Теория вероятности. Теория

Александр Сергеев

1 Вероятностное пространство. Вероятность и ее свойство

Определение
Алгебра событий:
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – набор подмножеств Ω
$\mathcal{A}$ – алгебра, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = A + B \in \mathcal{A}$

Элементы алегбры – *события*
Операции с событиями

1. $A \cup B = A + B$
2. $A \cap B = AB = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{A} = \Omega \setminus A$
4. $A \setminus B = A - B = A\overline{B}$

Определение
σ-алгебра
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра

1. $\mathcal{A}$ – алгебра

2. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{A}$

Определение
События A, B – *несовместные* $AB = \varnothing$
Набор несовместный, если события попарно несовместные
Определение(вероятностное пространство)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – сигма-алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$

Определение(вероятностное пространство в широком смысле)
Ω – множество элементарных исходов
$\mathcal{A}$ – алгебра
$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ – вероятность, если

1. $P(A) \geq 0$

2. $P(\Omega) = 1$

3. $\bigcup\limits^{\infty} A_i \Rightarrow P(\bigcup\limits^{\infty} A_i) = \sum P(A_i)$

Теорема о продолжении меры
$\langle \Omega, \mathcal{A}, P \rangle$ – вероятностное пространство в широком смысле
Тогда $\exists ! Q : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ – вероятность, $Q\Big|_{\mathcal{A}} = P$, где $\sigma(\mathcal{A})$ – сигма-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$
Определение
$\mathcal{A}$ – система интервалов на $\mathbb{R}$, замкнутая относительно конечного объединения и пересечения
$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A})$ – борелевская сигма-алгебра
Примеры вероятностных пространств

1. Модель классической вероятности
   $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$
   $\mathcal{A} = 2^\Omega$
   $P(\{\omega_i\}) = P(\omega_i) = \dfrac{1}{N}$
   $\mathcal{A} = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_M}\} \Rightarrow P(\mathcal{A}) = \dfrac{M}{N}$

2. Ω – набор $\{0^i, 1\}, i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
   $P(0^i 1) = q^i p$

3. Модель геометрической вероятности Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу множество
   $\mathcal{A}$ – измеримое по Лебегу подмножество Ω
   $P(A) = \dfrac{\lambda A}{\lambda \Omega}$

Теорема (свойство вероятности)

1. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
5. $P(\varnothing) = 0$
6. $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

Доказательство

1. $P(B) = P(A) + P(B - A)$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq 1$
3. $A \sqcup \overline{A} = \Omega$
4. $B = AB \sqcup (B \setminus AB)$
5. $B_1 = A_1 \; B_2 = A_2 \setminus A_1$
   $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots A_{n-1}) \; \bigsqcup B_i = \bigcup A_i$
   $B_i \subset A_i$
   $P(\bigcup A_i) = P(\bigsqcup B_i) = \sum P(B_i) \leq \sum P(A_i)$

Теорема (формула включения/исключения)
$P(A_1+\ldots+A_n) = \sum\limits_i P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \ldots (-1)^{n+1} \sum\limits_{i_1<\ldots<i_n} P(A_{i_1}\ldots A_{i_n})$
Доказательство
Доказательство по индукции
Теорема
$\mathcal{A}$ – алгебра(?) на Ω, p – мера
Тогда равносильны

1. p – счетно-аддитивно
2. p – конечно-аддитивно $+\forall\,(B_n)_{n=1}^{\infty} : B_{n+1} \subset B_n, B = \bigcap B_n \Rightarrow P(B_n) \to P(B)$ – непрерывность сверху
3. p – конечно-аддитивно $+\forall\,(A_n)_{n=1}^{\infty} : A_{n+1} \supset A_n, A = \bigcup A_n \Rightarrow P(A_n) \to P(A)$ – непрерывность снизу

