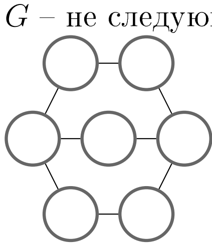
Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

1 Friends and strangers graph

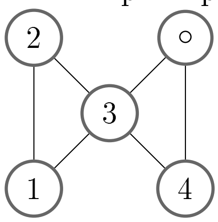
Рассмотрим связный неориентированный граф G из n вершин
В $n-1$ вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)
Для каких графов G можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?
Теорема Уилсона
Если граф G:

- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины $n \geq 4$
- G – не следующий граф:



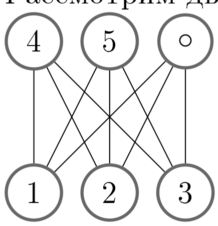
то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно
Доказательство необходимости

- Рассмотрим граф

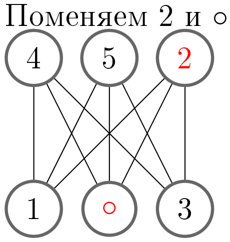
  

  Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

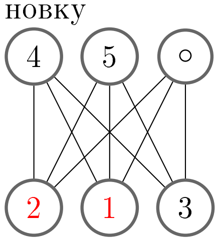
- Рассмотрим двудольный граф

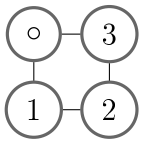
  Рассмотрим его как перестановку
  Поменяем 2 и $\circ$ местами

  Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится $\circ$) не изменилась
  Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку

- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

Доказательство достаточности

Отсутствует...

Рассмотрим обобщение предыдущей игры:

Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"

Т.е. теперь у нас два графа: "географический"граф X и граф дружбы Y

В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка"с $\circ$ в центре (т.е. $\circ$ дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)

Построим граф $FS(X, Y)$ – граф друзей и врагов

В нем будет $n!$ вершин

Каждая вершина графа – биекция $\sigma : V(X) \to V(Y)$

Получается, что σ – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к. $V(x)$ – множество вершин, а $V(Y)$ – множество фишек)

Вершины σ и σ' соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским"обменом

Тогда из любой перестановки можно получить любую $\Leftrightarrow$ граф связен

Из теоремы Уилсона: $FS(G, K_{1,n-1}), G$ – из теоремы Уилсона, $K_{1,n-1}$ – звездочка с вершиной n в центре

Ответим на другой вопрос: Для каких G граф $FS(G, C_n), C_n$ – цикл длины n – связен

Лемма

Графы $FS(X, Y)$ и $FS(Y, X)$ – изоморфны

Т.е. можно построить биекцию $u \overset{\theta}{\Leftrightarrow} u'$ такую, что ребра uv и $\theta(u)\theta(v)$ существуют одновременно

Доказательство

Построим биекцию $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$

Теперь рассмотрим граф $FS(C_n, G)$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию:

По кругу стоят $3n$ человек: n семей вида папа-мама-ребенок

Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой

//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

2 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

2.1 Линейные отображения

Определение
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – множество линейных отображений из X в Y (линейные пространства)
$\mathrm{Lin}(X, Y)$ – линейное пространство
Обозначение
Пусть $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$
$\|A\| := \sup\limits_{|x|=1} |A(x)|$
Замечание 1
$\|A\| \in \mathbb{R}$
Доказательство
Было доказано: $|Ax| \le C_a|x|, C_A = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$
Замечание 2
Из теоремы Вейерштрасса $\sup \leftrightarrow \max$ в конечномерном случае
Замечание 3
$\forall\, x \in \mathbb{R}^m\ |Ax| \le \|A\||x|$
Доказательство
Для $x = 0$ очевидно
$\widetilde{x} := \dfrac{x}{|x|}$
$|A\widetilde{x}| \le \|A\|$
Замечание 4
Если $\exists\, C : \forall\, x\ |Ax| \le C|x|$, то $\|A\| \le C$
Пример

- $m = n = 1$
  A – линейное отображение: $x \mapsto ax$
  $\|A\| = |a|$

- $m = 1, n$ – любое
  $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Тогда $\exists\, \overline{v} \in \mathbb{R}^n Ax = x\overline{v}$
$\|A\| = |\overline{v}|$

