Линейная алгебра. Теория

Александр Сергеев

1 Линейное отображение

1.1 Основные определения. Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

Пусть V, U - линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Определение
$\mathcal{A} : U \to V$ – *линейное отображение*, если $\forall\, \lambda\ \in K, u_1, u_2 \in U\ \mathcal{A}(\lambda u_1 + u_2) = \lambda\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2)$
Замечания

1. Обозначение: $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}u$
2. $\mathcal{A}(\mathbb{0}_U) = \mathbb{0}_V$
3. Для $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \lambda, u$ поточечно определены $\mathcal{A}u + \mathcal{B}u, \lambda\mathcal{A}u$

Примеры

1. $\mathbb{0}u = \mathbb{0}_V$
2. $\epsilon v = v$
3. $V, U = P_n$ – множество многочленов степени $\leq n, A = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$ – дифференциальный оператор
4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, B$ – матрица
   $\mathcal{A}u = B \cdot u$

Определение
$L(U, V) = \mathrm{Hom}_K(U, V) = \mathrm{Hom}(U, V)$ – множество всех линейных отображений $U \to V$
Определим операции
$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\mathcal{A} + \mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$
$\mathcal{C} = \lambda\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}u = (\lambda\mathcal{A})u = \lambda\mathcal{A}u$
$L(U, V)$ – линейное пространство

Определение
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \{v = \mathcal{A}u : u \in U\}$ – образ линейного отображения
Замечание
$\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset V$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – конечномерное, то $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} =: \operatorname{rg}\mathcal{A}$
Определение
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A}u = \mathbb{0}_V\}$ – ядро линейного отображения (прообраз $\mathbb{0}_V$)
Замечание
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \varnothing$
$\mathbb{0}_U \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset U$ – линейное подпространство
Если $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ конечномерно, то $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{def}\mathcal{A}$
Замечание 2
Изоморфизм – частный случай линейного отображения
$\mathcal{A}$ - изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \operatorname{Im}\mathcal{A} = V \\ \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbb{0}_U(\text{тривиально}) \end{cases}$
Следствие
Если U, V – конечномерные
$\mathcal{A}$ - изоморфизм $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{A} \in L(U, V) \\ \operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim V \\ \operatorname{def}\mathcal{A} = 0 \end{cases}$
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$

- $\mathcal{A}$ сюръективное $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\mathcal{A} = V$
- $\mathcal{A}$ инъективное $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$
- $\mathcal{A}$ биективно $\Leftrightarrow$ сюръективно + инъективно $\Leftrightarrow$ изоморфизм

- $\mathcal{A}$ эндоморфизм $\Leftrightarrow$ линейный оператор $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in L(V, V)$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \in \operatorname{End}_K(V)$

- $\mathcal{A}$ автоморфизм $\Leftrightarrow$ эндоморфизм + изоморфизм $\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \operatorname{Aut}_K(V)$

Примеры

1. $\mathbb{0} \in L(U, V)$

2. $\epsilon \in \operatorname{Aut}(V)$ – автоморфизм

3. $\mathcal{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}$
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_{n-1})$ – сюръекция, не инъекция, не эндоморфизм
   $\mathcal{A} \in L(P_n, P_n)$ – не сюръекция, не инъекция, эндоморфизм

4. $U = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m, A_{m \times n}$ – матрица
   Определение
   $\operatorname{Im} A = \{y = Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ – образ матрицы
   $\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbb{0}\}$ – ядро матрицы
   $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker} A$ – дефект матрицы
   $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A$ – согласуется со старыми определениями ранга матрицы
   Доказательство
   Для $y \in \operatorname{Im} A$
   $y = Ax = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$
   $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$
   $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rg} A$
   Утверждение
   $\operatorname{Ker} A$ - множество решений $Ax = 0$
   Тогда $\operatorname{def} A = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rg} A$

   Отображение $u = Av$:

   (a) Сюръекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m$
   (b) Инъекция $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$
   (c) Биекция $\Leftrightarrow n = m = \operatorname{rg} A$
   (d) Эндоморфизм $\Leftrightarrow n = m$
   (e) Автоморфизм $n = m = \operatorname{rg} A$

Определение
$\mathcal{AB} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – композиция
$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ – линейное отображение
Свойства

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$
   $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = \mathcal{AB}_1 + \mathcal{AB}_2$ – дистрибутивность
2. $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \lambda(\mathcal{AB}) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B})$ – однородность
3. $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = \mathcal{ABC}$ – ассоциативность
4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – изоморфизм $\Rightarrow \mathcal{AB}$ – изоморфизм

Определение
Пусть $\mathcal{A} \in L(U, V)$ – изоморфизм
$\forall\, v \in V \ \exists!u : \ \mathcal{A}u = v$
Тогда зададим $\mathcal{A}^{-1}v = u$
$\mathcal{A}^{-1} : V \to U$
$\mathcal{A}^{-1}$ – изоморфизм, обратный к $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon_V$
$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \epsilon_U$
Замечание
$\mathrm{End}(V)$ - ассициативная унитарная алгебра
$\mathrm{Aut}(V)$ - ассоциативная унитарная алгебра с делением
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V), U_0 \subset U$ – линейное подпространство
Тогда $\mathcal{A}_0 : U_0 \to V$ называется сужением на линейное подпространство U_0, если $\forall\, u \in U_0 \ \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}u$
Очевидно $\mathcal{A}_0 \in L(U_0, V)$
$A_0 =: A|_{U_0}$
Утверждение
A изоморфизм $\Rightarrow A_0$ изоморфизм $\in L(U_0, \operatorname{Im} \mathcal{A}_0)$
Доказательство
$\mathcal{A}_0 : U_0 \to \operatorname{Im} \mathcal{A}_0$ – сюръекция
$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_0 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbb{0}_U\}$ – из изоморфизма
Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_0 = \{\mathbb{0}_U\}$
Тогда $\mathcal{A}_0$ инъекция, а значит изоморфизм
Теорема о ранге и дефекте линейного отображения

U, V – конечномерные
$A \in L(U, V)$
Тогда $\dim U = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A$
Доказательство
$U_0 = \operatorname{Ker} A \subset U$
Дополним U_0 до U: $U = U_0 \oplus U_1$
Пусть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{U_1} : U_1 \to \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\forall\, u \in U\;\; u = u_0 + u_1, u_0 \in U_0, u_1 \in U_1$ – единственным образом
$\mathcal{A}u = \mathcal{A}u_0 + \mathcal{A}u_1 = \mathcal{A}u_1$
Отсюда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
Покажем, что $\mathcal{A}_1$ изоморфизм:
Сюръекция, т.к. действует в $\operatorname{Im} \mathcal{A}_1$
$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset \operatorname{Ker} \mathcal{A} = U_0, \operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_1$
Отсюда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 \subset U_0 \cap U_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ из дизъюнктности
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_1 = \{\mathbb{0}_U\}$ – тривиально
Тогда $\mathcal{A}_1$ инъективно
Отсюда $\mathcal{A}_1$ изоморфизм, т.е. $\dim U_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}_1 = \operatorname{rg} \mathcal{A}$
Тогда $\dim U = \dim U_0 + \dim U_1 = \operatorname{def} A + \operatorname{rg} A$, ч.т.д.

1.2 Матрица линейного отображения, изоморфизм алгебр изменение матрицы отображения при замене базиса

Далее будем говорить про конечномерные U, V
Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\xi_1, \ldots, \xi_n$ – базис U
$\nu_1, \ldots, \nu_m$ – базис V
$$\forall\, u \in U\;\; u = \sum_{i=1}^{n} u_i \xi_i \leftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$$\forall\, v \in V\;\; v = \sum_{i=1}^{m} v_i \nu_i \leftrightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$\forall\, v \in \operatorname{Im}\mathcal{A}\ v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}\xi_i$

$\mathcal{A}$, как линейное отображение, полностью определяется значениями $\mathcal{A}$ на базисных векторах

$\mathcal{A}_{\xi_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$

$A = (A_1 \ldots A_n)$ - матрица линейного отображения в базисах (ξ, ν)

<u>Если $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(v)$ – линейный оператор, то считаем, что исходный и конечный базис совпада</u>

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \nu_j$

$v = \mathcal{A}u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \mathcal{A}_{\xi_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}u_i)\nu_j$

Т.к. координаты введены единственным образом, то $\forall\, j\ v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}u_i \Leftrightarrow$

$v = \mathcal{A}u \Leftrightarrow v = Au$

Примеры

1. $\epsilon : \underset{e_1 \ldots e_n}{V} \to \underset{e_1 \ldots e_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow E$

2. $\epsilon : \underset{\xi_1 \ldots \xi_n}{V} \to \underset{\nu_1 \ldots \nu_n}{V}$
   Тогда $\epsilon \leftrightarrow T_{\nu \to \xi} = T_{e \to e'}$

Утверждение

$L(U, V) \cong M_{m \times n}$ – пространство всех матриц $A_{m \times n}, \dim U = n, \dim V = m$ (при фиксированных базисах U, V)

Доказательство

Соответствие между $\mathcal{A}$ и A взаимооднозначное

Докажем линейность

$(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})_{\xi_i} = \mathcal{A}_{\xi_i} + \lambda\mathcal{B}_{\xi_i} = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji}\nu_j + \lambda \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ji}\nu_j = \sum\limits_{j=1}^{m} (a_{ji} + \lambda b_{ji})\nu_j \leftrightarrow A + \lambda B$

Утверждение

$\mathcal{AB} \leftrightarrow AB$

Доказательство

$\underset{\xi_1\dots\xi_n}{U} \underset{\mathcal{B}}{\rightarrow} \underset{\theta_1\dots\theta_r}{W} \underset{\mathcal{A}}{\rightarrow} \underset{\nu_1\dots\nu_m}{V}$ $(\mathcal{AB})_{\xi_i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\xi_i}) = \mathcal{A}(\sum_{k=1}^{r} b_{ki}\theta_k) = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\mathcal{A}_{\theta_k} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki}\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\nu_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki})\nu_i = \sum_{j=1}^{m} AB_{ji}\nu_j \leftrightarrow \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$

Утверждение

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V)$

(В одном базисе)

$\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow A^{-1}$

Доказательство

Пусть $\mathcal{A}^{-1} \leftrightarrow B$

$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon \leftrightarrow AB = E$

Отсюда $B = A^{-1}$

Утверждение

A изоморфно $\Rightarrow A_0$ изоморфно

Доказательство

$A_0 : U_0 \to \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_0$ – сюръекция

$\mathrm{Ker}\,A_0 \subset \mathrm{Ker}\,A = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда $\mathrm{Ker}\,A_0 = \{\mathbb{0}_U\}$

Отсюда A_0 - инъективно, а значит изоморфизм

Теорема о связи матриц линейных отображений в разных базисах

$\mathcal{A} \in L(U, V)$

$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\nu'}{V} \leftrightarrow A'$

$T_{\xi\to\xi'}T_{\nu\to\nu'}$ – матрицы перехода

Тогда $A' = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Доказательство

Пусть $\xi_U : \underset{\xi'}{U} \to \underset{\xi}{U}$,

$\xi_V : \underset{\nu}{V} \to \underset{\nu'}{V}$

$\mathcal{A} = \xi_v\mathcal{A}\xi_u$

$A' = T_{\nu'\to\nu}AT_{\xi\to\xi'}$

Следствие

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

$\mathcal{A} : \underset{e}{V} \to \underset{e}{V} \leftrightarrow A$

$\mathcal{A} : \underset{e'}{V} \to \underset{e'}{V} \leftrightarrow A'$
$A' = T_{e' \to e} A T_{e \to e'}$
Определение
Матрицы $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ *подобны*, если $\exists\, C$ невырожденная: $A = C^{-1}BC$
A и A' – матрицы одного и того же оператора в разных базисах – подобны
Утверждение
$\mathcal{A} \in L(U, V) \leftrightarrow A$
Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Ker} A$
$\operatorname{Im}\mathcal{A} \leftrightarrow \operatorname{Im} A$
Доказательство
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{Im} A$
$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{u \in U : \mathcal{A} = 0\}$
$\mathcal{A}u = 0 \leftrightarrow Au = 0$
Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker} A$

1.3 Инвариантность линейного отображения

Определение
Инвариантностью/инвариантном называется свойство, которое не меняется при определенного рода преобразованиях
Теорема 1
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\operatorname{rg} A$ и $\operatorname{def} A$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$, не зависят от выбора базиса, т.е. являются инвариантами относительно выбора базиса
Доказательство
$\mathcal{A} : \underset{\xi}{U} \to \underset{\nu}{V} \leftrightarrow A$
$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{span}(\mathcal{A}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{A}_{\xi_n}) \leftrightarrow \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n), \mathcal{A}_{\xi_i} \leftrightarrow A_i$

$\operatorname{rg}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim\operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{rg} A$
$\operatorname{rg}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{A} = n = \operatorname{rg} A + \operatorname{def} A \Rightarrow \operatorname{def}\mathcal{A} = \operatorname{def} A$
Следствие
$\mathcal{A}$ изоморфизм $\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$, где $A \leftrightarrow \mathcal{A}$

Определение
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
$e_1, \dots, e_n$ – базис V

Тогда $\det \mathcal{A} := \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$ – определитель системы векторов в базисе $e_1, \dots, e_n$

Теорема 2

Значение $\det \mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$ (т.е. является инвариантом), причем $\det \mathcal{A} = \det A$, где A – матрица оператора в некотором базисе

Доказательство

Выберем базис $e_1, \dots, e_n$

Тогда $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{n\times n}$

$$\det \mathcal{A} = \det(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = \det(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_1, \dots, e_n) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \det A$$

Т.о. в нашем базисе это верно

Теперь докажем, что в $e'_1, \dots e'_n$ – базисе V – это тоже верно

$\mathcal{A} \underset{e'}{\leftrightarrow} A'$

$\det \mathcal{A} = \det A'$

$T = T_{e \to e'}$

$A' = T^{-1}AT$

Тогда $\det A' = \det(T^{-1}AT) = \det T^{-1} \det A \det T = \det A$

Следствие

$\forall f$ – n-форма на V

$\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in V \;\; f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Доказательство

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) := f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n)$

g – n-форма, т.к. f – n-форма

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = f(\mathcal{A}\xi_1, \dots, \mathcal{A}\xi_n) = \det A f(e_1, \dots, e_n)$ (см. доказательство теоремы)

$g(\xi_1, \dots, \xi_n) = g(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(e_1, \dots, e_n) \det(\xi_1, \dots, \xi_n) = \det \mathcal{A} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

Следствие 2

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End}(V) \Rightarrow \det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det \mathcal{A} \det \mathcal{B}$

Следствие 3

$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0$
Причем $\det \mathcal{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathcal{A}}$
$\det \mathcal{A}^{-1} = \det A^{-1}$
Доказательство
$\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(V) \Leftrightarrow \exists\, \mathcal{A}^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$
$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \epsilon$
$\det \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \det \mathcal{A} \det \mathcal{A}^{-1} = \det \epsilon = 1$

Примеры

1. В V_3
   $f(a,b,c) = (a,b,c) =$ ориентированный объем $= \det(a,b,c)$
   $\mathcal{A} : V_3 \to V_3$
   $(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det \mathcal{A} \det(a,b,c)$
   $\lambda = \det \mathcal{A}$ – коэффициент пропорциональности объемов

   (a) $\mathcal{A}v = \mu v$ – оператор подобия
   Тогда $\lambda = \mu^3$

   (b) Поворот
   Пусть i, j, k перешли в e_1, e_2, e_3 поворотом
   Тогда $e_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i \\ \cos\beta_i \\ \cos\gamma_i \end{pmatrix}$
   Тогда $\mathcal{A} \underset{ijk}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$ – матрица поворота
   $f(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b, \mathcal{A}c) = \det A \det(a,b,c)$
   $\det A = (e_1, e_2, e_3) = 1$ – смешанное произведение
   Отсюда при повороте объем сохраняется

Определение
$A_{n\times n}$
$\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ – след матрицы
Теорема 3
Если матрицы подобные, то $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$
Доказательство
A, B – подобные $\Rightarrow \exists$ невырожденная $C : A = C^{-1}BC = SBC$

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} S_{ik}(BC)_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} S_{ik}\sum_{m=1}^{n} B_{km}C_{ki} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{km}\sum_{i=1}^{n} C_{mi}S_{ik} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{km}E_{mk} = \sum_{k=1}^{n} B_{kk} = \operatorname{tr} B$$

Следствие
A и A' матрицы $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ в разных базисах
Тогда $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$(из формулы перехода)
Определение
$\operatorname{tr} \mathcal{A} := \operatorname{tr} A$, где A – матрица $\mathcal{A}$ в некотором базисе (не зависит от выбора базиса)

Определение
$L \subset V, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
L называется инвариантным относительно $\mathcal{A}$, если $\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$
Если L – линейное подпространство, то говорим об инвариантном линейном подпространстве
Примеры

1. $\mathbb{0}, V$
2. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}, \operatorname{Im}\mathcal{A}$
3. $\mathcal{A}$ – вращение пространства вокруг оси l на фиксированный угол
   Тогда $l, L \perp l$ – инвариантное пространство (L – плоскость)
   Линейные многообразия $P = x_0 + L$ – линейные многообразия – инвариантные пространства (хоть и не линейные пространства)

Теорема 4
$L \subset V$ – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$
Тогда $\exists$ базис V такой, что матрица оператора будет иметь в нем ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ \mathbb{0} & A^3 \end{pmatrix}$, где $A^1_{k\times k}, k = \dim L$
Доказательство
Пусть L – инвариантное линейное подпространство относительно $\mathcal{A}$
$\forall\, x \in L\ \mathcal{A}x \in L$
Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L
Дополним его до базиса V:
$V = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$

$$\mathcal{A}e_{j\in 1\ldots k} \in L \Rightarrow \mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}e_i \leftrightarrow A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{k_j} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда Видим, что A имеет ожидаемый вид

Следствие 1

$L_1, L_2 \subset V : L_1 \oplus L_2 = V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$A = \begin{pmatrix} A^1 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$, где $A^i_{\dim L_i \times \dim L_i}$

Доказательство

Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис L_1

$e_{k+1}, \ldots, e_n$ – базис L_2

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in 1\ldots k} \in L_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A^1_j \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}$

Тогда $\mathcal{A}e_{j\in k+1\ldots n} \in L_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{0} \\ A^2_{j-k} \end{pmatrix}$

Следствие 2

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда существует базис V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид(аналогично предыдущему следствию)

Пусть $A|_{L_j} : L_j \to L_j$ (эндоморфизм)

Тогда $\mathcal{A}|_{L_j} \leftrightarrow A_i$

Следствие 3

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$L_i \subset V$ – инвариантные линейные пространства относительно $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

Тогда $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(A|_{L_j})$

Доказательство

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i$

$\forall\, x \in V\ \exists!x_1 \in L_1, \ldots, x_m \in L_m:\ x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i$

$\mathcal{A}x = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathcal{A}x_i$

$\mathcal{A}x_i \in \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Отсюда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Докажем дизъюнктность

Пусть $y_i \in \operatorname{Im}\mathcal{A}_i$

Тогда $\exists\, x_i \in L_i : y_i = \mathcal{A}x_i = \mathcal{A}_i x_i$

$y_1 + \ldots + y_m = \mathbb{0} \Leftrightarrow \mathcal{A}x_1 + \ldots + \mathcal{A}x_m = \mathbb{0}$

$\mathcal{A}x_i \in L_i$, т.к. L_i – инвариант

Т.к. $L_1 \ldots L_m$ – дизъюнктны, то $\mathcal{A}x_i = \mathbb{0}$

Отсюда $y_i = \mathbb{0}$

Отсюда $\operatorname{Im}\mathcal{A}_i$ дизъюнктны

1.4 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Алгеброическое и геометрическое кратности собственного числа

V – линейное пространство над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Определение

$\lambda \in K$ – *собственное число* $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, если $\exists\, v \neq \mathbb{0} \in V : \mathcal{A}v = \lambda v$

v – собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий собственному числу λ

Отсюда v – СВ $\Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$

$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) =$ (множество всех СВ $\mathcal{A}$, отвечающих λ) $\cup\{\mathbb{0}\}$ – собственное подпространство $\mathcal{A}$, отвечающее λ

$\gamma(\lambda) := \dim V_\lambda$ – геометрическая кратность числа λ

$V_\lambda, \gamma_\lambda$ – инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$ и выбора базиса

Примеры

1. Оператор подобия:

$\forall\, v \in V\ \mathcal{A}v := \lambda v$
У него λ – собственное число, $V = V_x$
$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} \lambda E$

2. $\mathcal{A}$ – поворот на плоскости относительно начала координат на угол $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3. $\lambda = 0$ – собственное число $\mathcal{A}$
$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq \{\mathbb{0}\}$
$\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – не изоморфизм
$\Leftrightarrow \det \mathcal{A} = \mathbb{0}$

4. $v_1, \dots, v_n$ – базис V, где v_j – СВ $\mathcal{A}$ для стационарного числа λ_j

Научимся находить СЧ и СВ
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} t^{n-1} \operatorname{tr} A + \ldots + \det A$ – характеристический могочлен $\mathcal{A}(A)$ λ – СЧ $\Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \wedge \lambda \in K$
Из основной теоремы алгебры $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)$ имеет ровно n корней с учетом кратности (некоторые из которых могут быть комплексными)
Если $\lambda_{i \in 1 \ldots n}$ – корни, то $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ (т.к. свободный член χ)
Т.о. $\det A = 0 \leftrightarrow \exists\, \lambda_i = 0$
Также из теоремы Виета $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^n \prod\limits_{\lambda\text{ – корень}} (t - \lambda)^{\alpha(\lambda)}$, где $\alpha(\lambda)$ – алгебраическая кратность СЧ λ (кратность корня)

Рассмотрим пример с поворотом в $\mathbb{R}^2$ на $\alpha \in (-\pi, \pi)$
Найдем характеристический многочлен:
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = (\cos\alpha - t)^2 + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 2t\cos\alpha + t^2 + \sin^2\alpha = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$
Очевидно, что у данного многочлена нет вещественных корней, а значит нет СЧ и СВ
$\det A = 1, \operatorname{tr} A = 2\cos\alpha$

Теорема 1
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), \lambda$ – СЧ $1 \leq \gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$
Доказательство
$1 \leq \gamma(\lambda)$ очевидно, т.к. $\gamma(\lambda) = \dim V_\lambda = \gamma$

Пусть $v_1, \ldots, v_\gamma$ – базис V_λ
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис V_λ такой, что A имеет ступенчатый вид $A = \begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ \mathbb{0} & A^2 \end{pmatrix}$
Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tE) = |A^1 - tE||A^2 - tE| = \chi_{A^1}(t)\chi_{A^2}(t)$
Пусть $v_1, \ldots, v_\gamma, e_{\gamma+1}, \ldots, e_n$ – наш базис
Т.к. $\mathcal{A}v_{j\in 1\ldots\gamma} = \lambda v_j$, то $A^1 = \lambda E_{\gamma\times\gamma}$
$\chi_{A_1}(t) = (\lambda - t)^\gamma$
$\chi_A(t) = (\lambda - t)^\gamma \chi_{A_2}(t) \Rightarrow \alpha(\lambda) \geq \gamma$, т.к. возможо λ – корень $\chi_{A_2}(t)$
Определение
Набор СЧ $\mathcal{A}$ с учетом кратности является спектном оператора $\mathcal{A}$
Спектр называется простым, если все СЧ попарно различны, т.е. $\forall\, \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = 1$
Теорема 2
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
$v_1, \ldots, v_m$ – соответствующие СВ
Тогда $v_1, \ldots, v_n$ – линейно независимые
Доказательство
Методом математической индукции:

1. $m = 1$ – очевидно (т.к. $v_1 \neq \mathbb{0}$)

2. Пусть верно для m
   Докажем для $m+1$ от противного
   Пусть $\lambda_{m+1} \neq \lambda_{j\in 1\ldots m}, v_{m+1}$ – соответсвует λ_{m+1}
   Пусть $v_1, \ldots, v_{m+1}$ линейно зависимые
   Тогда $v_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$
   //todo

Следствие 1
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$
Тогда $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ – дизъюнктные
Доказательство
$v_1 + \ldots + v_m = \mathbb{0}, v_i \in V_{\lambda_i}$
Пусть $v_i \neq \mathbb{0}$. Тогда v_i - СВ для λ_i (т.к. $v_i \in V_{\lambda_i}$)
Тогда линейная комбинация СВ $= \mathbb{0}$, чего не может быть из теоремы
Тогда $v_i = \mathbb{0}$, откуда дизъюнктность

Следствие 2
Пусть $V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} V_\lambda$
$\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{V_\lambda} \in \mathrm{End}(V_\lambda)$
Тогда $\chi_\mathcal{A}(t) = \prod\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \chi_{\mathcal{A}_\lambda}(t)$
Доказательство
$V = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} V_\lambda$
V_λ – инвариант относительно $\mathcal{A}$
Тогда существует базис такой, что $A = \begin{pmatrix} A^{\lambda_1} & \dots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{0} & \dots & A^{\lambda_m} \end{pmatrix}$
$A^{\lambda_k} \leftrightarrow \mathcal{A}_{\lambda_k}$
$A^{\lambda_k} = \lambda_k E$
Тогда $V = \mathrm{span}(\dots, v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}, \dots)$, где $v_1^{\lambda_k}, \dots, v_{\gamma(\lambda_k)}^{\lambda_k}$ – базис V_{λ_k}
Тогда базис V – объединение базисов
Отсюда $\chi_A(t) = \det(A - tE) = \det(A^1 - tE) \dots \det(A^m - tE)$

1.5 Операторы простой структуры(ОПС). Диагонализируемая матрица. Проекторы. Спектральное разложение ОПС. Функция от матрицы

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ называется оператором простой структуры, если существует базис V такой, что матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид
$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Замечание
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow$ в V существует базис из СВ
Теорема
Если все корни $\chi_\mathcal{A}(t) \in K$, т.е. являются СЧ (т.е. $\sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \alpha(\lambda) = n = \deg \chi_\mathcal{A}(t)$)
$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \forall\, \lambda$ – СЧ $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$
Доказательство
$\gamma(\lambda) \leq \alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}$ – ОПС $\Leftrightarrow \exists$ базис из СВ $\Leftrightarrow = \bigoplus\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} V_\lambda \Leftrightarrow n = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \gamma(\lambda)$