Доказательство (непрерывность сверху) $\Leftrightarrow$ (непрерывность снизу)
$A(n) : A_n \subset A_{n+1}; A = \bigcup A_n$
$B_n := \overline{A}_n, B := \overline{A}$
$B_n \supset B_{n+1}$
$B = \overline{A} = \overline{\bigcup A_n} = \cap \overline{A}_n = \cap B_n$
$p(B_n) = 1 - p(A_n) \to 1 - p(A) = p(B)$
Доказательство $1 \to 2$
$C_1 = B_1\overline{B}_2$
$C_2 = B_2\overline{B}_3$
$C_k = B_k\overline{B}_{k+1}$
$B_k = B \sqcup \bigsqcup\limits_{j=k}^{\infty} C_j$
$p(B_k) = p(B) + \underbrace{\sum\limits_{j=k}^{\infty} p(C_j)}_{\to 0}$
$p(B_k) \to p(B)$
Доказательство $2 \to 1$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p(C_k) = \lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} p(C_k) = \lim\limits_n p(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k) = p(B)$

2 Условная вероятность. Формуоа полной вероятности. Теорема Байеса

Определение (условная вероятность)
$(\Omega, \mathcal{A}, p)$ – вероятностное пространство
$B \in \mathcal{A} : p(B) > 0$
$p_B(A) = p(A|B) := \dfrac{p(AB)}{p(B)}$
Замечание
$p(AB) = p(A)p(B|A)$
Теорема (формула произведения вероятностей)
$p(A_1 \dots A_1) = p(A_1)p(A_2|A_1)\dots p(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$
Доказательство
Тривиально
Определение
$A_1, \dots, A_n$ – независимые, если $\forall\, A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ $p(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \dots p(A_{i_k})$
Теорема (формула полной вероятности)
$A \subset \bigsqcup\limits_k B_k$ (как правило, $\bigsqcup B_k = \Omega$)
Тогда $p(A) = \sum\limits_k p(A|B_k)p(B_k)$
Доказательство
$p(A) = p(A \cap \bigsqcup B_k) = p(\bigsqcup AB_k) = \sum\limits_k p(AB_k) = \sum p(A|B_k)p(B_k)$
Теорема Байеса
Краткая форма:
$p(B|A) = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$
Полная:
$A \subset \bigsqcup B_k$

$$\underbrace{p(B_k|A)}_{\text{апостериорные; posterior}} = \frac{\underbrace{p(A|B_k)}_{\text{likelyhood}}\ \underbrace{p(B_k)}_{\text{априорные; prior}}}{\sum_j p(A|B_j)} p(B_j)$$

Доказательство краткой формы
$p(B|A) = \dfrac{p(AB)}{p(A)} = \dfrac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$

3 Схема Бернулли. Полиноминальная схема. Предельные теоремы, связь со схемой Бернулли

Определение (независимые испытания)
$n \in \mathbb{N}$
$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, p_1), \dots (\Omega_n, \mathcal{A}_n, p_n)$ – вероятностные пространтсва, описывающие виды экспериментов
$\Omega^{(n)} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$
$\mathcal{A}^{(n)} = \mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$
$p^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \to \mathbb{R}$
$p^{(n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = p_1(A_1) \cdot \dots \cdot p_n(A_n)$
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – описание n независимых испытаний
Замечание
$\mathcal{A}^{(n)}$ может не быть сигма-алгеброй
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – вероятностное пространство в широком смысле
$\sigma(\mathcal{A}^{(n)})$ – сигма-алгебра
Определение (схемы Бернулли)
$n \in \mathbb{N}$
$p \in (0, 1)$ – вероятность успеха
$q = 1 - p$ – вероятность неудачи
$\Omega = \{0, 1\}$
$\mathcal{A} = 2^\Omega$
$\Omega^{(n)} = \{0, 1\}^n$
$w \in \Omega^{(n)}$ – вектор из нуля и единиц
$p(w) = p^{\sum w_i} q^{n - \sum w_i}$
$(\Omega^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, p^{(n)})$ – схема Бернулли

Теорема
S_n – количество успехов в n испытаниях
$p(S_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$
Теорема (о наиболее вероятном k_*)
$p_k := p(S_n = k)$
$\dfrac{p_k}{p_{k+1}} = \dfrac{(k+1)q}{(n-k)p} \vee 1$
$(k+1)(1-p) \vee (n-k)p$

