

# Математический анализ. Теория

Александр Сергеев

## 1 Friends and strangers graph

Рассмотрим связный неориентированный граф  $G$  из  $n$  вершин

В  $n - 1$  вершину поставим нумерованные фишки. Одну вершину оставим свободной

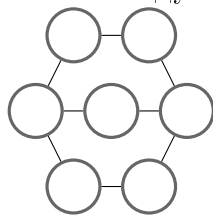
Будем перемещать фишки по ребрам (перемещать фишку можно только в пустую вершину)

Для каких графов  $G$  можно получить любое расположение фишек в графе из исходного?

**Теорема Уилсона**

Если граф  $G$ :

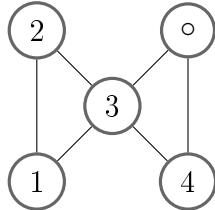
- Нет точек сочленения
- Граф не двудольный
- Граф – не цикл длины  $n \geq 4$
- $G$  – не следующий граф:



то в таком графе возможно получить любое расположение фишек, иначе невозможно

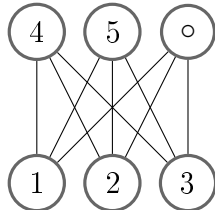
**Доказательство необходимости**

- Рассмотрим граф



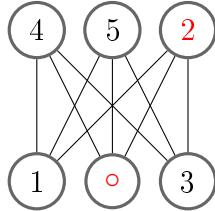
Заметим, что в таком графе 1 никогда не попадет в правую половину

- Рассмотрим двудольный граф



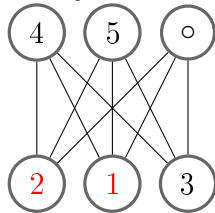
Рассмотрим его как перестановку

Поменяем 2 и 5 местами

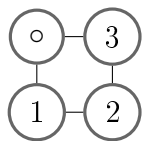


Заметим, что величина (четность перестановки + номер доли, где находится 5) не изменилась

Отсюда из исходной перестановки невозможно получить перестановку



- Рассмотрим граф:



В нем невозможно поменять порядок фишек

### Доказательство достаточности

Отсутствует...

Рассмотрим обобщение предыдущей игры:

Пусть фишки могут меняться местами, если они соседи и "друзья"

Т.е. теперь у нас два графа: "географический" граф  $X$  и граф дружбы  $Y$

В прошлой задаче граф дружбы – "звездочка" с  $\circ$  в центре (т.е.  $\circ$  дружит со всеми, а остальные не дружат между собой)

Построим граф  $FS(X, Y)$  – граф друзей и врагов

В нем будет  $n!$  вершин

Каждая вершина графа – биекция  $\sigma : V(X) \rightarrow V(Y)$

Получается, что  $\sigma$  – какой-то способ расположить фишки по вершинам (т.к.  $V(x)$  – множество вершин, а  $V(Y)$  – множество фишек)

Вершины  $\sigma$  и  $\sigma'$  соединены ребром, если они отличаются одним "дружеским" обменом

Тогда из любой перестановки можно получить любую  $\Leftrightarrow$  граф связан

Из теоремы Уилсона:  $FS(G, K_{1,n-1})$ ,  $G$  – из теоремы Уилсона,  $K_{1,n-1}$  – звездочка с вершиной  $n$  в центре

Ответим на другой вопрос: Для каких  $G$  граф  $FS(G, C_n)$ ,  $C_n$  – цикл длины  $n$  – связан

### Лемма

Графы  $FS(X, Y)$  и  $FS(Y, X)$  – изоморфны

Т.е. можно построить биекцию  $u \xleftrightarrow{\theta} u'$  такую, что ребра  $uv$  и  $\theta(u)\theta(v)$  существуют одновременно

### Доказательство

Построим биекцию  $\sigma \in FS(X, Y) \leftrightarrow \sigma^{-1} \in FS(Y, X)$

Теперь рассмотрим граф  $FS(C_n, G)$

Теперь рассмотрим следующую ситуацию:

По кругу стоят  $3n$  человек:  $n$  семей вида папа-мама-ребенок

Ребенок не может меняться со своими родителями, все остальные могут меняться между собой

//todo т.к. оффтоп, мне лень дальше конспектировать  
См. первую лекцию, начиная с 30 минуты

## 2 Функции и отображения в $\mathbb{R}^m$

### 2.1 Линейные отображения

#### Определение

$\text{Lin}(X, Y)$  – множество линейных отображений из  $X$  в  $Y$  (линейные пространства)

$\text{Lin}(X, Y)$  – линейное пространство

#### Обозначение

Пусть  $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\|A\| := \sup_{|x|=1} |A(x)|$$

#### Замечание 1

$$\|A\| \in \mathbb{R}$$

#### Доказательство

Было доказано:  $|Ax| \leq C_a|x|, C_a = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$

#### Замечание 2

Из теоремы Вейерштрасса  $\sup \leftrightarrow \max$  в конечномерном случае

#### Замечание 3

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Ax| \leq \|A\||x|$$

#### Доказательство

Для  $x = 0$  очевидно

$$\tilde{x} := \frac{x}{|x|}$$

$$|A\tilde{x}| \leq \|A\|$$

#### Замечание 4

Если  $\exists C : \forall x \quad |Ax| \leq C|x|$ , то  $\|A\| \leq C$

#### Пример

- $m = n = 1$   
 $A$  – линейное отображение:  $x \mapsto ax$   
 $\|A\| = |a|$
- $m = 1, n$  – любое  
 $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Тогда  $\exists \bar{v} \in \mathbb{R}^n Ax = x\bar{v}$   
 $\|A\| = |\bar{v}|$

- $n = 1, m$  – любое

$$A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Тогда  $\exists l \in \mathbb{R}^m : Ax = \langle x, l \rangle$

$$\|A\| = |l|$$

- $m, n$  – любые

$$A = (a_{ij})$$

$$x \mapsto Ax$$

$\|A\|$  так легко не считается((((

### Лемма

Пусть  $X, Y$  – нормированные линейное пространство

$$A \in \text{Lin}(X, Y)$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $A$  – ограничен, т.е.  $\|A\| < +\infty$
2.  $A$  – непрерывно в  $0 \in X$
3.  $A$  – непрерывно на  $X$
4.  $A$  – равномерно непрерывное ( $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|Ax_1 - Ax_2\| < \varepsilon$ )

### Доказательство

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  – очевидно

Докажем  $2 \Rightarrow 1$

Возьмем  $\varepsilon = 1$

$$\exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$$

Возьмем  $|x| = 1$

$$\|Ax\| = \frac{1}{\delta} \|A(\delta x)\| < \frac{1}{\delta}$$

$$\text{Тогда } \|A\| \leq \frac{1}{\delta}$$

Докажем  $1 \Rightarrow 4$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{\|a\|} : \forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta$$

$$\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\| |x_1 - x_2| < \varepsilon$$

**Теорема о пространстве линейных отображений**

- $\|\cdot\|$  – норма в  $\text{Lin}(X, Y)$ ,  $X, Y$  – конечномерные нормированные пространства  
Т.е.

