

Дискретная математика. Теория

Александр Сергеев

1 Графы

1.1 Неориентированные графы

Определение

Неориентированный граф – множество вершин V и множество ребер $E \subset (V \times V \setminus \{(u, u)\}) / \sim$ (факторизованное отношением эквивалентности $\sim: (u, v) \sim (v, u)$)

Путь P – последовательность $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1} u_i$ – ребро

$k := |P|$ или $k := \text{len}(P)$ – *длина пути*

Простой путь – путь, который посещает каждую вершину не более одного раза

Реберно-простой путь – путь, который посещает каждое ребро не более одного раза

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Зададим *цикл*:

- $\sqsupset P = u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$
 $\sqsupset Q = u_i e_{i+1} \dots e_k u_k e_1 u_1 \dots e_i u_i$
 $\sqsupset R = u_k e_k u_{k-1} \dots e_1 u_0$
 $P \sim R, P \sim Q$ – равны с точностью до отражения и циклического сдвига
- Пусть если в циклическом пути $\forall i \ e_{i+1} \neq e_{i+2}, u_i \neq u_{i+2}$, то циклический путь называется *корректным*

Тогда *цикл* – класс эквивалентности корректных циклических путей относительно отношения эквивалентности \sim

Ациклический граф – граф без циклов

Определение

Пусть $\exists P : u_0 = u, u_k = v$. Тогда $u \rightsquigarrow v$ (отношение связности путем)

Пусть $P : u \rightsquigarrow v, Q : v \rightsquigarrow w$. Тогда $P \circ Q := u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$ – конкатенация пути

Теорема

Отношение \rightsquigarrow в неориентированном графе – отношение эквивалентности

Определение

Класс эквивалентности по отношению \rightsquigarrow – *компонента связности*

Граф, содержащий одну компоненту связности – *связный граф*

Определение

u, v – реберно двусвязные, если существует два (возможно, совпадающих) реберно непересекающихся пути из u в v

Теорема

Реберная двусвязность – отношение эквивалентности

Доказательство

Путь u (из одной вершины) реберно не пересекается с самим собой. Отсюда рефлексивность

Симметричность очевидна

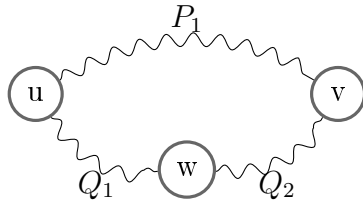
Докажем транзитивность

Рассмотрим u, v, w , пары $(u, v), (v, w)$ реберно двусвязные

P_1, P_2 – пути между u, w

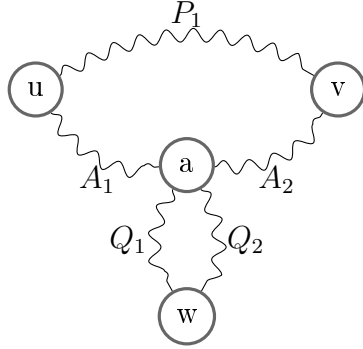
Рассмотрим случаи:

- $w = v \vee w = u$ – очевидно
- $w \in P_2$



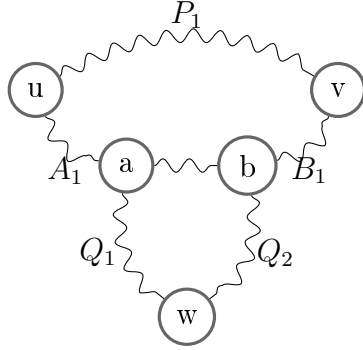
Тогда $Q_2, P_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq v, u, w :$



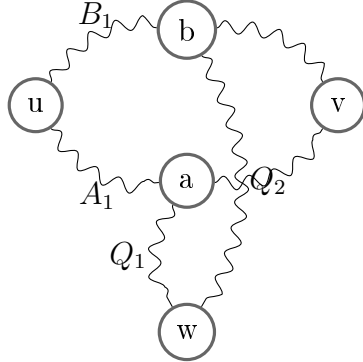
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ A_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



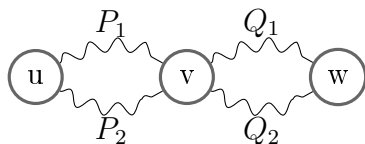
Тогда $A_1 \circ Q_1, P_1 \circ B_1 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

- $\exists a \neq b \neq v, u, w :$



Тогда $B_1 \circ Q_2, P_1 \circ A_1 \circ Q_1$ реберно не пересекаются

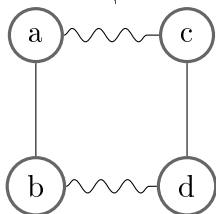
-



Тогда $P_1 \circ Q_1, P_2 \circ Q_2$ реберно не пересекаются

Определение

Ребра ab, cd (не являющиеся петлями) являются вершинно двусвязными, если существуют два вершинно непересекающихся пути, соединяющих их концы



