & -b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbb{0}$$

Решая систему в общем виде, можем найти все вектора пересечения
Отсюда можно найти базис