Отсюда $n = \sum\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} \alpha(\lambda), \alpha = \gamma$

Следствие

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ попарно различные СЧ $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ - ОПС

Определение

Матрица называется *диагонализируемой*, если она подобна диагональной

$\exists\, T$ невырожденная : $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_i$ – СВ

Теорема о приведении матрицы к диагональному виду

Матрица A диагонализируема $\Leftrightarrow$ A – матрица ОПС $\mathcal{A}$ в некотором базисе

Причем $T = T_{e\to v}$, где $e_1, \dots, e_n$ – базис, в котором была записана $A, v_1, \dots, v_n$ – базис из СВ $\mathcal{A}$, соответствующих $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Доказательство $\Leftarrow$

$\mathcal{A}$ – ОПС

$e_1, \dots, e_n$ – базис V $v_1, \dots, v_n$ – СВ, соответствующие $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – СЧ, базис V

$\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A$ $\mathcal{A} \underset{v}{\leftrightarrow} A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$T = T_{e\to v}$

$A' = T^{-1}AT$

Отсюда A подобна диагональной

Доказательство $\Rightarrow$

//todo

Определение

Пусть $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_i, L_i$ – линейное подпространство

Тогда $\forall\, v \in V \exists!v_1, \dots v_m : v_i \in L_i, v = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i$

Зададим $\rho_i \in \mathrm{End}(V) : \rho_i v = v_i \in L_i$

ρ_i – *оператор проектирования(проектор)* на L_i

Свойства:

1. $\forall\, i \neq j\ \rho_i\rho_j = \mathbb{0}$
2. $\sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i = \epsilon$

3. $\rho_i^k = \rho_i, k \in \mathbb{N}$ – идемпотентность
4. $\operatorname{Im}\rho_i = L_i$
   $\operatorname{Ker}\rho_i = \sum\limits_{j\neq i} L_j$

Утверждение
Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_m \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющие свойствам 1 и 2
Тогда $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$ (т.е. ρ – проектор на $L_i = \operatorname{Im}\rho_i$)
Доказательство
Докажем $1, 2 \Rightarrow 3$
$\rho_i = \rho_i\epsilon = \rho_i \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_j = \rho_i^2$
Докажем, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$
$\forall\, v \in V\;\; v = \epsilon v = \sum\limits_{i=1}^{m} \rho_i v \Rightarrow V = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im}\rho_i$
Докажем дизъюнктность
$\mathbb{0} = v_1(\in \operatorname{Im}\rho_1) + \ldots + v_m(\in \operatorname{Im}\rho_m)$
$\forall\, i = 1 \ldots m\;\; v_i = \rho_i\omega_i(\exists\, \omega_i \in V)$
$v_i = \rho_i\omega_i =$ из свойства $3 = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_j\omega_j) = \rho_i(\sum\limits_{j=1}^{m} v_j) = \rho_i\mathbb{0} = \mathbb{0}$, ч.т.д.
Теорема о спектральном разложении о.п.с.
$\forall\, \mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ – о.п.с.
Тогда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda\text{ – С.Ч.}} \lambda\rho_\lambda$, где ρ_λ – проектор на V_λ
Доказательство
Обозначение: Пусть все λ – С.Ч. $\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$
$v = \sum\limits_{\lambda} v_\lambda, v_\lambda \in V_\lambda$
$\forall\, v \in V\;\; \mathcal{A}v = \mathcal{A}(\sum\limits_{\lambda} v_\lambda) = \sum\limits_{\lambda}(\mathcal{A}v) = \sum\limits_{\lambda} \lambda v_\lambda = \sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda(v) = (\sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda)v$
Отсюда $\mathcal{A} = \sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda$ – *спектральное разложение*
Следствие

A – диагонализируема $\Rightarrow \exists\, \rho_\lambda, \lambda$ – С.Ч. $A : A = \sum\limits_{\lambda} \lambda \rho_\lambda$

Определение

$(A_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность матриц $A_{n\times n} = (a_{ij}^m)_{n\times n}, m$ – индекс, а не степень

$\lim\limits_{m\to\infty} A_m = A = (a_{ij})_{n\times n} \Leftrightarrow \forall\, i, j = 1 \ldots n\ a_{ij} = \lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^m$

Немного про ряды

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ – числовой ряд ($a_m \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$)

$S_m = \sum\limits_{i=1}^{m} a_k$ – частичная сумма ряда

Если S_m сходится, то ряд называется сходящимся

Определение

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ – ряд из матриц

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ – сходится $\Leftrightarrow \forall\, i, j = 1 \ldots n\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{ij}^m$ – сходится

Далее про ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – функциональный ряд

При фиксированном x – числовой ряд

Множество x таких, что числовой ряд сходится – множество поточечной сходимости ряда $= E$

$\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m(x - x_0)^m$ – степенные ряды

Утверждается, что ряд сходится при $|x - x_0| < R$, где R – радиус сходимости

В $\mathbb{C}$ – круг сходимости

В $\mathbb{R}$ – интервал сходимости

Для $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|C_m|}$

Примеры сходящихся рядов – ряды Тейлора-Маклорена

$e^x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!}$, сходится при $|x - x_0| \leq \infty$

$\sin x = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}$, сходится при $|x| \leq \infty$

На окружности (при $|x - x_0| = R$) ряд может как сходиться, так и расходиться

Определение

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда $f(A) := \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m A^m$ (если ряд сходится)

Теорема 1 (первый способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) T^{-1}$, где $\Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Доказательство

$A_{n\times n}$ диагонализируема, а значит $\exists\, T : \Lambda = T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k, R = \infty$

$A^k = (T\Lambda T^{-1})^k = T\Lambda^k T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) T^{-1}$

Отсюда $S_m = T \operatorname{diag}(\sum\limits_{k=0}^{m} C_k \lambda_1^k, \ldots, \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \lambda_n^k) T^{-1}$ (т.к. $R = \infty$, то все ряды сойдутся)

$S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = T \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)) T^{-1}$

Теорема 2 (второй способ вычисления $f(A)$ для диагонализируемой матрицы)

Пусть $A_{n\times n}$ диагонализируема

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| \leq R$

Тогда если $\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m A^m$ сходится

$f(A) = \sum\limits_{\lambda-\text{ СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$, где $A = \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda$ – спектральное разложение

Доказательство

A – диагонализируема $\Rightarrow A = \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda$

Тогда $A^k = (\sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} \lambda\rho_\lambda)^k = \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} \lambda^k\rho_\lambda$

Отсюда $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{m} C_k \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} \lambda^k \rho_\lambda = \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} (\sum\limits_{k=0}^{m} C_k\lambda^k)\rho_\lambda \xrightarrow[m\to\infty]{} \sum\limits_{\lambda\,-\,\text{СЧ}} f(\lambda)\rho_\lambda$

Следствие

A – диагонализируема, $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} C_m x^m, |x| < R$

$\forall\, \lambda$ – СЧ $|\lambda| < R$

$t \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) : \forall\, \lambda$ – СЧ $|t\lambda| < R$

Тогда $f(At) = T\operatorname{diag}(f(\lambda_1 t), \ldots, f(\lambda_n t))T^{-1}$

или $f(At) = \sum\limits_{\lambda-\text{ СЧ}} f(\lambda t)\rho_\lambda$

Пример

$\exp At = e^{At} = \sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda = T\operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})T^{-1}$

Свойства

1. $e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$

2. $e^{A0} = E$

3. $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$

   Доказательство

   $(e^{At})' = (\sum\limits_{\lambda} f(\lambda t)\rho_\lambda)' = \sum\limits_{\lambda} \lambda e^{\lambda t}\rho_\lambda = (\sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda)(\sum\limits_{\lambda} e^{t\lambda}\rho_\lambda) = Ae^{At} = e^{At}A$

Поиск обратной матрицы

Пусть A диагонализируема

$\forall\, \lambda\ \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$

$A^{-1} = T\operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n})T^{-1}$

$A^{-1} = \sum\limits_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \rho_\lambda$
Определение
$\sqrt[m]{A}$ – арифметический корень
Если $\forall\, \lambda\ \lambda \geq 0$, то результат определен однозначно
$A^{-1} = T \operatorname{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_n}) T^{-1}$

1.6 Комплексификация вещественного линейного пространства. Продолжение вещественного линейного оператора

V – линейное пространство над полем $K = \mathbb{R}(\mathbb{C})$
Рассмотрим все ситуации

1. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}$
   $\forall\, \lambda\ \alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с. (тогда матрица диагонализируема)

2. Все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in K$
   Т.е. все корни являются С.Ч. $\mathcal{A}$
   $\exists\, \lambda : \gamma(\lambda) < \alpha(\lambda)$, т.е. $\mathcal{A}$ – не о.п.с. (тогда матрица приводится к жордановой форме)

3. При $K = \mathbb{R}$ не все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}$
   Тогда применяется комплексификация пространства

Займемся комплексификацией
Определение
V – вещественное линейное пространство над $\mathbb{R}$
$\forall\, x, y \in V (x, y) \sim z := x + iy$
$V_{\mathbb{C}} = \{z = x + iy : x, y \in V\}$
$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$ в V
$\mathbb{0} = \mathbb{0} + i\mathbb{0}$ – нулевой в $V_{\mathbb{C}}$
$\forall\, x \in V\ V_{\mathbb{C}} \ni x + \mathbb{0}i = x$
$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$\forall\, \lambda = \alpha + i\beta\ \lambda z = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$
Утверждение
$V_{\mathbb{C}}$ – линейное пространство

Теорема (о вещественном базисе $V_{\mathbb{C}}$)
Пусть $\dim V = n, e_1, \ldots, e_n$ – базис $V, e_j \in V(V_{\mathbb{C}})$
Тогда $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V_{\mathbb{C}}(\dim V = \dim V_{\mathbb{C}})$
Доказательство
$\forall\, z \in V_{\mathbb{C}} : z = x + iy, x, y \in V$
$x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e^j$
$y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e^j$
Отсюда $z = \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j + iy_j) e_j$, т.е. $e_1, \ldots, e_n$ – порождающая
//todo Отсюда $e_1, \ldots, e_n$ – линейно независимые
Определение
$z = x + iy$
Тогда $\overline{z} = x - iy$ – сопряженный вектор
Утверждение
$z_1, \ldots, z_m$ – линейно независимые в $V_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m$ – линейно независимые
$(\Rightarrow \mathrm{rg}(z_1, \ldots, z_m) = \mathrm{rg}(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m))$
Доказательство
$c_1\overline{z}_1 + \ldots c_m\overline{z}_m = \mathbb{0}$
$\overline{c_1\overline{z}_1 + \ldots c_m\overline{z}_m} = \overline{\mathbb{0}} = \mathbb{0} = \overline{c}_1 z_1 + \ldots + \overline{c}_m z_m$ – линейно независимые
Отсюда $\overline{c}_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0$
Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
Продолжением $\mathcal{A}$ на $V_{\mathbb{C}}$ называется $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ такой, что
$\forall\, z = x + iy \in V_{\mathbb{C}}\ \mathcal{A}_{\mathbb{C}} z = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y \in V_{\mathbb{C}}$
Свойства

1. $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
   $\mathcal{A} \underset{e}{\leftrightarrow} A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$
   Тогда $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \underset{e}{\leftrightarrow} A_{\mathbb{C}} = A = (a_{ij})_{n\times n}$
   Доказательство
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} e_j = \ldots = \mathcal{A} e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$
   Отсюда $A_{\mathbb{C}} = A$

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t)$ (т.к. матрицы равны)

3. $\forall\, z \in V_{\mathbb{C}}\ \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(\overline{z})$

4. $\alpha \pm i\beta$ – пара сопряженных корней $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ – СЧ для $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   Тогда z – СВ, отвечающий СЧ $\alpha + i\beta \Leftrightarrow \overline{z}$ – СВ, отвечающий СЧ $\alpha - i\beta$
   Доказательство
   $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z} = \overline{(\alpha + i\beta)z} = (\alpha - i\beta)\overline{z}$

Тогда:
Т.о. если $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ имеет комплексные корни, то после комплексификации будет реализовываться случай 1 или 2

1.7 Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Кэли-Гамильтона

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
Нормализованный многочлен – многочлен, старший коэффициент которого 1
Нормализованный многочлен $\psi(t)$ называется *аннулятором* элемента $x \in V$, если $\psi(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$
$\psi(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_0 = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень многочлена}} (t - \lambda)^{m(\lambda)}$, где $m(\lambda)$ – кратность корня
$\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^m + a_{m-1}\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_0\epsilon = \prod\limits_{\lambda \text{ – корень}} (A - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Определение
Минимальный аннулятор x – аннулятор минимальной степени
Теорема о минимальном аннуляторе элемента
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\, x \in V\ \exists!$ минимальный аннулятор x

2. Любой аннулятор x делится на минимальный

Доказательство 1
(алгоритм)

1. $x = \mathbb{0}, \psi \equiv 1$
   $\epsilon = \psi(\mathcal{A})$

2. $x \neq \mathbb{0}$
   Пусть $x, \mathcal{A}x, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}x$ – линейно независимые и m максимальное
   $\exists\,!\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} : \mathcal{A}^m x = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i x$
   $(\mathcal{A}^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i \mathcal{A}^i)x = \mathbb{0}$
   $\psi(t) = t^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i$ – минимальный и определен единственным образом

Доказательство 2
Пусть $\psi'(t) = a(t)\psi(t) + r(t), \deg r < \deg \phi$ – аннулятор
$\mathbb{0} = \psi'(\mathcal{A})x = a(\mathcal{A})\underbrace{\psi(\mathcal{A})x}_{\mathbb{0}} + r(\mathcal{A})x$
Отсюда $r(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$
Но т.к. ψ – минимальный, то $r \equiv \mathbb{0}$
Определение
Нормализованный многочлен $\phi(t)$ называется аннулятором $\mathcal{A}$, если $\forall\, v \in V\ \phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0}$ (т.е. $\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$)
Аннулятор $\mathcal{A}$ минимальной степени – *минимальный многочлен*
Теорема о минимальном многочлене
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

1. $\forall\, \mathcal{A} \exists\,!$ минимальный многочлен

2. Любой аннулятор $\mathcal{A}$ делится на минимальный многочлен

Доказательство
(алгоритм)

1. $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
   По теореме 1 $\forall\, e_i \exists\,! \psi_i(t)$ – минимальный аннулятор e_i
   $\phi(t) := \mathrm{lcm}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$
   Тогда $\forall\, j \phi(t) = a_j(t)\psi_j(t)$
   Докажем, что $\phi(t)$ – аннулятор

$\forall\, v \in V \phi(\mathcal{A})v = \phi(\mathcal{A}) \sum_{j=1}^{m} v_j e_j = \sum_{j=1}^{m} \phi(\mathcal{A}) v_j e_j = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\psi_j(t) v_j e_j =$
$\mathbb{0}$
Т.о. ϕ – аннулятор

2. Докажем, что любой другой аннулятор делится на ϕ
   Пусть $\phi_1(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$
   $\forall\, v \in V \phi_1(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \forall\, j = 1 \dots n\ \phi_1(\mathcal{A})e_j = \mathbb{0}$ - тогда $\phi_1(\mathcal{A})$ – аннулятор e_j
   Т.к. $\psi_j(t)$ – минимальный аннулятор e_j, то $\phi_1(t)$ делится на $\psi_i(t)$
   Отсюда $\phi_1(t)$ делится на $\mathrm{lcm}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \phi(t)$
   Отсюда $\deg \phi$ – минимальная из возможных, а значит ϕ – минимальный многочлен

3. Докажем, что минимальный многочлен единственный
   Пусть $\phi_2(t)$ – аннулятор $\mathcal{A}$ такой, что $\deg \phi = \deg \phi_2 = m$
   Тогда $\delta = \phi_2(t) - \phi(t) = a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$ – степень меньше m
   Но тогда δ – аннулятор, $\deg \delta < m$ – противоречие
   Отсюда $\phi_2 = \phi$

Теорема Кэли-Камильтона
$\forall\, \mathcal{A} \in$ V
$\chi_{\mathcal{A}}$ – аннулятор $\mathcal{A}$ (т.е. $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \equiv 0$)
Доказательство
Пусть $\mathcal{A} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} A$
$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi(t) = \det(\mathcal{A} - t\epsilon) = \det(A - tE)$
Пусть μ не корень χ
Тогда $\det(A - \mu E) \neq 0$
$(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A - \mu E)}(b_{ij} := A_{ji})$
b_{ij} - многочлен $n-1$ степени от μ
Отсюда $(A - \mu E)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A - \mu E)}(\mu^{n-1}B_{n-1} + \dots + B_0)$, где B_i – матрица $n \times n$
Отсюда $\det(A - \mu E)E = (A - \mu E)(\mu^{n-1}B_{n-1} + \dots + B_0) = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$
$\det(A - \mu E)E = \chi(\mu)E = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k E$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu^k E = -\mu^n B_{n-1} + \mu^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \ldots + \mu(AB_1 - B_0) + AB_0$$
Отсюда $\alpha_0 E = AB_0$
$\alpha_1 E = AB_1 - B_0$
$\vdots$
$\alpha_{n-1} E = AB_{n-1} - B_{n-2}$
$\alpha_n E = -B_{n-1}$
$\chi(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k = AB_0 + A(AB_1 - B_0) + A^2(AB_2 - B_1) + \ldots + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) = \mathbb{0}$

Следствие
$\forall \mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ $\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}$

Следствие 2
$\deg \phi_{\mathcal{A}} = n = \dim V \Rightarrow \phi_{\mathcal{A}} \equiv (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}$

Теорема (о корнях минимального многочлена)
Множество корней характеристического многочлена и минимального многочлена совпадают (без учета кратности)

Доказательство $\Rightarrow$
Пусть λ – корень $\chi(t)$

1. Пусть $\lambda \in K \Rightarrow \lambda$ – С.Ч. $\mathcal{A} \Rightarrow \exists\, v \neq 0 : (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)v = \mathbb{0}$
   Отсюда $\psi(t) = (t - \lambda)$ – минимальный аннулятор элемента v
   Т.к. ϕ – минимальный многочлен, то $\phi(\mathcal{A})v = \mathbb{0} \Rightarrow \phi(\mathcal{A})$ аннулятор v
   Тогда по теореме 1 ϕ делится на $\psi \Rightarrow \lambda$ – корень ϕ

2. Пусть $\lambda \notin K$, т.е. $K = \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$
   $V \to V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V \to$ базис $V_{\mathbb{C}}$
   $\mathcal{A} \underset{V,e}{\leftrightarrow} A \underset{V_{\mathbb{C}},v}{\leftrightarrow} \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$
   $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}} \Rightarrow \lambda$ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
   Заметим, что из алгоритма построения минимального многочлена $\phi_{\mathcal{A}} = \phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$
   Отсюда λ – корень $\phi_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}$

Доказательство $\Leftarrow$
Пусть λ – корень $\phi_{\mathcal{A}}(t)$

$\chi_{\mathcal{A}}$ делится на $\phi_{\mathcal{A}}(t) \Rightarrow \lambda$ – корень $\chi_{\mathcal{A}}(t)$
Замечание
Получаем второй способ получения С.Ч. $\mathcal{A}$
$m(\lambda) \le \alpha(\lambda)$

1.8 Операторное разложение единицы. Корневое подпространство

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)^{m(\lambda)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)} = (t-\lambda)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(t), \phi_\lambda(t) := \prod\limits_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)^{m(\mu)}$
$\deg\phi = m = \sum\limits_{\lambda} m(\lambda)$
Определение
$I_\lambda := \{p \in P_{m-1} : p$ делится на $\phi_\lambda\}$ – главный идеал, порождающий многочлен ϕ_λ
I_λ – линейное подпространство P_{m-1}

$I_\lambda \ni p(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$
$m-1 \ge \deg p = \deg a_\lambda + \deg\phi_\lambda = \deg a_\lambda + m - m_\lambda$
$\deg a_\lambda \le m(\lambda) - 1$
$I_\lambda \cong P_{m(\lambda)-1}$
$p \leftrightarrow a_\lambda$
$\dim I_\lambda = m(\lambda)$
Теорема
$P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$
Доказательство

1. Проверим, что I_λ дизъюнктны
   $\mathbb{0} = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda} a_\lambda(t)\phi_\lambda(t) = \underbrace{a_\lambda(t)\underbrace{\phi_\lambda(t)}_{\text{не делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}} + \underbrace{\sum\limits_{\mu\neq\lambda} a_\mu(t)\phi_\mu(t)}_{\text{делится на } (t-\lambda)^{m(\lambda)}}$
   Отсюда $a_\lambda(t)$ делится на $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$, но $\deg a_\lambda \le m(\lambda) - 1$
   Тогда $a_\lambda(t) = 0 \Leftrightarrow p_\lambda(t) \equiv 0 \Rightarrow$ дизъюнктные

2. $\bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda \subset P_{m-1}, \dim P_{m-1} = m$
   $\dim \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda = \sum\limits_{\lambda} m(\lambda) = m$
   Отсюда $P_{m-1} = \bigoplus\limits_{\lambda} I_\lambda$

Следствие
$\forall\, p \in P_{m-1} \exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda$
В частности, для $p \equiv 1$ $\exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, 1 = \sum\limits_{\lambda} p_\lambda$ – полиноминальное разложение единицы (порожденное многочленом ϕ)
$p_\lambda(t) = a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$
Замечание

1. $\lambda \neq \mu \Rightarrow p_\lambda p_\mu$ делится на ϕ
   Доказательство
   $p_\lambda(t) = a_\lambda \phi_\lambda(t)$
   $p_\mu(t) = a_\mu \phi_\mu(t)$
   $p_\lambda(t)p_\mu(t) = a_\lambda(t)a_\mu(t)\phi_\lambda(t)\phi_\mu(t) = b(t)\phi(t)$
2. Пусть все корни ϕ взаимно-простые, т.е. $\forall\, \lambda\ m(\lambda) = 1$
   $\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t - \lambda)$
   $\deg a_\lambda(t) \leq m(\lambda) - 1 = 0$
   Отсюда $a_\lambda(t) = \mathrm{const}$

Теорема Лагранжа
Пусть все корни $\phi(t)$ взаимно прострые
Т.е. $\forall\, \lambda : m(\lambda) = 1$ $\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t - \lambda)$
Тогда $\forall\, p \in P_{m-1}$ $p(t) = \sum\limits_{\lambda} \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$
$(a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)})$
Доказательство
$\exists\,!(p_\lambda) : p_i \in I_i, p(t) = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{a_\lambda \phi_\lambda(t)}_{\phi_\lambda(t) \in I_\lambda}$

$p(\lambda) = \sum_\mu a_\mu \phi_\mu(\lambda) = a_\lambda \phi_\lambda(\lambda) \Rightarrow a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi_\lambda(\lambda)}$

$\phi(t) = \prod_\mu (t-\mu) = (t-\lambda) \underbrace{\prod_{\mu\neq\lambda}(t-\mu)}_{\phi_\lambda(t)}$

$\phi'(t) = \sum_\mu \prod_{\xi\neq\mu}(t-\xi)$

$\phi'(\lambda) = \prod_{\xi\neq\lambda}(\lambda-\xi) = \phi_\lambda(\lambda)$

Отсюда $a_\lambda = \dfrac{p(\lambda)}{\phi'(\lambda)}$

Следствие

Пусть $\forall\,\lambda : m(\lambda) = 1$

Тогда $1 = \sum_\lambda p_\lambda \Rightarrow p(t) = t = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$

Доказательство

$1 = \sum_\lambda a_\lambda \phi_\lambda(t) = \sum_\lambda \dfrac{1}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t)$

$t = \sum_\lambda \dfrac{\lambda}{\phi'(\lambda)}\phi_\lambda(t) = \sum_\lambda \lambda p_\lambda(t)$

Пусть $\phi(t) = \prod_\lambda (t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$

Построим полиноминальное разложение 1, порождающее многочлен ϕ

$1 = \sum_\lambda p_\lambda(t) = \sum_\lambda a_\lambda(t)\phi_\lambda(t)$

$\epsilon = \sum_\lambda \underbrace{p_\lambda(\mathcal{A})}_{\rho-\text{ спектр. проектор оператора } \mathcal{A}} = \sum_\lambda a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\epsilon = \sum_\lambda \rho_\lambda$ – операторное разложение единицы (порожденное оператором)

<u>Спектральный оператор действует не на собственное подпространство</u>

Свойства

Пусть $\lambda \neq \mu$

Проверим, что $\rho_\lambda \rho_\mu = \mathbb{0}$

$\rho_\lambda = p_\lambda(\mathcal{A}) = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})$

$\rho_\mu = p_\mu(\mathcal{A}) = a_\mu(\mathcal{A})\phi_\mu(\mathcal{A})$

$\rho_\lambda \rho_\mu = (\rho_\lambda \rho_\mu)(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A})\phi(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

Если λ единственный корень $\phi(t) = (t-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\phi_\lambda(t)}$

$1 = 1 \Leftrightarrow p_\lambda = \epsilon$
Если все корни взаимно прострые:
$\forall\, \lambda\ m(\lambda) = 1$
По следствию из т. Лагранжа:
$\epsilon = \sum\limits_\lambda p_\lambda$
$\mathcal{A} = \sum\limits_\lambda \lambda p_\lambda$
Далее покажем, что p_λ – проекторы на V_λ, т.е. совпадает со спектральным разложением о.п.с
Т.е. $\mathcal{A}$ – о.п.с.
Определение
$K_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$ называется корневым подпространством $\mathcal{A}$
λ – СЧ $\mathcal{A}$
Очевидно, что $V_\lambda \subset K_\lambda$
$V_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
Теорема о корневом подпространстве

1. K_λ – инвариантно относительно $\mathcal{A}$
2. $\mathrm{Im}\,\rho_\lambda = K_\lambda (\Rightarrow \bigoplus\limits_\lambda K_\lambda = V)$
3. $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен для $A\Big|_{K_\lambda} \in \mathrm{End}(K_\lambda)$

Доказательство

1. $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
   $\underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\mathcal{A}x}_{\text{перестановочные, т.к. многочлены}} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}x = \mathbb{0}$
   Отсюда $\mathcal{A}x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
   $\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^{k-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{k-1}$
2. $\forall\, x \in V\, \rho_\lambda x = a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x$
   $(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} \underbrace{\rho_\lambda x}_{\mathrm{Im}\,\rho_\lambda} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} a_\lambda(\mathcal{A})\phi_\lambda(\mathcal{A})x = a_\lambda(\mathcal{A}) \underbrace{(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\phi(\mathcal{A})=0} x =$

$\mathbb{0}$

Отсюда $\rho_\lambda \ni \rho_\lambda x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$

Отсюда $\operatorname{Im}\rho_\lambda \subset K_\lambda$

Обратно

$x \in K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Пусть $\mu \neq \lambda$

$\rho_\mu x = a_\mu(\mathcal{A}) \quad \underbrace{\phi_\mu(\mathcal{A})}_{b(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \quad x = \mathbb{0}$

$x = \epsilon x = \sum\limits_\mu \rho_\mu x = \rho_\lambda x \in \operatorname{Im}\rho_\lambda$

Отсюда $K_\lambda \subset \operatorname{Im}\rho_\lambda$

3. $\mathcal{B} = \mathcal{A}\Big|_{K_\lambda} \in \operatorname{End}(K_\lambda)$

Проверим, что $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – минимальный многочлен

$(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ – аннулятор $\mathcal{B}$

Докажем от противного, что он минимальный

Пусть $(t-\lambda)^k$ – минимальный многочлен, $k < m(\lambda)$

$\phi_1(t) := (t-\lambda)^k \phi_\lambda(t), \deg\phi_1 \leq \deg\phi$

Покажем, что ϕ_1 – аннулятор $\mathcal{A}$

$\forall\, v \in V = \bigoplus\limits_\mu K_\mu \ v = \sum\limits_\mu \underbrace{v_\mu}_{\in K_\mu}$ – раскладывается единственным образом

$\phi_1(\mathcal{A})v = \sum\limits_\mu (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k \underbrace{\phi_\lambda(\mathcal{A})}_{\text{содержит множитель } (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} \underbrace{v_\mu}_{\in\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}} = \sum\limits_{\mu\neq\lambda}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k b_\mu(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} v_\mu + (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^k \phi_\lambda(\mathcal{A}) v_\lambda = \mathbb{0}$

Отсюда ϕ_1 аннулятор $\mathcal{A}$, причем степени меньшей, чем ϕ, что противоречит минимальности ϕ

Отсюда $(t-\lambda)^{m(\lambda)}$ минимальный многочлен $\mathcal{B}$

Следствие 1

$\forall\,\lambda\ m(\lambda) \leq \dim K_\lambda$ (очевидно из п.3 теоремы)

Следствие 2

$\mathcal{A}$ – о.п.с $\Leftrightarrow \forall\,\lambda\ m(\lambda) = 1$

Доказательство $\Rightarrow$

$V = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda$

Пусть $\phi(t) := \prod\limits_{\lambda\text{ – СЧ}} (t-\lambda)$

Очевидно аннулятор $\mathcal{A}$, причем минимальный

$\forall\, v \in V\;\; v = \sum\limits_{\lambda} \underbrace{v_\lambda}_{\in V_\lambda}$ – раскладывается единственным образом

$\phi(\mathcal{A}) = \prod\limits_{\mu}\prod\limits_{\lambda}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon) \underbrace{v_\mu}_{\in V_\mu = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\mu\epsilon)} = \prod\limits_{\mu}\prod\limits_{\lambda\neq\mu}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)(\mathcal{A}-\mu\epsilon)v_\mu = \mathbb{0}$

Доказательство $\Leftarrow$

$\forall\,\lambda\; m(\lambda) = 1$

$\phi(t) = \prod\limits_{\lambda}(t-\lambda)$

$\forall\,\lambda\; K_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^1 = V_\lambda$

Отсюда $\bigoplus\limits_{\lambda} K_\lambda = V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda \Leftrightarrow \mathcal{A}$ – о.п.с.