$k+1-pk-p \vee np-pk$
$k \vee (n+1)p-1$

1. $p(n+1) \in \mathbb{N}$
   Тогда $\exists\, k_0 : k_0 = p(n+1)-1$
   Если $k < k_0$, то $p_k < p_{k_0+1}$
   Если $k = k_0$, то $p_{k_0} = p_{k_0+1}$
   Если $k > k_0$, то $p_k > p_{k_0+1}$
   Т.о. k_0, k_0+1 – наиболее вероятные

2. $p(n+1) \notin \mathbb{N}$
   Тогда $\exists\, k_1 : p_{k_1} < p_{k_1+1}, p_{k_1+1} > p_{k_1+2}$
   Т.о. k_1 – наиболее вероятные

Тогда $k_* = \begin{cases} \lceil p(n+1)-1 \rceil, & p(n+1) \notin \mathbb{N} \\ p(n+1)-1, p(n+1), & p(n+1) \in \mathbb{N} \end{cases}$

Утверждение

$p(S_n \geq 1) = 1 - q^n$

Утверждение

$\alpha \in (0,1)$
$p \in (0,1)$
$n : p(S_n \geq 1) \geq \alpha$
Ответ: $n = \lceil \log_q(1-\alpha) \rceil$

Определение (полиноминальная схема)

n – количество испытаний
m – количество возможных исходов
$p = (p_1, \ldots, p_m)$ – вектор вероятностей исходов
$\sum p = 1$
$\Omega = \{(i_1, \ldots, i_m)^T \in \{0,1\}^m : \sum\limits_j i_j = 1\}$ – множество столбцов с одной единицей
$\Omega^{(n)} = \{A \in M_{m \times n} : A_{ij} \in \{0,1\}, \sum\limits_i A_{ij} = 1\}$
$p(A) = p_1^{\sum_j A_{1,j}} \cdot \ldots \cdot p_m^{\sum_j A_{m,j}}$

Теорема

$S_{n,j}$ – количество исходов типа j в n испытаниях
$p(S_{n,1} = k_1, \ldots, S_{n,m} = k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \ldots k_m!} p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}, \sum k_j = n$

Теорема (закон больших чисел в форме Бернулли)

$\forall \varepsilon\ p(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \underset{n}{\to} 0$

Теорема (теорема Пуассона)

$p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}), n \to \infty$ – схема серий из n испытаний (вероятность успеха при n испытаниях)

Тогда $p(S_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Доказательство

$p(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^k(1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))^{n-k} =$

$= \frac{1}{k!}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{n^k}(\lambda + o(\frac{1}{n}))^k\frac{(1-\frac{\lambda}{n}+o(\frac{1}{n}))^n}{(1-\frac{\lambda}{n}+o(\frac{1}{n}))^k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Замечание (о погрешности)

$\lambda = np$

Тогда $|p(S_n = k) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}| \le np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$

Лемма 1

$k \to \infty, (n \ge k \Rightarrow n \to \infty)$

$p_* = \frac{k}{n}$

$H(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p}$ – энтропия

$n - k \to \infty \Rightarrow p(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n p_*(1-p_*)}}\exp(-nH(p_*))$

Доказательство

$p(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}p^k(1-p)^{n-k}}{\sqrt{2\pi k}k^k e^{-k}\sqrt{2\pi(n-k)}(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}} =$
$\frac{n^k n^{n-k}(1-p)^{n-k}p^k}{\sqrt{2\pi p_* n(1-p_*)}k^k(n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp\ln\frac{n^k p^k}{k^k}\cdot\frac{n^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)^{n-k}}$

$= \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp k\ln\frac{p}{p_*} + (n-k)\ln\frac{n(1-p)}{n-k}$

$= \frac{1}{\sqrt{\cdots}}\exp(-n\underbrace{(p_*\ln\frac{p}{p_*} + (1-p_*)\ln\frac{1-p_*}{1-p})}_{H(p_*)})$