- $n = 1, m$ – любое
  $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
  Тогда $\exists\, l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l \rangle$
  $\|A\| = |l|$
- m, n – любые
  $A = (a_{ij})$
  $x \mapsto Ax$
  $\|A\|$ так легко не считается((((

Лемма
Пусть X, Y – нормированные линейное пространство
$A \in \mathrm{Lin}(X, Y)$
Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A – ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$
2. A – непрерывно в $\mathbb{0} \in X$
3. A – непрерывно на X
4. A – равномерно непрерывное $(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta\ |Ax_1 - Ax_2| < \varepsilon)$

Доказательство
$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ – очевидно
Докажем $2 \Rightarrow 1$
Возьмем $\varepsilon = 1$
$\exists\, \delta > 0 :\ \forall\, x : |x| < \delta\ |Ax| < 1$
Возьмем $|x| = 1$
$Ax| = \dfrac{1}{\delta}|A(\delta x)| < \dfrac{1}{\delta}$
Тогда $\|A\| \leq \dfrac{1}{\delta}$
Докажем $1 \Rightarrow 4$
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \dfrac{\varepsilon}{\|a\|} :\ \forall\, x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$
$|Ax_1 - Ax_2| = |A(x_1 - x_2)| \leq \|A\||x_1 - x_2| < \varepsilon$
Теорема о пространстве линейных отображений

- $\|\cdot\|$ – норма в $\mathrm{Lin}(X,Y), X,Y$ – конечномерные нормированные пространства
  Т.е.
  1. $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
  2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\ \|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
  3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство
$\|A\| \geq 0$ – тривиально
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$
$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
$|(A+B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_{C}|x| \Rightarrow \|A+B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$
$|BAx| \leq \|B\||Ax| \leq \|B\|\|A\||x|$
Замечание
В $\mathrm{Lin}(X,Y)$
$\|A\| = \sup\limits_{|x|=1}|Ax| = \sup\limits_{|x|\leq 1}|Ax| = \sup\limits_{|x|<1}|Ax| = \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X\ |Ax| \leq C|x|\}$
Теорема Лагранжа (для отображений)
$F : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ – дифференцируема в D – открытом
$a, b \in D, [a,b] \subset D$
Тогда $\exists\, c \in [a,b]$, т.е. $\exists\, \theta \in [0,1] : c = a + \theta(b-a) :\ \ |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\||b-a|$
Доказательство
$f(t) = F(a + t(b-a)), t \in [0,1]$
$f'(t) = F'(a + t(b-a))(b-a)$
$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1-0) = |F'(a+\theta(b-a))(b-a)| \leq \|F'(a+\theta(b-a))\||b-a|$
Лемма
$B \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
$\exists\, c > 0 : \forall\, x\ |Bx| \geq c|x|$
Тогда B – обратим и $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$
Доказательство

Обратимость очевидна, т.к. $\operatorname{Ker} B = \{\mathbb{0}\}$. Тогда $\exists\, B^{-1}$

$|\underbrace{B^{-1}y}_{x}| \leq \dfrac{1}{c}|BB^{-1}y| = \dfrac{1}{c}|y|$

Замечание

Ω_m – множество обратимых линейных операторов $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\||Ax|$

Т.е. $|Ax| \geq \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}|x|$

Теорема об обратимости линейного операторого, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$ – обратимый линейный оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$M \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \leq \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$ – M – близкий к L

Тогда

- $M \in \Omega_m$ – т.е. Ω_m – открытое
- $\|M^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \dfrac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}\|L - M\|$

Доказательство 1 и 2

$Mx = Lx + (M - L)x$

$|Mx| \geq |Lx| - |(M-L)x| \geq \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}|x| - \|M-L\||x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|)|x|$

1 и 2 следуют из леммы

Доказательство 3

$\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{m} = \dfrac{m-l}{lm}$

Аналогично $L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$

$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M - L)L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\|\|M - L\|\|L^{-1}\| \leq$ из пункта 2