Теорема

Отношение вершинной двусвязности – отношение эквивалентности

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Определение

Рассмотрим $A = \{a, b : ab \text{ – вершинно двусвязные}\}$ – компоненту вершинной двусвязности (блок)

Точка v – точка сочленения, если она лежит в нескольких блоках

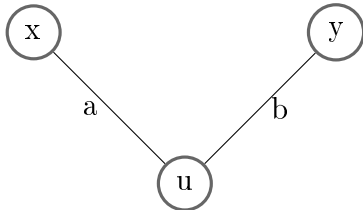
Теорема

Вершина является точкой сочленения \Leftrightarrow Ее удаление увеличивает количество компонент связности

Доказательство \Rightarrow

Пусть u – точка сочленения

Тогда она лежит в нескольких блоках:



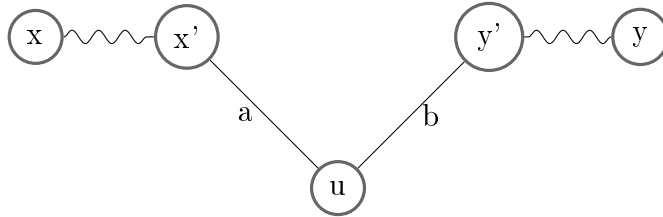
a, b – не являются вершинно двусвязными, т.к. лежат в разных блоках

Тогда не существует пути $x \rightsquigarrow y$, не проходящего через u

Отсюда при удалении u x и y окажутся в разных компонентах

Доказательство \Leftarrow

Пусть при удалении u количество компонент увеличилось
 Возьмем x и y такие, что до удаления u они были в одной компоненте, а после удаления оказались в разных
 Тогда любой путь из x в y проходил через u
 Выберем какой-то путь из x в y и возьмем на нем вершины x' и y' – соседей вершины u



Тогда ребра a и b вершинно не двусвязные

Определение

Мост – ребро, соединяющее вершины из разных компонент реберной двусвязности

Мост – ребро, при удалении которого количество компонент связности увеличивается

1.2 Ориентированные графы

Определение

Ориентированный граф – множество вершин V и ребер $E \subset V \times V$ (разрешаем петли)

В ребре $w = uv$ $\text{beg } w = u, \text{end } w = v$

Путь P – последовательность $u_0 e_1 u_1 \dots e_k u_k$, где u_i – вершина, $e_i = u_{i-1} u_i$ – ребро

Циклический путь – путь, где $u_0 = u_k$

Цикл – класс эквивалентности циклических путей относительно циклического сдвига

Теорема

Если G – ациклический ориентированный граф, то $\exists \phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\} : uv \in E \Rightarrow \phi(u) < \phi(v)$

(существует топологическая сортировка – т.е. способ пронумеровать вершины так, чтобы все ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером)

Лемма

G – ациклический ориентированный граф

Тогда существует вершина, из которой не выходит ребро

Доказательство теоремы

Докажем по индукции

Возьмем вершину, из которой не выходит ребро

Присвоим ей номер n

Удалим ее

Пронумеруем оставшиеся вершины

Определение

Симметризация G – граф \overline{G} такой, что $uv \in G \Rightarrow uv, vu \in \overline{G}$

(Т.е. восприятие G как неориентированного графа (возможно, с петлями))

Компонента слабой связности – компонента связности в \overline{G}

Компонента сильной связности – компоненты, где существуют пути $u \rightsquigarrow v$ и $v \rightsquigarrow u$

Сильная связность – отношение эквивалентности

1.3 Деревья

Определение

Дерево – связный неориентированный граф без циклов

Теорема

G – граф, содержащий n вершин

Рассмотрим утверждения:

1. В нем $n - 1$ ребро
2. В нем нет циклов
3. Он связан

Любые два утверждения влекут третье и задают дерево

Лемма

Пусть G – дерево, содержащее ≥ 2 вершины

Тогда \exists вершина степени 1

(На самом деле их хотя бы две)

Доказательство

Возьмем вершину u_1 . Если у нее степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в ее соседа u_2 . Если у него степень 1, ч.т.д.

Иначе пойдем в соседа u_3 , которого мы еще не посещали

Через не более n шагов мы придем в вершину u_i , все соседи которой уже посещены

Если u_i имеет более одного соседа, то мы нашли цикл. Отсюда u_i будет иметь степень 1

Доказательство 2

Рассмотрим самый длинный путь в графе

Предположим, что его конец имеет степень, не равную 1

Тогда либо мы можем продлить путь, либо мы нашли цикл

Отсюда концы пути имеют степени 1, ч.т.д.