Лемма 2

$H(p_*) = \frac{1}{2p(1-p)}(p-p_*)^2 + O((p-p_*)^3)$

При $p_* \to p$

Доказательство

$H(p) = 0$

$H'(x) = \ln\frac{x}{p} - 1 - \ln\frac{1-x}{1-p} + 1; H'(p) = 0$

$H''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)}; H''(p) = \frac{1}{p(1-p)}$

Теорема (локальная предельная Муавра-Лапласа)

Требуем Лемму 1 + $(k - np = o(n^{\frac{2}{3}}))$

Тогда $p(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)})$

Доказательство

$p_* - p = o(n^{-\frac{1}{3}})$ – из $k - np = o(n^{\frac{2}{3}})$

Применим Л2

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}}\exp(-nH(p_*))}_{\text{из Л1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np_*(1-p_*)}}\exp -n(\frac{(p-p_*)^2}{2p(1-p)} + O((p-p_*)^3)) \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp(-\frac{n(\frac{k}{n}-p)^2}{2p(1-p)} + nO(o(n^{-1}))) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} + o(1))$$

Теорема(интегральная Муавра-Лапласа)

$F_n(x) = p(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x)$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\phi$

$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Тогда $\sup\limits_{-\infty\leq x_1\leq x_2\leq +\infty}|F_n(x_2) - F_n(x_1) - \underbrace{(\Phi(x_2) - \Phi(x_1))}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - \Phi(x)| \leq C\frac{p(1-p)^3 + (1-p)p^3}{(pq)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} = C\frac{(1-p)p((1-p)^2+p^2)}{(pq)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} \leq$

$C\frac{1}{\sqrt{pqn}}$

По последним оценкам $C < 1$

4 Случайные величины. Распределение случайной величины

Определение
Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ – вероятностное пространство
$\mathcal{B}$ – борелевская сигма-алгебра (минимальная сигма-алгебра, содержащая все интервалы)
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина, если X – измеримо, т.е. $\forall\, B \in \mathcal{B}$ – борелевская сигма-алгебра $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
$P_X : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ – распределение случайной величины, если $P_x(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ для всех $B \in \mathbb{B}$
Замечание (обозначеиня)
Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами из конца алфавита(X, Y, U, W) или маленькими греческими ξ, ν, η
Замечание
P_X удовлетворяет аксиомам вероятности
Определение
Функция распределенич $F_X(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega : X(\Omega) \leq t\}), t \in \mathbb{R}$
Теорема (свойства функции распределения)

1. F не убывает
2. $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0$
3. F – непрерывна справа

Доказательство

1. $t_1 < t_2$
   $F(t_2) = F(t_1) + P(\{\omega : t_1 < X(\Omega) \leq t_2\}) \geq F(t_1)$
2. Пусть t_n – монотонно возрастает к $+\infty$
   $(-\infty, t_n] \subset (-\infty, t_{n+1}]$
   $\bigcup(-\infty, t_n] = \mathbb{R}$
   Тогда $F(t_n) \to P(X \in \mathbb{R}) = 1$
   Пусть t_n – монотонно убывает к $-\infty$

$(-\infty, t_n] \supset (-\infty, t_{n+1}]$
$\bigcap(-\infty, t_n] = \varnothing$
Тогда $F(t_n) \to P(X \in \varnothing) = 0$

3. Пусть t_n – монотонно стремится к 0
$F(x_0 + t_n) \to F(x_0)$
$(-\infty, x_0 + t_{n+1}] \subset (-\infty, x_0 + t_n]$
$\bigcap(-\infty, x_0 + t_n] = (-\infty, x_0]$
$F(x_0 + t_n) = P(X \le x_0 + t_n) \to P(X \le x_0) = F(x_0)$