1.  $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

3.  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

- $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$

#### Доказательство

$\|A\| \geq 0$  – тривиально

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$|(A + B)x| \leq |Ax| + |Bx| \leq \underbrace{(\|A\| + \|B\|)}_C |x| \Rightarrow \|A + B\| \leq C = \|A\| + \|B\|$$

$$|BAx| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \|A\| |x|$$

#### Замечание

В  $\text{Lin}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x| < 1} |Ax| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \forall x \in X \quad |Ax| \leq C|x|\}$$

#### Теорема Лагранжа (для отображений)

$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  – дифференцируема в  $D$  – открытом

$a, b \in D, [a, b] \subset D$

Тогда  $\exists c \in [a, b]$ , т.е.  $\exists \theta \in [0, 1] : c = a + \theta(b - a) : |F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| \|b - a\|$

#### Доказательство

$$f(t) = F(a + t(b - a)), t \in [0, 1]$$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

$$|F(b) - F(a)| = |f(1) - f(0)| \leq |f'(\theta)|(1 - 0) = |F'(a + \theta(b - a))(b - a)| \leq \|F'(a + \theta(b - a))\| \|b - a\|$$

#### Лемма

$B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$

$\exists c > 0 : \forall x \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда  $B$  – обратим и  $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

#### Доказательство

Обратимость очевидна, т.к.  $\text{Ker } B = \{0\}$ . Тогда  $\exists B^{-1}$

$$|\underbrace{B^{-1}y}_x| \leq \frac{1}{c} |BB^{-1}y| = \frac{1}{c} |y|$$

### Замечание

$\Omega_m$  – множество обратимых линейных операторов  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| |Ax|$$

$$\text{Т.е. } |Ax| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} |x|$$

### Теорема об обратимости линейного оператора, близкого к обратимому

$L \in \Omega_m$  – обратимый линейный оператор  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$M \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) : \|L - M\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|} - M \text{ – близкий к } L$$

Тогда

- $M \in \Omega_m$  – т.е.  $\Omega_m$  – открытое
- $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
- $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

### Доказательство 1 и 2

$$Mx = Lx + (M - L)x$$

$$|Mx| \geq |Lx| - |(M - L)x| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} |x| - \|M - L\| |x| = (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x|$$

1 и 2 следуют из леммы

### Доказательство 3

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{m} = \frac{m - l}{lm}$$

$$\text{Аналогично } L^{-1} - M^{-1} = M^{-1}(M - L)L^{-1}$$

$$\|L^{-1} - M^{-1}\| = \|M^{-1}(M - L)L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \|M - L\| \|L^{-1}\| \leq \text{из пункта 2}$$

### Следствие (непрерывность вычисления обратного оператора)

Отображение  $L \mapsto L^{-1}$ , заданное на  $\Omega_m$ , непрерывно

### Доказательство

Доказательство по Гейне

Рассмотрим последовательность операторов  $B_k : B_k \rightarrow L$

Проверим, что  $B_k^{-1} \rightarrow L^{-1}$

$$\text{Н.С.Н.М. } \|B_k - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$$

$$\|B_k^{-1} - L^{-1}\| \leq \underbrace{\frac{\|L^{-1}\|}{\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - B_k\|}}_{\text{огр}} \underbrace{\|L - B_k\|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

**Теорема (о непрерывно дифференцируемых отображениях)**

$F : \underbrace{D}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ , дифф. на  $D$

$F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$

Тогда  $1 \leftrightarrow 2$

1.  $F \in C^1(D)$  (все частные производные непрерывны на  $D$ )
2.  $F' : D \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$  – непрерывно на  $D$   
 $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

**Доказательство  $1 \rightarrow 2$**

Пусть  $F \in C^1(D)$

$$\forall i, j \forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$$

$$\text{Тогда } \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \leq \sqrt{\sum_{ij} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

**Доказательство  $2 \rightarrow 1$**

Пусть  $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{x} : |x - \tilde{x}| < \delta \ \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| < \varepsilon$

$h = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)^T$

$$\left| \underbrace{(F'(x) - F'(\tilde{x}))h}_{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)} \right| \leq \|F'(x) - F'(\tilde{x})\| \|h\| \leq \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{\sum_{i=1}^l \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right)^2} \leq \varepsilon$$

$$\text{Тогда для } i = i_0 - \left| \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_k}(\tilde{x}) \right| \leq \varepsilon$$

### 3 Экстремумы

**Определение**

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$



$a \in D$  – локальный максимум  $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) \leq f(a)$   
(нестрогий экстремум)

$a \in D$  – локальный строгий максимум  $f \Leftrightarrow \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap D \ f(x) < f(a)$  (строгий экстремум)

### Теорема Ферма

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \text{Int } D, f$  – дифференцируема

$a$  – экстремум

Тогда  $\forall$  направление  $l \ \frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$

### Доказательство

$g(t) = f(a + tl), t \in \mathbb{R}$  – задана в окрестности 0

$g'(0) = 0$

$$g'(t) = f'l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial l}$$

### Следствие (необходимое условие экстремума)

$a$  – локальный экстремум

Тогда  $\forall 1 \leq k \leq m \ \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$

### Следствие (т. Ролля)

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^m$  – компакт

$f$  – дифференцируема в  $\text{Int } K$  ( $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывна)

$f_{\partial K} = \text{const}, \partial K$  – граница компакта

Тогда  $\exists x_0 \in \text{Int } K : \text{grad } f(x_0) = 0$

### Доказательство

По теореме Вейерштрасса  $f$  достигает  $\max, \min$  на  $K$

Если оба на  $\partial K$ , то  $f \equiv \text{const}$  на  $K$

Иначе применим теорему Ферма

### Определение

$Q(h) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – квадратичная форма, если она представляет однородный многочлен 2 степени

т.е.  $Q(h) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m} a_{ij} h_i h_j, a_{ij} = a_{ji}$

$Q$  – положительно определенная  $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) > 0$

$Q$  – отрицательно определенная  $\Leftrightarrow \forall h \neq 0 \ Q(h) < 0$

$Q$  – неопределенная  $\Leftrightarrow \exists h : Q(h) > 0, \exists h : Q(h) < 0$

$Q$  – полуопределенная (положительно определенная вырожденная)  $\Leftrightarrow \forall h \ Q(h) \geq 0, \exists h \neq 0 : Q(h) = 0$

**Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах**

1.  $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – кв. форма,  $Q > 0$   
Тогда  $\exists \gamma_Q > 0 : \forall x \ Q(x) \geq \gamma_Q |x|^2$
2.  $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – норма  
Тогда  $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \ C_1 |x_1| \leq p(x) \leq C_2 |x_2|$

**Доказательство**

1.  $\gamma_Q := \min_{|x|=1} Q(x) > 0$   
Тогда  $Q(x) = |x|^2 Q(\frac{x}{|x|}) \geq \gamma_Q |x|^2, x \neq 0$
2. Проверим, что  $p(x)$  непрерывна, чтобы доказать существование минимума и максимума:  
 $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = p(\sum (x_k - y_k) \bar{e}_k) \leq \sum |x_k - y_k| p(e_k) \leq$   
 $M |x - y|, M = \sqrt{\sum p(e_k)^2}$  – по КБШ  
 $C_1 = \min_{|x|=1} p(x), C_2 = \max_{|x|=1} p(x)$   
 $p(x) = |x| p(\frac{x}{|x|}) \leq |x| C_2, \geq |x| C_1$