1.9 Нильпотентные операторы. Разложение Жордана

Определение

$\mathcal{B} \in \operatorname{End}(V)$ называется *нильпотентным*, если $\chi_{\mathcal{B}} = t^\nu, \nu \geq 1$

ν – индекс нильпотентности $(\nu \leq n)$

(Т.е. $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$)

Теорема (разложение Жордана)

$\forall\,\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$

$\exists\,\mathcal{D}$ – оператор простой структуры $\in \operatorname{End}(V), \mathcal{B}$ нильпотентный $\in \operatorname{End}(V)$:

$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$, причем $\mathcal{BD} = \mathcal{DB}$

Доказательство

$\phi(t)$ – минимальный многочлен $\mathcal{A}$(все корни $\in K$)

$\epsilon = \sum\limits_{\lambda} \rho_\lambda$

$\mathcal{D} := \sum\limits_{\lambda} \lambda\rho_\lambda$

Проверим, что $\mathcal{D}$ – о.п.с.

Достаточно убедиться, что λ – СЧ $\mathcal{D}, \operatorname{Im}\rho_\lambda = V_\lambda^D$ – собственное подпространство для $\mathcal{D}$

Пусть $v_\lambda \in \operatorname{Im}\rho_\lambda$

$\mathcal{D}v_\lambda = \sum\limits_\mu \mu\ \underbrace{\rho_\mu \underbrace{v_\lambda}_{\in \operatorname{Im}\rho_\lambda}}_{\mu\neq\lambda \Rightarrow \ldots = 0} = \lambda\rho_\lambda v_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \lambda$ – СЧ $\mathcal{D}$

$V = \bigoplus\limits_\mu \operatorname{Im}\rho_\mu$ – дизъюнктны

Отсюда $\operatorname{Im}\rho_\lambda \subset V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$V = \bigoplus\limits_\lambda \operatorname{Im} p_\lambda \subset \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}} \subset V$

Отсюда $\operatorname{Im} p_\lambda = V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$ – о.п.с

$V = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda^{\mathcal{D}}$

$D = \sum\limits_\lambda \rho_\lambda$ – спектральное разложение $\mathcal{D}$

$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \mathcal{D}$

$\nu := \max\limits_\lambda m(\lambda)$

Покажем, что $\mathcal{B}^\nu = \mathbb{0}$

$(\mathcal{A}-\mathcal{D})^\nu = (\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)^\nu = (\mathcal{A}\sum\limits_\lambda \rho_\lambda - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)^\nu = (\sum\limits_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)\rho_\lambda)^\lambda = \sum\limits_\lambda (\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^\nu \rho_\lambda = \sum\limits_\lambda b_\lambda(\mathcal{A})(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}\phi_\lambda(\mathcal{A}) = \mathbb{0}$

$\mathcal{B}\mathcal{D} = (\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda)(\sum\limits_\mu \mu\rho_\mu) = (\sum\limits_\mu \mu\rho_\mu)(\mathcal{A} - \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda) = \mathcal{D}\mathcal{B}$

Теорема (единственность разложения Жордана)

Разложение Жордана $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}} + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{B}}$ возможно единственным образом

Доказательство

Пусть $\mathcal{A} = \underset{\text{о.п.с}}{\mathcal{D}}{}' + \underset{\text{нильпот.}}{\mathcal{C}}$

$\mathcal{D}' = \sum\limits_\mu \mu Q_\mu$ – спектральное разложение

Достаточно доказать, что

1. множество μ с.ч. $\mathcal{D}'$ совпадает с множеством с.ч. $\mathcal{A}$
2. $\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda (D = \sum\limits_\lambda \lambda\rho_\lambda, \operatorname{Im}\rho_\lambda = K_\lambda)$

   $\Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$
3. $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{D}' = \mathcal{A} - \mathcal{D} = \mathcal{B}$

$(\mathcal{A}-\mu\epsilon)Q_\mu = (\sum_\xi \xi Q_\xi + \mathcal{C} - \mu\epsilon)Q_\mu = \mathcal{C}Q_\mu$
Покажем, что $\mathcal{C}Q_\mu = Q_\mu\mathcal{C}$
$\exists\lambda \neq \mu\ (\lambda-\mu)Q_\lambda CQ_\mu = \lambda Q_\lambda CQ_\mu - Q_\lambda C\mu Q_\mu = Q_\lambda D'CQ_\mu - Q_\lambda CD'Q_\mu = Q_\lambda(D'C - CD')Q_\mu = \mathbb{0}$
Отсюда $Q_\lambda CQ_\mu = \mathbb{0} = Q_\mu CQ_\lambda, \lambda \neq \mu$
$\sum_\lambda Q_\lambda CQ_\mu = \sum_\mu Q_\lambda CQ_\mu$
При $\lambda = \mu : CQ_\mu = Q_\mu C$
$(\mathcal{A}-\mu\mathcal{C})^k Q_\mu = \mathcal{C}^k Q_\mu$
Пусть $m(\mu)$ – минимальное $k : (\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{m(\mu)} = \mathbb{0}$
Такой k найдется, т.к. $\mathcal{C}$ нильпотентный и при каком-то k дает $= \mathbb{0}$
$\psi_\mu(t) = (t-\mu)^{m(\mu)}$
$\forall\, x \in \operatorname{Im} Q_\mu\ \psi_\mu(\mathcal{A})x = \mathbb{0}$
Тогда $\psi_\mu(\mathcal{A})$ – минимальный аннулятор элементов $\operatorname{Im} Q_\mu$
ϕ – минимальный многочлен, т.е. аннулятор любых элементов, в частности и $\operatorname{Im} Q_\mu$
Тогда ϕ делится на ψ_μ
Тогда $\forall\,\mu\ \mu$ – корень ϕ
Рассмотрим $\psi = \prod_\mu \psi_\mu(t)$. Покажем, что это аннулятор $\mathcal{A}$
$\forall\, v \in V\ v = \sum_\mu \underbrace{v_\mu}_{\in \operatorname{Im} Q_\mu}$
$\psi(\mathcal{A})v = \sum_\xi \psi(\mathcal{A})v_\xi = \sum_\xi b_\xi(\mathcal{A})\psi_\xi(\mathcal{A})v_\xi = \mathbb{0}$
Отсюда ψ – аннулятор $\mathcal{A}$
Тогда ψ делится на ϕ
Т.о. $\psi \equiv \phi$
Докажем пункт 2
$(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}Q_\lambda = \mathbb{0}$
$\operatorname{Im} Q_\lambda \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)} = K_\lambda$
$V = \bigoplus_\lambda \operatorname{Im} Q_\lambda \subset \bigoplus_\lambda K_\lambda = V$
$\operatorname{Im} Q_\lambda = K_\lambda = \operatorname{Im} p_\lambda$
Теорема 3
$\mathcal{A} = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ – разложение Жордана
$\chi_\mathcal{A} \equiv \chi_\mathcal{D}$

Доказательство
$\mathcal{D}=\sum\limits_{\lambda}\lambda p_{\lambda}$
$\mathcal{B}=\mathcal{A}-\mathcal{D}$
$\mathcal{B}^{\nu}=\mathbb{0},\nu=\max m(\lambda)$
$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{D}$ – попарно перестановочные
$\epsilon=\sum\limits_{\lambda}\rho_{\lambda}$
$\operatorname{Im} p_{\lambda}=K_{\lambda}=\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$
$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu}=(\det\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu}=\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu}$
$t\in K,(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu}-t^{\nu}\mathcal{B}^{\nu}=(\mathcal{A}-\mu\epsilon-t\mathcal{B})((\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1}+(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B}+\ldots+t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$
$\underbrace{\det(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu}}_{\text{не зависит от } t}=\underbrace{\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon-t\mathcal{B})}_{\text{многочлен от } t}\underbrace{\det((\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1}+(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B}+\ldots+t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})}_{\text{многочлен от } t}$
Отсюда $\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon-t\mathcal{B})$ и $\det((\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1}+(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B}+\ldots+t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})$ не зависит от t
Тогда $\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon-t\mathcal{B})\underset{t=1}{=}\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon-\mathcal{B})=\det(\mathcal{D}-\mu\epsilon)$
$\det((\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1}+(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-2}t\mathcal{B}+\ldots+t^{\nu-1}\mathcal{B}^{\nu-1})\underset{t=0}{=}\det((\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1})$
$(\chi_{\mathcal{A}}(\mu))^{\nu}=\underbrace{\det(\mathcal{D}-\mu\epsilon)}_{\chi_{\mathcal{D}}(\mu)}\underbrace{\det(\mathcal{A}-\mu\epsilon)^{\nu-1}}_{\chi_{\mathcal{A}}(\mu)}$
Отсюда $\chi_{\mathcal{A}}(\mu)=\chi_{\mathcal{D}}(\mu)$
$\chi_{\mathcal{A}}(\lambda)=\chi_{\mathcal{D}}(\lambda)=0$
Следствие 1
$\det\mathcal{A}=\chi_{\mathcal{A}}(0)=\chi_{\mathcal{D}}(0)=\det\mathcal{D}$
Следствие 2
$\dim K_{\lambda}=\alpha(\lambda)$
Доказательство
$\alpha(\lambda)$ – кратность корня в $\chi_{\mathcal{A}}\Rightarrow$ в $\chi_{\mathcal{D}}$. А т.к. $\mathcal{D}$ – о.п.с., то $\dim K_{\lambda}^{\mathcal{D}}=\dim V_{\lambda}^{\mathcal{D}}=\alpha(\lambda)$

1.10 Жорданова форма матрицы. Жорданов базис. Функция от матрицы

Пусть все корни $\chi(t)\in K$
$V=\bigoplus\limits_{\lambda}K_{\lambda}$
$K_{\lambda}=\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\epsilon)^{m(\lambda)}$

Построим в каждом K_λ такой базис, что матрица оператора в нем будет иметь определенный вид. Этот вид и базис будут называться жордановыми

Пусть $K_\lambda =: K, m(\lambda) =: m, \mathcal{B} = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon)\Big|_{K_\lambda = K}$

Пусть $K_j = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\epsilon)^j, j = 1 \dots m$

$V_\lambda = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m = K_\lambda = K$

$K_r \neq K_{r+1}$

Пусть это не так

Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{B}^r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r+1}$

$\dim K = \operatorname{rg}\mathcal{B}^r + \dim K_r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1} + \dim K_{r+1}$

Отсюда $\operatorname{rg}\mathcal{B}^r = \operatorname{rg}\mathcal{B}^{r+1}$

$\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} \subset \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$

Т.о. $\operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \operatorname{Im}\mathcal{B}^r$

Тогда $\operatorname{Im}\mathcal{B}^r = \operatorname{Im}\mathcal{B}^{r+1} = \dots = \operatorname{Im}\mathcal{B}^m = \mathbb{0}$, что противоречит минимальности m

Рассмотрим $K_1 \dots K_m$

Найдем j_m – компоненту, которая лежит в K_m, но не лежит в K_{m-1}

$j_m \in K_m \setminus K_{m-1}$ $j_r := \mathcal{B}j_{r+1}, r = m-1 \dots 1$

Заметим, что $j_r \in K_r$

$j_r \in K_r = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^r$

$j_{r-1} = \mathcal{B}j_r$

$\mathcal{B}^{r-1}j_{r-1} = \mathcal{B}^r j_r = \mathbb{0}$

Отсюда $j_{r-1} \in K_{r-1} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^{r-1}$

$Bj_1 = \mathbb{0}$

$\underbrace{j_1, \dots, j_{m-1}}_{\text{присоединенные вектора}}, j_m$ – циклический базис, порожденный вектором j_m

Далее повторяем это для всех векторов $K_m, K_{m-1}, \dots$

Максимальная длина циклического базиса, порожденного $j_r = r$

$j_1 \in V_\lambda$ – собственном подпространстве

Линейное подпространство, порожденное span циклических базисов – *башня* высоты, равной длине циклического базиса

Башни образуют *замок Жордана*

Ширина башни – число циклических базисов в ней

Высота башни – размер циклического базиса

Опорные вектора(фундамент башни) – вектора j_m

Крыша башни – вектора j_1
Крыша башна – собственное подпространство
Башню рисуют опорными подпространствами как сверху, так и снизу
Если $\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)$, то $V_\lambda = K_\lambda$, то замок будет состоять из одной башни высоты 1
$K = K_\lambda = \text{span}(\ldots, j_1, j_2, \ldots, j_m, \ldots)$ – линейная оболочка всех векторов всех башен
$j_r = \mathcal{B} j_{r+1}$
$j_r = (\mathcal{A} - \lambda\epsilon) j_{r+1}$
$\mathcal{A} j_{r+1} = j_r + \lambda j_{r+1}$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} j_1 = \lambda j_1 \\ \mathcal{A} j_2 = j_1 + \lambda j_2 \\ \vdots \\ \mathcal{A} j_m = j_{m-1} + \lambda j_m \end{array} \leftrightarrow J_m = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ – клетка Жордана}$$

m-ого порядка (блок нижнего уровня)
Каждая клетка соответствует одному циклическому базису размера m
Рассмотрим теперь блочную матрицу $\text{diag}(\underbrace{J_1, \ldots J_1}_{\text{блок среднего уровня}}, \ldots, \underbrace{J_m, \ldots, J_m}_{\text{блок среднего уровня}})$ – блок верхнего уровня, отвечающий корневому подпространству K_λ
Каждый блок среднего уровня соответствует башне соответствующей высоты
Объединим все блоки вернего уровня всех корневых пространств в блочно-диагональную матрицу
Получим жорданов базис пространства V
Матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид, где на диагонали будут находиться клетки Жордана, отвечающие циклическим базисам – Жорданова форма матрицы
$T_{e\to j} = T = (\ldots, j_1, \ldots j_m, \ldots)$
$T^{-1}AT = J$
$J = \text{diag}(\text{блоки верхнего уровня всех корневых пространств})$
Обоснование алгоритма
Пусть $\mathcal{B}K = \operatorname{Im}\mathcal{B}$
$Z_0 = \mathcal{B}K$
$Z_r = \mathcal{B}K + K_r, r = 1 \ldots m$
$Z_m = \mathcal{B}K + K_m = K$
$Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$

$\overline{K}_1 \subset K_1 : Z_1 = Z_0 \oplus \overline{K}_1$
$\overline{K}_2 \subset K_2 : Z_2 = Z_1 \oplus \overline{K}_2$
$\overline{K}_r \subset K_r : Z_r = Z_{r-1} \oplus \overline{K}_r = K$
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K\ (1)$
$\overline{K}_j$ – опорные подпространства
Теорема
$1 \leq r \leq m$
$\mathcal{B}^r K = \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+1} \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_{r+2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^r \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^{r+1} K$
Доказательство
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K\ (1)$
$\forall\, x \in K :\ \exists!(x_i \in \overline{K}_j) : x = x_1 + \ldots + x_m + \mathcal{B}x', x' \in K$

$$\mathcal{B}^r x = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}^r \underbrace{x_j}_{\in K_j = \mathrm{Ker}\, \mathcal{B}^j} + \mathcal{B}^{r+1} x' = \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' \in \sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r \overline{K}_j + \mathcal{B}^{r+1} K$$

Докажем дизъюнктность

$$\sum_{j=r+1}^{m} \mathcal{B}^r x_j + \mathcal{B}^{r+1} x' = \mathbb{0}$$

$$\mathcal{B}^r \underbrace{(\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x')}_{\in K_r \subset Z_r \overline{K}_1 \oplus \overline{K}_r \oplus \mathcal{B}K} = \mathbb{0}$$

$$\sum_{j=r+1}^{m} \underbrace{x_j}_{\in \overline{K}_j} + \mathcal{B}x' = \sum_{j=1}^{m} x_j + \mathcal{B}y'$$

В силу единственности разложения и дизъюнктности $\overline{K}_j$ и $\mathcal{B}K\ \forall\, j\ x_j = \mathbb{0}$
$\mathbb{0} + \mathcal{B}^{r+1} = \mathbb{0}$ – дизъюнктность

$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}K$
$\mathcal{B}K = \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^2 K$
$\vdots$
$\mathcal{B}^{m-1} K = \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m \oplus \underbrace{\mathcal{B}^m K}_{= \mathbb{0}}$

Отсюда следствие
Следствие
$K = \overline{K}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{K}_m \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}\overline{K}_m \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^3 \overline{K}_m \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1} \overline{K}_m$
Сумма представляется в виде пирамиды

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \overline{K}_m \\
 & & & \overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}K_m \\
 & & \iddots & \iddots & \vdots \\
 & \overline{K}_2 & \ldots & \mathcal{B}^{m-3}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-2}K_m \\
\overline{K}_1 & \mathcal{B}\overline{K}_2 & \ldots & \mathcal{B}^{m-2}\overline{K}_{m-1} & \overline{\mathcal{B}}^{m-1}K_m
\end{array}$$

Данная таблица соответствует башням

$\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset V_\lambda$

$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r) = \mathcal{B}^r\overline{K}^r =$

Отсюда $\mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r \subset \operatorname{Ker}\mathcal{B} = V_\lambda$

Если $\overline{K}_r \neq \mathbb{0}$, то $J_r = \overline{K}_r \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r$

$\overline{K}_r$ – основание башни (опорное пространство, поорожденное J_r)

$V_\lambda = \overline{K}_1 \oplus \mathcal{B}\overline{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-1}\overline{K}_m$ – основание (1 этаж – крыша)

Верхние клетки каждого этажа – основание

l-ый этаж: $\overline{K}_l \oplus \mathcal{B}\overline{K}_{l+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^{m-l}\overline{K}_m \subset K_l$

$\mathcal{B}^l(\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j}) = \mathcal{B}^{l+j}\overline{K}_{l-j} = \mathbb{0}, j = 0\ldots m-l$

Отсюда $\mathcal{B}^j\overline{K}_{l+j} \subset K_l$

Первые j этажей соответствуют K_j

Отсюда каждый следующий этаж – прямое дополнение предыдущих

Теорема (о размерности башни)

Все этажи башни имеют однинаковую размерность $d_r = \dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r, j = 1\ldots r-1$

Доказательство

Рассмотрим $\mathcal{B}^j$ (очевидно, что $\mathcal{B}^j$ – эндоморфизм)

Докажем, что $\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. сохраняет размерность, т.е. $\dim\overline{K}_r = \dim\mathcal{B}^j\overline{K}_r$

Для этого докажем тривиальность ядра

Пусть $x \in \overline{K}_r, \mathcal{B}^j(x) = \mathbb{0}$

Тогда $x \in \operatorname{Ker}B^j = K^j$

$x \in \overline{K}_r \cap K^i, i = 1\ldots r-1$

$K_1, \ldots, K_{r-1}$ дизъюнктны с $\overline{K}_r$

Т.о. $x = \mathbb{0}$

Тогда ядро тривиально, ч.т.д.

Следствие

$$\dim V_\lambda = \gamma(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} d_r$$

$\dim K_\lambda = \alpha(\lambda) = \sum_{r=1}^{m} r d_r$

Следствие 2 (теорема Фробениуса)

$\forall\, r = 1 \dots m\ d_r = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r-1} - 2 \operatorname{rg} \mathcal{B}^r + \operatorname{rg} \mathcal{B}^{r+1}$

(при $r = m\ d_m = \operatorname{rg} \mathcal{B}^{m-1}$)

Доказательство

$\rho_j = \operatorname{rg} \mathcal{B}^j$

$\underbrace{\mathcal{B}^j K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^j} = \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_{j+1}}_{d_{j+1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{B}^j \overline{K}_m}_{d_m} \oplus \underbrace{\mathcal{B}^{j+1} K}_{\operatorname{Im} \mathcal{B}^{j+1}}$

$\rho_j = d_{j+1} + \dots + d_m + \rho_{j+1}$

$\rho_j - \rho_{j+1} = d_{j+1} + \dots + d_m$

$\rho_0 = \operatorname{rg} \mathcal{B}^0 = \operatorname{rg} \epsilon = \dim K_\lambda = \alpha(\lambda)$

$d_1 + \dots + d_m = \rho_0 - \rho_1$

$\vdots$

$d_{n-1} + d_m = \rho_{m-2} - \rho_{m-1}$

$d_m = \rho_{m-1} - \rho_m$

Отсюда $d_r = \rho_{r-1} - 2\rho_r + \rho_{r+1}$

$d_m = \rho_{m-1} + 0 + 0$

Замечание

На практике удобнее

$\rho \mathcal{B}^j = \dim K_\lambda - \dim K_j$

Рассмотрим башню

$\dim \overline{K}_r = d_r = d$

$\overline{K}_r = \operatorname{span}(g_1, \dots, g_d)$

$$\begin{array}{c|cccc} \overline{K}_r & g_1 & g_2 & \dots & g_d \\ \mathcal{B}\overline{K}_r & \mathcal{B}g_1 & \mathcal{B}g_2 & \dots & \mathcal{B}g_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{B}^{r-1}\overline{K}_r & \mathcal{B}^{r-1}g_1 & \mathcal{B}^{r-1}g_2 & \dots & \mathcal{B}^{r-1}g_d \end{array}$$

$\mathcal{B}^j$ – изоморфизм, т.е. базис переходит в базис

$\mathcal{B}^j g_1 \dots \mathcal{B}^j g_d$ – базис $\mathcal{B}^j \overline{K}^r$ – циклический базис

Тогда $J_r = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{span}(\mathcal{B}^{r-1} g_i, \dots, \mathcal{B} g_i, g_i)$

$\mathcal{A}(\mathcal{B}^j g_i) = (\mathcal{B} + \lambda\epsilon)\mathcal{B}^j g_i = \mathcal{B}^{j+1} g_i + \lambda \mathcal{B}^j g_i$

$\mathcal{A}\Big|_{\mathrm{span}(\mathcal{B}^{r-1}g_i,\dots,\mathcal{B}g_i,g_i)} \underset{\text{в цикл.базисе}}{\leftrightarrow} J_r$ – клетка Жордана размерности $r \times r$ – блок нижнего уровн

$\mathcal{A}\Big|_{J_i} \leftrightarrow \mathrm{diag}(\underbrace{J_r(\lambda),\dots,J_r(\lambda)}_{d_r \text{ штук}}) = \mathcal{T}_{J_r}(\lambda)$

$\mathcal{A}\Big|_{K=\bigoplus_{r=1}^{m} J_r} \leftrightarrow \mathrm{diag}(\mathcal{T}_{J_1}(\lambda),\dots,\mathcal{T}_{J_m}(\lambda)) = \mathcal{J}(\lambda)$

$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathrm{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1), \mathcal{J}(\lambda_2), \dots) = \mathcal{J}_A = \mathcal{J}$

//todo 13:11 16.03

1.11 Функция от матрицы, приводимой к жордановой форме

Пусть $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < R$

$f(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$

$\exists T(j_1,\dots,j_n), A = T\mathcal{J}T^{-1}$

Пусть $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_n)$ Тогда $\mathcal{J}^k = \mathrm{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k,\dots,\mathcal{J}(\lambda_n)^k)$

