Теория вероятности. Теория

Александр Сергеев

1 Вероятностное пространство. Вероятность и ее свойство

Определение
Алгебра событий:
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – набор подмножеств Ω
$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A + B \in \mathcal{A}$

Элементы алегбры – *события*
Операции с событиями

1. $A \cup B = A + B$
2. $A \cap B = AB = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
4. $A \setminus B = A - B = A\overline{B}$

Определение
σ-алгебра
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра

1. $\mathcal{A}$ – алгебра

2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$

Определение
События A, B – *несовместные* $AB = \varnothing$
Набор несовместный, если события попарно несовместные
Определение(вероятностное пространство)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$

Определение(вероятностное пространство в широком смысле)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $\bigcup\limits^{\infty} A_i \Rightarrow P(\bigcup\limits^{\infty} A_i) = \sum P(A_i)$

Теорема о продолжении меры
$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ – вероятностное пространство в широком смысле
Тогда $\exists! Q : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ – вероятность, $Q\Big|_{\mathcal{A}} = P$, где $\sigma(\mathcal{A})$ – сигма-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$
Определение
$\mathcal{A}$ – система интервалов на $\mathbb{R}$, замкнутая относительно конечного объединения и пересечения
$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ – борелевская сигма-алгебра
Примеры вероятностных пространств

1. Модель классической вероятности
   $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$
   $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$
   $P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$
   $\mathcal{A} = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_M}\} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \dfrac{M}{N}$

2. Ω – набор $\{0^i, 1\}, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
   $P(0^i 1) = q^i p$

3. Модель геометрической вероятности Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество
   $\mathcal{A}$ – измеримое по Лебегу подмножество Ω
   $P(A) = \dfrac{\lambda A}{\lambda \Omega}$

Теорема (свойство вероятности)

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5. $P(\varnothing) = 0$
6. $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Доказательство

1. $P(B) = P(A) + P(B - A)$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$
3. $A \sqcup \overline{A} = \Omega$
4. $B = AB \sqcup (B \setminus AB)$
5. $B_1 = A_1$ $B_2 = A_2 \setminus A_1$
   $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots A_{n-1})$ $\bigsqcup B_i = \bigcup A_i$
   $B_i \subset A_i$
   $P(\bigcup A_i) = P(\bigsqcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i)$

Теорема (формула включения/исключения)

$$P(A_1+\ldots+A_n) = \sum_{i} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \ldots (-1)^{n+1} \sum_{i_1<\ldots<i_n} P(A_{i_1} \ldots A_{i_n})$$

Доказательство

Доказательство по индукции