**Напоминание**

$$f(x+h) = f(x) + df(x, h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, h) + \dots$$

$$d^2 f(x, h) = f''_{x_1 x_1}(x) h_1^2 + \dots + f''_{x_n x_n}(x) h_n^2 + 2f''_{x_1 x_2}(x) h_1 h_2 + \dots$$

**Теорема (достаточное условие экстремума)**

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int } D, \text{grad } f(a) = 0, f \in C^2(D)$

$Q(h) := d^2 f(a, h)$

Тогда  $Q > 0 \Rightarrow a$  – локальный минимум

$Q < 0 \Rightarrow a$  – локальный максимум

$Q \leq 0$  – не точка локального экстремума

$Q \geq 0$  – информации недостаточно

**Доказательство**

$$\forall h \ \exists t \in (0, 1) : f(a+h) = f(a) + \underbrace{df(a, h)}_0 + \frac{1}{2!} d^2 f(a+th, h) - \text{остаток в}$$

формуле Лагранжа

$$f(a+h)-f(a) = \frac{1}{2!}Q(h) + \frac{1}{2!}(\underbrace{f''_{x_1x_1}(a+th)h_1^2 - f''_{x_1x_1}(a)h_1^2}_{|\text{б.м.}\cdot h_i^2|=o(|h|^2)} + \dots + \underbrace{f''_{x_1x_2}h_1h_2 - f''_{x_1x_2}(a)h_1h_2}_{|\text{б.м.}\cdot h_ih_j|=o(|h|^2)} + \dots)$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(h) - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{2}\gamma_Q|h|^2 - |\alpha(h)||h|^2 \geq \frac{1}{4}\gamma_Q|h|^2 > 0, \alpha(h) - \text{б.м.}, \text{ при достаточно малых } |h|$$

Пункт 1 доказан

Пункт 2 доказывается заменой  $f \rightarrow -f$

Пункт 3:  $h : Q(h) > 0, \tilde{h} : Q(\tilde{h}) < 0$

$$\text{Аналогично п.1. } f(a + s \cdot h) - f(a) \geq \frac{1}{2}Q(sh) - |\alpha(s)|s^2 = \frac{1}{2}Q(h)s^2 - |\alpha(s)|s^2 \geq \frac{1}{4}Q(h) \cdot s^2$$

С другой стороны  $f(a + s \cdot \tilde{h}) < 0$  по аналогичным соображениям

Пункт 4:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, a = (0, 0)$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$$

$Q(h) = 2h_1^2$  – полуопределенный

Тут нет экстремума

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$  – в нуле экстремум

## 4 Функциональные последовательности и ряды

### 4.1 Равномерная сходимость последовательностей и функций

#### Определение

Последовательность функций – отображение  $N \rightsquigarrow$  множество функций

Пусть  $f_1(x), f_2(x), \dots : X \rightarrow \mathbb{R}, X$  – любое множество

Последовательность  $(f_n)$  сходится поточечно на  $E$  – существует функция  $f(x)$

$$f_n \xrightarrow{E} f$$

$$\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Последовательность  $(f_n)$  сходится равномерно на  $E$  к функции  $f$

$$f_n \rightrightarrows_E f \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \underbrace{\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = \rho(f_n, f) \leq \varepsilon}$$

**Замечание**

$f \rightrightarrows f$  на  $E, E_0 \subset E$

Тогда  $f_n \rightrightarrows_{E_0}$

**Замечание**

$f_n \rightrightarrows_E f$

Тогда  $f_n \xrightarrow[E]{} f$

**Замечание**

$\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{огр.}\}$

Тогда  $\rightarrow (f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$  является метрикой на  $\mathcal{F}$

**Доказательство**

Первые две аксиомы очевидны

Докажем неравенство треугольника

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \rho(f, g) - \varepsilon < |f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x_0) - h(x_0)| + |h(x_0) - g(x_0)| \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

Отсюда  $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$

**Замечание**

$f_n \rightrightarrows f$  на  $E_1$  и на  $E_2$

Тогда  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E_1 \cup E_2$

**Теорема 1 (Стокса - Зайдля)**

$X$  – метрическое пространство

$f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$c \in X, f_n$  – непрерывная в  $c$

$f_n \rightrightarrows f$  на  $X$

Тогда  $f$  – непрерывна в  $c$

**Доказательство**

Дано утверждение о равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)|$$

Начиная с некоторого большого  $n$  :

$$|f(x) - f(c)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon} + |f_n(x) - f_n(c)| + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{< \varepsilon}$$

Т.к.  $f_n$  непрерывна, то  $\exists U(c) : \forall x \in U(c) \quad |f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$

Отсюда  $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists U(c) : \forall x \in U(c) |f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$

**Замечание**

Вместо метрических пространств можно рассматривать топологические пространства (без изменения доказательства)

**Следствие**

$f_n \in C(X), f_n \Rightarrow f$  на  $X$ . Тогда  $f \in C(X)$

**Следствие 2**

$f_n \in C(X), \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$  на  $W(c)$ . Тогда  $f \in C(X)$

**Замечание**

$f_n \Rightarrow f$  на  $X \not\Rightarrow \forall c \exists W(c) : f_n \Rightarrow f$

Пример:  $f_n = x^n, x \in (0, 1)$

$f \equiv 0$

Рассмотрим точку  $x$  в  $(\alpha, \beta), \beta \neq 1$

$\rho(f_n, f) = \beta^n \rightarrow 0$

$f_n(x) \Rightarrow f$  на  $(\alpha, \beta)$

Но  $\rho(f_n, f) = 1$  на  $(0, 1)$

$f_n \not\Rightarrow f$  на  $(0, 1)$

**Теорема**

$X$  – компакт

$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$  в  $C(X)$

Тогда  $(C(X), \rho)$  – полное метрическое пространство

(фунд. – это  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, n > N \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ )

**Доказательство**

Пусть  $f_n$  – фундаментальная последовательность в  $C(X)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \rho(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Тогда  $\forall x_0 \in X$  последовательность  $n \mapsto f_n(x_0)$  – фунд. вещ. посл.

Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$  – конечная

Проверим, что  $f_n \Rightarrow f, f \in C(X)$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  (предельный переход  $m \rightarrow \infty$ )

Т.е.  $f_n \Rightarrow f$  на  $X$

$f \in C(X)$  по теореме 1

**Замечание**

$\mathcal{F}(X)$  = пространство ограниченных функций на  $X$

$(\mathcal{F}(X), \rho)$  – полное м.п.