Замечание (непрерывность слева)
Пусть t_n – монотонно стремится к 0
$F(x_0) - F(x_0 - t_n) = P(X \le x_0) - P(X \le x_0 - t_n) = P(x_0 - t_n < X \le x_0)$
$(x_0 - t_n, x_0] \supset (x_0 - t_{n+1}, x_0]$
$\bigcap(x_0 - t_n, x_0] = \{x_0\}$
Т.о. $F(x_0) - F(x_0 - t_n) \to P(X = x_0)$ – иногда не 0
Т.о. нет непрерывности слева
Лемма
$\forall\,(B_n) : B_{n+1} \subset B_n, B = \bigcap B_n \; P(B_n) \to P(B)$
Равносильно $\forall\,(A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \varnothing \; P(A_n) \to 0$
Доказательство $\Leftarrow$
$A_n = B_n \setminus B$
$A_{n+1} \subset A_n$
$\bigcap A_n = \varnothing$
$\underbrace{P(A_n)}_{P(B_n) - P(B)} \to 0$
Теорема (о достаточности F для описания вероятностного распределения)
Пусть F не убывает, $F(+\infty) = 1, F(-\infty) = 0, F$ – непрерывно справа
Тогда $\exists\,(\Omega, \mathcal{A}, P), X$ – случайная величина, такие что $F_X = F$
Доказательство
$\Omega := \mathbb{R}$
$\mathcal{A}$ – система интервалов вида $(a, b]$ (+все лучи и $\mathbb{R}$), замкнутая относительно конечного числа $\sqcup$, т.е. $\mathcal{A}$ – алгебра
$A := \bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k, b_k], P(A) := \sum_{k=1}^{n}(F(b_k) - F(a_k))$

$P(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$
Проверим счетную аддитивность
Пусть $(A_n) : A_{n+1} \subset A_n, \bigcap A_n = \varnothing$
$A_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_n} (a_{nk}, b_{nk}]$
Пусть все $A_n \subset [-M, M]$
Тогда $\exists\, (B_n) : cl(B_n) \subset A_n$ и $P(A_n) - P(B_n) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}, cl(\bullet)$ – замыкание
$B_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_n} (a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$
$cl(B_n) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{k_n} [a_{nk} + \delta, b_{nk}) \subset A_n$
$P(A_n) - P(B_n) = \sum\limits_{k=1}^{k_n} F(b_{nk}) - F(a_{nk} - F(b_{nk}) + F(a_{nk} + \delta)) = \sum\limits_{k=1}^{k_n} (F(a_{nk} + \delta) - F(a_{nk})) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ – при правильном δ, k_n
$cl(B_n) \subset A_n$
$\bigcap cl(B_n) \subset \varnothing$
$\bigcap cl(B_n) = \varnothing$
$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} = \mathbb{R} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$
$cl(B_n)$ – открыто
$[-M, M]$ – компакт
Тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{N} \overline{cl(B_n)} \supset [-M, M]$
Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{N} cl(B_n) = \varnothing$
$\bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n = \varnothing$
$P(A_n) = P(A_N \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n) + P(\bigcap\limits_{n=1}^{N} B_n) = P(\bigcup\limits_{n=1}^{N} (A_N \setminus B_n)) \leq \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_N \setminus B_n) \leq$

$\sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n \setminus B_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} P(A_n) - P(B_n) \le \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$
Тогда $P(A_n) \to 0$
Теперь пусть A_n – не ограниченные
$\varepsilon > 0$
$\exists\, [-M, M] : P(X \in \overline{[-M, M]}) < \varepsilon$
$N : F(N) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, F(-N) < \frac{\varepsilon}{2}$
$F(N) = F(-N) + P((-N, N]) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
$F(N) = 1 - P((N, +\infty))$
$P((N, +\infty)) < \frac{\varepsilon}{2}$
$P(A_n) = P(A_n \cap [-M, M]) + P(A_n \cap \overline{[-M, M]}) \le P(\overline{[-M, M]}) < \varepsilon$
Т.о. P – вероятность
$X(\omega) := \omega$
$F_X(t) = P((-\infty, t]) = F(t)$
Замечание

5 Дискретные случайные величины и распределения

Определение
X, P_x – дискретные, если существует не более чем счетное $E : P(X \in E) = 1$
$F(t) = P(X \le t) = \sum\limits_{k} p(k)\mathbb{1}(t \ge x_k), \mathbb{1}(cond) = (int)(cond)$
Примеры

1. Вырожденное:
   $P(X = c) = 1$
   $X \sim I(c), I_c$

2. Дискретное равномерное на $\{x_1, \ldots, x_n\}$
   $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$
   $DU(x_1, \ldots, x_n)$