$A^k = T\,\mathrm{diag}(\mathcal{J}(\lambda_1)^k,\dots,\mathcal{J}(\lambda_n)^k)T^{-1}$

$f(A) = T\,\mathrm{diag}(f(\mathcal{J}(\lambda_1)),\dots,f(\mathcal{J}(\lambda_n)))T^{-1}$

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_{r\times r} + I_r, I_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. ряд единиц "уезжает вверх"

Отсюда $J_r^k = (\lambda E_{r\times r}+I_r)^k = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m \lambda^{k-m} I_r^m = C_k^0 \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} +$

$C_k^1 \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$

$= \begin{pmatrix} C_k^0\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1}\lambda^{k-r+1} & 0 & 0 & \dots 0 & \\ 0 & C_k^0\lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & C_k^2\lambda^{k-2} & \dots & C_k^{k-r+1}\lambda^{k-r+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

//todo 23.03 10:27

2 Черная магия

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

Отсюда $(\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$

$y' = y(\ln|y|)'$ (удобно)

3 Тензоры

3.1 Линейные формы. Сопряженное пространство. Ковариантные и контрвариантные преобразования

V – линейное пространство над $K(\mathbb{R},\mathbb{C})$

Определение

Линейная функция $f: V \to K$ называется *линейной формой(линейным функционалом)*

Т.е. $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2)$
Пример

1. Скалярное умножение на фиксированный вектор
2. $A_{n\times n}, f : M_{n\times n} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
   $f(A) = \operatorname{tr} A$
3. $P_n, t_0 \in \mathbb{R}$
   Пусть $f^j = P_n \to \mathbb{R}, f^j(p) = \dfrac{p^{(j)}(t)}{j!}(t_0)$
   Тогда $f^0, f^1, \dots$ – линейная форма
4. $f : \underbrace{C}_{\text{функции, непрерывные на } \mathbb{R}}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
   $\delta(f) := f(0)$ – δ-функция Дирака
   $\delta(f)$ – линейная форма на бесконечномерном пространстве

$n := \dim V$
$V^* = \{f : V \to K\ f$ – линейнаяя форма$\}$
$\mathbb{0}(x) := 0, \mathbb{0} \in V^*$
$\forall\, f \in V^*\ (-f) \in V^*$
Тогда V^* – линейное пространство над полем K
V^* – *сопряженное(дуальное)* к V

Вспоминаем правило Эйнштейна
Выражение $\alpha^i\beta_i := \sum\limits_i \alpha_i\beta_i$
иначе: $\alpha^i := \alpha_i$

$f \in V^*$
$\forall\, x \in V\ \ f(x) = f(x^i e_i) = x^i \underbrace{f(e_i)}_{a_i \in K}$
$a := f(e_i)$ называется *коэффициентами линейной формы* f
Тогда $f(x) = x^i a_i$ – f полностью описывается значениями на базисных элементах
Тогда $f \leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ – зависит от выбора базиса
Сопоставление – изоморфизм
Фанфакт

Естественный изоморфизм – изоморфизм, который не зависит от выбора базиса. Но это не наш случай
$V^* \cong K_n(K^n)$ – пространство n-мерных строк
Определение
$\omega^i \in V^*, x = x^i e_i$
$\forall\, x \in V \omega^i(x) = x_i$ – координатные функции
(очевидно, что $\omega^i \in V^*, w^i(x_1 + \lambda x_2) = x_1^i + \lambda x_2^i$)
$w^i(e_j) = \delta^i_j = +(i == j) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underbrace{1}_{i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Теорема
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*
Доказательство
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – линейно независимые
$\alpha_i \omega^i = \mathbb{0}$
$\alpha_i \in K$
$j = 1 \dots n$ $\alpha_i \omega^i(e_j) = \alpha_i \delta^i_j = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow$ линейно независимые
$\dim V^* = n \Rightarrow$ базис
Следствие
a_i – координаты f в базисе $\omega^1 \dots \omega^n$
Доказательство
$f(x) = x^i a_i = \omega^i(x) a_i \Leftrightarrow f = a_i \omega^i$
Определение
$\omega = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix}$ называется *сопряженным(дуальным)* базисом к базису e пространства V

Вопрос: есть другой базис в V^*. Будет ли он сопряженным к некоторому базису V
Теорема
$\omega'^1, \dots, \omega'^n$ – базис V^*
Тогда $\exists\, e'_1, \dots, e'_n$ – базис в V такой, что ω' сопряжен с e'
Доказательство
Пусть $e'_1, \dots, e'_n$ – базис в V
Базис V $\omega^1, \dots, \omega^n$ сопряжен с e
$\omega'^1, \dots, \omega'^n$ – базис $V^* \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega'^1 & \dots & \omega'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix} T_{\omega \to \omega'}$
$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = \underbrace{T^T_{\omega \to \omega'}}_{=: S_{\omega \to \omega'}} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}$$

Построим новый базис e'
$T_{e\to e'} = S^{-1} = T$
$\begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} T$ – тоже базис по определению
Покажем, что ω' сопряжен к e', т.е. ω'^i – координатные функции по отношению к e'
Пусть $s^i_j = s_{ij}, t^i_j = t_{ij}$
$$\forall\, x \in V\ \omega'^i(x) = s^i_k \omega^k(x) = s^i_k x^k = \underbrace{\underbrace{s^i_k t^k_j}_{(ST)^i_j = \delta^i_j}}_{E} x'^i = \delta^i_j x'^j = x'^i$$
Отсюда ω'^i – координатная функция $\Rightarrow$ базис сопряженный
Замечание
Вообще говоря, базис e' существует и единственный (очевидно из доказательства)
Следствие
$$\begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \vdots \\ \omega'^n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n \end{pmatrix}, S = T^T_{\omega\to\omega'}$$
Тогда $a' = aT$
$T = S^{-1} = T_{e\to e'}$
$x' = Sx$
Доказательство
$X' = SX$ очевидно$(X = TX' = S^{-1}X')$
$\begin{pmatrix} \omega'^1 & \dots & \omega'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 & \dots & \omega^n \end{pmatrix} T_{\omega\to\omega'}$
$a^T = T_{\omega\to\omega'}(a')^T\ a = a'T^T_{\omega\to\omega'} = a'S \Leftrightarrow a' = aS^{-1}aT$

Определение
Если координаты вектора при смене базиса изменяются по тому же закону(т.е. с той же матрицей), что и сам базис, то такой закон называется *ковариантным(согласованным)*, координаты вектора называются *ковариантными* координатами, а сам вектор называется *ковариантным* или *ковектором*
Элементы V^* – это ковекторы (линейная форма $\equiv$ ковектор)
В противном случае, если координаты вектора при смене базиса изменяются по закону, провоположному(т.е. с обратной матрицей) тому, по которому сам базис, то такой вектор называется *контрвариантным*, координаты – *контрвариантными*, вектор – *контровариантным* или про-

сто вектором
Элементы V – контрвариантные векторы
Принято писать индекс координаты контрвектора сверзу, а ковариантного – снизу

$$\forall\, f \in V^*, x \in V\ \ f(x) = x'ia'_i = s^i_k x^k a_m t^m_i = \underbrace{t^m_i s^i_k}_{\delta^m_k} x^k a_m = x^k a_k$$

Т.о. форма записи f – инвариант относительно замены базиса
Определение
$V^{**} = (V^*)^*$
$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$ – можем построить изоморфизм между V и V^{**}
Теорема 3 (естественный изоморфизм V и V^{**})
Вместо обозначения "x"буду использовать $<x>$
$\forall\, x \in V \to < x > \in V^{**}$
$\forall\, f \in V^* < x > (f) = f(x)$
Отсюда $x \leftrightarrow < x >$
$V \cong V^{**}$
Доказательство
$\forall\, f_1, f_2 \in V^*, \lambda \in K\ \ < x > (f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x) = f_1(x) + \lambda f_2(x) =< x > (f_1) + \lambda < x > (f_2)$
Отсюда $< x > \in (V^*)^*$
Покажем, что V линейно вложено в V^{**}, т.е. $x \in V \to < x > \in V^{**}$
//todo 12:00 23.03
Покажем, что базис V $e_1, \dots e_n$ перейдет в базис V^{**}
$e_j \to < e_j >$
$\forall\, f \in V^* < e_j > (f) = f(e_j) = a_j$ – координата f в базисе $\omega^1, \dots \omega_n$, сопр. с e
Т.о. $< e_j >$ – координатная функция в пространстве V^* относительно $\omega^1, \dots \omega_n$
Т.о. по теореме 1 координатные функции – базис сопряженного пространства
Т.о. $< e_j >$ – базис V^{**}
Базис V $e_1, \dots, e_n \to$ базис V^{**} $< e_1 >, \dots, < e_n >$
Т.о. отображение линейно, то изоморфизм
Замечание

1. принято отождествлять элементы V и V^{**} с помощью изоморфиз-

ма, описанного в теореме 3
Поэтому <> не пишут
$\forall\, f \in V^*, x \in V\ f(x) = a_i x^i = f(e_i)x^i = e_i(f)x^i = x(f)$
$a_i = f(e_i)$
$x^i = x(\omega^i)$

2. $\omega^i(e_j) = \delta^i_j = e_j(\omega^i)$
   Как найти на практике?
   $e_1, \ldots, e_n \leftrightarrow \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$ – столбцы
   $w^i(e_j) = \underbrace{(\ldots)}_{a}\underbrace{\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}}_{x} = \delta^i_j$
   Отсюда $\underbrace{\begin{pmatrix}\omega^1 \\ \vdots \\ \omega^n\end{pmatrix}}_{S=T^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}e_1 & \ldots & e_n\end{pmatrix}}_{T} = E$

3. Т.о. понятие сопряженного пространства и сопряженного базиса дуальны
   ω сопряженный базис к e
   e сопряженный базис к ω
   (здесь подразумевается элементы V^{**})

4. Задача о построении проекторов (разложение элемента на проекции)
   $V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda$
   $\forall\, x \in V\ \exists! x = \sum\limits_{\lambda} x_\lambda, x_\lambda \in V_\lambda$
   $\rho_\lambda : V \to V, \operatorname{Im}\rho_\lambda = V_\lambda, \sum\limits_{\lambda}\rho_\lambda = \epsilon$
   $\forall\, x \in V\ \rho x := x_\lambda, \underbrace{\rho_\lambda \rho\mu}_{\lambda\neq\mu} = 0$
   $v_1, \ldots, v_n$ – базис V = объединение базисов V_λ
   $x = x^i v_i = \sum\limits_{\lambda}\underbrace{\sum\limits_{m_\lambda} x^{m_\lambda} v_{m_\lambda}}_{x_\lambda} = \omega^1, \ldots, \omega^n$ – сопряженный базис =

$$\sum_\lambda \sum_{m_\lambda} \omega^{m_\lambda}(x) v_{m_\lambda}$$
$\omega^{m_\lambda} \leftrightarrow (a_i^{m_\lambda})_i$ – строка
$x \leftrightarrow X$
$\omega^{m_\lambda}(x) = a^{m_\lambda} X$
$v_{m_\lambda} \leftrightarrow (V_{m_\lambda,i})_i$ – столбец
$$x = \sum_\lambda \sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda} a^{m_\lambda} X = \sum_\lambda \underbrace{\Big(\sum_{m_\lambda} V_{m_\lambda} a^{m_\lambda}\Big)}_{\rho_\lambda} X = \sum_\lambda \Big(\sum_{m_\lambda} \underbrace{(a^{m_\lambda} x)}_{\omega^{m_\lambda}(x)} V_{m_\lambda}\Big)$$

3.2 Два определения тензора. Линейное пространство тензоров. Многомерная матрица

Определение
V, V^* – сопряженные линейные пространства над полем $K(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
$f : V^p \times (V^*)^q \to K, p, q \geq 0$ – линейная по каждому аргументу
f – тензор порядка (p, q) или p раз ковариантом, q раз контрвариантным
Множество таких функций обозначим $T_{(p,q)}$
p, q – *валентности*
$r = p + q$ – полная валентность/ранг тензора (не наш rg)
$f \in T_{p,0}$ – ковариантный тензор валентности p
$f \in T_{0,q}$ – контрвариантный тензор валентности q
$r = 0$ – тензор нулевого ранга. $f = \text{const} \in K$
Пример
$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n}_{V}$ – столбец
$\underbrace{a \in \mathbb{R}_n}_{V^*}$ – строка
$f(x, a) = ax \in \mathbb{R}, f \in T_{(1,1)}$

$\mathbb{0}$ – нулевой тензор
$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in V, \nu^1, \dots, \nu^p \in V^* \; 0(\xi_1, \dots, \xi_p, \nu^1, \dots, \nu^q) = 0$
$\forall\, f \in T_{(p,q)} \;\; -f \in T_{(p,q)}$
$T_{(p,q)}$ – линейное пространство

$e_1, \dots, e_n$ – базис V
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*

e, ω – сопряженные
Для $\xi \in V$ $\xi = \xi^i e_j$
Для $\nu \in V^*$ $\nu = \nu_i \omega^j$
Тогда $f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu^1, \ldots, \nu^q) = f(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \xi_p^{j_p} e_{j_p}, \nu_{i_1}^1 \omega^{i_1}, \ldots, \nu_{i_q}^q \omega^{i_p})$
$= \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \ldots \nu_{i_q}^q f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, \omega^1, \ldots, \omega^{i_q})$ – любой тензор определяется значениями на всевозможных наборах e_j, ω^i
$\alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q} := f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}, \omega^{i_1}, \ldots, \omega^{i_q})$ – коэффициенты тензона f относительно базисов e, ω
$f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \nu^1, \ldots, \nu^q) = \xi_1^{j_1} \ldots \xi_p^{j_p} \nu_{i_1}^1 \ldots \nu_{i_q}^q \alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q}$
Определение
S – множество элементов, записанных с помощью двух типов индексов $s_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q}$, где $i_k, j_m \in (1, \ldots n)$ называется $p + q$-мерной матрицей порядка n
Пример
$n = 3$, трехмерная матрица

1. S^{ijk}
2. S_k^{ij}
3. S_{jk}^i
4. S_{ijk}

$f \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q})$ – изоморфизм
$T_{(p,q)} \cong S_(p + q)$
Правило записи элементов тензора в многомерной записи
В $\alpha_{j_1, \ldots, j_p}^{i_1, \ldots, i_q}$ сначала читаются верхние индексы, потом нижние индексы
Для двумерных матриц:

1. строка
2. столбец

Для трехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой

Запись: $\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$

Для четырехмерных матриц:

1. строка
2. столбец
3. слой
4. срез

Запись: $\left(\begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \end{array}\right)$

//todo 11:59 30.03

$\forall\, \xi \in V\ \xi = \xi^i e_i = \xi^{ij} e^i_j$

$\xi^i = t^i_j \xi'^j$

$\forall\, \eta \in V^*\ \eta = \eta_i \omega^i = n'_j \omega'^j$

$\eta_i = s^j_i \eta'_j$

$\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_p \in V, \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^* f(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, ., \eta^q) = \alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, ., j_p} \xi^{j_1}_1 \cdot \ldots \cdot \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \cdot \ldots \cdot \eta^q_{i_q} = \alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, ., j_p} t^{j_1}_{u_1} \xi'^{u_1}_1 \cdot \ldots \cdot t^{j_p}_{u_p} \xi'^{u_p}_p \cdot s^{r_1}_{i_1} \eta'^1_{r_1} \cdot \ldots \cdot s^{r_q}_{i_q} \eta'^1_{r_q}$

$\alpha^{i_1, \ldots, i_q}_{j_1, ., j_p} t^{j_1}_{u_1} \cdot \ldots \cdot t^{j_p}_{u_p} s^{r_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot s^{r_q}_{i_q} = \alpha'^{r_1, \ldots, r_q}_{u_1, ., u_p}$

$f('e_{u_1}, \ldots, e'_{u_p}, \omega'^{r_1}, \ldots, \omega'^{r_q}) = \alpha'^{r_1, \ldots, r_q}_{u_1, ., u_p}$

Нижние индексы – ковариантные, т.к. при смене базиса соответствующая координата пересчитывается по ковариантному закону (т.е. через T)

Верхние индексы – контрвариантные

Пример

$\forall\, x \in V \cong V^{**}, x$ – линейное отображение

$x \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \alpha, x \in T_{(0,1)}$

$\alpha'^r = \alpha^i s_i^r$
$\alpha' = S\alpha \Rightarrow \alpha = T\alpha'$
$\forall\, f \in V^*, f$ – линейное отображение
$f \leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}, f \in T_{(0,1)}$
$a'_u = a_j t_u^j$
$a' = aT \Rightarrow a = a'S$

Определение 2

Геометрический объект на линейном пространстве V над полем K, описываемый $p+q$-мерной матрицей размерности $n(=\dim V)$ с элементами из поля K, которая при смене пространства V пересчитывается по формуле $\alpha_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} t_{u_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_q}^{r_q} = \alpha'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p}$, где $(t_j^i) = T_{e\to e'}, S = T^{-1}$, называется тензором типа (p,q) или p раз ковариантным и q раз контрвариантным

Пусть $\mathbb{0}$ – нулевая матрица, $-\alpha$ – противоположная матрица, задано умножение на скаляр и сложение
Докажем, что $+$ и $\lambda\cdot$ сохраняют свойство тензоров
$\alpha, \beta \in T_{(p,q)}, \forall\, \lambda \in K$
$(\alpha+\lambda\beta)_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} = \alpha_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} + \lambda\beta_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q}$
$(\alpha+\lambda\beta)'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p} = (\alpha+\lambda\beta)_{j_1,.,j_p}^{i_1,\dots,i_q} t_{u_1}^{j_1}\dots t_{u_p}^{j_p} s_{i_1}^{r_1}\dots s_{u_q}^{r_q} = \alpha'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p} + \lambda\beta'^{r_1,\dots,r_q}_{u_1,.,u_p}$ – верно

3.3 Произведение тензоров. Базис пространства тензоров. Свойства тензоров

Определение
$\alpha \in T_{(p_1,q_1)}$
$\beta \in T_{(p_2,q_2)}$
$\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+q_1, p_2+q_2)}$
$\gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}}^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}} = \alpha_{j_1,.,j_{p_1}}^{i_1,\dots,i_{q_1}} \beta_{m_1,.,m_{p_2}}^{k_1,\dots,k_{q_2}}$

Доказательство корректности произведения
$\gamma'^{r_1\dots r_{q_1}\sigma_1\dots\sigma_{q_2}}_{u_1\dots u_{p_1}v_1\dots v_{p_2}} = \gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}}^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}} t_{u_1}^{j_1}\dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{i_1}^{r_1}\dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}}$
$= \alpha_{j_1,.,j_{p_1}}^{i_1,\dots,i_{q_1}} t_{u_1}^{j_1}\dots t_{u_{p_1}}^{j_{p_1}} s_{i_1}^{r_1}\dots s_{r_{q_1}}^{r_{q_1}} \beta_{m_1,.,m_{p_2}}^{k_1,\dots,k_{q_2}} t_{v_1}^{m_1}\dots t_{v_{p_2}}^{m_{p_2}} s_{k_1}^{\sigma_1}\dots s_{k_{q_2}}^{\sigma_{q_2}}$
$= \alpha'^{r_1,\dots,r_{q_1}}_{u_1,.,u_{p_1}} \beta'^{\sigma_1,\dots,\sigma_{q_2}}_{v_1,.,v_{p_2}}$

Замечание

1. $\lambda \in K \leftrightarrow \lambda \in T_{(0,0)}$

$\forall\, \alpha \in T_{(p,q)}\ \lambda \otimes \alpha = \lambda\alpha$

2. $\oplus$ ассоциативно, не коммутативно, дистрибутивно по сложению

$\alpha \in T_{(p_1,q_1)} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} f : V^{p_1} \times (V^*)^{q_1} \to K$ – полилинейная
$\beta \in T_{(p_2,q_2)} \underset{e_1,\dots,e_n}{\leftrightarrow} f : V^{p_2} \times (V^*)^{q_2} \to K$ – полилинейная
Тогда $\gamma = \alpha \otimes \beta \in T_{(p_1+p_2,q_1+q_2)} \leftrightarrow t : V^{p_1+p_2} \times (V^*)^{q_1+q_2} \to R$
$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2} \in V$
$\forall\, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2} \in V^*$
$t(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$
$= \gamma^{i_1,\dots,i_{q_1},k_1,\dots,k_{q_2}}_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_p} \eta_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \theta^1_{k_1} \dots k^{q_2}_{q_2}$
$= \alpha^{i_1,\dots,i_{q_1}}_{j_1,.,j_{p_1}} \xi_1^{j_1} \dots \xi_{p_1}^{j_{p_1}} \eta_{i_1} \dots \eta^{q_1}_{i_{q_1}} \beta^{k_1,\dots,k_{q_2}}_{m_1,.,m_{p_2}} \zeta_1^{m_1} \dots \zeta_{p_2}^{m_p} \theta^1_{k_1} \dots k^{q_2}_{q_2}$
$= f(\xi_1, \dots, \xi_{p_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_1}) g(\zeta_1, \dots, \zeta_{p_2}, \theta^1, \dots, \theta^{q_2})$
Отсюда $\gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow t = fg$
В частности:
$\forall\, f^1, \dots, f^p \in V^*, g_1, \dots, g_q \in V\ f^1 \otimes \dots \otimes f^p \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_q(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = f^1(\eta_1) \dots f^p(\eta_p) g_1(\eta^n) \dots g_q(\eta^q)$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V
$\omega^1, \dots, \omega^n$ – базис V^*
$\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \xi_1 j_1, \dots, \xi_p^{j_p}, \eta^1_{i_1}, \dots, \eta^q_{i_q}$
Теорема о базисе пространства тензоров
Набор тензоров $\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$ по всем возможным i, j – базис $T_{(p,q)}$
Доказательство
$\omega^j \in T_{(1,0)}, e_i \in T_{(0,1)}$
$\{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\}$ – набор из n^{p+q}
Система порождающая:
$\forall\, \xi_1, \dots, \xi_p \in V$
$\forall\, \eta^1, \dots, \eta^q \in V^*$
$\forall\, f \in T_{(p,q)}\ f(\xi_1, \dots, \xi_p, \eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p} \underbrace{\xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \eta^1_{i_1} \dots \eta^q_{i_q}}_{\omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}(\xi_1,\dots,\xi_p,\eta^1,\dots,\eta^q)}$

Отсюда $f = \underbrace{\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p}}_{\text{в будущем: координата}} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$
Система линейно независимая
Рассмотрим $\alpha^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,.,j_p} \omega^{j_1} \otimes \dots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$

Применим к $e_{u_1}, \ldots, e_{u_p} \in V, \omega^{r_1}, \ldots, \omega^{r_q} \in V^*$
$\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p} \underbrace{\omega^{j_1} \otimes \ldots \otimes \omega^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}(e_{u_1}, \ldots, e_{u_p}, \omega^{r_1}, \ldots, \omega^{r_q})}_{\delta^{j_1}_{u_1} \ldots \delta^{j_p}_{u_p} \delta^{r_1}_{i_1} \ldots \delta^{r_q}_{i_q}} = \mathbb{0}$
Отсюда $\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p} = 0$
Тогда все $\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,.,j_p}$ нули $\Rightarrow$ линейно независимые
Следствие
$\dim T_{(p,q)} = n^{p+q}$
Замечание
//todo 14:20 30.03
Определение
Пусть $\alpha \in T(p,q), p, q \neq 0$
Тензор $\beta \in T_{p-1,q-1}$ называется сверткой тензора α, если
$\beta^{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots\hat{j_m}\ldots j_p} := \sum\limits_{\kappa} \alpha^{i_1,\ldots,\underset{\text{k-ая позиция}}{\kappa}\ldots i_q}_{j_1,\ldots\underset{\text{m-ая позиция}}{\kappa}\ldots j_p}$, где $\hat{i_k}$ – отсутствие i_k
Доказательство корректности определения
$\beta'^{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots\hat{j_m}\ldots j_p} = \alpha'^{r_1,\ldots,\kappa,\ldots,r_q}_{u_1,\ldots,\kappa,\ldots u_p} = \alpha'^{r_1,\ldots,i_k,\ldots,r_q}_{u_1,\ldots,j_m,\ldots u_p} t^{j_1}_{u_1} \ldots t^{j_m}_{\kappa} \ldots t^{j_m}_{u_p} s^{r_1}_{i_1} \ldots s^{\kappa}_{i_k} \ldots s^{r_q}_{i_q}$
$t^{j_m}_{\kappa} s^{\kappa}_{i_k} = \delta^{j_m}_{i_k}$
$\beta'^{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots\hat{j_m}\ldots j_p} = \underbrace{\alpha'^{r_1,\ldots,\omega,\ldots,r_q}_{u_1,\ldots,\omega,\ldots u_p}}_{\beta^{i_1,\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_q}_{j_1,\ldots\hat{j_m}\ldots j_p}} t^{j_1}_{u_1} \ldots t^{\hat{j_m}}_{\kappa} \ldots t^{j_m}_{u_p} s^{r_1}_{i_1} \ldots s^{\hat{\kappa}}_{i_k} \ldots s^{r_q}_{i_q}$
Свертка может быть по нескольким парам индексов
Если в результате свертки получится тензор (0,0), т.е. число, то свертка *полная*

3.4 Транспонирование тензоров. Кососимметричные и симметричные тензоры

$\alpha = (\alpha_{ij}) \rightsquigarrow A^T = B = (\beta_{ij}), \beta_{ij} = \alpha_{ji}$
Обобщим операцию транспонирования
Пусть $\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$
$\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,*,\ldots,\delta,\ldots,j_p}$ – зафиксируем все, кроме $*, \delta$
Т.о. мы извлекли из матрицы тензора слой – двумерную матрицу
Получили матрицу $\widetilde{\alpha}_{*\delta}$
Протранспонируем ее

Т.о. $\beta^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,\delta,\ldots,*,\ldots,j_p} = \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,*,\ldots,\delta,\ldots,j_p}$
Определение
$\alpha \in T_{(p,q)}, p \geq 2$
$\beta = \sigma(\alpha)$ называется тензором, полученным транспонированием тензора α по перестановке σ, если $\beta^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} = \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_{\sigma_1},\ldots,j_{\sigma_p}}$
Замечание
Любая перестановка σ – конечное число транспозиций 2-х элементов