**Доказательство**

Аналогичное

**Теорема (критерий Больцано-Коши)**

$f_n \in C(X)$

$\exists f \in C(X) : f_n \Rightarrow f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

## 4.2 Предельный переход под знаком интеграла

Подумаем о следующем правиле:  $f_n \rightarrow f \Rightarrow \int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

**Анти-пример**

$f_n(x) = nx^{n-1}(1-x^n), x \in [0, 1], f_n \rightarrow f \equiv 0$

$$\int_0^1 nx^{n-1}(1-x^n) dx = \int_{t=x^n}^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

**Теорема 2**

$f_n \in C[a, b]$

$f_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$

Тогда  $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$

(по т.1.  $f$  – непрерывна)

**Доказательство**

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b f_n - f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup |f_n - f|(b-a) \rightarrow 0$$

**Следствие (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру)**

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall x, y \exists f'_y(x, y)$  и  $f, f'_y$  – непрерывные на  $[a, b] \times [c, d]$

Тогда для  $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  верно, что  $\Phi$  – дифференцируема на  $[c, d]$

и  $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

**Доказательство**

$$\frac{\Phi(y+t_n) - \Phi(y)}{t_n} = \int_a^b \frac{f(x, y+t_n) - f(x, y)}{t_n} dx \quad \text{по т.Лагранжа} = \int_a^b f'_y(x, t +$$

$$\Theta_x t_n) dx \xrightarrow{(*)} \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Проверим (\*):

Вспомним теорему Кантора о равномерной непрерывности

$f \in C(K)$ . Тогда  $f$  – равномерно непрерывная

Т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists \delta > 0}_{\exists N: \forall n > N \quad |t_n| < \delta} : \forall x, \bar{x} : \rho(x, \bar{x}) < \delta \quad |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

Тогда  $\rho((x, y + \Theta_x t_n), (x, y)) < \delta$

И значит  $|f(x, y + \Theta_x t_n) - f(x, y)| < \varepsilon$

Т.е.  $|\int_a^b f'_y(x, y + \Theta_x t_n) - \int_a^b f'_y(x, y)| \leq \varepsilon(b - a)$

**Теорема 3 (о предельном переходе по знаку производной)**

Пусть  $f_n \in C^1\langle a, b \rangle$

$f_n \rightarrow f_0$  поточечно на  $\langle a, b \rangle$

$f'_n \Rightarrow \phi$  на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f_0 \in C^1\langle a, b \rangle, f'_0 = \phi$  на  $\langle a, b \rangle$

**Пояснение**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x))'$$

**Доказательство**

$[x_0, x_1] \subset \langle a, b \rangle$

$f'_n \Rightarrow \phi$  на  $[x_0, x_1]$  (отсюда  $\phi$  непрерывна)

Тогда по т.2  $\int_{x_0}^{x_1} f'_n \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \phi$

$$\underbrace{f_n(x_1) - f_n(x_0)}_{\rightarrow (f_0(x_1) - f_0(x_0))} \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \phi$$

Т.о.  $f_0$  – первообразная  $\phi$

$\phi$  – непрерывна по т.1

Отсюда  $f'_0 = \phi$

**Определение**

$u_n(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum u_n(x_0)$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x), S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$S_N \Rightarrow S$  на  $E \Leftrightarrow$  ряд равномерно сходится в  $E$

$$\Leftrightarrow M_N = \sup_{x \in E} \left| \sum_{n > N} u_n(x) \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

**Теорема (признак Вейерштрасса)**

$$\sum u_n(x), x \in E$$

Пусть  $\exists (c_n) \in R : \forall x \in E |u_n(x)| \leq c_n$

и  $\sum c_n$  – сходится

Тогда  $u_n$  равномерно сходится на  $E$

**Доказательство**

Рассмотрим  $M_N = \sup_{x \in E} \left| \sum_{n > N} u_n(x) \right| \leq \sum_{n > N} c_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

**Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости**

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall k \in \mathbb{N} \forall x \in E |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| < \varepsilon$

эквивалентно равномерной сходимости

(если нет равномерной сходимости, то нет и критерия Больцано-Коши)

**Пример**

$$\sum \frac{x}{1 + n^4 x^2}, x \in (0, +\infty)$$

Есть ли равномерная сходимость?

$$c_n = \max_x \frac{x}{1 + n^4 x^2} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\sum c_n = \sum \frac{1}{2n^2} \text{ – сходится (т.е. есть равномерная сходимость)}$$

**Пример 2**

$$\sum \frac{1}{1 + n^4 x^2}, x \in (0, +\infty)$$

$$c_n = \frac{1}{2n}, \sum \frac{1}{2n} \text{ – расходится}$$

Применим критерий Больцано-Коши

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{17} : \forall N \exists n > N, m = n, x = \frac{1}{n^2} : |u_{n+1}(x) + \dots + u_{2n}(x)| \geq$$

нижняя оценка числителя

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n^2}}}{1 + (n+1)^4 \frac{1}{n^4}} + \dots + \frac{2n^{\frac{1}{n^2}}}{1 + (2n)^4 \frac{1}{n^4}} \geq n \frac{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{оценка числителя}}}{\underbrace{17}_{\text{верхняя оценка знаменателя}}} = \frac{1}{17}$$

**Теорема 1' (Стокса-Зайдля для рядов)**

$u_n : X \rightarrow \mathbb{R}, X$  – метрическое пространство

$u_n$  – непрерывно в  $x_0 \in X$

$\sum u_n$  – равномерно сходится в  $X$

Тогда  $S(x) = \sum u_n$  – непрерывно в  $x_0$

**Доказательство**

$f_n \leftrightarrow S_n, f \leftrightarrow S$  + теорема Стокса-Зайдля для функций

**Пример**



$$\sum \frac{x}{1+n^4x^2} - \text{непрерывно}$$

**Пример 2**

$$\sum \frac{nx}{1+n^4x^2}$$

Возьмем  $x_0 > 0$  и окрестность  $(a, b) : 0 < a < x < b$

$$\left| \frac{nx}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{nb}{1+n^4a^2} =: c_n$$

$$\sum c_n - \text{сходится}$$

Тогда наш ряд равномерно сходится в  $(a, b)$

Тогда он непрерывен

**Теорема 2'**

$$u_n \in C[a, b]$$

$$\sum u_n \text{ равномерно сходится на } [a, b]$$

$$S(x) = \sum u_n(x)$$

$$\text{Тогда } \int_a^b S(x) dx = \sum \left( \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

**Доказательство**

Применим теорему 2

$$\int_a^b S(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b S$$

$$\int_a^b \left( \sum_{k=1}^n u_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \int_a^b u_k \right)$$

**Пример**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n - \text{равномерно сходится на } [-q, q], \text{ где } 0 < q < 1$$

$$|(-1)^n x^n| \leq q^n, \sum q^n - \text{сходится (т. Вейерштрасса)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x} \int_0^q \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+q) =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \dots, q \in (-1, 1)$$

Заметим, что формула верна и при  $q = 1$ , но исходный ряд не будет сходиться, т.к. слагаемые не будут бесконечно малыми нснм

**Пример 2**

Ряд  $q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \dots$  равномерно сходится на  $[0, 1]$

по секретному приложению к признаку Лейбница

$$|\sum_{n>N} (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n}| \leq \frac{q^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0 \text{ (тогда равномерно сходится)}$$

Тогда сумма в правой части непрерывна на  $[0, 1]$  по Т.1'

Тогда формула из примера 1 «продолжается» по непрерывности на точку

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

**Теорема 3' (о дифференцировании ряда по параметру)**

$$u_n \in C^1 \langle a, b \rangle$$

$$1. \sum u_n(x) = S(x) - \text{поточечная сходимость на } \langle a, b \rangle$$

$$2. \sum u'_n(x) = \phi(x) - \text{равномерная сходимость на } \langle a, b \rangle$$

Тогда  $S(x) \in C^1$  и  $S' = \phi$  на  $\langle a, b \rangle$

Другими словами,  $(\sum u_n(x))' = \sum u'_n(x)$ , если исходный ряд равномерно сходится