Следствие

Отображение $L \mapsto L^{-1}$, заданное на Ω_m, непрерывно

Доказательство

Доказательство по Гейне

Рассмотрим последовательность операторов $B_k : B_k \to L$

Проверим, что $B_k^{-1} \to L^{-1}$

Н.С.Н.М. $\|B_k - L\| < \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$

$$\|B_k^{-1} - L^{-1}\| \le \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \underbrace{\|L - B_k\|}_{\to 0}}}_{\text{огр}} \underbrace{\|L - B_k\|}_{\to 0} \to 0$$

Теорема (о непрерывно дифференцируемых отображениях)
$F : \underbrace{D}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, дифф. на D
$F' : D \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$
Тогда $1 \leftrightarrow 2$

1. $F \in C^1(D)$ (все частные производные непрерывны на D)
2. $F' : D \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ – непрерывно на D
   $\forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| < \varepsilon$

Доказательство $1 \to 2$
Пусть $F \in C^1(D)$
$\forall\, i, j\ \forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ |\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$
Тогда $\|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| \le \sqrt{\sum_{ij} (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\widetilde{x}))^2} \le \varepsilon$
Доказательство $2 \to 1$
Пусть $\forall\, x \in D\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, \widetilde{x} : |x - \widetilde{x}| < \delta\ \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| < \varepsilon$
$h = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots 0)^T$
$|\underbrace{(F'(x) - F'(\widetilde{x})h)}_{\sum_{i=1}^{l} (\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\widetilde{x}))}| \le \|F'(x) - F'(\widetilde{x})\| |h| \le \varepsilon$
Отсюда $\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\widetilde{x}))^2} \le \varepsilon$
Тогда для $i = i_0$ – $|\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(\widetilde{x})| \le \varepsilon$

3 Экстремумы

Определение
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$a \in D$ – локальный максимум $f \Leftrightarrow \exists\, U(a) : \forall\, x \in U(a) \cap D\ f(x) \le f(a)$ (нестрогий экстремум)
$a \in D$ – локальный строгий максимум $f \Leftrightarrow \exists\, U(a) : \forall\, x \in U(a) \cap D\ f(x) < f(a)$ (строгий экстремум)
Теорема Ферма
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
$a \in \operatorname{Int} D, f$ – дифференцируема
a – экстремум
Тогда $\forall$ направление $l\ \dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$
Доказательство
$g(t) = f(a + tl), t \in \mathbb{R}$ – задана в окрестности 0
$g'(0) = 0$

$$g'(t) = f'l = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial l}$$

Следствие (необходимое условие экстремума)
a – локальный экстремум
Тогда $\forall\, 1 \le k \le m\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$
Следствие (т. Ролля)
Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ – компакт
f – дифференцируема в $\operatorname{Int} K$ ($f : K \to \mathbb{R}$, непрерывна)
$f_{\partial K} = \text{const}, \partial K$ – граница компакта
Тогда $\exists\, x_0 \in \operatorname{Int} K : \operatorname{grad} f(x_0) = 0$
Доказательство
По теореме Вейерштрасса f достигает $\max, \min$ на K
Если оба на ∂K, то $f \equiv \text{const}$ на K
Иначе применим теорему Ферма
Определение
$Q(h) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – квадратичная форма, если она представляет однородный многочлен 2 степени
т.е. $Q(h) = \displaystyle\sum_{1 \le i \le m, 1 \le j \le m} a_{ij} h_i h_j, a_{ij} = a_{ji}$

Q – положительно определенная $\Leftrightarrow \forall\, h \ne 0\ Q(h) > 0$
Q – отрицательно определенная $\Leftrightarrow \forall\, h \ne 0\ Q(h) < 0$
Q – незнакоопределенная $\Leftrightarrow \exists\, h : Q(h) > 0, \exists\, h : Q(h) < 0$

Q – полуопределенная (положительно определенная вырожденная) $\Leftrightarrow$ $\forall\, h\ Q(h) \geq 0, \exists\, h \neq 0 : Q(h) = 0$

Лемма

1. $Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – кв. форма, $Q > 0$
   Тогда $\exists\, \gamma_Q > 0 : \forall\, x\ Q(x) > \gamma_Q |x^2|$
2. $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – норма Тогда $\exists\, C_1, C_2 > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^m\ C_1|x_1| \leq p(x) \leq C_2|x_2|$