Доказательство теоремы

$$2 + 3 \Rightarrow 1$$

Если $n = 1$ – очевидно

Если $n > 1$: Возьмем вершину степени 1

Удалим ее вместе с ребром. Докажем, что в оставшемся ациклическом связном графе $n - 2$ ребра

$$1 + 2 \Rightarrow 3$$

Пусть в графе k компонент связности

Если в i компоненте n_i вершин, то в ней $n_i - 1$ ребро

Тогда всего ребер в графе $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k = n - 1$

Отсюда $k = 1$

$$1 + 3 \Rightarrow 2$$

Если $n = 1$ – очевидно

Если $n > 1$ и есть вершина степени 1, удалим ее. Количество циклов это не уменьшает. Докажем, что оставшийся граф ациклический

Если $n > 1$ и нет вершины степени 1, то из каждой вершины выходит как минимум 2 ребра. Тогда всего ребер не меньше $\frac{2 * n}{2} = n$ – противоречие

Лемма о рукопожатии

$$\sum_{u \in V} \deg u = \sum_{u \in V} \sum_{e \in E} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu] = \underbrace{\sum_{e \in E} \sum_{u \in V} [1, \text{if } e = uv \vee e = vu]}_2 =$$

$$2|E|$$

Теорема

G – дерево $\Leftrightarrow \forall u, v \exists!$ простой путь $u \rightsquigarrow v$

Доказательство \Rightarrow

Среди всех пар вершин, между которыми существует хотя бы два простых пути, выберем пару, для которой $l_1 + l_2$ минимально

Тогда эти пути не имеют общих вершин, кроме концов (из минимальности)

Тогда эти два пути образуют цикл

Доказательство \Leftarrow

Граф связан

Граф ацикличесен – если это не так, то между вершинами в цикле есть два простых пути

Отсюда это дерево

Теорема

G – связан $\Leftrightarrow G$ связан и любое ребро – мост

Определение

G – граф

H – получен удалением из G вершин и/или ребер

H – *подграф* G

Определение

G – граф

H – получен из G удалением вершин (и ребер, выходящих из них)

H – *индуцированный* подграф G

Определение G – граф

H – получен из G удалением ребер с сохранением связности

H – *остовный* подграф G

Теорема

У любого связного графа есть остовное дерево

Доказательство 1

Обойдем граф bfs-ом и получим дерево

Доказательство 2

Среди всех остовных подграфов возьмем граф с минимальным количеством ребер

Утверждается, что он будет деревом

Доказательство 3 (жадный алгоритм)

Будем удалять ребра, пока граф связан

Мы получим ациклический связный граф

Научимся считать количество остовных деревьев

Рассмотрим матрицу $n \times n$:

На диагонали напишем степень вершины

В остальных клетках поставим -1, если вершины соединены ребром, иначе 0

Определение

Матрица Кирхгофа – матрица $n \times n$ такая, что $a_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$

Теорема

Пусть G – связный граф

Тогда количество остовных деревьев $G = \widehat{A_{ij}} \forall i, j$ – алгебраическое дополнение любого элемента матрицы A

Лемма 1

Рассмотрим матрицу инцидентности I_G

Это матрица $n \times m, m = |E|$

В ней каждой вершине соответствует строка, каждому ребру соответствует столбец

$$(I_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \vee e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(I_G I_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ 1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

Ориентируем граф (для каждого ребра выберем направление). Теперь началу будет соответствовать 1, концу – -1

$$(\vec{I}_G)_{ve} = \begin{cases} 1 & e = vu \\ -1 & e = uv \\ 0 & \end{cases}$$

$$(\vec{I}_G \vec{I}_G^T)_{ij} = \begin{cases} \deg i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$$

$\vec{I}_G \vec{I}_G^T$ = матрица Кирхгофа

Лемма 2

Рассмотрим \vec{I}_G

Выберем $n - 1$ ребро

Рассмотрим столбцы, соответствующие этим ребрам

Удалим строку, соответствующую вершине u (u любая)

Мы получили матрицу $n - 1 \times n - 1$

Обозначим ее как B

Если выбранные ребра образуют остовное дерево, то $|B| = \pm 1$, иначе $|B| = 0$

Доказательство

Рассмотрим граф T , образованный всеми вершинами и выбранными ребрами

Докажем, что если T не дерево, то $|B| = 0$

Т.к. это не дерево и в нем $n - 1$ ребро, то граф не связан

Рассмотрим компоненту связности, не содержащую u

Сложим строки, соответствующие вершинам из этой компоненты

Утверждается, что сумма $= 0$

Отсюда матрица вырожденная

Докажем, что если T – дерево, то $|B| = \pm 1$

По лемме у дерева есть два листа

Тогда есть как минимум один лист, не равный u . Назовем его v_1

Переставим строчку, соответствующую v , на первое место

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Т.к. v_1 – лист, то в соответствующей строчке будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец в начало матрицы