**Доказательство**

Применим Т.3:

$$f_n = S_n, f_0 = S$$

$$f'_n = \sum_{k=1}^n u'_k(x), \phi = \phi$$

**Пример**

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{x}{n}) e^{-\frac{x}{n}}$$

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$$

$$(\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})' = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{x}{n(n+x)}$$

$$\sum -\frac{x}{n(n+x)} - \text{сходится}$$

Проверим, что ряд равномерно сходится при больших  $x$

$m > 0, x \in (0, m)$

$$|-\frac{x}{n(n+x)}| \leq \frac{M}{n(n+M)}$$

$$\sum \frac{M}{n(n+M)} \leq +\infty$$

По признаку Вейерштрасса  $\sum -\frac{x}{n(n+x)}$  – равномерно сходится на  $(0, M)$

$\sum (\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n})$  – дифференцируемо при  $x > 0$

$\Gamma(x) = xe^{\gamma x} \exp(\sum (\ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}))^{-1}$  – дифференцируемо при  $x > 0$  и ее производная непрерывна

На самом деле  $\Gamma \in C^\infty$

**Теорема 4' (о почленном предельном переходе в суммах)**

$u_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, X$  – м.п.

$x_0 \in E, x_0$  – предельная точка в  $E$

Пусть

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$
2.  $\sum u_n(x)$  – равномерно сходится на  $E$

Тогда

1.  $\sum a_n$  – сходится
2.  $\sum a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum u_n(x)$

**Доказательство п.1**

Докажем сходимость

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

$$S_n^a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Проверим фундаментальность  $S_n^a$

Возьмем  $\varepsilon > 0$

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq \underbrace{|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0, \text{ чтобы } \dots < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_{n+p}(x) - S_n(x)|}_{\text{выберем } x \text{ близко к } x_0, \text{ чтобы } \dots < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_n(x) - S_n^a|}_{\varepsilon} < \varepsilon$$

Из равномерной сходимости  $\sum u_n(x)$ :

$$\exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall x |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{Отсюда } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |S_{n+p}^a - S_n^a| < \varepsilon$$

## Доказательство п.2

Результат следует из теоремы Стокса-Зайделя

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{u}_n(x)$  – непрерывная в  $x_0$

$$\sup_{E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{n \geq N} \tilde{u}_n(x) \right| \leq \underbrace{\sup_E \left| \sum_{n \geq N} u_n(x) \right|}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left| \sum_{n \geq N} a_n \right|}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$\sum \tilde{u}_n$  – равномерно сходится на  $E \cup \{x_0\}$

## Теорема 4 (перестановки в предельных переходах)

$f_n : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, x_0$  – предельная точка  $E$

1.  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$  – конечный
2.  $\exists S : E \rightarrow \mathbb{R} : f_n \rightrightarrows_{n \rightarrow +\infty} S$  на  $E$

Тогда

1.  $\exists \lim A_n = A$  – конечный
2.  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

$$\text{Т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

## Доказательство

Применим теорему 4'

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leftrightarrow S_n(x) \\ u_n &\leftrightarrow f_n - f_{n-1} \text{ (за исключением } u_1 = f_1) \\ a_k &\leftrightarrow A_k - A_{n-1} \text{ (кроме } a_1 = A_1) \\ \sum u_n(x) &\leftrightarrow S(x) \end{aligned}$$

## Замечание

$$f_n \rightrightarrows S \text{ на } E$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sup_{x \in E} |f_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

Определим равномерный предел при  $t \rightarrow t_0$

$f : E \times D \rightarrow \mathbb{R}, E$  – множество,  $D \subset Y$  – м.п.,  $t_0$  – предельная точка  $D$

$$f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} h(x), \text{ где } h : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U(t_0) : \forall t \in U(t_0) \sup_{x \in E} |f(x, t) - h(x)| < \varepsilon$$

**Теорема 4''**

$f : E \times D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset X$  – м.п.,  $D \subset Y$  – м.п.,  $x_0$  – предельная точка  $E$ ,  $t_0$  – предельная точка  $D$

1.  $\forall t \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = A(t)$  – конечный
2.  $f(x, t) \rightrightarrows_{t \rightarrow t_0} S(x)$ , где  $S : E \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда

1.  $\exists$  конечный  $\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$

**Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости ряда)**

Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ ,  $x \in X$

Пусть

1.  $\exists C_A : \forall N \forall x \left| \sum_{n=1}^N a_n(x) \right| \leq C_A$   
(частичные суммы ряда  $\sum a_n(x)$  равномерно ограничены)
2.  $b_n(x) \rightrightarrows_{n \rightarrow \infty} 0$  на  $X$  и  $\forall x$   $b_n$  монотонна при каждом фиксированном  $x$

Тогда  $\sum a_n(x)b_n(x)$  – равномерно сходится на  $X$

**Доказательство**

$$\sum_{N \leq k \leq M} a_k b_k = A_M b_M - A_{N-1} b_{N-1} + \sum_{N \leq k \leq M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

$$A_k = a_1 + \dots + a_k$$

Из равномерной сходимости:  $\forall \varepsilon > 0 \exists T : \forall M, N > T \sup |b_M(x)| < \varepsilon; \sup |b_{N-1}(x)| < \varepsilon, \sup |b_{M-1}(x)| < \varepsilon, \sup |b_N(x)| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{N \leq k \leq M} a_k(x) b_k(x) \right| \leq |A_M| |b_M| + |A_{N-1}| |b_{N-1}| + \sum |b_k - b_{k+1}| |A_k| \leq C_A (|b_M| + |b_{N-1}| + |b_N|) < 4C_A \varepsilon$$

**Следствие (признак Абеля)**

$$\sum a_n(x) b_n(x), x \in E$$

1.  $\sum a_n(x)$  равномерно сходится на  $E$
2.  $b_n$  монотонно по  $n$  при каждом  $x$   
 $b_n(x)$  – равномерно ограничена:  $\exists C_B : \forall x \forall n |b_n(x)| \leq C_B$

Тогда  $\sum a_n(x)b_n(x), x \in E$  равномерно сходится на  $E$

**Пример**

$$f(x) = \sum \frac{\sin nx}{n^3}, x \in \mathbb{R}$$

$f$  – непрерывно по признаку Вейерштрасса:  $|\frac{\sin nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3}, \sum \frac{1}{n^3}$  – сходится

$f$  – дифференцируемо:  $f' = \sum \frac{\cos nx}{n^2}$  – это выполнено по теореме 3', т.к. ряд равномерно сходится

Но дважды не дифференцируемо, т.к. нет равномерной сходимости

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{100} : \forall N \exists n > N : \exists m = n \exists x = \frac{1}{n} : \left| \frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \dots + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right| > \varepsilon$$

$$\frac{\sin \frac{n+1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin \frac{2n}{n}}{2n} > \frac{1}{20}$$

Тогда докажем локальную равномерную сходимость (в окрестности некоторой точки)