Заметим, что не любая многомерная матрица – тензор
Проверим, что β – тензор
Корректность
Достаточно проверить для σ – транспозиции двух элементов
Возьмем $\beta'^{k_1,\ldots,k_q}_{m_1,\ldots,\underbrace{*}_{\text{r-ая}},\ldots,\underbrace{\delta}_{\text{l-ая}},\ldots,m_p}$
$\beta'^{k_1,\ldots,k_q}_{m_1,\ldots,*,\ldots,\delta,\ldots,m_p} = \alpha^{k_1,\ldots,k_q}_{m_1,\ldots,\delta,\ldots,*,\ldots,m_p}$ Т.к. α – тензор:
$\alpha^{k_1,\ldots,k_q}_{m_1,\ldots,\delta,\ldots,*,\ldots,m_p} = \underbrace{\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_r,\ldots,j_l,\ldots,j_p}}_{\beta^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_l,\ldots,j_r,\ldots,j_p}} t^{i_1}_{m_1} \ldots t^{j_r}_{\delta} \ldots t^{j_l}_{*} \ldots t^{j_p}_{m_p} s^{k_1}_{i_1} \ldots s^{k_q}_{i_q}$

Теперь посмотрим на операцию транспонирования с точки зрения полилинейной функции
$\forall \xi_1, \ldots, \xi_p \in V \ \forall \eta^1, \ldots, \eta^q \in V^*$
$\beta = \sigma(\alpha)$
$\beta(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \beta^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} \xi^{j_1}_1 \ldots \xi^{j_p}_p \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q}$
$= \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_{\sigma_1},\ldots,j_{\sigma_p}} \xi^{j_{\sigma_1}}_{\sigma_1} \ldots \xi^{j_{\sigma_p}}_{\sigma_p} \eta^1_{i_1} \ldots \eta^q_{i_q} = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q)$
Замечание

1. Транспониование тензора можно определить по аналогии по верхним индексам, если $q \geq 2$

2. Тензоры можно транспонировать только по одному типу индексов: либо по верхним, либо по нижним, в отличие от произвольной многомерной матрицы

3. Мы будем работать только с нижними индексами, но все свойства и теоремы работают и для верхних индексов

Свойства

1. Из определения очевидно, что σ – линейная операция
   $\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \sigma(\alpha_1) + \lambda\sigma(\alpha_2)$

2. $\alpha = f^1 \otimes \ldots \otimes f^p \otimes \widetilde{\alpha} \in T_{(p,q)}, f^i \in V^*, \widetilde{\alpha} \in T_{(0,q)}$
   Тогда $\forall\, \sigma \,:\, \beta = \sigma(\alpha) \forall\, \xi_i \in V \forall\, \eta^j \in V^* \beta(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots, \eta^q) = \alpha(\xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_p}, \eta^1, \ldots, \eta^q)$
   $= f^1(\xi_{\sigma_1}) \cdot \ldots \cdot f^p(\xi_{\sigma_p}) \cdot \widetilde{\alpha}(\eta^1, \ldots, \eta^q) = f^{\sigma_1^{-1}}(\xi_1) \ldots f^{\sigma_p^{-1}}(\xi_p) \alpha(\eta^1, \ldots, \eta_q)$
   Отсюда $\beta = f^{\sigma_1^{-1}} \otimes \ldots \otimes f^{\sigma_p^{-1}} \otimes \widetilde{\alpha}$

α – называется симметричным тензором, если $\forall\, \sigma\ \sigma(\alpha) = \alpha$
α – кососимметричная(антрисимметричная/альтернированная), если $\forall\, \sigma\ \sigma(\alpha) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)}\alpha$
Заметим, что симметричность $\Leftrightarrow$ симметричность при транспозиции(свапе)
$\Leftrightarrow \forall\, (n, k) : \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots) = \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots)$
Заметим, что кососимметричность $\Leftrightarrow$ кососимметричность при транспозиции(свапе)
$\Leftrightarrow \forall\, (n, k) : \alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots) = -\alpha(\xi_1, \ldots, \underbrace{\nu}_{\text{m-ая}}, \ldots, \underbrace{\mu}_{\text{k-ая}}, \ldots, \xi_p, \eta^1, \ldots)$
Теорема
α кососимметричная $\Leftrightarrow \forall\, (k, m)\ \alpha(\ldots, \mu, \ldots, \mu, \ldots, \nu^1, \ldots) = 0 \Leftrightarrow \forall\, (k, m) \alpha^{\cdots}_{\ldots, i, \ldots, i, \ldots} = 0$
Доказательство
Смотри доказательство для полилинейной ассиметричной формы
Примеры

1. $f(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) : V_3^3 \to \mathbb{R}$
   $f \in T_{(3,0)}$
   f – кососимметричный тензор

2. $\beta \in T_{(3,0)}, n = 3, \beta$ – кососимметричная
   Тогда тензор имеет следующий вид
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), b = \beta(e_1, e_2, e_3)$$

3. $A = (\alpha_{ij}) \in T_{(2,0)}$. Тогда симметричность и антисимметричность согласуется с свойствами матриц

4. $(\alpha_{ijk}) \in T_{(3,0)}, n = 3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} c & a & d & a & x & b & d & b & y \\ a & x & b & x & e & z & b & z & g \\ d & b & y & b & z & g & y & g & f \end{array}\right)$$

3.5 Операция sim и alt для тензоров

Определение

$\forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\ \operatorname{sim}\alpha = \dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\sigma(\alpha)$ – симметрирование для тензора α по нижним индексам

$\forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)}\ \operatorname{sim}\alpha = \dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\sigma(\alpha)$ – альтернирование для тензора α по нижним индексам

Замечание

1. Т.к. σ – линейный оператор, то $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$ – линейные

2. Для α – симметричной $\operatorname{sim}\alpha = \alpha$
Для α – кососимметричной $\operatorname{alt}\alpha = \alpha$

3. Операции $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$ можно проводить не по всем индексам. Тогда набор индексов, по которым проводится операция, заключается в круглые(для симметрирования) или квадратные(для альтернирования) скобки Если какие-то индексы внутри скобок не участвуют, их выделяют вертикальными чертами

4. Очевидно, что можно определить аналогичные операции по верхним индексам

5. Пусть $\gamma = \operatorname{sim}\alpha$
Тогда $\forall\, \sigma\ \gamma_{i_1,\ldots,i_p} = \gamma_{i_{\sigma_1},\ldots,i_{\sigma_p}}$
Пусть $\gamma = \operatorname{alt}\alpha$
Тогда $\forall\, \sigma\ \gamma_{i_1,\ldots,i_p} = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\gamma_{i_{\sigma_1},\ldots,i_{\sigma_p}}$

Теорема о перестановочности σ и $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$

$\forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)} \forall\, \sigma\ \operatorname{sim}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\operatorname{sim}(\alpha)) = \operatorname{sim}\alpha\ \forall\, \alpha \in T_{(p\geq 2,q)} \forall\, \sigma\ \operatorname{alt}(\sigma(\alpha)) = \sigma(\operatorname{alt}(\alpha)) = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\operatorname{alt}\alpha$

Доказательство

Доказать проще, чем затехать

Следствие 1
$\forall \alpha \operatorname{sim} \alpha$ – симметричный, $\operatorname{alt} \alpha$ – кососимметричный
Доказательство
$\forall \alpha\ \sigma(\operatorname{sim} \alpha) = \operatorname{sim} \alpha$ – симметричный
$\forall \alpha\ \sigma(\operatorname{alt} \alpha) = (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \operatorname{alt} \alpha$ – кососимметричный
Следствие 2
α – симметричный $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{sim} \alpha$ α – кососимметричный $\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{alt} \alpha$
Следствие 3
$\operatorname{sim}(\operatorname{sim} \alpha) = \operatorname{sim} \alpha$
$\operatorname{alt}(\operatorname{alt} \alpha) = \operatorname{alt} \alpha$
$\operatorname{sim}(\operatorname{alt} \alpha) = 0$
$\operatorname{alt}(\operatorname{sim} \alpha) = 0$
Доказательство
$$\operatorname{sim}(\operatorname{alt} \alpha) = \operatorname{sim}(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(\alpha)) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \operatorname{sim}(\sigma(\alpha)) = \operatorname{sim} \alpha \frac{1}{p!} \underbrace{\sum_{\sigma} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma}}_{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} = 0$$
$\operatorname{alt}(\operatorname{sim}(\alpha))$ – аналогично

$T_{(p,q)}^{\text{сим}}$ – симметрирование T по фиксированному набору
$T_{(p,q)}^{\text{сим}}, T_{(p,q)}^{\text{кососим}}$ – линейные подпространства $T_{(p,q)}$
Для перестановки (k, m)(транспозиция):
$T_{(p,q)}^{\text{сим}} \oplus T_{(p,q)}^{\text{кососим}} = T_{(p,q)}$
Свойства $\operatorname{sim}, \operatorname{alt}$ сохраняются, если они производятся не по всем индексам

3.6 p-формы. Внешнее произведение p-формы

Определение
f – p-форма, если $f \in T_{(p,0)}, f$ – кососимметричный(или $p == 1$)
$f : V^p \to K$
$f \in V^*$ – 1-форма
$\underbrace{T_{(p,0)}^{\text{кососим}}}_{\Lambda^p V^* \text{– пространство p-форм}}$ – линейное подпространство $T_{(p,0)}$
Определение

f – p_1 – форма ($f \in \Lambda^{p_1} V^*$)
g – p_2 – форма ($f \in \Lambda^{p_2} V^*$)
$f \wedge g := \dfrac{(p_1+p_2)!}{p_1! p_2!} \operatorname{alt}(\underbrace{f \otimes g}_{\in T_{(p_1+p_2,0)}}) \in \Lambda^{p_1+p_2} V^*$ – внешнее произведение

Свойства

1. $f \wedge g = (-1)^{p_1 p_2} g \wedge f$
   В частности $f, g \in \Lambda^1 V^*(V^*)$
   $f \wedge g = -g \wedge f$
   $f \wedge f = 0$
   Доказательство
   $f \in \Lambda^{p_1} V^* \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}})$
   $g \in \Lambda^{p_2} V^* \leftrightarrow \alpha = (\alpha_{j_2,\dots,j_{p_2}})$
   $f \otimes g \leftrightarrow \gamma = \alpha \otimes \beta \leftrightarrow \gamma_{j_1,\dots,j_{p_1},m_1,\dots,m_{p_2}} = \alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}} \beta_{m_1,\dots,m_{p_2}}$
   $g \otimes f \leftrightarrow \theta = \beta \otimes \alpha \leftrightarrow \theta_{m_1,\dots,m_{p_2},j_1,\dots,j_{p_1}} = \beta_{m_1,\dots,m_{p_2}} \alpha_{j_1,\dots,j_{p_1}}$
   $\operatorname{alt} f \otimes g = \dfrac{1}{(p_1+p_2)!} \sum\limits_{\sigma} \sigma(\gamma)$
   $\operatorname{alt} g \otimes f = \dfrac{1}{(p_1+p_2)!} \sum\limits_{\tau} \tau(\theta)$
   //todo 13.04 13:12

2. $(f+g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$
   $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$

3. $(\lambda f) \wedge g = \lambda (f \wedge h) = f \wedge (\lambda g)$

4. $f \wedge \underbrace{\mathbb{0}}_{p_1\text{-форма}} = \mathbb{0} \wedge f = \underbrace{\mathbb{0}}_{(p_1+p_2)\text{-форма}}$

5. $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$
   Доказательство
   $f \wedge g = \dfrac{1}{p_1! p_2!} \sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g)$
   $(f \wedge g) \wedge h = \dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{(p_1+p_2)! p_1! p_2! p_3!} \operatorname{alt}(\sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h)$
   Рассмотрим $\operatorname{alt}(\sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f \otimes g) \otimes h) = \sum\limits_{\sigma \in S_{p_1+p_2}} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \operatorname{alt}(\underbrace{\sigma(f \otimes g) \otimes h}_{\tau(f \otimes g \otimes h)}) =$
   ...

Возьмем τ – перестановку такую, что первые p_1+p_2 индексов переставляются, а последние p_3 индекса не меняются
$(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}=(-1)^{\operatorname{inv}\tau}$
$\ldots=\sum\limits_{\sigma\in S_{p_1+p_2}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)=\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)\sum\limits_{\sigma\in S_{p_1+p_2}}1=$
$(p_1+p_2)!\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$
$(f\wedge g)\wedge h=\dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$
Аналогично $f\wedge(g\wedge h)=\dfrac{(p_1+p_2+p_3)!}{p_1!p_2!p_3!}\operatorname{alt}(f\otimes g\otimes h)$

Пусть $f^i\in V^*=\Lambda^1V^*$ – 1-форма, $j=1\ldots p$
$f^1\wedge\ldots\wedge f^p=\dfrac{p!}{1!\ldots1!}\operatorname{alt}(f^1\otimes\ldots\otimes f^p)\in\Lambda^pV^*$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=p!\operatorname{alt}(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})\in\Lambda^pV^*$
$\omega^i\wedge\omega^j=2\operatorname{alt}(\omega^i\otimes\omega^j)=\omega^i\otimes\omega^j-\omega^j\otimes\omega^i$
$\omega^i\wedge\omega^j=-\omega^j\wedge\omega^i$
$\omega^i\wedge\omega_i=0$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^m\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=-\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^m\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$
$\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^\kappa\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=0$
Теорема (о базисе пространства внешних форм)
$\{\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}:j_1<\ldots<j_p\}$ – базис пространства Λ^pV^*
Доказательство
$\forall f\in\Lambda^pV^*\Leftrightarrow\begin{cases}f\in T_{p,0}\\ \operatorname{alt}f=f\end{cases}$
$f=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p}$
$\operatorname{alt}f=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}\operatorname{alt}(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})$
$=\dfrac{\alpha_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}}{p!}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}\omega^{j_{\sigma_1}}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_{\sigma_p}}$
$=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$
$=\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\underbrace{(\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1}\ldots j_{\sigma_p}}(-1)^{\operatorname{inv}\sigma})}_{\beta_{j_1,\ldots,j_p}}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$ – порождающая
Существуют координаты p-формы f относительно базиса $\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$, $j_1<\ldots<j_p$
Проверим линейную независимость

$\mathbb{0} = \sum\limits_{j_1<\ldots<j_p} \beta_{j_1,\ldots,j_p} \quad \underbrace{\underbrace{\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}}_{p!\quad \mathrm{alt}(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})}}_{\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}\sigma(\omega^{j_1}\otimes\ldots\otimes\omega^{j_p})} = \sum\limits_{j_1<\ldots<j_p} \sigma_{\sigma\in S_p}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}\omega^{j_{\sigma_1}}\otimes$
$\ldots\otimes\omega^{j_{\sigma_p}}$
Т.к. базис $T_{(p,0)}$, $\forall\,\alpha_{j_1,\ldots,j_p}=0$
$\beta_{j_1,\ldots,j_p}=0$
Тогда линейно независимые
Следствие 1
$\dim\Lambda^pV^*=C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Следствие 2
$\forall\,f\in\Lambda^PV^*$
$f=\sum\limits_{j_1<\ldots<j_p}\beta_{j_1,\ldots,j_p}\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_p}$
$\beta_{j_1,\ldots,j_p}=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}=f(e_{j_1},\ldots,e_{j_p}), j_1<\ldots<j_p$
Доказательство
Из доказательства теоремы:
$\beta_{j_1,\ldots,j_p}=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_{j_{\sigma_1},\ldots,j_{\sigma_p}}(-1)^{\mathrm{inv}\,\sigma}=\alpha_{[j_1,\ldots,j_p]}, j_1<\ldots<j_p$
$f=\mathrm{alt}\,f\Rightarrow\alpha_{[j_1,\ldots,j_p]}=\alpha_{j_1,\ldots,j_p}$, т.к. $j_1<\ldots<j_p$
Теорема
$f^i\in\Lambda^1V^*, j=1\ldots p$ – 1-формы
$\forall\,\xi_1,\ldots,\xi_p\in V$
$(f^1\wedge\ldots\wedge f^p)(\xi_1,\ldots,\xi_p)=\begin{vmatrix}f^1(\xi_1)&\ldots&f^1(\xi_p)\\\vdots&\ddots&\vdots\\f^p(\xi_1)&\ldots&f^p(\xi_p)\end{vmatrix}$
$f^j\leftrightarrow a^j=\begin{pmatrix}a_1^j&\ldots&a_p^j\end{pmatrix}$ – координатные строки в V^* относительно ω^i
$\xi_i\leftrightarrow\begin{pmatrix}\xi_i^1\\\vdots\\\xi_i^n\end{pmatrix}$ – координаты в V относительно e_j
$f^j(\xi_i)=a_k^j\xi_i^k=a^j\xi_i$
$f^1\wedge\ldots\wedge f^p(\xi_1,\ldots,\xi_p)=\det(\begin{pmatrix}a^1\\\vdots\\a^p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1&\ldots&\xi_p\end{pmatrix})$
Замечание

Если $p = n$: $f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \det A \det \xi$

Доказательство

$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1, \ldots, \xi_p) = p! \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} \sigma(f^1 \otimes \ldots \otimes f^p)(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} f^{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes f^{\sigma_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^{\operatorname{inv} \sigma} f^{\sigma_1}(\xi_1) \ldots f^{\sigma_p}(\xi_p) = \det(f^i(\xi_j))$

Следствие 1

$$\forall\, \xi_1, \ldots, \xi_p \in V \;\; \omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_p}(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \ldots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \ldots \\ \xi_1^{j_p} & \ldots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

Следствие 2

$$f^1 \wedge \ldots \wedge f^p = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \ldots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \ldots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}}_{\beta_{j_1, \ldots, j_p} \text{ для } f^1 \wedge \ldots \wedge f^p} \omega^{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_p}$$

Доказательство

$\beta_{j_1 < \ldots < j_p} = \alpha_{j_1, \ldots, j_p} = (f^1 \wedge \ldots \wedge f^p)(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{vmatrix} f^1(e_{j_1}) & \ldots & f^1(e_{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(e_{j_1}) & \ldots & f^p(e_{j_p}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \ldots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \ldots & a_{j_p}^p \end{vmatrix}$, т.к. $a_j^i = f^i(e_j)$ по определению коэффициентов формы f

В частности, при $p = n$: $f^1 \wedge \ldots \wedge f^n = \det A \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$

Следствие 3

$$\det(\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_p \end{pmatrix}) = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \begin{vmatrix} a_{j_1}^1 & \ldots & a_{j_p}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_1}^p & \ldots & a_{j_p}^p \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1^{j_1} & \ldots & \xi_p^{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{j_p} & \ldots & \xi_p^{j_p} \end{vmatrix}$$

В частности, при $p = n$: $\det(A\xi) = \det A \det \xi$

Определение

Пусть $g \in T_{0,q}, \operatorname{alt} g = g$:

g называется *поливектор*(q-вектор)

Если $q \in T_{(0,1)}$ – g – 1-вектор

Линейное пространство q-векторов $\mathcal{V}^q V$

Аналог внешнего произведения: $g_1 \in \mathcal{V}^{q_1}V, g_2 \in \mathcal{V}^{q_2}V, g_1 \vee g_2 = \dfrac{(p_1+p_2)!}{p_1!p_2!}\operatorname{alt}(g_1 \otimes g_2)$ – по верхним индексам
$\{e_{i_1} \vee \ldots \vee e_{i_q}, i_1 < \ldots < i_q\}$ – базис $\mathcal{V}^q V$
Пусть $p = q$
$\forall f^1, \ldots, f^p \in V^*$
$V \cong V^{**}\ \forall \xi \in V\ \xi(f) = f(\xi)$
$\xi \in \mathcal{V}^1 V$

$$\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_p(f^1, \ldots, f^p) = \begin{vmatrix} \xi_1(f^1) & \ldots & \xi_p(f^1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1(f^p) & \ldots & \xi_p(f^p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f^1(\xi_1) & \ldots & f^1(\xi_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^p(\xi_1) & \ldots & f^p(\xi_p) \end{vmatrix} = f^1 \wedge \ldots \wedge f^p(\xi_1, \ldots, \xi_p)$$

3.7 Евклидовы и унитарные пространства

3.7.1 Скалярное и псевдоскалярное произведение. Евклидово и унитарное пространство. Норма в евклидовом и унитарном пространстве

Определение
Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$ (вещественное линейное пространство)
$(\cdot, \cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если
$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$ – симметричность
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Следствие
Линейность по второму аргументу
$(V, (\cdot, \cdot))$ – вещественное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением – Евклидово пространство
Определение
Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{C}$

$(\cdot,\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ называется псевдоскалярным произведением, если
$\forall\, x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ – аддитивность по первому аргументу
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ – однородность по 1 аргументу
4. $(x, x) = \overline{(x, x)} \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$
   $(x, x) \geq 0$, причем $= 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{0}$

Следствие
$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ – аддитивность по второму аргументу
$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y)$
Вместе: полуторолинейность
$(\mathbb{C}, (\cdot,\cdot))$ – унитарное пространство (псевдоевклидово)
Замечание
Иногда будем называть псевдоскалярное пространство скалярным (читай контекст)
Примеры

1. $V_3, (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi$
2. $\mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R}$
   $(x, y) := \sum x_i y_i$
3. $\mathbb{C}^n, x \in \mathbb{C}^n, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}$
   $(x, y) = \sum x_i \overline{y_i}$

Определение
Норма $\|\cdot\| : V \to K, V$ – V – линейное пространство над полем K

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \mathbb{0}$ – невырожденность
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ – однородность

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Определение
$(V, (\cdot,\cdot))$ – евклидово/унитарное пространство
$\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ – евклидова норма
Докажем аксиомы

1. Очевидно

2. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{(\lambda\overline{\lambda})(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\|x\|$

3. **К.Б.Ш.**
   $|(x,x)| \le \|x\|\|y\|$, причем $|(x,x)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимых
   Доказательство
   $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
   $0 \le (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x,x) + \alpha\overline{\beta}(x,y) + \overline{\alpha}\beta(y,x) + \beta\overline{\beta}(y,y) = \dots$
   Пусть $\alpha := (y,y) \in \mathbb{R}$
   $\beta := -(x,y) \in \mathbb{C}$
   $\dots = \alpha(\|x\|^2\|x\|^2 - \underbrace{\overline{(x,y)}(x,y)}_{|(x,y)|^2} - (x,y)(y,x) + |(x,y)|^2) = \alpha(\|x\|^2\|y\|^2 -$
   $(x,y)^2) \ge 0$
   $\alpha \ge 0$
   Отсюда $\|x\|\|y\| \ge (x,y)$
   Если $x = 0$ или $y = 0$, то неравенство 0
   Если $x, y \ne 0, |(x,y)| = \|x\|\|y\|$
   $\alpha, \beta \ne 0$ Тогда $0 \le (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha(\underbrace{\|y\|^2\|x\|^2 - |(x,y)|^2}_{0}) = 0$
   Тогда $\exists\, \alpha, \beta \ne 0 : \|\alpha x + \beta y\| = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = \mathbb{0} \Leftrightarrow x, y$ линейно зависимые
   Пусть $\exists\, \alpha, \beta \ne 0 : \alpha x + \beta y = \mathbb{0}$
   $$\begin{cases} \underbrace{\alpha(x,x)}_{\ne 0} + \beta(y,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\|x\|^2 = -\beta(y,x) \\ \alpha(x,y) + \underbrace{\beta(y,y)}_{\ne 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\|y\|^2 = -\alpha(x,y) \end{cases}$$
   Тогда $\alpha\beta\|x\|^2\|y\|^2 = \alpha\beta(y,x)(x,y) = |(x,y)|^2$
   Доказательство выполнения аксиомы
   $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 +$

$\|y\|^2 + 2\underbrace{\Re((x,y))}_{\le|(x,y)|} \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| =$

$(\|x\| + \|y\|)^2$

$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Определение

$\forall\, x, y \in (V, (\cdot,\cdot))$

$\|x\|$ – длина вектора

$\cos\angle(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ – косинус угла между векторами

$|\cos\angle(x,y)| \le 1$ – по КБШ

3.7.2 Процесс ортогональный Грама-Шмидта. О.Н.Б. (ортонормированный базис). Ортогональное дополнение

Определение

$(V, (\cdot,\cdot))$ – евклидово/унитарное

$\forall\, x, y \in V$ называются ортогональными, если $(x,y) = 0$

$\mathbb{0}$ ортогонален всем векторам

Определение

Система векторов $v_1, \ldots, v_m$ называется ортогональной, если вектора попарно ортогональны

Система векторов называется ортонормированными, если вектора попарно ортогональны и нормированы($\|v_i\| = 1$)

Утверждение

Ненулевые $v_1, \ldots, v_m$ ортогональны $\Rightarrow$ $v_1, \ldots, v_m$ система линейно независимая

Доказательство

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = \mathbb{0}$

$v_j(\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_j v_k = \mathbb{0}$

$\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k v_j v_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \underbrace{v_j v_k}_{\mathbb{0}\text{ при } k\neq j} = \alpha_j \underbrace{(v_j, v_j)}_{\neq 0}$

Тогда $\forall\, i\ \alpha_i = 0$

Отсюда вектора линейно независимые

Теорема (процесс ортогонализации Грама-Шмидта)
Любую систему векторов $a_1, \dots, a_m$ можно заменить на систему ортогональных векторов $b_1, \dots, b_k$ таким образом, что $\text{span}(a_1, \dots, a_m) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$, причем $k \le m$, $k = m \Leftrightarrow$ система линейно независимая
Доказательство

1. Пусть $a_1, \dots, a_m$ линейно независимые Построим b индукционно:

   (a) Возьмем a_1, a_2
   $b_1 := a_1$
   $b_2 := a_2 - c_1 a_1$
   $c_1 : (b_2, b_1) = 0 \Leftrightarrow 0 = (a_2, b_1) - c_1(a_1, a_1) \Leftrightarrow c_1 = \dfrac{(a_2, b_1)}{(a_1, a_1)}$
   $\text{span}(a_1, a_2) = \text{span}(b_1, b_2)$, т.к. b_2 линейно независим с a_1, a_2

   (b) $a_1, \dots, a_k \to b_1, \dots, b_k$ – ортогональные
   $\underbrace{\text{span}(a_1, \dots, a_k)}_{\text{линейно независимый}} = \underbrace{\text{span}(b_1, \dots, b_k)}_{\text{попарно орт.}} \Rightarrow$ линейно независимые