От этого определитель не изменится с точностью до знака

Рассмотрим дерево T_2 , полученное удалением v_1 из T

В нем есть как минимум один лист, не равный u . Назовем его v_2

Переставим строчку, соответствующую v_2 , на второе место

Т.к. v_2 – лист, то в соответствующей строчке (исключая первый столбец) будет ровно одно число, отличное от 0. Переставим столбец на второе место

Повторим действия

В итоге мы получили нижнедиагональную матрицу, на диагонали которой ± 1

Отсюда определитель будет ± 1

Лемма 3 (Формула Коши-Бине)

Пусть даны матрицы $r \times s$ и $s \times r$, $r \leq s$

$\det AB = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq s} \det A^{i_1 \dots i_r} \det B_{i_1 \dots i_r}$ – оставили только столбцы $i_1 \dots i_r$, $B_{i_1 \dots i_r}$ – оставили только строки $i_1 \dots i_r$

Лемма 4

$$\widehat{A_i i} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T)$$

Т.к. $m = |E| \geq n - 1$, применим лемму 3:

$$\widehat{A_i j} = \det(\vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}} \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^T) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq m} \underbrace{\det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ строки}}^{i_1 \dots i_{n-1}} \det \vec{I}_{G \text{ без } i \text{ столбца}}^{i_1 \dots i_{n-1}}}_{1, \text{ если образует ост.д, иначе } 0}$$

Отсюда $\widehat{A_i j}$ = кол-во остовных деревьев

1.4 Ориентированные деревья

Определение

Пусть G – ориентированный граф

Подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из каждой вершины можно добраться в корень

Обратное подвешенное корневое дерево – ориентированное дерево, в котором из корня можно добраться в каждую вершину

Теорема Тутта

Лапласиан графа G – матрица $(L(G))_{ij} = \begin{cases} \deg^- i & i = j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & \end{cases}$ – позволяет

искать исходящие остовные корневые деревья

(Для входящих \deg^+ и $ji \in E$)

Количество остовных корневых деревьев с корнем i равно $\widehat{L(G)}_{ii}$

Определение

Пусть $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Функциональный граф – граф $G : (i, f(i)) \in E$

В функциональном графе каждая компонента имеет вид цикла, в которого входят деревья

Всего существует n^n функциональных графов

Число функциональных подграфов = $\prod_{u \in v} \deg^- u$

1.5 Обход графа

Определение

Эйлеров путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждому ребру в графе ровно один раз

Гамильтонов путь/цикл – путь/цикл, проходящий по каждой вершине в графе ровно один раз

Если в графе существует Эйлеров цикл, то граф называется *Эйлеровым* (или граф без ребер)

Теорема

G – Эйлеров \Leftrightarrow Все его ребра лежат в одной компоненте связности и $\forall v \deg v$ – четное

Доказательство \Rightarrow

Заметим, что в каждую вершину мы вошли и вышли
Остудя степени четные и компонента связности одна

Доказательство \Leftarrow

Н.у.о. будем считать, что в финальном графе одна компонента связности
Докажем индукцией по числу ребер

Если ребер 0, доказано

Пусть ребер > 0

//todo

Теорема

G содержит эйлеров путь \Leftrightarrow Все его ребра лежат в одной компоненте связности и в графе не более двух вершин нечетной степени

Доказательство

Если она одна, то начнем обход в ней

Если их две, то соединим их фиктивной вершиной, найдем эйлеров цикл, после чего удалим ее

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров цикл \Leftrightarrow граф слабо связан и $\forall v \deg^-(v) = \deg^+(v)$

Теорема

Ориентированный граф содержит эйлеров путь \Leftrightarrow граф слабо связан и $\deg^-(v) = \deg^+(v)$ для не более чем двух вершин a, b , а $\deg^+(a) = \deg^-(a) + 1$ и $\deg^+(b) = \deg^-(b) - 1$

Задача

Покрыть неориентированный граф минимальным количеством реберно простых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max(\frac{\text{odd}(C)}{2}, 1)$, $\text{odd}(C)$ – кол-во вершин нечетной степени в C

Покрыть ориентированный граф минимальным количеством реберно про-

стых путей, чтобы все ребра были покрыты

Всего их $\sum_{C - \text{к. св. с ребрами } G} \max(\sum_{u \in C, \deg^+ u < \deg^- u} (\deg^- u - \deg^+ u), 1)$

BEST-Теорема

В слабо связном ориентированном эйлеровом графе число корневых деревьев всех вершин совпадает, а число эйлеровых циклов $E = A \prod_{u \in V} (\deg^- u -$

1)!

Доказательство

Выберем стартовое ребро xt

//todo лекция 3