В окрестности не должно быть  $2\pi k$ , иначе аналогично доказательству

Рассмотрим окрестность  $(\alpha, \beta), 2\pi k \notin (\alpha, \beta)$

$$a_n = \sin nx, b_n(x) = \frac{1}{n} - \text{монотонно, } b_n \Rightarrow 0$$

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq |\operatorname{Im}(e^{ix} + \dots + e^{inx})| \leq |e^{ix} \frac{1}{|e^{inx} - 1|}|e^{ix} - 1| \leq$$

$$\frac{2}{|e^{ix} - 1|} \leq \frac{2}{d}, d = \min(|e^{i\alpha} - 1|, |e^{i\beta} - 1|)$$

Т.о.  $\forall x_0 \in (0, 2\pi) \exists U(x_0)$  на которой имеется равномерная сходимость

$$\text{Таким образом } f''(x) = \sum -\frac{\sin nx}{n} \quad \forall x \in (0, 2\pi)$$

*Спойлер:*  $\sum \frac{\sin nx}{x}$  – не непрерывна в 0 – там имеется скачок

$$\nexists f''(0)$$

### 4.3 Степенные ряды

#### Определение

$$B(z_0, r) \in \mathbb{C} := \{z : |z - z_0| < r\}$$

Степенной ряд:  $\sum a_n(z - z_0)^n$ ,  $z_0 \in C$ ,  $a_n$  – комплексная последовательность

#### Теорема (о круге сходимости степенного ряда)

$$\sum a_n(z - z_0)^n$$

Тогда выполнено ровно одно из трех

1. Ряд сходится при всех  $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится только при  $z = z_0$
3.  $\exists R \in (0, +\infty)$  : при  $|z - z_0| > R$  – расходится;  $|z - z_0| < R$  – ряд сходится абсолютно

#### Утверждение

$$\sum a_n - \text{сходится} \Leftrightarrow \sum \operatorname{Re} a_n, \sum \operatorname{Im} a_n - \text{сходятся}$$

#### Доказательство

Изучим ряд на абсолютную сходимость

Применим признак Коши: изучим  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \overline{\lim} |z - z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ :

При  $\dots < 1$  – абсолютно сходится

При  $\dots > 1$  – расходится, т.к. слагаемые  $\not\rightarrow 0$

Рассмотрим  $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$

1.  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  – всегда сходится (случай 1)
2.  $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$  – тогда сходится при  $z = z_0$ , иначе расходится (случай 2)
3.  $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} =: R$  – сходится в  $B(z_0, R)$  (случай 3)

$R$  – радиус сходимости

$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$  – формула Коши-Адамара

Если применим признак Даламбера, то  $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

#### Пример

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$S_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - z}$$

Сходится при  $|z| < 1$

При  $|z| = 1$  ряд расходится

$$R = 1$$

$$2. \sum \frac{z^n}{n}, R = 1$$

Рассмотрим  $|z| = 1$ :  $z = 1$  – расходится;  $z = -1$  – сходится

$$z = e^{i\phi}: \sum \frac{e^{in\phi}}{n} = \sum \frac{\cos n\phi}{n} + i \sum \frac{\sin n\phi}{n}, \text{ – сходится при } \phi \in (0, 2\pi)$$

Т.е. сходимость при  $|z| \leq 1$ , кроме  $z = 1$

$$3. \sum \frac{z^n}{n^2}, R = 1$$

Рассмотрим  $|z| = 1$

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ – сходится при } |z| \leq 1$$

$$4. \sum n! z^n \text{ – сходится при } z = 0$$

$$5. \sum \frac{z^n}{n!}, R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \dots}}} = \frac{1}{\lim \frac{e}{n}} = +\infty \text{ – сходится}$$

при всех  $z \in \mathbb{R}$

**Теорема (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)**

$$\sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$$

Тогда

1. Для  $r : 0 < r < R$  ряд равномерно сходится на  $\overline{B}(z_0, r)$

2.  $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$  – непрерывна на  $B(z_0, R)$

**Доказательство**

1. по признаку Вейерштрасса

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n$$

$\sum |a_n| r^n$  – сходится: подставим в ряд  $z := z_0 + r$  – должен абсолютно сходиться



2. Проверим, что  $a_n(z - z_0)^n$  – непрерывная функция:

Возьмем  $z_1 \in B(z_0, R)$

Возьмем  $r : |z_1 - z_0| < r < R$

В круге  $\overline{B}(z_0, r)$  есть равномерная сходимость  $\Rightarrow$  есть непрерывность

### Определение

Будем считать комплексную функцию дифференцируемой, если  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

$A = f'(z)$  (двойной предел)

Эквивалентно  $f(z) = f(z_0) + A \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$  Т.к. мы ввели другое определение производной, не будем пользоваться теоремой 2

### Лемма

Пусть  $w, w_0 \in \mathbb{C}, r > 0$

$|w| < r, |w_0| < r$

$|w^n - w_0^n| = |(w - w_0)(w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \dots + ww_0^{n-2} + w_0^{n-1})| \leq |w - w_0|nr^{n-1}$

### Теорема (о почленном дифференцировании ряда)

Пусть ряд А:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$

Ряд А':  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

Тогда

1. А' имеет тот же радиус сходимости

2. Если  $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ , то  $\forall z \in B(z_0, R)$   $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

### Доказательство

Множество сходимости ряда А' такое же, как у ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$

$$R^{(A')} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Возьмем  $a$  в окрестности сходимости

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)} = \left[ \begin{array}{l} w = z - z_0 \\ w_0 = a - z_0 \end{array} \right] = \sum a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \xrightarrow{w \rightarrow w_0} \sum a_n n w_0^{n-1}$$

– при условии наличия равномерной сходимости в  $U(w_0)$

Воспользуемся леммой, взяв  $|a - z_0| < r < R$

Тогда при  $|w| < r$  (и  $|w_0| < r$ ):  $|a_0 \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}| \leq n|a_n|r^{n-1}$

$\sum n a_n r^{n-1}$  – ряд А' в точке  $z_0 + r$  – абсолютно сходится

Т.о. в  $B(z_0, r)$  ряд  $\sum a_n \frac{(z - z_0)^n - (a - z_0)^n}{(z - z_0) - (a - z_0)}$  равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

### Следствие 1

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n, 0 < R \leq +\infty$$

Тогда  $f \in C^\infty(B(z_0, R))$

и все производные получаются почленным дифференцированием

### Следствие 2

$$a_n, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n, x \in \mathbb{R} \text{ при } |x - x_0| < R$$

Тогда при почленном интегрировании радиус сходимости сохраняется и

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

### Теорема (Метод Абеля суммирования рядов)

Пусть  $\sum c_n$  сходится

$$f(x) := \sum c_n x^n, x \in (-1, 1)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum c_n$$

### Доказательство

Признак Абеля:  $a_n(x) \leftrightarrow c_n$

$$b_n(x) = x^n - \text{здесь считаем, что } x \in [0, 1)$$

Отсюда  $\sum c_n x^n$  равномерно сходится на  $[0, 1)$

Тогда  $R \geq 1 \Rightarrow$  равномерно сходится на  $(-1, 1)$

По Т.4' о предельном переходе в сумме предел суммы ( $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ ) равен