   (c) Покажем для $k + 1$
   $b_{k+1} = a_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i b_i$
   c_i такой, чтобы $\forall\, i = 1 \dots k$ $(b_{k+1}, b_i) = 0$ $c_i := \dfrac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)}$
   $b_{k+1} \in \text{span}(a_1, \dots, a_{k+1})$
   $b_{k+1} \perp b_j, j = 1 \dots k$
   $\text{span}(a_1, \dots, a_k) = \text{span}(b_1, \dots, b_k)$
   b_{k+1} линейно независимый с $(a_1, \dots, a_k)$
   $\text{span}(a_1, \dots, a_{k+1}) = \text{span}(b_1, \dots, b_{k+1})$

2. Если $a_1, \dots, a_m$ линейно зависимые, предварительно выполним прополку a
   Если без прополки, то некоторые b_i будут $\mathbb{0}$

Следствие 1
В $(V, (\cdot, \cdot))$ всегда существует о.н.б.
Доказательство
Применим Грама-Шмидта и нормируем
Следствие 2

В $(V, (\cdot,\cdot))$ любую ортогональную систему можно дополнить до ортонормированного базиса

Определение

$L \subset V$ – линейное подпространство

$L^\perp = \{y \in V : (x,y) = 0 \forall\, x \in L\}$ – ортогональное дополнение

Свойства

1. $L^\perp$ – линейное подпространство
   Доказательство
   $\forall\, y_1, y_2 \in L^\perp, \lambda \in K, x \in L$ $(x, \lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}\underbrace{(x,y_1)}_{0} + \underbrace{(x,y_2)}_{0}$ Отсюда
   $\lambda y_1 + y_2 \in L^\perp$ – линейное подпространство

2. $V = L \oplus L^\perp$
   Доказательство
   Докажем, что $L, L^\perp$ – дизъюнктные
   $y \in L \cap L^\perp \Rightarrow (y,y) = 0 \Leftrightarrow y = \mathbb{0}$ – дизъюнктные
   Пусть $L = \mathrm{span}(a_1, \ldots, a_k)$
   Дополним $a_1, \ldots, a_k$ векторами $a_{k+1}, \ldots, a_n$ до базиса V
   Тогда $V = L \oplus \mathrm{span}(a_{k+1}, \ldots, a_n)$
   $\forall\, a_{k+j}$ $(a_i, a_{k+j}) = 0$
   Тогда $(a_i, \sum\limits_{j=1}^{n-k} \alpha_j a_{k+j}) = 0$
   Тогда $(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i a_i, \sum\limits_{j=1}^{n-k} a_{k+j}) = 0$
   Отсюда $\mathrm{span}(a_{k+1}, \ldots, a_n) \subset L^\perp$
   $V = L \oplus \mathrm{span}(a_{k+1}, \ldots, a_n), L, L^\perp$ – дизъюнктные
   Тогда $L^\perp = \mathrm{span}(a_{k+1}, \ldots, a_n)$
   Тогда $V = L \oplus L^\perp$

3. $(L^\perp)^\perp = L$
   Доказательство
   $L \oplus L^\perp = V = L \perp \oplus (L^\perp)^\perp$
   $\forall\, x \in L, y \in L^\perp (x,y) = 0 \Rightarrow x \in (L^\perp)^\perp \Rightarrow L \subset (L^\perp)^\perp$
   Тогда $L = L^\perp$

4. $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$
   $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$

Доказательство
Докажем 1
Пусть $y \in (L_1 + L_2)^\perp$
Тогда $\forall \underbrace{x_1}_{\in L_1} + \underbrace{x_2}_{\in L_2} \in L_1 + L_2$ $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) = 0$

(a) $x_2 = 0$
$\forall x_1 \in L_1$ $(x_1, y) = 0 \Rightarrow y \in L^\perp$
$(x_2, y) = 0$
Тогда $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$
Отсюда $(L_1 + L_2)^\perp \subset L_1^\perp \cap L_2^\perp$ Обратно: $y \in L_1^\perp \cap L_2^\perp$
$\forall x_1$ $(x_1, y) = 0$
$\forall x_2$ $(x_2, y) = 0$
Отсюда $(x_1 + x_2, y) = 0 \Rightarrow y \in (L_1 + L_2)^\perp$
$L_1^\perp \cap L_2^\perp \subset (L_1 + L_2)^\perp$

(b) Из предыдущего пункта
$(L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp = (L_1^\perp)^\perp \cap (L_2^\perp)^\perp = L_1 \cap L_2$
$L_1^\perp + L_2^\perp = ((L_1^\perp + L_2^\perp)^\perp)^\perp = (L_1 \cap L_2)^\perp$

5. $\mathbb{0}^\perp = V, V^\perp = \mathbb{0}$

3.8 Матрица Грама и ее своства. Ортогональные и унитарные матрицы

$(V, (\cdot, \cdot))$
$e_1, \ldots, e_n$ – базис
$\forall x, y \in V$ $x \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$y \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
$(x, y) = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum\limits_{i} \sum j x_i \overline{y_j} (e_i, e_j)$
Пусть $g_{ij} = (e_i, e_j)$
$\Gamma = (g_{ij})$ – матрица Грама базиса $e_1, \ldots, e_n$

$(x, y) = x^{\perp}\Gamma\overline{y}$ – координатная форма записи скалярного произведения
В частности, если e – о.н.б., то $g_{ij} = \sigma_{ij}$
$\Gamma = E$
$(x, y) = x^{\perp}\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$
$(x, x) = x^{\perp}\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2$

Замечание

Если V евклидово пространство, то, очевидно, все комплексные сопряжения можно убрать

Определение

$A_{n\times n}$
A^* называется сопряженной к A, если $A^* = \overline{A^T}$
$*$ – операция сопряжения
$(A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda}B^*$

Определение

Матрица $A_{n\times n}$ – самосопряженная, если $A^* = A$
Если $a_{ij} \in \mathbb{R}$, то самосопряженная = симметричная
Если $a_{ij} \in \mathbb{C}$, то самосопряженная = эрмитова
Очевидно, что $\Gamma^* = \Gamma$, т.е. самосопряженная

Определение

$a_1, \dots, a_k \in V$
$G(a_1, \dots, a_k) = ((a_i, a_j))_{k\times k}$ – матрица Грама для системы векторов
$\Gamma = G(e_1, \dots, e_n)$
$G = G^*$

Теорема об определителе матрица Грама

$g(a_1, \dots, a_k) := \det G(a_1, \dots, a_k)$
Применим к векторам алгоритм Грама-Шмидта
$a_1, \dots, a_k \rightsquigarrow b_1, \dots, b_k$
Тогда $g(a_1, \dots, a_k) = \prod\limits_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$

Доказательство

$g(a_1, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$ Заменим в матрица все a_1 на b_1

2 строка -= 1 строка $\cdot c_1$

Тогда $\forall\, j = 2 \ldots k \quad \begin{matrix} (a_2, a_j) - c_1(b_1, a_j) = (a_2 - c_1 b_1, a_j) = (b_2, a_j) \\ (a_2, b_1) - c_1(b_1, b_1) = (b_2, b_1) = 0 \end{matrix}$

2 столбец -= 1 столбец $\cdot c_1$

$\forall\, j = 3 \ldots k \quad \begin{matrix} (a_j, a_2) - c_1(a_j b_1) = (a_j, a_2 - c_1 b_1) = (a_j, b_2) \\ (b_1, a_2) - c_1(b_1, a_1) = (b_1, b_2) = 0 \end{matrix}$

Тогда после этих двух шагов в матрице не осталось a_2

Применим аналогичные действия, зная, что $b_i = a_i - c_1 b_1 - \ldots - c_{i-1} b_{i-1}$

Таким образом мы получим матрицу, где вместо a_i будут b_i

По построению определитель не поменялся

Тогда $g(a_1, \ldots, a_k) = g(b_1, \ldots, b_k) = \det \operatorname{diag}(\|b_1\|^2, \ldots, \|b_k\|^2) = \prod\limits_{i=1}^{k} \|b_i\|^2$

Следствие 1

$a_1, \ldots, a_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(a_1, \ldots, a_k) > 0$

Доказательство

Если $a_1, \ldots, a_k$ линейно независиимые $\underset{\text{г.ш.}}{\leftrightarrow}$ $b_1, \ldots, b_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow \|b_i\|^2 > 0$

Следствие 2

$a_1, \ldots, a_{k-1}$ – линейно независимые

$\|b_k\|^2 = \dfrac{g(a_1, \ldots, a_k)}{g(a_1, \ldots, a_{k-1})}$

Свойства матрицы Грама

$\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n), e$ – базис

$1 + 2$ – положительно определенная матрица ($\Gamma > 0$)

1. $\Gamma = \Gamma^*$
2. $\forall\, x \neq \mathbb{0}\ x^T \Gamma \overline{x} > 0$
3. $\forall\, \delta k = g(e_1, \ldots, e_k)\ \delta k > 0$
   δk – угловой минор
   В частности, при $k = n \delta k = g > 0$, т.е. Γ невырожденная
   Доказательство
   $e_1, \ldots, e_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(e_1, \ldots, e_k) > 0$
4. $e_1, \ldots, e_n; e'_1, \ldots, e'_n$ – базисы V
   $T = T_{e \to e'}$

$\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n)$
$\Gamma' = G(e'_1, \ldots, e'_n)$
Тогда $\Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$
Доказательство
$(x, y) = x'^T \Gamma' \overline{y}' = x^T \Gamma \overline{y}$
$\Gamma' = (g'_{ij})$
$g'_{ij} = (e'_1, \ldots, e'_j) = T_i^T \Gamma \overline{T_j} \Leftrightarrow \Gamma' = T^T \Gamma \overline{T}$

В частности, если e, e' – о.н.б. V
$\Gamma' = E = \Gamma$
$T^T \overline{T} = E \Leftrightarrow \overline{T^T} T = E \Leftrightarrow T^* T = E \Leftrightarrow T^{-1} = T^*$
Определение
Невырожденная матрица Q вещественная/комплексная называется ортогональной/унитарной, если $Q^* = Q^{-1}$
Свойства унитарной/ортогональной матрицы

1. Q – унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow$ строки(столбцы) попарно ортогональны в стандартном скалярном произведении пространств $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$
   Доказательство
   Q унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow Q^* Q = Q Q^* = E$
   Пусть $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_n \end{pmatrix}$
   $$Q^* Q = \overline{Q^T} Q = \begin{pmatrix} \overline{Q_1^T} \\ \vdots \\ \overline{Q_n^T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_n \end{pmatrix} = ((Q_i, Q_j)) = E$$

2. Q унитарна/ортогональна $\Leftrightarrow Q^{-1}$ унитарна ортогональна
   $\overline{A} \cdot (\overline{A})^{-1} \overline{A A^{-1}} = \overline{E} = E$ $(Q^{-1})^* = \overline{(Q^{-1})^T} = (\overline{Q^T})^{-1} = (Q^*)^{-1} = Q$
   Тогда $Q = (Q^{-1})^{-1} = Q^{-1*}$

3. Q унитарна/ортогональна $\Rightarrow |\det Q| = 1$
   В частности, если Q ортогональная, то $\det Q = \pm 1$
   Доказательство
   $Q^* Q = E$
   $\det Q^* \det Q = 1$
   $\det Q^* = \det(\overline{Q^*}) = \overline{\det Q}$
   $\det Q \overline{(} \det Q) = |\det Q|^2 = 1$

4. Q, R унитарная/ортогональная $\Rightarrow QR$ унитарная/ортогональная
   Доказательство
   $(QR)^* = \overline{(QR)^T} = \overline{R^T Q^T} = \overline{R^T} \overline{Q^T} = R^* Q^* = R^{-1} Q^{-1} = (QR)^{-1}$

5. e, e' – о.н.б.$V, T = T_{e \to e'}$
   Тогда T унитарна/ортогональна (см. свойство матрицы Г)

3.9 Теорема Пифагора. Задача о наилучшем приближении и перпендикуляре. Расстояние от точки до линейного подпространства и многообразия. Объем k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве

Теорема Пифагора
$\forall\, y, z \in V : (y, z) = 0$
$\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$
Доказательство
$\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \underbrace{(z, y)}_{0} + \underbrace{(y, z)}_{0} + \|z$

2

Следствие
$x_1, \ldots, x_k$ попарно ортогональны
$\|x_1 + \ldots + x^k\|^2 = \sum\limits_i \|x_i\|^2$

Пусть $L \subset V$ – линейное подпространство
$V = L \oplus L^{\perp}$
$\forall\, x \in V\ \exists\,!x = y + z, y \in L, z \in L^{\perp}$
$(y, z) = 0$
y – ортогональная проекция x на L
z – ортогональной составляющей x относительно L или перпендикуляром, опущенном из x на линейное подпространство L
Теорема о наилучшем приближении
$L \subset V$ – линейное подпространство
$\forall\, x \in V\ \exists\,!y \in L, z \in L^{\perp} : x = y + z$
$\forall\, l \neq y \in L \|x - y\| \leq \|x - l\|$
Т.е. y является наилучшим приближением к x из элементов простран-

ства L
(Любая наклонная длиннее перпендикуляра)
Доказательство
$\forall\, l \neq y \in L$
$\|x - l\|^2 = \|y + z - l\|^2 = \|y - l\|^2 + \|z\| > \|z\|^2 = \|x - y\|^2$

Как найти перпендикуляр?
$L = \text{span}(a_1, \ldots, a_k), a$ – базис
$x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$
Пусть $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i a_i$
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i a_i + z$
$(x, a_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j) + \underbrace{(z, a_j)}_{0}$
$(x, a_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i (a_i, a_j)$
$G^T(a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$ – СЛНУ относительно c_i
$a_1, \ldots, a_k$ – линейно независимые $\Leftrightarrow g(a_1, \ldots, a_k) > 0 \Leftrightarrow G(a_1, \ldots, a_k)$ – невырожденная $\Leftrightarrow \exists!$ решение $\Rightarrow y = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i a_i$ – определен однозначно
Определение
$\text{dist}(x, L) = \min\limits_{l \in L} \|x - l\| = \|x - y\| = \|z\|$
Теорема о расстоянии до линейного подпространства
$L = \text{span}(a_1, \ldots, a_k), a$ – базис
$\text{dist}^2(x, L) = \dfrac{g(a_1, \ldots, a_k, x)}{g(a_1, \ldots, a_k)}$
Доказательство
$\text{dist}^2(x, L) = \|z\|^2$
$a_1, \ldots, a_k \rightsquigarrow b_1, \ldots, b_k$
$\text{span}(a_1, \ldots, a_k) = \text{span}(b_1, \ldots, b_k)$

$$z = x - \underbrace{\sum_{i=1}^{k} c_i a_i}_{z} = x - \sum_i \widetilde{c}_i b_i$$

$(z, y) = 0$

$a_1, \dots, a_k, x = b_1, \dots, b_k, z =: b_{k+1}$

$\|b_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 = \dfrac{g(a_1, \dots, a_k, x)}{g(a_1, \dots, a_k)}$

Определение

$P = x_0 + L$ – линейное многообразие

$$\operatorname{dist}(x, P) = \min_{u \in P} \|x - u\| \underbrace{=}_{u = x_0 + l, l \in L} \min_{l \in L} \|x - x_0 - l\| = \operatorname{dist}(x - x_0, L)$$

Пусть $P_1, P_2 : P_i = x_i + L_i, L_i \subset V, x_i \in V$

$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) = \min_{u_1 \in P_1, u_2 \in P_2} \|u_1 - u_2\| = \min_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|x_1 - x_2 - (l_1 + l_2)\| = \operatorname{dist}(x_1 - x_2, L_1 + L_2) = \frac{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2)}}{\sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}} = \frac{V(\Pi(a_1, \dots, a_k, x_1 - x_2))}{V(\Pi(a_1, \dots, a_k))}$$

Определение

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово

$a_1, \dots, a_k$ – линейно независимые

$\Pi(a_1, \dots, a_k) = \{x \in V | x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \_i \in [0, 1]\}$ – k-мерный параллелепипед

(считаем, что все $a_1, \dots, a_k$ приложены к какой-то одной точке, к $\mathbb{0}$, натянутой на векторы $a_1, \dots, a_k$)

Определение

$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{g(a_1, \dots, a_k)}$ – объем k-мерного параллелепипеда

$V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = V(\Pi(a_1, \dots, a_{k-1}))\|h\|$

$\|h\| = \dfrac{g(a_1, \dots, a_k)}{g(a_1, \dots, a_{k-1})}$

$h \perp \operatorname{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$ из алгоритма Г.Ш.

h – перпендикуляр, опущенный из a_k на подпространство $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_{k-1})$

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – о.н.б V

$\Pi(a_1, \dots, a_k)$ – параллелепипед

$$a_j \underset{e}{\leftrightarrow} A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_k \end{pmatrix}$ $V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)}$
$(a_i, a_j) = A_i^T A_j$
Тогда $G = A^T A$
Отсюда $V(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{\det G(a_1, \dots, a_k)} = \sqrt{\det \underbrace{A^T}_{k\times n} \underbrace{A}_{n\times k}}$
В частности, если $k = n$, то $V(\Pi(a_1, \dots, a_n)) = |\det A|$
Также можно задать ориентацию базиса: если определитель матрицы перехода из одного базиса в другой > 0, то базисы в одной ориентации. Иначе в разных
Тогда $\det A = +V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$, если $a_1, \dots, a_n$ и базис в одной ориентации
Иначе $\det A = -V(\Pi(a_1, \dots, a_n))$

Пусть $\mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$ – невырожденный(изоморфизм)
$x \in \Pi(a_1, \dots, a_k) \leftrightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, \alpha_i \in [0, 1]$
$\mathcal{B}x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{B} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i \in \Pi(b_1, \dots, b_k)$
$\mathcal{B}(\Pi(a_1, \dots, a_k)) = \Pi(b_1 := \mathcal{B}a_1, \dots, b_k := \mathcal{B}a_k)$
$V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = \sqrt{g(b_1, \dots, b_k)} = \sqrt{\det(BA)^T(BA)} = \sqrt{\det A^T B^T BA}$
Если $k = n$, то $V(\Pi(b_1, \dots, b_k)) = |\det A||\det B| = V(\Pi(a_1, \dots, a_k))|\det B|$

3.10 Коэффициенты Фурье. Тождество Парсеваля. Неравенство Бесселя. Ортогональные проекторы. Полиномы Лежандра

$(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово пространство
$e_1, \dots, e_n$ – ортогональный базис
$\forall\, x \in V\;\; x = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_i e_i$
$\forall\, x \in V\;\; (x, e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_i (e_i, e_j) = \chi_j (e_j, e_i) = \chi_j \|e_j\|^2$
$\chi_j = \dfrac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициент Фурье элемента относительно ортогонального базиса

$L_i = \operatorname{span}(e_i), i = 1 \dots n$

$V = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_i$

$\forall\, x \in V\ \exists!(x_i) : x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, x_i$ – ортогональная проекция x на e_i

$x = \chi_i e_i$

Тогда по т. Пифагора $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_i|^2 \|e_i\|^2$ – тождество Парсеваля

Неравенство Бесселя: $\forall\, k = 1 \dots n\ \sum\limits_{i=1}^{k} |\chi_i| \|e_i\|^2 \leq \|x\|^2$ – квадрат длины вектора не меньше суммы квадратов длин его проекций

В частности, если e – ортонормированный базис

$\chi_j = (x, e_j)$ – проекция x на вектор e_j

$x = \sum\limits_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$

$x_j = \chi_j e_j$ – проекция x на вектор e_j

$\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\chi_i|^2$

$\|x\|^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{k} |\chi_i|^2$

$\rho_i : V \to V$ – проектор

$\forall\, x \in V\ \rho x := x_i$

$\exists!(x_i) : x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{x_i}_{\in L_i}$

ρ_i – оператор ортогонального проектирования

$V = \oplus_{i=1}^{k} L_i, L_i \subset V$ – попарно ортогональные линейные подпространства

$V = \operatorname{span}(e_1, \dots, e_n)$ – о.н.б.

$\forall\, x \in V \rho_i x = \sum\limits_{e_j \in L_j} (x_i, e_j) e_j$

Примеры ортогональных систем

1. Рассмотрим множество полиномов степени не более n

   $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t) q(t) \,\mathrm{d}\, t$

Рассмотрим многочлены $1, t, t^2, t^3, \dots, t^n$
Найдем ортогональный базис
$$\underbrace{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t, \dots}_{\text{полиномы Лежандра}}$$
$l_k = \lambda_k((t^2-1)^k)^{(k)}, \deg l_k = k$ – общая формула полиномов Лежандра
Покажем, что $q_k(t) := ((t^2-1)^k)^{(k)}$ ортогональны $1, \dots, t^{k-1}$
$$(q_k, t^m) = \int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^{(k)} t^m \,\mathrm{d}\, t = \int_{-1}^{1} t^m \,\mathrm{d}((t^2-1)^k)^{(k-1)} =$$
$$= \underbrace{t^m \underbrace{((t^2-1)^k)^{(k-1)}}_{\pm 1 \text{ – корни}}\Bigg|_{-1}^{1}}_{0} - m\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^{(k-1)} t^{m-1} = \dots$$
$$= (-1)m! \underbrace{\int_{-1}^{1} ((t^2-1)^k)^(k-m) \,\mathrm{d}\, t}_{((t^2-1)^k)^{k-m-1}\Big|_{-1}^{1}}$$
$q_k \perp \operatorname{span}(1, \dots, t^{k-1}) \Rightarrow q_k \perp \operatorname{span}(l_1, \dots, l_{k-1}) \Rightarrow l_k \perp \operatorname{span}(l_1, \dots, l_{k-1})$
$(uv)^{(k)} = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m u^{(m)} v^{(k-m)}$ – формула Лейбница
$q_k(1) = ((t^2-1)^k)^{(k)}\Big|_{t=1} = ((t-1)^k(t+1)^k)^{(k)}\Big|_{t=1} = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m((t-1)^k)^{(m)}((t+1)^k)^{(k-m)}\Big|_{t=1} = C_k^k \underbrace{((t-1)^k)^{(k)}}_{k!} \underbrace{((t+1)^k)^{(0)}}_{2^k}\Big|_{t=1} = k!2^k = (2k)!!$
$l_k = \dfrac{((t^2-1)^k)^{(k)}}{k!2^k}, l_k(1) = 1$ – формула многочлена Лежандра в форме Родрига
$$B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} \,\mathrm{d}\, t$$
$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\|l_k\|^2 = \frac{1}{(2^k k!)^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(2^k k!)^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}((t^2-1)^k)^{(k)}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(2^k k!)^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k)}\,\mathrm{d}((t^2-1)^k)^{(k-1)} = -\frac{1}{((2k)!!)^2}\int_{-1}^{1}((t^2-1)^k)^{(k-1)}((t^2-1)^k)^{(k+1)} = \ldots = \frac{(-1)^k}{((2k)!!)^2}\int_{-1}^{1}(t^2-1)^k\underbrace{((t^2-1)^k)^{(2k)}}_{(2k)!}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$\frac{(-1)^k(-1)^k(2k)!}{((2k)!!)^2}2\int_0^1\frac{t(1-t^2)^k}{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2}\underbrace{\int_0^1(1-t)^k t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,t}_{B(k+1,\frac{1}{2})} = \frac{(2k)!}{((2k)!!)^2}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\underbrace{\Gamma(k+1+\frac{1}{2})}_{(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})+\ldots+\frac{1}{2}\Gamma(}}$$

$$\frac{(2k)!k!2^{k+1}}{((2k)!!)^2(2k+1)!!} = \frac{2(2k)!(2k)!!}{(2k+1)!(2k)!!} = \frac{2}{2k+1}$$

2. $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$
   $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t$
   $f \in L^1(-\pi,\pi) \vee f \in L^2(-\pi,\pi)$

   (a) вещественная ортогональная тригонометрическая система
   $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots$ – бесконечномерная ортогональная система
   Несложно проверить, что $(\sin kt, \cos mt) = (\sin kt, \sin mt) = (\cos kt, \cos mt) = 0, k \neq m$
   $\|\cos kt\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kt\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kt}{2}\,\mathrm{d}\,t = \pi, k \neq 0$
   $\|1\|^2 = 2\pi$
   $\|\sin kt\|^2 = \pi$
   Пусть $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_n e_n$ – ряд Фурье
   $c_j = \frac{(f, e_j)}{\|e_j\|^2}$ – коэффициенты Фурье
   Тогда $a_k := \frac{(f, \cos kt)}{\|\cos kt\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt = \mathrm{d}\,t$
   $b_k := \frac{(f, \sin kt)}{\|\sin kt\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}\,t$
   Теперь забьем на сходимость и сопоставим f с последователь-

ностью коэффициентов

$f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$ – ряд Фурье по классической тригонометрической системе

(b) комплексная ортогональная тригонометрическая система

$c_k = \widehat{f(k)} = \dfrac{1}{\|e^{ikt}\|^2} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-itk} \,\mathrm{d}\, t$

$\|e^{ikb}\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ikt} \,\mathrm{d}\, t = 2\pi$

$f \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ – комплексный ряд Фурье

(c) $L^2([-1,1], \dfrac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}})$

$(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\frac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}}$

$T_n(t) = \cos(n - \arccos t)$ – полиномы Чебышева

$\deg T_n = n$

3.11 Изометрия евклидоваых/унитарных пространств. Теорема Рисса. Естественный изоморфизм евклидова пространства своему сопряженному

$(V, (\cdot,\cdot)_V), (V', (\cdot,\cdot)_{V'})$

Определение

V, V' изометричны, если V, V' изоморфны и сохраняется скалярное произведение

$x, y \in V \leftrightarrow x', y' \in V' \Rightarrow (x,y)_V = (x',y')_{V'}$

Отсюда $\|x-y\|_V = \sqrt{(x,y)_V^2} = \sqrt{(x',y')_{V'}^2} = \|x'-y'\|_{V'}$ – расстояния сохраняются

Теорема

Любые два конечномерных линейных пространства одной размерности изометричны

Доказательство

Пространства изоморфны

Пусть e – о.н.б. V

e' – о.н.б. V'

Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e'_i = x'$

$\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n) = E = G(e'_1, \ldots, e'_n) = \Gamma'$