Доказательство

1. $\gamma_Q := \min\limits_{|x|=1} Q(x) > 0$
   Тогда $Q(x) = |x|^2 Q(\dfrac{x}{|x|}) \geq \gamma_Q |x|^2, x \neq 0$
2. Проверим, что $p(x)$ непрерывна, чтобы доказать существование минимума и максимума:
   $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) = p(\sum (x_k - y_k)\overline{e_k}) \leq \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq M|x-y|, M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$ – по КБШ
   $C_1 = \min\limits_{|x|=1} p(x), C_2 = \max\limits_{|x|=1} p(x)$
   $p(x) = |x| p(\dfrac{x}{|x|}) \leq |x| C_2, \geq |x| C_1$

Напоминание
$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}\, f(x,h) + \dfrac{1}{2!}\mathrm{d}^2\, f(x,h) + \ldots$
$\mathrm{d}^2\, f(x,h) = f''_{x_1x_1}(x)h_1^2 + \ldots + f''_{x_nx_n}h_n^2 + 2f''_{x_1x_2}h_1h_2 + \ldots$
Теорема (достаточное условие экстремума)
$f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{Int} D, \operatorname{grad} f(a) = 0, f \in C^2(D)$
$Q(h) := \mathrm{d}^2\, f(a,h)$
Тогда $Q > 0 \Rightarrow a$ – локальный минимум
$Q < 0 \Rightarrow a$ – локальный максимум
$Q \lesseqgtr 0$ – не точка локального экстремума
$Q \geq 0$ – информации недостаточно
Доказательство
$\forall\, h\ \exists\, t \in (0,1) : f(a+h) = f(a) + \underbrace{\mathrm{d}\, f(a,h)}_{0} + \dfrac{1}{2!}\mathrm{d}\, f(a+th, h)$ – остаток в формуле Лагранжа

$f(a+h)-f(a) = \dfrac{1}{2!}Q(h)+\dfrac{1}{2!}(\underbrace{f''_{x_1x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1x_1}(a)h_1^2}_{|\text{б.м.}\cdot h_i^2|=o(|h|^2)}+\ldots+\underbrace{2f''_{x_1x_2}h_1h_2 - 2f''_{x_1x_2}(a)h_1h_2}_{|\text{б.м.}\cdot h_ih_j|=o(|h|^2)})+\ldots)$

$f(a+h)-f(a) \geq \dfrac{1}{2}Q(h) - |\alpha(h)||h|^2 \geq \dfrac{1}{2}\gamma_Q|h|^2 - |\alpha(h)||h|^2 \geq \dfrac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0, \alpha(h)$ – б.м., при достаточно малых $|h|$

Пункт 1 доказан

Пункт 2 доказывается заменой $f \to -f$

Пункт 3: $h : Q(h) > 0, \widetilde{h} : Q(\widetilde{h}) < 0$

Аналогично п.1. $f(a+s\cdot h) - f(a) \geq \dfrac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \dfrac{1}{2}Q(h)s^2 - |\alpha(s)|s^2 \geq \dfrac{1}{4}Q(h)\cdot s^2$

С другой стороны $f(a+s\cdot\widetilde{h}) < 0$ по аналогичным соображениям

Пункт 4: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, a = (0,0)$

$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^4$

$Q(h) = 2h_1^2$ – полуопределенный

Тут нет экстремума

$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4$ – в нуле экстремум

4 Функциональные последовательности и ряды

4.1 Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение

Последовательность функций – отображение $N \rightsquigarrow$ множество функций

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots : X \to \mathbb{R}, X$ – любое множество

Последовательность (f_n) сходится поточечно на E – существует функция $f(x)$

$f_n \underset{E}{\to} f$

$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Последовательность (f_n) сходится равномерно на E к функции f

$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \underbrace{\forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|=\rho(f_n,f)\leq\varepsilon}$