сумме пределов  $\sum c_n$

### Следствие

$$\sum a_n = A$$

$$\sum b_n = B$$

$$c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_0 b_n$$

Пусть ряд  $\sum c_n$  сходится и  $\sum c_n = C$

Тогда  $AB = C$

**Доказательство**

$$f(x) = \sum a_n x^n, g(x) = \sum b_n x^n, h(x) = \sum c_n x^n$$

$x \in (0, 1)$  – ряды сходятся абсолютно

Тогда  $f(x)g(x) = h(x)$

Тогда из предельного перехода  $x \rightarrow 1 - 0$   $AB = C$

**Пример**

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(xf')' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$xf' = -\ln(1-x) + c$$

Из  $f(0) : c = 0$

$$\text{Тогда } f' = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$\sum \frac{x^n}{n^2} = -\int_0^x \frac{1-t}{t} dt$$

$$\sum \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{1-t}{t} dt$$

## 5 Ряды Тейлора

**Определение**

$f$  раскладывается в степенной ряд в окрестности  $x_0$ ,

если  $\exists (a_n), U(x_0) : \forall x \in U(x_0) f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n$

**Замечание**

$f$  – раскладывается  $\Rightarrow f \in C^\infty(U(x_0))$

**Теорема о единственности**

$f$  – раскладывается  $\Rightarrow$  ряд определен однозначно

$(\exists! a_n)$

### Доказательство

$$\sum a_n(x-x_0)^n = f(x)$$

Тогда  $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

### Определение

Пусть  $f \in C^\infty((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$

Тогда ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  – ряд Тейлора функции  $f$  в точке (окрестности точки)  $x_0$

### Замечание

1. Ряд Тейлора может сходиться «не туда» (не к исходной функции)

К примеру,  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}, P_k - \text{многочлен степени } \leq 3k$

По следствию из т. Лагранжа функция  $k$  раз дифференцируема и  $f^{(k)}(0) = 0$

Тогда у  $f(x)$  ряд Тейлора  $\equiv 0$

Т.е. существуют  $f \in C^\infty$ , которые не раскладываются в ряд (функции, раскладывающиеся в ряд – *аналитические*)

2. Ряд Тейлора может расходиться при всех  $x \neq x_0$

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+t^2x} dx$$

//todo продолжить 00:55:24

## 6 Диффеоморфизм

### Определение

Область в  $\mathbb{R}^m$  – открытое связное множество

$f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $O$  – область

$f$  – *диффеоморфизм*, если  $f$  – обратимо,  $f, f^{-1}$  – дифференцируема

### Замечание

Если это так, то  $f^{-1} \circ f = \text{id}$

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$$

**Лемма (о «почти» локальной инъективности)**

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $O$  – область,  $x_0 \in O$ ,  $F$  – дифференцируемо в  $x_0$   
 $\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists C > 0, \delta > 0 : \forall h : |h| < \delta \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$

**Доказательство**

1.  $F$  – линейное

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |h| &= |F^{-1} \circ F \cdot h| \leq \|F^{-1}\| |Fh| \\ |F(x_0 + h) - F(x_0)| &= |Fh| \geq \frac{1}{\|F^{-1}\|} |h| \end{aligned}$$

$\delta$  – любое

$$2. \quad |F(x_0 + h) - F(x_0)| = |F'(x_0)h + \alpha(h)| \geq \underbrace{C}_{\text{из п.1}} |h| - |\alpha(h)||h|$$

$$\text{Берем } \delta, \text{ чтобы } |\alpha(h)| \leq \frac{C}{2}$$

**Замечание**

$\forall x \quad \det F'(x) \neq 0$ , то отсюда не следует инъективность

В далеких точках значения могут совпадать

**Пример**

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$$

$$\det F'(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Данное отображение склеивает точки

**Теорема о сохранении области**

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $O$  – открытое,  $\forall x \quad F$  – дифференцируемый в  $x$  и  
 $\det F'(x) \neq 0$

Тогда  $F(O)$  – открытое множество

**Доказательство**

Пусть  $x_0 \in O, y_0 = F(x_0)$

Проверим, что  $y_0$  – внутренняя точка  $F(O)$

По лемме  $\exists C, \delta : \forall h \in \overline{B(0, \delta)}$

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \geq C|h|$$

$$r := \frac{1}{2} \text{dist}(y_0, \underbrace{F(\underbrace{S(x_0, \delta)}_{\text{сфера}}))}_{\text{компакт}})$$

$r > 0$  – потому что  $\text{dist} = \inf$  на компакте, а значит  $\inf$  реализуется

Проверим, что  $B(y_0, r) \subset F(O)$

Т.е. проверим, что  $\forall y \in B(y_0, r) \exists x \in B(x_0, \delta) : F(x) = y$   
 Рассмотрим  $g(x) := |F(x) - y|^2, y \in B(y_0, r)$  – функция на  $\overline{B(x_0, \delta)}$   
 (надеемся, что она обращается в 0)

$$g(x_0) = |F(x_0) - y| < r^2$$

$$\forall x \in S(x_0, \delta) \quad g(x) \geq r^2$$

Тогда  $\min g$  достигается (т.к. функция на компакте) внутри  $B(x_0, r)$

В этой точке все частные производные = 0

Пусть в точке  $x$  достигается минимум

$$g(x) = (F_1(x) - y_1)^2 + \dots + (F_m(x) - y_m)^2$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2(F_1 - y_1) \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + 2(F_m - y_m) \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ 0 = \frac{\partial g}{\partial x_m} = 2(F_1 - y_1) \frac{\partial F_1}{\partial x_m} + \dots + 2(F_m - y_m) \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{cases}$$

$$(F(x) - y)^T F'(x) = 0$$

Т.к.  $\det F'(x) \neq 0$ , то  $g(x) = F(x) - y = 0$

Отсюда  $g(x)$  достигает 0

#### **Замечание**

$F$  – непрерывное  $\Leftrightarrow \forall \underbrace{W}_{\text{откр.}} F^{-1}(W)$  – открытое

(из определения)

#### **Замечание**

Если  $O$  – связное,  $F$  – непрерывное

Тогда  $F(O)$  – связное

(Отсюда область переходит в область)

#### **Доказательство**

Пусть это не так

Тогда  $F(O) = W_1 \cup W_2$

Тогда  $O = F^{-1}(W_1) \cup F^{-1}(W_2), F^{-1}(W_1), F^{-1}(W_2)$  – открытые и не пересекающиеся

Но это невозможно из связности

Тогда  $F(O)$  – связное

#### **Следствие**

$F : \underbrace{O}_{\text{откр}} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l, l < m$

$F \in C^1(O)$

$\forall x \in O \quad \text{rg } F'(x) = l$  (rg – ранг матрицы)

Тогда  $F(O)$  – открытое

**Доказательство**

Пусть  $x_0 \in O$

Проверим, что  $F(x_0)$  – внутренняя точка в  $F(O)$

$\text{rg } F'(x_0) = l$

Н.у.о. пусть ранг реализуется на первых  $l$  столбцах

Т.е.  $\det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x))_{i,j \in 1 \dots l} \neq 0$

Тогда  $F(x_0)$  – внутренняя в  $F(U(x_0))$ :

Рассмотрим  $U_l := \{(t_1, \dots, t_l) : (t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \in U(x_0)\}$  –  $l$ -мерная окрестность

$\tilde{F} : U_l \rightarrow \mathbb{R}^l$

$(t_1, \dots, t_l) \mapsto F(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m)$