3. Распределение Бернулли
   $Bern(p), p \in (0, 1)$
   $P(X = 0) = q = 1 - p, P(X = 1) = p$

4. Биномиальное; $Bin(n, p)$
   $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}$

5. Геометрическое; $Geom(p)$
   X – количество неудач до первого успеха
   $P(X = k) = q^k p, k \in \mathbb{N}_0$
   Альтернативная интерпретация геометрического распределения
   X – номер первого успеха
   $P(X = k) = q^{k-1} p, k \in \mathbb{N}$

6. Отрицательное биномиальное; $NB(r, p), p \in (0, 1), r > 0$

   - $r \in \mathbb{N}:$
     $X \sim NB(r, p) \Leftrightarrow X$ – номер r-ого успеха (начало отсчета в r)
     $P(X = k) = P(\text{успех с номером } r \text{ случился на шаге } k + r) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r q^k$
   - Если $r \in \mathbb{R}$, то $P(X = k) = \dfrac{\Gamma(k + 1)}{\Gamma(r) k!} p^r q^k$

7. Распределение Пуассона: $Pois(\lambda), \lambda > 0$
   $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$

8. Гипергеометрическое
   $HG(M, N, K)$
   $M \in \mathbb{N}$ – количество деталей
   $N \in [1 : M]$ – количество «хороших» деталей
   $K \in [1 : M]$ – количество деталей, которые мы вытаскиваем (без возвращения)
   X – количество «хороших» деталей, которые мы вытащили
   $P(X = j) = \dfrac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}}, \max(K + N - M, 0) \leq j \leq \min(N, K)$

Пусть $M \to \infty, \dfrac{N}{M} \to p$

$P(X=j) = \dfrac{N!(M-N)!K!(M-K)!}{j!(N-j)!(K-j)!(M-N-K+j)!M!}$

$= \dbinom{K}{j} \dfrac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{M(M-1)\dots(M-N+1)} \dfrac{(M-K)\dots(M-N-K+j+1)}{} \to$

$\dbinom{K}{j} p^j (1-p)^{k-j}$

$EX = \displaystyle\sum_{j=\max(0,N+K-M)}^{\min(N,K)} j \frac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} =$

$\displaystyle\sum_{j=\max(1,N+K-M)}^{\min(N,K)} j \frac{\binom{N}{j}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} =$

$N \displaystyle\sum_j \frac{(N-1)!}{(j-1)!(N-j)!} \frac{\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M}{K}} =$

$\dfrac{NK}{M} \displaystyle\sum_j \frac{\binom{N-1}{j-1}\binom{M-N}{K-j}}{\binom{M-1}{K-1}} =$

$\dfrac{NK}{M} \underbrace{\displaystyle\sum_{i=\max(0,N+K-M-1)}^{\min(N-1,K-1)} \frac{\binom{N-1}{i}\binom{M-N}{K-i-1}}{\binom{M-1}{K-1}}}_{1} = \dfrac{NK}{M}$

6 Абсолютно непрерывные распределения

Определение

X, P_X – абсолютно непрерывные, если $\exists\, p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) \geq 0, p(x)$ – интегрируемо по Лебегу на $\mathbb{R}$

$P(X \in B) = \displaystyle\int_B p(x)\,\mathrm{d}\,x, B \in \mathcal{B}$

p – плотность

Теорема

1. $P(X=c) = 0$, т.к. $P(X=c) = \displaystyle\int_\varnothing \ldots = 0$

2. (a) $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$
   (b) $F(x)$ – непрерывна (равномерно непрерывная)
   (c) $F'(x) = p(x)$ почти везде
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}\,x = 1$
4. $P(X \in (x_0, x_0 + h)) = F(x_0 + h) - F(x_0) = p(x_0)h + o(h) \approx p(x_0)h$ при малых h

Определение (носитель)
E – носитель ($\operatorname{supp} P_X$) $\Leftrightarrow P(X \in E) = 1, E = \overline{E}, E$ наименьшее по включению