Замечание
$f \rightrightarrows f$ на $E, E_0 \subset E$
Тогда $f_n \underset{E_0}{\rightrightarrows}$
Замечание
$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$
Тогда $f_n \underset{E}{\to} f$
Замечание
$\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R}, f$ – огр.$\}$
Тогда $\to (f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ является метрикой на $\mathcal{F}$
Доказательство
Первые две аксиомы очевидны
Докажем неравенство треугольника
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, x_0 : \rho(f,g) - \varepsilon < |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$
Отсюда $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$
Замечание
$f_n \rightrightarrows f$ на E_1 и на E_2
Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $E_1 \cup E_2$
Теорема 1 (Стокса - Зайдля)
X – метрическое пространство
$f_n, f : X \to \mathbb{R}$
$c \in X, f_n$ – непрерывная в c
$f_n \rightrightarrows f$ на X
Тогда f – непрерывна в c
Доказательство
Дано утверждение о равномерной сходимости
$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N : \forall\, n > N\; \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$
Начиная с некоторого большого n :
$; \; |f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{<\varepsilon}$
Т.к. f_n непрерывна, то $\exists\, U(c) : \forall\, x \in U(c)\; |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$
Отсюда $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$
Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, U(c) : \forall\, x \in U(c)\; |f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$
Замечание

Вместо метрических пространств можно рассматривать топологические пространства(без изменения доказательства)

Следствие

$f_n \in C(X), f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда $f \in C(X)$

Следствие 2

$f_n \in C(X), \forall\, c\, \exists\, W(c) : f_n \rightrightarrows f$ на $W(c)$. Тогда $f \in C(X)$

Замечание

$f_n \rightrightarrows f$ на $X \not\Leftarrow \forall\, c\, \exists\, W(c) : f_n \rightrightarrows f$

Пример: $f_n = x^n, x \in (0,1)$

$f \equiv 0$

Рассмотрим точку x в $(\alpha, \beta), \beta \neq 1$

$\rho(f_n, f) = \beta^n \to 0$

$f_n(x) \rightrightarrows f$ на (α, β)

Но $\rho(f_n, f) = 1$ на $(0,1)$

$f_n \not\rightrightarrows f$ на $(0,1)$

Теорема

X – компакт

$\rho(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)$ в $C(X)$

Тогда $(C(X), \rho)$ – полное метрическое пространство

(т.е. $\forall\, x_n$ – фунд. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, m, n > N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$)

Доказательство

Пусть f_n – фундаментальная последовательность в $C(X)$

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, n, m > N\ \rho(f_n, f_m) = \sum\limits_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Тогда $\forall\, x_0 \in X$ последовательность $n \mapsto f_n(x_0)$ – фунд. вещ. посл.

Тогда $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ – конечная

Проверим, что $f_n \rightrightarrows f, f \in C(X)$

$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N : \forall\, n, m > N\ \forall\, x\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon > 0 \exists\, N : \forall\, n > N\ \forall\, x\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (предельный переход $m \to \infty$)

Т.е. $f_n \rightrightarrows f$ на X

$f \in C(X)$ по теореме 1

Замечание

$\mathcal{F}(X) =$ пространство ограниченных функций на X

$(\mathcal{F}(X), \rho)$ – полное м.п.

Доказательство

Аналогичное

Теорема (критерий Коши)

$f_n \in C(X)$
$\exists\, f \in C(x) : f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N : \forall\, n, m > N\, \forall\, x \in X\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

4.2 Предельный переход под знаком интеграла

Подумаем о следующем правиле: $f_n \to f \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$
Анти-пример
$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n), x \in [0,1], f_n \to f \equiv 0$
$\int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n)\,\mathrm{d}\,x \underset{t=x^n}{=} \int_0^1 (1-t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}$
Теорема 2
$f_n \in C[a,b]$
$f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$
Тогда $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$
(по т.1. f – непрерывна) **Доказательство**
$|\int_a^b f_n - \int_a^b f| = |\int f_a^b f_n - f| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup |f_n - f|(b-a) \to 0$
Следствие (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)
$f : \underbrace{[a,b]}_{x} \times \underbrace{[c,d]}_{y} \to \mathbb{R}$
$\forall\, x, y \exists\, f'_y(x,y)$ и f, f'_y – непрерывные на $[a,b] \times [c,d]$
Тогда для $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ верно, что Φ – дифференцируема на $[c,d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$
Доказательство
$\dfrac{\Phi(y+t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \int_a^b \dfrac{f(x, y+t_n) - f(x,y)}{t_n}\,\mathrm{d}\,x \underset{\text{по т.Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, t + \Theta_x t_n)\,\mathrm{d}\,x \overset{(*)}{\to} \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$
Проверим $(*)$:
Вспомним теорему Кантора о равномерной непрерывности
$f \in C(K)$. Тогда f – равномерно непрерывная