$(x, y)_v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x', y')_{V'}$

Зафиксируем $y \in V$

$\forall\, x \in V\ (x, y) =: f(x) \in V^*$

$(\cdot, y) : V \to V^*$

Теорема Рисса

$\forall\, f \in V^* \exists\, ! y \in V : f(x) = (x, y) \forall\, x \in V$

Т.е. $V \leftrightarrow V^*$ – взаимооднозначное сопоставление

Доказательство

Докажем единственность

Пусть $y_1, y_2 \in V : f(x) = (x, y_1) = (x, y_2) \forall\, x \in V$

Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0$

Пусть $x = y_1 - y_2$

Тогда $\|y_1 - y_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$

Докажем существование

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. в V

$\forall\, x \in V\ x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\forall\, f \in V^*\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

Пусть $y_i = \overline{f(e_i)}$

$y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$

$f(x) = (x, y)$

Т.о. мы сопоставили f и y

Если V – евклидово (вещественное), то $V \overset{P}{\cong} V^*$ (изоморфизм)

Замечание

$e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. V

$\forall\, x \in V\ \omega^i(x) = \chi^i = (x, e_i)$

$x = \chi^i e_i$

Тогда $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e_i$

3.12 Тензоры в евклидовом пространстве. Метрические тензоры. Взаимные базисы. Операции опускания и поднимания индексов. Евклидовы тензоры

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово
$e_1, \ldots, e_n$ – базис V
$\Gamma = G(e_1, \ldots, e_n) = (g_{ij})$
$g_{ij} = (e_i, e_j)$
Γ – тензор $\in T_{(2,0)}$ – 2 раза ковариантный метрический тензор
Покажем, что Γ – тензор
$T = T_{e \to e'}$
$\Gamma' = T^T \Gamma T$
$g'_{ij} = t_i^k g_{km} t_j^m = g_{km} t_i^k t_j^m$ – действительно тензор
$\Gamma^{-1} = (g^{ij}) \in T_{(0,2)}$ – 2 раза контрвариантный метрический тензор
$\Gamma^{-1}\Gamma = E$
$(\Gamma^{-1})' = (\Gamma')^{-1} = (T^T \Gamma T)^{-1} = (T^T)^{-1} \Gamma^{-1} T^{-1} = S^T \Gamma^{-1} S$
$g'^{ij} = s_k^i g^{km} s_m^j = g^{km} s_k^i s_m^j$
Свойства

1. $\Gamma = \Gamma^T$
   $\Gamma^{-1} = (\Gamma^{-1})^T$
   $g^{ij} = g^{ji}, g_{ij} = g_{ji}$
2. $\Gamma\Gamma^{-1} = E = \Gamma^{-1}\Gamma \Rightarrow g^{ik} g_{kj} = g^{ki} g_{kj} = g^{ki} g_{jk} = g^{ik} g_{jk} = \sigma_i^j$
3. $\forall\, x, y \in V \ (x, y) = g_{ij} x^i y^j, (x \neq 0 \Rightarrow (x, x) > 0) \Rightarrow (x \neq 0 \Rightarrow g_{ij} x^i x^j > 0)$

Определение
Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис V
$e^1, \ldots, e^n$ – базис V
e_i, e^i – взаимные базисы, если $(e_i, e^j) = \sigma_i^j$
Теорема
$\forall\, e_1, \ldots, e_n$ – базис $V \exists\, !e^1, \ldots, e^n$ – взаимный базис
Доказательство
Пусть $e^1, \ldots, e^n$ – базис V
$T_{e_i \to e^i} = (x^{km})_{n \times n}$
$\begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} T_{e_i \to e^i}$

$(e_i, e^j) = (e_i, x^{kj} e_k) = x^{kj} \underbrace{(e_i, e^k)}_{g_{ik}} = \sigma_i^j$

$g_{ik} x^{kj} = \sigma_i^j \Leftrightarrow \Gamma T_{e_i \to e^i} = E$

$T_{e_i \to e^i} = \Gamma^{-1}$

$e^1, \ldots, e^n$ – взаимооднозначное с $e_1, \ldots, e_n$

Следствие 1

1. e_i, e^i – взаимные базисы
   $\begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \leftrightarrow e^j = g^{kj} e_k = g^{jk} e_k$
   $\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & \ldots & e^n \end{pmatrix} \Gamma \leftrightarrow e_j = g_{kj} e^k = g_{jk} e^k$

2. $\Gamma^{-1} = G(e^1, \ldots, e^n)$
   Доказательство
   $(e^i, e^j) = (e^i, g^{jk} e_k) = g^{jk} (e^i, e_k) = g^{jk} \sigma_k^j = g^{ji} \in \Gamma^{-1}$

Следствие 2

$e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б.

Тогда $e^i = e_i$

Доказательство

Очевидно, $\Gamma = E = \Gamma^{-1}$

Замечание

1. на практике скалярное произведение, в свою очередь, может быть задано какой-то матрицей Грамма, относительно какого-то другого базиса

2. $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ – имеют один класс ориентации, если $\det T_{e \to e'} > 0$
   Отсюда взаимные базисы принадлежат к одному классу ориентации

Теорема 2

Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства V

$\omega^1, \ldots, \omega^n$ – сопряженный базис V^*

Тогда $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e^i \in V \Rightarrow e^1, \ldots, e^1, \ldots, e^n$ – взаимный с $e_1, \ldots, e_n$

Доказательство

$\forall\, \omega^i \in V^* \ \exists !e^i \in V : \omega^i(x) = (x, e^i) \forall\, x \in V$

Пусть $x = e_j$ $\underbrace{\omega^i(e_j)}_{\sigma_i^j} = (e_j, e^i) \Rightarrow$ взаимный базис

Замечание

e – о.н.б. из теоремы Рисса такой, что $\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e_i$

$\omega^i \overset{P}{\leftrightarrow} e^i$

Отсюда $e^i = e_i$ (снова следствие 2)

Определение

$e_1, \dots, e_n$ и $e^1, \dots, e^n$ – взаимные базисы

$\forall\, x = x^i e_i = x^j e^j$

x_j – ковариантные координаты

x^i – контрвариантные координаты

координатная функция относительно базиса $e^i \leftrightarrow (x, e_i) = (x_j e^j, e_i) = x_j(e^j, e_i) = x_j \sigma_i^j = x_i$

$\omega^j \leftrightarrow (x, e^j) = (x^i e_i, e^j) = x^i(e_i, e^j) = x^i \sigma_i^j = x^j$

$x = (x, e_i)e^i = (x, e^j)e_j$ – формула Гибса

$T = T_{e \to e'}$

$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix}$ – контрвариантный

$\omega^j \overset{P}{\cong} e^j$

$x_j \omega^j \cong x_j e^j$

$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^1 & \dots & x'^n \end{pmatrix} S$ – ковариантный

Рассмотрим координаты как тензоры

$(x^i) \leftrightarrow T_{(0,1)}$

$(x_i) \leftrightarrow T_{(1,0)}$

Рассмотрим свертку с соответствующим метрическим тензором

$g_{ki}x^i = (e_k, e_i)x^i = (e_k, e_i x^i) = (e_k, x) = (x, e_k) = x_k$

Свертка контрвариантного тензора с ковариантным метрическим тензором дает ковариантный тензор – опускание индекса

$g^{jk}x_j = (e^j, e^k)x_j = (x_j e^j, e^k) = (x, e^k) = x^k$

Свертка ковариантного тензора с контрвариантным метрическим тензором дает контрвариантный тензор – поднятие индекса

Определим операции для произвольных тензоров

Рассмотрим $\alpha \in T_{(p,q)}$

Операцией опускания поднятия индекса называется преобразование матрицы тензора в результате его свертки с ковариантным/контрвариантным метрическим тензором. При этом, чтобы сохранить соответствия записи элементов в матрице тензора применяют следующие правила записи

1. Если опускается крайний правый верхний индекс, он становится крайним левым нижним
   $\alpha^{i_1,\ldots,i_{q-1},\kappa}_{j_1,\ldots,j_p} g_{\kappa,j_0} = \alpha^{i_1,\ldots,i_{q-1}}_{j_0,\ldots,j_p}$

2. Если поднимается крайний левый нижний индекс, он становится крайним правым верхним
   $\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{\kappa,j_2,\ldots,j_p} g^{\kappa,i_{q+1}} = \alpha^{i_1,\ldots,i_{q+1}}_{j_2,\ldots,j_p}$

3. Если происходит опускание или поднятие остальных индексов, его прежняя позиция обозначается точкой. Сам индекс при этом занимает крайнюю левую нижнюю/правую верхнюю позицию
   $\alpha^{i_1,\ldots,\kappa,\ldots,i_q,\kappa}_{j_1,\ldots,j_p} g_{\kappa,j_0} = \alpha^{i_1,\ldots,\bullet,\ldots,i_q}_{j_0,\ldots,j_p}$
   $\alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,\kappa,\ldots,j_p} g^{\kappa,i_{q+1}} = \alpha^{i_1,\ldots,i_{q+1}}_{j_1,\ldots,\bullet,\ldots,j_p}$

4. Если опускаются/поднимаются несколько индексов то их прежние позиции обозначаются точками, а сами они записываются по тем же правилам с сохранением исходного порядка

Если базис ортонормированный, то поднятие/опускание индексов не меняет тензор
Если $e_1,\ldots,e_n; e'_1,\ldots,e'_n$ – о.н.б. базисы, то $T = T_{e\to e'}$ – ортогональная (т.е. $T^{-1} = T^T$)
Тогда $\alpha'^{k^1,\ldots,k_q}_{m_1,\ldots,m_p} = \alpha^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p} t^{j_1}_{m_1} \cdot t^{j_p}_{m_p} s^{j_p}_{i_1} \ldots s^{k_q}_{i_q} = \sum\limits_{i_1}\sum\limits_{i_2}\ldots\sum\limits_{i_q} \alpha^{i_1,\ldots,i_q} t^{j_1}_{m_1} \cdot t^{j_p}_{m_p} t^{i_1}_{j_p} \ldots t^{i_q}_{k_q}$
После приведения к о.н.б. в V получаем тензоры, которые отличаются только расположением тензора сверху/снизу. Такие тензоры называются *евклидовы* ранза $r = p + q$
Для них нет разницы, сверху или снизу индексы (пока мы переходим по ортонормированным базисам), поэтому пишем все внизу

4 Линейные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

4.1 Сопряженные операторы в унитарном/евклидовом пространстве

Определение
$\mathcal{A} \in L(U, V)$
$\mathcal{A}^* : V^* \to U^*$ – сопряженное к $\mathcal{A}$
$\forall\, f \in V^* \;\forall\, x \in U \;(\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x)$
Заметим, что $\mathcal{A}$ – линейное отображение
Пусть $\mathcal{A}^* f = g$
$g(x) = f(\mathcal{A}x) \in K$ – линейно по x, т.к. $\mathcal{A}, f$ – линейные
Тогда $g \in U^*$
Тогда $\mathcal{A}^* : V^* \to U^*$
$\forall\, \lambda \in K \forall\, f_1, f_2 \in V^*$
$\forall\, x \in U \;(\mathcal{A}^*(\lambda f_1 + f_2))(x) = (\lambda f_1 + f_2)(\mathcal{A}x) = \lambda f_1(\mathcal{A}x) + f_2(\mathcal{A}x) = \lambda(\mathcal{A}^* f_1)(x) + (\mathcal{A}^* f_2)(x)$

$\underset{x}{U} \overset{\mathcal{A}}{\to} \underset{\mathcal{A}x}{V}$
$\underset{g=\mathcal{A}^* f}{U^*} \underset{\mathcal{A}^*}{\leftarrow} \underset{f}{V^*}$
Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/евклидово, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
$V^* \overset{P}{\leftrightarrow} V$ – естественный изоморфизм
$f \in V^* \overset{P}{\leftrightarrow} y \in V$
$\forall\, x \in V \; f(x) = (x, y)$
$\mathcal{A}^* : V^* \to V^*$
$\exists!z \in V \overset{P}{\leftrightarrow} g \in V^*$
$\exists!y \in V \overset{P}{\leftrightarrow} f \in V^*$
$\forall\, x \in V \; g(x) = (x, z), f(x) = (x, y)$
По определению $\mathcal{A}^* : g(x) = (\mathcal{A}^* f)(x) = f(\mathcal{A}x) = (\mathcal{A}x, y)$
$\mathcal{A}^* : \underbrace{V^*}_{\overset{P}{\leftrightarrow} V} \to \underbrace{V^*}_{\overset{P}{\leftrightarrow} V}$

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$
$\mathcal{A}^* \in \mathrm{End}(V)$ называется сопряженным к $\mathcal{A}$, если $\forall\, x, y \in V \;(x, \mathcal{A}^* y) = (\mathcal{A}x, y)$

Замечание
$\mathcal{A}^*$ зависит от скалярного произведения
При фиксированном скалярном произведении $\mathcal{A}^*$ определен однозначно
Если поменять скалярное произведение, получим другое евклидово/унитарное пространство
Тогда и $\mathcal{A}^*$ будет другим
Свойства сопряженного оператора

1. $A, A^{(*)}$ – матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V
   Тогда $A^{(*)} = \overline{\Gamma^{-1}}A^*\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma^{-1}A^T\Gamma}$
   Доказательство
   $\forall\, x, y \in V$
   $(x, \mathcal{A}^*y) = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} g_{ij}x_i\overline{A^{(*)}y}_j = x^T\Gamma\overline{\mathcal{A}^{(*)}y}$
   $(\mathcal{A}x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}(Ax)_i\overline{y}_j = (Ax)^T\Gamma y$
   $x^T\Gamma A^{(*)}\overline{y} = x^TA^T\Gamma\overline{y}$
   Пусть $x = e_i, y = e_j$
   $(\Gamma\overline{A^{(*)}})_{ij} = (A^T\Gamma)_{ij}$
   $\Gamma\overline{A^{(*)}} = A^T\Gamma$
   $\overline{A^{(*)}} = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$
   В частности, если о.н.б., то $T = E \Rightarrow A^{(*)} = A^* = \overline{A^T}$

2. $\forall\, \lambda \in K$ $(\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\mathcal{B}^*$
   Если евклидово пространство, то $*$ – линейное, если унитарное – полуторолинейное

3. $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$

4. Если $\exists\, \mathcal{A}^{-1}$, то $\exists\, (\mathcal{A}^*)^{-1}$, причем $(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$
   Доказательство
   $(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = (E)^* = \varepsilon$
   $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \varepsilon$
   Отсюда $\exists\, (\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*$

5. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
   Доказательство

$\overline{(x, \mathcal{A}^* y)} = \overline{(\mathcal{A}x, y)}$
$(\mathcal{A}^* y, x) = (y, \mathcal{A}^x)$
$(\mathcal{A}^* y, x) = (y, \mathcal{A}x)$
Тогда по определению $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$

6. $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
$\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$
Доказательство
Пусть $y \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$
$(x, \underbrace{\mathcal{A}^* y}_{0}) = (\mathcal{A}x, y)$
Тогда $y \perp \mathcal{A}x \Rightarrow y \perp \operatorname{Im} \mathcal{A}$
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* \subset (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = \dim \operatorname{Ker} A^{(*)} = \operatorname{Ker} \overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} = n - \operatorname{rg}(\Gamma^{-1} A^T \Gamma) = n - \operatorname{rg} A^T = n - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im} \mathcal{A}) \perp$
Тогда $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Im} \mathcal{A})^\perp$
$\operatorname{Ker} \mathcal{A} = (\operatorname{Im} \mathcal{A}^*) \perp$
Тогда $\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = (\operatorname{Ker} \mathcal{A})^\perp$

7. $\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\lambda) = 0$
Доказательство
$\chi_{\mathcal{A}^*}(t) = \det(\mathcal{A}^{(*)} - tE) = \det(\overline{\Gamma^{-1} A^T \Gamma} - tE) = \overline{\det(\Gamma^{-1} A^T)\Gamma - \overline{t}\,\underbrace{\Gamma^{-1}\Gamma}_{E}} = \overline{\det(\Gamma^{-1}(A^T - \overline{t}E)\Gamma)} = \overline{\det(A^T - \overline{t}E)} = \overline{\chi_{\mathcal{A}}(\overline{t})}$

8. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}$
$\mu =\neq \overline{\lambda}$ – с.ч., v – с.в. $\mathcal{A}^*$
Тогда $u \perp v$
Доказательство
$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \mu v) = \overline{\mu}(u, v)$
$(\lambda - \overline{\mu})(u, v) = 0 \Leftrightarrow (u, v) = 0$

9. $L \subset V$ – инвариантное относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ - инвариантное относительно $\mathcal{A}^*$
Доказательство
$\forall\, x \in L, y \in L^\perp \; (x, \mathcal{A}^* y) = (u \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in L}, \underbrace{y}_{\in L^\perp}) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^* y \in L^\perp$

4.2 Нормальные операторы и их свойства

Определение
$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$
$\mathcal{A}$ – нормальный, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$
Или $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$
Свойства

1. $\mathcal{A}$ – нормальный $\Leftrightarrow A^{(*)}A = AA^{(*)}$, где $A, A^{(*)}$ – матрицы операторов в некотором базисе

2. $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   $\operatorname{Im}\mathcal{A}^* = \operatorname{Im}\mathcal{A}$
   $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   Тогда $V = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}$
   Доказательство
   $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = \mathbb{0} \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = \mathbb{0} \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$
   $(\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   $\operatorname{Im}\mathcal{A} = (\operatorname{Ker}\mathcal{A})^\perp = \operatorname{Im}\mathcal{A}^*$
   Пусть $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^2x\mathcal{A}^2x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, \mathcal{A}^*\mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = 0 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A}x}_{\in \operatorname{Im}\mathcal{A}} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   $\mathcal{A}x \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}x = 0$
   $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   Тогда $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   Очевидно также, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \supset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$
   Отсюда $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2$

3. Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda\varepsilon$ – нормальный оператор
   Доказательство
   $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\varepsilon$
   $\mathcal{B}\mathcal{B}^* = (\mathcal{A} - \lambda\varepsilon)(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\varepsilon) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} + |\lambda|^2\varepsilon$
   Аналогично $\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + |\lambda|^2\varepsilon$
   Отсюда ч.т.д.

4. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A} \Rightarrow \overline{\lambda}$ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}^*$
   Доказательство
   $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{A}^*}(\overline{\lambda}) = 0$

u – с.в. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}u = \lambda u \Leftrightarrow \mathcal{B}u = 0 \Leftrightarrow u \in \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}^* \Leftrightarrow \mathcal{B}^*u = \mathbb{0} \Leftrightarrow \mathcal{A}^*u = \overline{\lambda}u \Leftrightarrow u$ – с.в. $\mathcal{A}^*$

5. λ – с.ч., u – с.в. $\mathcal{A}$
   $\mu \neq \lambda$ – с.ч., v – с.в. $\mathcal{A}$
   Тогда $u \perp v$
   Т.о. собственные подмножесства $V_\lambda \perp V_\mu$
   Доказательство
   $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^*v) = (u, \overline{\mu}v) = \mu(u, v)$
   Отсюда $(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в унитарном пространстве
$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное
$\mathcal{A}$ – нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что матрицы оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Причем, матрица $\mathcal{A}^*$ в этом базисе также будет иметь диагональный вид $\overline{\Lambda} = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n)$
Замечание $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – с.ч. $\mathcal{A}$
$\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$ – с.ч. $\mathcal{A}^*$
$\mathcal{A}$ – нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}$ – о.п.с., но не наоборот
о.н.б. – из собственных векторов
Доказательство
Пусть λ_1, v_1 – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
Рассмотрим $L = \operatorname{span}(v_1), V - L \oplus L^\perp$
L – инвариантное относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}^*$
Также по свойству 4 v_1 – с.в. $\mathcal{A}^* \Rightarrow L$ – инвариантное относительно $\mathcal{A}^* \Rightarrow L^\perp$ инвариантное относительно $\mathcal{A}$
Тогда $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}, \mathcal{A}^*\Big|_{L^\perp}$ – остаются взаимосопряженными и нормальными
Применим метод математической индукции:
База: $n = 1$ – очевидно
Пусть для $n = k$ выполнено. Докажем для $k + 1$
Пусть λ_1, v_1 – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
$L = \operatorname{span}(v_1)$
$V = L \oplus L^\perp, \dim L^\perp = k$

По индукционному предположению для $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}$ $\exists$ о.н.б. $v_2, \ldots, v_{k+1}$ в $L^\perp$ из с.в., матрицы $\mathcal{A}\Big|_{L^\perp}$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1})$

Т.к. $V = L \oplus L^\perp$, матрица $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1})$

$v_1 \perp v_2, \ldots, v_{k+1}$

В обратную сторону очевидно

Следствие 1

$\mathcal{A}$ – нормальный в унитарном пространстве $\Leftrightarrow V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda, V_\lambda \perp V_\mu, \lambda! = \mu$

Следствие 2

$AA^* = A^*A$ – нормальная матрица

$a_{ij} \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ унитарная матрица $T : T^*AT = \overline{T^T}AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_i$ – с.ч. $\mathcal{A}$

Доказательство

A^* – матрица $\mathcal{A}^*$ в о.н.б.

A – матрица $\mathcal{A}$

Тогда по теореме существует базис и о.н.с.в. A

$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ – о.н.с.в. $= T_{e \to v}$

$T^{-1} = AT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ – т.к. $v_1, \ldots, v_n$ – попарно ортогональны и нормированы

$\Leftrightarrow T$ – унитарная матрица $\Leftrightarrow T^{-1} = \overline{T^T} = T^*$

Что будет в евклидовом пространстве?

A – вещественная матрица $\Rightarrow \chi_{\mathcal{A}}$ – вещественные коэффициенты

Не все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ – собственные числа, а только вещественные

Определение

V – линейное пространство над $\mathbb{R}$

$(V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство

$V_{\mathbb{C}}$ – комплексификация V

$\forall\, z = x + iy, w = u + iv \in V_{\mathbb{C}}, x, y, u, v \in V\ \ (z, w) := (x, y) + (y, v) + i(-(x, v) + (y, u))$

$(V_{\mathbb{C}}, (\cdot, \cdot))$ – унитарное пространство

Упражнение

$\overline{(z_1, z_2)} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2)$

$\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \in \operatorname{End}(V_{\mathbb{C}})$

$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$

Напоминание
$e_1, \ldots, e_n$ – базис $V \Rightarrow$ базис $V_\mathbb{C}$
$\chi_A(t) = \chi_{A_\mathbb{C}}(t)$
$\overline{\mathcal{A}_\mathbb{C} z} = \mathcal{A}_\mathbb{C}(\overline{z})$
λ, z – с.ч., с.в. $\mathcal{A}_\mathbb{C} \Rightarrow \overline{\lambda}, \overline{z}$ – с.ч., с.в. $\mathcal{A}_\mathbb{C}$
$\mathcal{A}_\mathbb{C}\overline{z} = \overline{\mathcal{A}_\mathbb{C} z} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z}$
Свойства

1. $\lambda \in \mathbb{R}, V_\lambda$ – с.ч. и собственное подпространство $\mathcal{A} \Rightarrow \lambda, (V_\lambda)_\mathbb{C}$ – с.ч. и с.п. $\mathcal{A}_\mathbb{C}$
   Доказательство //todo 12:10 11.05

2. λ, z – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}$
   $\overline{\lambda}, \overline{z}$ – с.ч. и с.в. $\mathcal{A}_\mathbb{C}$
   $z = u + iv, \overline{z} = u - iv$
   Тогда $(z, \overline{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$
   Доказательство
   $0 = (z, \overline{z}) = (u + iv, u - iv) = \underbrace{(u,u) - (v,v)}_{0} + \underbrace{i(v,u) + i(u,v)}_{0}$

3. $(\mathcal{A}_\mathbb{C})^* = (\mathcal{A}^*)_\mathbb{C}$
   Доказательство
   $e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. $V \to e_1, \ldots, e_n$ – о.н.б. в $V_\mathbb{C}$
   $\mathcal{A} \leftrightarrow A, \mathcal{A}^* \leftrightarrow A^T \Rightarrow (\mathcal{A}^*)_\mathbb{C} \leftrightarrow A^T$
   $\mathcal{A}_\mathbb{C} \leftrightarrow A, (\mathcal{A}_\mathbb{C})^* \leftrightarrow A^T$

4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})_\mathbb{C} = \mathcal{A}_\mathbb{C}, \mathcal{B}_\mathbb{C}$
   Доказательство
   $(\mathcal{A}\mathcal{B})_\mathbb{C} z = (\mathcal{A}\mathcal{B})x + i(\mathcal{A}\mathcal{B})y = \mathcal{A}_\mathbb{C}(\mathcal{B}x + i\mathcal{B}y) = \mathcal{A}_\mathbb{C}\mathcal{B}_\mathbb{C} z$

5. $\exists\, \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow (\mathcal{A}_\mathbb{C})^{-1}$, причем $(\mathcal{A}_\mathbb{C})^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_\mathbb{C}$
   Доказательство
   $\chi_\mathcal{A} = \chi_{\mathcal{A}_\mathbb{C}} \Rightarrow \exists\, (\mathcal{A}_\mathbb{C})^{-1}$
   $\mathcal{A}_\mathbb{C}\mathcal{A}_\mathbb{C}^{-1} = \varepsilon = (\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})_\mathbb{C} = \mathcal{A}_\mathbb{C}(\mathcal{A}^{-1})_\mathbb{C}$

6. $\mathcal{A}$ нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}_\mathbb{C}$ нормальный

Теорема о каноническом виде матрицы нормального оператора в евклидовом пространстве

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V), (V, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство
$\mathcal{A}$ – нормальный оператор $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. пр-ва V такой, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь блочно-диагональный вид $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, где $\lambda_i \in R$ – с.ч. $\mathcal{A}$
$\Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, где $\alpha_i \pm i\beta_i$ – комплексные сопряженные корни характеристического многочлена $\mathcal{A}$
Причем, матрица $\mathcal{A}^*$ имеет вид $\Lambda^* = \Lambda^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, l_k, \Phi_1^T, \ldots, \Phi_m^T)$
Доказательство $\Leftarrow$
Очевидно: $\Phi_i^T \Phi_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 + \beta_i^2 & 0 \\ 0 & \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 & \end{pmatrix} = \Phi_i \Phi_i^2$
Доказательство $\Rightarrow$
Если все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные, все очевидно
Иначе применим комплексификацию
$\mathcal{A}$ – нормальный $\Rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ нормальный, $V_{\mathbb{C}}$ – унитарное пространство
Тогда по теореме $\exists$ о.н.б. $w_1, \ldots, w_n$ из с.в. $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ такой, что матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет иметь диагональный вид

$$V = \bigoplus_{\lambda - \text{ с.в. } \mathcal{A}_{\mathbb{C}}} V_\lambda = \bigoplus_{i=1, \lambda_i \in \mathbb{R}}^{k} V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\mu, \overline{\mu}} \mathrm{span}(z_j^\mu, \overline{z}_j^{\overline{\mu}})$$