Т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists\,\delta > 0}_{\exists\,N:\forall\,n>N\ \ |t_n|<\delta} \quad : \forall\,x, \overline{x} : \rho(x, \widetilde{x}) < \delta\ |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$

Тогда $\rho((x, y + \Theta_x t_n), (x, y)) < \delta$

И значит $|f(x, y + \Theta_x t_n) - f(x, y)| < \varepsilon$

Т.е. $|\int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n) - \int_a^b f'_y(x, y)| \le \varepsilon(b - a)$

Теорема 3 (о предельном переходе по знаку производной)

Пусть $f_n \in C^1\langle a, b\rangle$

$f_n \to f_0$ поточечно на $\langle a, b\rangle$

$f'_n \rightrightarrows \phi$ на $\langle a, b\rangle$

Тогда $f_0 \in C^1\langle a, b\rangle, f'_0 = \phi$ на $\langle a, b\rangle$

Пояснение

$\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))'$

Доказательство

$[x_0, x_1] \subset \langle a, b\rangle$

$f'_n \rightrightarrows \phi$ на $[x_0, x_1]$ (отсюда ϕ непрерывна)

Тогда по т.2 $\int_{x_0}^{x_1} f'_n \to \int_{x_0}^{x_1} \phi$

$\underbrace{f_n(x_1) - f_n(x_0)}_{\to(f_0(x_1)-f_0(x_0))} \to \int_{x_0}^{x_1} \phi$

Т.о. f_0 – первообразная ϕ

ϕ – непрерывна по т.1

Отсюда $f'_0 = \phi$

5 Диффеоморфизм

Определение

Область в $\mathbb{R}^m$ – открытое связное множество

$f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область

f – *диффеоморфизм*, если f – обратимо, f, f^{-1} – дифференцируема

Замечание

Если это так, то $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$

$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$

Лемма (о «почти» локальной инъективности)

$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область, $x_o \in O, F$ – дифференцируемо в x_0

$\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда $\exists\, C > 0, \delta > 0 : \forall\, h : |h| < \delta\ |F(x_0 + h) - F(x)| \geq c|h|$
Доказательство

1. f – линейное
   Тогда $|h| = |f^{-1} \circ F \cdot h| \leq \|F^{-1}\| |Fh|$
   $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |Fh| \geq \dfrac{1}{\|F^{-1}\|}|h|$
   δ – любое
2. $|F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)|h|| \geq \underbrace{C}_{\text{из п.1}} |h| - |\alpha(h)||h|$

   Берем δ, чтобы $|\alpha(h)| \leq \dfrac{C}{2}$

Определение
$\forall\, x\ \det F'(x) \neq 0$, то отсюда не следует инъективность
В далеких точках значения могут совпадать
Пример
$(x_1, x_2) \to (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$
$\det F'(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$
Данное отображение склеивает точки
Теорема о сохранении области
$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – $\underline{\text{открытое}}$, $\forall\, x\ F$ – дифференцируемый в x и $\det F'(x) \neq 0$
Тогда $F(O)$ – открытое множество
Доказательство
Пусть $x_0 \in O, y_0 \in F(x_0)$
Проверим, что y_0 – внутренняя точка $F(O)$
По лемме $\exists\, C, \delta : \forall\, h \in \overline{B(0, \delta)}$
$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$
$r := \dfrac{1}{2}\operatorname{dist}(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta)}_{\text{сфера}})}_{\text{компакт}})$
$r > 0$ – потому что dist = inf на компакте, а значит inf реализуется
Проверим, что $B(y_0, r) \subset F(O)$
Т.е. проверим, что $\forall\, y \in B(y_0, r)\ \exists\, x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$
Рассмотрим $g(x) := |F(x) - y|^2, y \in B(y_0, r)$ – функция на $\overline{B(x_0, \delta)}$
(надеемся, что она обращается в 0)
$g(x_0) = |F(x_0) - y| < r^2$