$\mu, \overline{\mu}$ – комплексные сопряженные корни $\chi_{\mathcal{A}}$
$z, \overline{z}$ – с.в., пусть они нормированные
$(z, \overline{z}) = 0$
$z = u + iv, u, v \in V$
$V_\lambda \perp V_\mu$
$V_{\lambda_i}^{\mathbb{C}} =$ по свойству $1 = (V_{\lambda_i})_{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \ldots, \omega_k)$
$(z, \overline{z}) = 0 \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\|$
$\mathrm{span}^{\mathbb{C}}(z, \overline{z}) = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(u, v) = (\mathrm{span}(u, v))_{\mathbb{C}}$
Тогда $V_\mu^{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(z_1, \ldots, z_r) \perp V_{\overline{\mu}}^{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_r)$
$V_{\mathbb{C}} = \mathrm{span}^{\mathbb{C}}(\omega_1, \ldots, \omega_k, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots), \omega, u, v$ – вещественные вектора
$\|z_i\|^2 = 1 = \|u_i\|^2 + \|v_i\|^2, \|u_i\| = \|v_i\| \Rightarrow \|u_i\| = \|v_i\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \leftrightarrow A \leftrightarrow \mathcal{A}$ – в вещественном базисе
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \mu_i z_i$
$\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$
$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} z_i = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(z_i + \overline{z}_i) = \dfrac{1}{2}(\mu_i z_i + \overline{\mu}_i \overline{z}_i) = \Re(\mu_i z_i) = \Re((\alpha_i + i\beta_i)(u_i + ib_i)) =$

$$\alpha_i u_i - \beta_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_i \\ -\beta_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}} v_i = \frac{1}{2i}\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(z_i - \overline{z}_i) = \frac{1}{2i}(\mu_i z_i - \overline{\mu}_i \overline{z}_i) = \Im(\mu_i z_i) = \beta_i u_i + \alpha_i v_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_i \\ \alpha_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Осталось ортогонализовать базис. Заменим u_i на $\sqrt(2)u_i, v_i$ – на $\sqrt(2)v_i$
Т.о. мы получили матрицу из теоремы
Следствие
$AA^* = A^*A(AA^T = A^TA)$
$a_{ij} \in \mathbb{R}$
Тогда $\exists$ ортогональная матрица T такая, что $T^TAT = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_i, \ldots, \Phi_m)$
Доказательство
$T = \begin{pmatrix}\omega_1 & \ldots & \omega_k & u_1 & v_1 & \ldots\end{pmatrix}$
T – ортогональная матрица $\Leftrightarrow T^{-1} = T^* = T^T$

4.3 Самосопряженные операторы и их свойства. Изометрические операторы и их свойства

Определение
$\mathcal{A}$ – называются самосопряженный, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$
Если V унитарное, то – эрмитовый
Если V евклидово, то – симметричный
$\Leftrightarrow (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ **Замечание**
Если $\mathcal{A}$ – самосопряженный, то $\mathcal{A}$ – нормальный

Свойства

1. $\mathcal{A}$ – самосопряженный $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что $A^* = A$

2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ самосопряженные $\Rightarrow \forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ – самосопряженный

3. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – самосопряженные и перестановочные $\Rightarrow \mathcal{AB}, \mathcal{BA}$ – самосопряженные

4. Если $\exists\, \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A}$ – самосопряженный $\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}$ – самосопряженный
   Доказательство
   $(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})^* = \varepsilon^* = \varepsilon$
   $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon$
   $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1})^* = \varepsilon \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{A}^{-1}$

5. $\mathcal{A}$ самосопряженный $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ нормальный и все корни $\chi_{\mathcal{A}}$ вещественные
   Доказательство для унитарного пространства
   По теореме о каноническим виде матрицы
   $\mathcal{A} \leftrightarrow \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
   $\mathcal{A}^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \mathrm{diag}\, \overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n$
   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \leftrightarrow \Lambda = \overline{\Lambda^T} \Leftrightarrow \lambda_i = \overline{\lambda_i} \Leftrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$
   Доказательство для евклидова пространства
   По теореме о каноническом виде матрицы
   $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda^T$
   $\Phi_i = \Phi_i^T \Leftrightarrow \beta_i = 0$
   Тогда нет блоков $\Phi_i \Rightarrow \Lambda$ – диагональная $\Rightarrow \lambda_i$ вещественные

6. $L \subset V$ – линейное подпространство
   L – инвариантно относительно $\mathcal{A} \Rightarrow L^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$

//todo 11.05 13:56 **Следствие 2**
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Rightarrow \exists$ унитарная/ортогональная T такая, что T^*AT имеет диагональный вид
Определение
Q невырожденаая $\in \mathrm{End}(V)$ называется изометрическим, если $Q^{-1} = Q^*$
Если V – унитарная, то называется унитарным
Если V – евклидово, то называется ортогональным
$\Leftrightarrow (Qx, Qy) = (x, Q^*Qy) = (x, y)$

Замечание
Изометрический $\Rightarrow$ нормальный **Свойства**

1. Q изометрический $\exists$ базис такой, что $\overline{Q^T} = Q^* = Q^{-1}$

2. Q изометрический $\Rightarrow$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис
Доказательство $\Rightarrow$
$e_1, \dots, e_n$ – о.н.б.
$(Qe_i, Qe_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$
Доказательство $\Leftarrow$
$e_1, \dots, e_n$ – о.н.б.
$\forall\, x, y \in V$ $Qe_1, \dots, Qe_n$ – о.н.б.
Тогда $(Qe_i, Qe_j) = \delta_{ij}$
$(Qx, Qy) = \sum\limits_{ij} x_i \overline{y_j} (Qe_i, Qe_j) = \sum\limits_{i} x_i \overline{y_i} = (x, y)$

3. Q, R – изометрические $\Rightarrow QR$ – изометрические

4. Q – изометрический $\Rightarrow Q^{-1}$ – изометрический

5. Q – изометрический $\Leftrightarrow Q$ – нормальный и все корни χ_Q по модулю равны 1
Доказательство для унитарного пространства
По теореме о каноническом виде
$\exists$ о.н.б. такой, что $Q \leftrightarrow \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$Q^* \leftrightarrow \overline{\Lambda^T} = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$
$QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda\overline{\Lambda^T} = E = \operatorname{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_n\|^2) \Rightarrow \|\lambda\| = \pm 1$ **Доказательство для евклидова пространства** $QQ^* = \varepsilon \Leftrightarrow \Lambda\overline{\Lambda^T} = E = \operatorname{diag}(\|\lambda_1\|^2, \dots, \|\lambda_k\|^2, |\Phi_1\Phi_1^T|, \dots, |\Phi_k\Phi_k^T|$
$\Phi_i\Phi_i^T = \operatorname{diag}(\alpha_i^2 + \beta_i^2, \alpha_i^2 + \beta_i^2)$
$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$ В частности, если корни χ_Q вещественные, то ± 1

6. $L \subset V$ – линейное подпространство, инвариантное относительно Q. Тогда $L^\perp$ инвариантно относительно Q
Доказательство
$//$todo 11.05 14:19

Теорема о каноническом виде матрицы изометрического оператора

$Q \in \mathrm{End}(V), (V, (\cdot,\cdot))$ – унитарное/евклидово
Q – изометрический $\Leftrightarrow \exists$ о.н.б. такой, что матрица имеет диагональный/блочно-диагональный вид $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ / $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \Phi_1, \ldots, \Phi_m), \lambda_i = \pm 1 \Phi_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & \sin\phi_i \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i \end{pmatrix}, \cos\phi_i \pm i\sin\phi_i$ – корни χ_Q
Доказательство
$\Lambda^{-1} = \overline{\Lambda^T}$ **Замечание**
Q ортогональный в евклидовом пространстве $\Rightarrow$ композиция поворотов и отображений
Следствие
$Q^* = Q^{-1}$ – унитарная/ортогональная матрица
Тогда $\exists$ унитарная/ортогональная матрица T такая, что $T^*QT = \Lambda$ – из теоремы

4.4 Разложение матриц. LU(LDU), Холецкого, QR-разложение, полярное

Определение
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & e_{ij} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$ – нижняя унитреугольная матрица(левая)
Аналогично верхнетреугольная матрица U
Определение
$A = (a_{ij})_{n\times n}$
$1 \leq k \leq n$ $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$ – угловая матрица
$\Delta_k = \det A_k$ – угловой минор
Теорема
$\Delta_k \neq 0, \forall k = 1 \ldots n-1 \Leftrightarrow \exists!$ унитреугольная нижняя L, унитреугольная верхняя $U, D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n), d_k \neq 0, k = 1 \ldots n-1$ такие, что $A = LDU$
Замечание

1. A невырожденная $\Leftrightarrow \det A = \det L \det D \det U = \det D = \underbrace{d_1 d_2 \dots d_{n-1}}_{\neq 0} d_n \Leftrightarrow$

   $d_n \neq 0$

2. $A = LDU$

   $$LD = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ & * & & \ddots & 0 \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = L \Rightarrow A = LU$$

   $$DU = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ 0 & \ddots & & * & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \text{н.у.о.} = U \Rightarrow A = LU$$

   Называется LU-разложением. Оно неоднозначно, а отличие от LDU

Доказательство $\Leftarrow$

$A = LDU \Rightarrow A_k = L_k D_k U_k$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \underbrace{l_{is}}_{s>i \Rightarrow =0} d_{st} \underbrace{u_{ti}}_{t>j \Rightarrow =0} = \sum_{s=1}^{i} \sum_{t=1}^{j} l_{is} d_{st} u_{ij} = \underbrace{\sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{k} l_{is} d_{st} u_{ij}}_{(L_k D_k U_k)_{ij}}$$

$\Delta_k = \det A_k = \underbrace{\det L_k}_{1} \det D_k \underbrace{\det U_k}_{1} = d_1 \dots d_k \neq 0$

$d_k = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$

Доказательство $\Rightarrow$

Методом мат. индукции

1. $k = 1. a_{11} = \underbrace{1}_{L} \underbrace{d_1}_{D} \underbrace{1}_{U}$

2. Пусть верно для k

   Тогда $\Delta_1, \dots, \Delta_k \neq 0$

   $A_k = L_k D_k U_k$ – единственным образом, $d_1, \dots, d_k \neq 0$ Докажем для

$k+1$
$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b_{k+1} \\ c_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$
$L_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$
$U_{k+1} = \begin{pmatrix} U_k & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$D_{k+1} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$
Докажем, что $A_{k+1} = L_{k+1} D_{k+1} U_{k+1}$
//todo 18.05 10:38

Алгоритм LDU-разложения

Рассмотрим матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right)$

Методом Гаусса приведем к верхнедиагональному виду $\left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \end{array}\right)$

Здесь не переставляем строки и столбцы во время преобразований, а также не прибавляем к строке i значения из строк $j < i$(чтобы получить справа нижнедиагольный вид)
Получим A' – верхнедиагональную и A'' нижнедиагональную
$A' = DU, A'' = L^{-1}$
Определение
$L_{ij}(\lambda)$ – элементарная унитарная нижняя матрица, если $\exists ! i, j : i > j, L_{ij} \neq 0$, при этом $L_{ij} = \lambda$ (единственный ненулевой элемент под диагональю)
$i > j$

$$AL_{ij}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ a_{j1} & a_{jj} & \ldots & a_{ji} & \ldots \\ \ldots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & \ldots & a_{ii} & \ldots \\ \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{ni} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \underbrace{\lambda}_{ij} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & (A_j + \lambda A_i) & \ldots & A_i & \ldots \end{pmatrix}$$

$$L_{ij}(\Lambda)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \underbrace{\lambda}_{ij} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots \\ a_{j1} & a_{jj} & \dots & a_{ji} & \dots \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{ii} & \dots \\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (S_j + \lambda S_i) \\ \dots \\ S_i \\ \dots \end{pmatrix}$$

$L_{ij}(\lambda)$ – невырожденная $\Rightarrow \exists\, L_{ij}^{-1}(\lambda) = L_{ij}(-\lambda)$

Возвращаемся к методу Гаусса

$$\left(\underbrace{L_m \dots L_2 L_1}_{\text{эл. нижн.унитр., соотв. м. Гаусса}} A = DU \;\middle|\; \underbrace{L_m L_{m-1} \dots L}_{L^{-1}} E \right)$$

$A = L_1^{-1} \dots L_m^{-1} DU = LDU$

$L_k^{-1} = L_k(-\lambda_k)$

$L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_m^{-1} = (L_m \dots L_1)^{-1} = L$

Следствие

$A^* = A$

$\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$

$\Leftrightarrow \exists!, L, D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n), U : d_i \in \mathbb{R}, d_i \neq 0, A = LDL^* = U^* DU$

Доказательство

Из теоремы $\exists! L, D, U$

$LDU = A = A^* = L^* D^* U^* = L^* DU^*$

Из единственности $L = U^*, U = L^*$

Определение

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ – самосопряженный оператор

V – унитарное/евклидово

$\mathcal{A}$ – положительно(отрицательно) определенным ($\mathcal{A} > 0$), если $\forall\, x \neq 0\ (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) \gtreqless 0$

$\mathcal{A}$ – положительный(отрицательный) полуопределенный ($\mathcal{A} \geq 0$), если $\forall\, x \neq 0\ (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) \overset{\geq}{\leq} 0$ и $\exists\, x \neq 0 : (\mathcal{A}x, x) = 0$

> 0 не является ч.с.≥ 0

$\mathcal{A} \gtreqless 0$ – неопределенный, если $\exists\, x \in V : (\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) > 0$ и $\exists\, y \in V : (\mathcal{A}y, y) = (y, \mathcal{A}y) < 0$

$\mathcal{A}$ – самосопряженный $\Leftrightarrow V = \oplus_{\lambda - \text{с.ч.}} V_\lambda$ – о.п.с.

Все корни $\lambda \in \mathbb{R}$

$V_\lambda \perp V_\mu, \lambda \neq \mu$

Теорема
$\mathcal{A} > 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda > 0$
$\mathcal{A} \geq 0 \Leftrightarrow$ все с.ч. $\lambda \geq 0, \exists\, \lambda = 0$
$\mathcal{A} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \exists$ с.ч. $\lambda > 0, \exists$ с.ч. $\lambda < 0$
Доказательство $\Rightarrow$
Пусть $\mathcal{A} > 0$
$\forall\, x \in V, x \neq 0\ (\mathcal{A}x, x) > 0$
$x = \sum\limits_{\lambda} x_\lambda$
$(\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\lambda}(\lambda x_\lambda, x_\mu) = \sum\limits_{\lambda}(\lambda x_\lambda, x_\lambda) > 0$
$\lambda(x_\lambda, x_\lambda) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$
Аналогично для всех остальных случаев
Доказательство $\Leftarrow$
$\forall\, x : (\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_{\lambda} \lambda(x_\lambda, x_\lambda)$
Пусть все $\lambda > 0 \Rightarrow \forall\, x \neq \mathbb{0} (\mathcal{A}x, x) = \sum\limits_{\lambda} \lambda \|x_\lambda\|^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{A} > 0$
Замечание
Для самосопряженных матриц теорема аналогичная
Замечание
$A > 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$
Теорема (разлоэение Холецкого или метод квадратного корня)
$\forall\, A > 0 \exists! L > 0$ – нижнетреугольная $U > 0$ – верхнетреугольная: $A = LL^* = U^*U$
Доказательство
Пусть $x \neq 0, A > 0, A = L_0 D_0 U_0 \underset{A=A^*}{=} L_0 D_0 L_0^* = U_0^* D_0 U_0$
$0 < (Ax, x) = (L_0 D_0 U_0 x, x) = (D_0 \underbrace{U_0 x}_{y}, L_0^* x) = (D_0 y, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} d_j y_j^2$
U_0 – унитреугольная $\Rightarrow$ невырожденная $\Rightarrow y \neq 0$, т.к. $x \neq 0$
Пусть $y = e_j$
Тогда $\forall\, j = 1 \ldots n\ d_j > 0$
$\sqrt{D_0} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n})$
$\sqrt{D_0}\sqrt{D_0} = D_0$
$A = \underbrace{L_0\sqrt{D_0}}_{L}\sqrt{D_0}L_0^* = U_0^*\sqrt{D_0}\underbrace{\sqrt{D_0}U_0}_{U}$

$L^* = (L_0\sqrt{D_0})^* = \sqrt{D_0}L_0^* = L_0^*\sqrt{D_0}$
$U^* = \sqrt{D_0}U_0$
Теорема (QR-разложение)
$\forall$ невырожд. A (компл./вещ.) $\exists$ унит./ортог. Q, правотреугольная(верхнетреугольная) $R : A = QR$
Доказательство
$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}$
Т.к. A невырожденная, то $A_1, \dots, A_n$ – линейно независимые
Применим алгоритм Грамма-Шмидта
Получим попарно ортогональные и нормированные столбцы $q_1, \dots, q_n$
$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ – унитарная/ортогональная по построению
Q – унитарная/ортогональная по построению
$q_1 = u_{11}A_1$
$q_2 = u_12A_1 + u_22A_2$
$\vdots$
$q_n = u_{1n}A_1 + \dots + u_{nn}A_n$
$\underbrace{A}_{\text{невыр.}} U = \underbrace{Q}_{\text{невыр.}}$
Тогда U – невырожденная
Тогда $\exists\, U^{-1} = R$
R – верхнетреугольная
$A = QU^{-1} = QR$
Следствие
$\forall$ невыр. $A \exists\, Q$ – унит./ортог., L – левотреугольная(нижнетреугольная)
$A = LQ$
Доказательство
$A^* = \widetilde{Q}R$
$A = (\widetilde{Q}R)^* = R^* \underbrace{\widetilde{Q}^*}_{\text{унит./орт.}} = R^*\widetilde{Q}^{-1} = LQ$
Теорема (полярное разложение)
В унитарном: $A = \underbrace{H}_{\text{эрмитова}} \underbrace{U}_{\text{унитарная}}$
В евклидовом: $A = \underbrace{S}_{\text{симметричная}} \underbrace{Q}_{\text{ортогональная}}$
$\forall\, A_{n\times n} \exists!$ ортогональная $H($ симметричная $S), H \geq 0 (S \geq 0)$ и $\exists$ унитарная $U($ ортогональная $Q) : A = HU (A = SQ)$
Причем, если A невырожденная, то $U(Q)$ – единственные, $H > 0 (S > 0)$

Сформуриуем докажем соответствующую теорему для операторов, т.к. в о.н.б. этим матрицам соответствуют матрицам операторов

Теорема (полярное разложение эндоморфизма в унитарном/евклидовом пространстве)

$(V, (\cdot, \cdot))$ – унитарное/ортогональное

$\forall \mathcal{A} \in \mathrm{End}(V) \exists !$самосопряженный $H \geq 0 (S \geq 0), \exists U$ – изомерический $: \mathcal{A} = HU(\mathcal{A} = SQ)$

Причем, если $\mathcal{A}$ невырожденный, то $\exists ! U(Q), H > 0, S > 0$

Лемма

Пусть $\mathcal{A}$ – о.п.с.

Все с.ч. $\lambda \operatorname{Im} \mathbb{R}, \lambda > 0$

Тогда $\exists ! \mathcal{B}$ – о.п.с такой, что с.ч. $\mu \in \mathbb{R}, \mu \geq 0, \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$

$\mathcal{B} := \sqrt{\mathcal{A}}$

Доказательство существования

$\mathcal{A}$ – о.п.с., $V = \oplus_\lambda V_\lambda = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n), v_n$ – с.в.

Определим $\mathcal{B}$:

$\forall v_j \ \beta v_j = \sqrt{\lambda_j} v_j$

$\mathcal{B}^2 v_j = \sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j} v_j = \lambda_j v_j = \mathcal{A} v_j$

$\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$, т.к. их значения совпадают на базисных векторах

Очевидно из определения $\mathcal{B}$, что β – о.п.с., $\sqrt{\lambda_j} = \mu_j$ – с.ч. $\mathcal{B}$

v_j – с.в. $\mathcal{B}$

$V_\lambda^\alpha = V_\mu^\beta$ – с.в. β

Доказательство единственности

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ – о.п.с.

$\nu \geq 0$ – с.ч. $\mathcal{C}$

$V = \bigoplus\limits_\nu V_\nu^C = \mathrm{span}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ – с.в. $\mathcal{C}$

$\mathcal{A}\omega_j = \mathcal{C}^2 \omega_j = \nu_j^2 \omega_j \Rightarrow \lambda_j^2$ – с.ч. $\mathcal{A}$

$V_\nu^\mathcal{C} = V_\lambda^\mathcal{A} = V_\mu^\mathcal{C}$

$\mathcal{C}\omega_i = \mathcal{C}\omega_i, \mu \Longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{B}$

Доказательство теоремы

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самосопряженные

$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

$\forall x \neq 0 \ (\mathcal{A}\mathcal{A}^* x, x) = (\mathcal{A}^* x, \mathcal{A}^* x) \geq 0, (\mathcal{A}^*\mathcal{A} x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$

Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^*, \mathcal{A}^*\mathcal{A} \geq 0$

Рассмотрим $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

Он самосопряженный $\Leftrightarrow$ он о.п.с. и его собственные подпространства попарно ортонормированы

$V = \bigoplus\limits_{\lambda} V_\lambda, V_\lambda \perp V_\mu, \forall\, \lambda\ \lambda > 0$

$V = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ – попарно ортогональные и нормированные с.в. $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$

$(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_k) = \underbrace{(\mathcal{A}^*\mathcal{A}v_j, v_k)}_{\geq 0} = (\lambda_j v_j, v_k) = \lambda\sigma_{jk}$

1. $\lambda_j \neq 0$ $(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j) = \lambda > 0, \|\mathcal{A}v_j\|^2 \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}v_j \neq \mathbb{0}$

2. $\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_k \neq 0, \lambda_j, \lambda_k \neq 0, \mathcal{A}v_j \perp \mathcal{A}v_j$

   Тогда $\mathcal{A}$ переводит попарно ортогональную нормированную систему с.в. в попарно ортогональную, но, возможно, неполную

   Дополним получившуюся систему до базиса

   Пусть о.н.б. $z_1, \ldots, z_n$ такой, что $\mathcal{A}\lambda_j \neq 0, z_j = \dfrac{\mathcal{A}v_j}{\sqrt{\lambda_j}}$

   $(z_j, z_j) = \dfrac{(\mathcal{A}v_j, \mathcal{A}v_j)}{\lambda_j} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1$

   Определим $H \in \operatorname{End}(V)$

   $Hz_j := \sqrt{\lambda_j} z_j$

   Очевидно, H – о.п.с., $\sqrt{\lambda_j}$ – с.ч.

   $H \geq 0$

   Определим $U \in \operatorname{End}(V)$

   $U \underbrace{v_j}_{\text{о.н.б.}} := \underbrace{z_j}_{\text{о.н.б.}}$

   Тогда U – изометрический

   $HUv_j = Hz_j = \sqrt{\lambda_j} z_j = \mathcal{A}v_j$

   Т.к. совпадает на базисных векторах, то $HU = \mathcal{A}$

   $\mathcal{A}^* = U^*H^* = U^*H = U^{-1}H$

   $\underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}_{\text{о.п.с., все с.ч.}\geq 0} = HUU^{-1}H = H^2$

   Отсюда $\exists! H$ – о.п.с., все с.ч. ≥ 0

   $H = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ – левый модуль $\mathcal{A}$

   $\mathcal{A}$ – невырожденный $\Rightarrow \mathcal{A}^*$ – невырожденный $\Rightarrow \mathcal{A}^*\mathcal{A} > 0, \mathcal{A}\mathcal{A}^* > 0 \Rightarrow$ все $\lambda_j > 0 \Rightarrow H > 0$ – невырожденный

   $\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{невыр.}} = \underbrace{H}_{\text{невыр.}} U \Rightarrow U$ – невырожденный $\Rightarrow U = H^{-1}\mathcal{A}$ – ед.образом

Аналогично для вещественного случая

Следствие

Аналогично для разложений $\mathcal{A} = UH(\mathcal{A} = QS)$
Доказательство
Построим разложение $\mathcal{A}^* = H_0U_0$
$H_0 = \sqrt{\mathcal{A}^*\mathcal{A}}$ – правый модуль
$\mathcal{A} = (H_0U_0)^* = U_0^*H_0^* = \underbrace{U_0^{-1}}_{\text{изометрия}} H_0 = U_0'H_0$

5 Квадратичные формы

5.1 Основные понятия

Определение

Квадратичной формой называется $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum j = 1^n a_{ij}x_ix_j$, где $a_{ij} \in \mathbb{R}, a_{ij} = a_{ji}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ijx_ix_j$
$A = (a_ij)_{n\times n}$
$A^T = A$
$f(x) = x^TA = (x, Ax) = (Ax, x)$ – в стандартном скалярном произведении в $\mathbb{R}^n$
Определение
$\operatorname{rg} F = \operatorname{rg} A$
Определение
Говорят, что к квадратичной форме f применили линейное преобразование Q, если $x = Qy, y \in \mathbb{R}^n$
$g(y) = f(Qy) = (Qy)^TA(Qy) = y^tQ^TAQy$ – снова квадратичная форма
$A_g = Q^TA_fQ$
Если Q невырожденное, то $\operatorname{rg} A_g = \operatorname{rg} A_f$
Мы будем рассматривать только невырожденные преобразования
Если матрица квадратичной формы имеет диагональный вид, то говорят, что форма приведена к каноническому виду
$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$
σ^+ – положительный индекс инерции – число $a_{ii} > 0$ в каноническом виде

σ^- – отрицательный индекс инерции – число $a_{ii} < 0$ в каноническом виде
σ^0 – число $a_{ii} = 0$ в каноническом виде
$(\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$ – сигнатура квадратичной формы
$\operatorname{rg} f = \sigma^+ + \sigma^- = n - \sigma^0$
Нормальный вид квадратичной формы – канонический, где все все $a_{ii} \pm 1$ или 0

5.2 Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду

1. $\underbrace{A}_{=A^T} \Rightarrow \underbrace{\Lambda}_{Q^T AQ} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ //todo когда-то 18.05 между 14:00 и 15:30