$\forall\, x \in S(x_0, \delta)\ \gamma(x) \geq r^2$ Тогда $\min g$ достигается(т.к. функция на компакте) внутри $B(x_0, r)$
В этой точке все частные производные $= 0$
Пусть в точке x достигается минимум
$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \ldots + (F_m(x) - y_m)^2$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 2(F_1 - y_1)\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + 2(F_m - y_m)\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ 0 = \dfrac{\partial g}{\partial x_m} = 2(F_1 - y_1)\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} + \ldots + 2(F_m - y_m)\dfrac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{cases}$$

$(F(x) - y)^T F'(x) = 0$
Т.е. $\det F'(x) \neq 0$, то $g(x) = F(x) - y = 0$
Отсюда $g(x)$ достигает 0
Замечание
F – непрерывное $\Leftrightarrow \forall \underbrace{W}_{\text{откр.}}\ F^-1(W)$ – открытое
(из определения)
Замечание
Если O – связное, F – непрерывное
Тогда $F(O)$ – связное
(Отсюда область переходит в область)
Доказательство
Пусть это не так
Тогда $F(O) = W_1 \cup W_2$
Тогда $O = F^{-1}(W_1) \cup F^{-1}(W_2), F^{-1}(W_1), F^{-1}(W_2)$ – открытые и не пересекающиеся
Но это невозможно из связности
Тогда $F(O)$ – связное
Следствие
$F : \underbrace{O}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l, l < m$
$F \in C^1(O)$
$\forall\, x \in O\ \ \operatorname{rg} F'(x) = l$ (rg – ранг матрицы)
Тогда $F(O)$ – открытое
Доказательство
Пусть $x_0 \in O$
Проверим, что $F(x_0)$ – внутренняя точка в $F(O)$

$\operatorname{rg} F'(x_0) = l$
Н.у.о. пусть ранг реализуется на первых n столбцах
Т.е. $\det(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$
Тогда $\exists\, U(x_0) : \forall\, x \in U(x_0)\ \ \det(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x))_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$
Тогда $F(x_0)$ – внутренняя в $F(U(x_0))$:
Рассмотрим $U_l := \{(t_1, \dots, t_l) : (t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \in U(x_0)\}$ – l-мерная окрестность
$\widetilde{F} : U_l \to \mathbb{R}^l$
$(t_1, \dots, t_l) \mapsto F(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$
$\dfrac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial t_j} = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)\right)$
Теорема о дифференцировании обратного отображения
$F : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, O$ – область
$F \in C^r(O), r \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть F – обратимо и невырождено ($\forall\, x\ \ \det F'(x) \neq 0$)
Тогда $F^{-1} \in C^r$ (отсюда $(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$)
Доказательство
Индукция по r
База: $r = 1$
Пусть $S = F^{-1}$
S – непрерывна по теореме о сохранении области (по топологическому определению)
Возьмем $x_0 \in O, y_0 = F(x_0) \in O_1, O_1 = F(O)$
По лемме $\exists\, C, \delta : \forall\, x \in B(x_0, \delta)\ |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$
$A = F'(x_0)$
$|\underbrace{F(x)}_{y} - \underbrace{F(x_0)}_{y_0} = A(\underbrace{x}_{S(y)} - \underbrace{x_0}_{S(y_0)}) + \alpha(x)|x - x_0|$
$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$
Надо проверить: $\beta(y) = |S(y) - S(y_0)|A^{-1}\alpha(S(y)) = o(|y - y_0|)$
Пусть $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$ – выполнено при y близких к y_0
$|\beta(y)| = |S(y) - S(y_0)||A^{-1}\alpha(S(y))| \leq \dfrac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|\|A^{-1}\||\alpha(S(y))| = \dfrac{\|A^{-1}\|}{C}|y - y_0||\alpha(S(y))| = o(|y - y_0|)$
Отсюда S – дифференцируемо
Проверим, что в $S \in C^1, S' = A^{-1}$

$y \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} S(y) = x \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} T'(x) = A \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} A^{-1}$

Индукционный переход:

$(F^{-1})'(y) = (F'(x(y)))^{-1} \in C^r$

Ни черта не понял, смотрите лекцию 5-6, время 2:11:00