$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial t_j} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t_1, \dots, t_l, (x_0)_{l+1}, \dots, (x_0)_m) \right)$

**Теорема о дифференцировании обратного отображения**

$F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, O$  – область

$F \in C^r(O), r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Пусть  $F$  – обратимо и невырождено ( $\forall x \det F'(x) \neq 0$ )

Тогда  $F^{-1} \in C^r$  (отсюда  $(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$ )

**Доказательство**

Индукция по  $r$

База:  $r = 1$

Пусть  $S = F^{-1}$

$S$  – непрерывна по теореме о сохранении области (по топологическому определению)

Возьмем  $x_0 \in O, y_0 = F(x_0) \in O_1, O_1 = F(O)$

По лемме  $\exists C, \delta : \forall x \in B(x_0, \delta) |F(x) - F(x_0)| \geq C|x - x_0|$

$A = F'(x_0)$

$\underbrace{F(x)}_y - \underbrace{F(x_0)}_{y_0} = A(\underbrace{x}_{S(y)} - \underbrace{x_0}_{S(y_0)}) + \alpha(x)|x - x_0|$

$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha(S(y))|S(y) - S(y_0)|$

Надо проверить:  $\beta(y) = |S(y) - S(y_0)|A^{-1}\alpha(S(y)) = o(|y - y_0|)$

Пусть  $|x - x_0| = |S(y) - S(y_0)| < \delta$  – выполнено при  $y$  близких к  $y_0$

$|\beta(y)| = |S(y) - S(y_0)||A^{-1}\alpha(S(y))| \leq \frac{1}{C}|F(x) - F(x_0)|||A^{-1}|||\alpha(S(y))| =$

$$\frac{\|A^{-1}\|}{C} |y - y_0| |\alpha(S(y))| = o(|y - y_0|)$$

Отсюда  $S$  – дифференцируемо

Проверим, что в  $S \in C^1$ ,  $S' = A^{-1}$

$$y \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} S(y) = x \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} T'(x) = A \underbrace{\mapsto}_{\text{непр}} A^{-1}$$

Индукционный переход:

Проведем цепочку вычислений:

$$y \mapsto F^{-1}(y) = x \mapsto F'(x) = A \mapsto A^{-1} = (F'(x))^{-1} = (F^{-1})'(y)$$

Переходы – композиции непрерывных отображений

Т.о.:

Пусть  $F^{-1} \in C^{r-1}$

**Лемма**

$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \leq M|h|$$

$$M = \sup_{x_1 \in [x_0, x_0 + h]} \|F'(x_1) - F'(x_0)\|$$

//todo доказать

**Теорема о локальной обратимости**

Пусть  $F \in C^1(O, \mathbb{R}^m)$  (т.е.  $F : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, F \in C^1$ )

$x_0 \in O$

$\det F'(x_0) \neq 0$

Тогда  $\exists U(x_0) : F \Big|_{U(x_0)} - \text{диффеоморфизм}$

**Доказательство**

$\exists V(x_0) : \forall x \in V \det F'(x) \neq 0$

(не представляю, откуда)

По предыдущей теореме достаточно построить окрестность  $x_0$ , где  $F$  – обратимо

$F'(x_0)$  – невырожденный

Тогда  $\exists c : \forall h |F'(x_0)h| \geq c|h|$

Тогда  $\exists U(x_0) = V(x_0) \cap B(x_0, r) \subset O$  такая, что  $\forall x \in U(x_0) \|F'(x) - F'(x_0)\| < \frac{c}{4}$  и попережнему  $\det F'(x) \neq 0$

Проверяем, что  $F$  – обратимо на  $U(x_0)$

$x \in U(x_0), y = x + h \in U(x_0)$

$$F(y) - F(x) = (F(x + h) - F(x) - F'(x)h) + (F'(x)h - F'(x_0)h) + F'(x_0)h$$

$$|F(y) - F(x)| \geq |F'(x_0)h| - |F(x + h) - F(x) - F'(x)h| - |(F'(x) - F'(x_0))h|$$

(неравенство треугольника)



$$|F(x_0 + h) - F(x_0) - F'(x_0)h| \leq M|h|$$

$$M = \sup_{x_1 \in [x_0, x_0+h]} \underbrace{\|F'(x_1) - F'(x_0)\|}_{\leq \|F'(x_1) - F'(x_0)\| + \|F'(x) - F'(x_0)\|} \leq \frac{c}{2}$$

$|F(y) - F(x)| \geq c|h| - \frac{c}{2}|h| - \frac{c}{4}|h| = \frac{c}{4}|h|$  — т.е.  $F(y) \neq F(x)$ , а значит точки не склеиваются

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — дифференцируема,  $O$  — открытое

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} =: (F'_x, F'_y)$$

**Теорема о неявном отображении**

$F : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n, F \in C^r, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Пусть  $(a, b) : F(a, b) = 0$

$\det F'_y(a, b) \neq 0$

Тогда

1.  $\exists P \subset \mathbb{R}^m, a \in P, \exists Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$

$\exists ! \phi : P \rightarrow Q \in C^r$  — гладкое

$\forall x \in P \ F(x, \phi(x)) = 0$

2.  $\phi'(x) = -(F'_y(x, \phi(x)))^{-1} F'_x(x, \phi(x))$

**Доказательство**

Построим  $\Phi : O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$

$(x, y) \rightarrow (x, F(x, y))$

$\Phi(a, b) = (0, 0)$

$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}$

$\det \Phi'(a, b) \neq 0$

$\exists \tilde{U}(a, b) : \Phi \Big|_{\tilde{U}} - \text{диффеоморфизм}$

Можно считать, что  $\tilde{U} = P_1 \times Q$

$\tilde{V} = \Phi(\tilde{U})$  — открытое

$$\exists \Psi : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}, \Psi = \Phi^{-1} \subset C^r$$

$\Phi, \Psi$  не меняют первые  $n$  координат

$$\Psi(u, v) = (u, H(u, v)), H : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^m, H \in C^r$$

Пусть  $P = \tilde{V} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_n\})$  (подмножество  $\tilde{V}$ , где последние  $n$  координат – нули)

$$\phi(x) := H(x, 0)$$

Что  $F(x, \phi(x)) = 0$  – тривиально

$$F(x, \phi(x))' = (F'_x, F'_y) \begin{pmatrix} E_m \\ \phi' \end{pmatrix} = 0$$

$$F'_x + F'_y \phi' = 0$$

Докажем единственность

$$x \in P, y \in Q$$

$$F(x, y) = 0$$

$$\Phi(x, y) = (x, 0)$$

$$(x, y) = \Psi \Phi(x, y) = \Psi(x, 0) = (x, H(x, 0)) = (x, \phi(x))$$

### Замечание

Пусть есть система

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{rg } F'(x_0) = m$$

Н.у.о. пусть ранг реализуется на  $n$  последних переменных

Обозначим последние  $n$  переменных  $x_i$  как  $y_j$

$$\text{Пусть } a = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$$

Тогда для  $\exists U(a), V(b)$

$\forall x \in U(a) \exists y \in V(b)$  – решение, которое гладко зависит от  $x$

### Определение

Пусть  $k < m$

$M \subset \mathbb{R}^m$  – простое  $k$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$  – область

$\exists \Phi : O \rightarrow M$  – биекция, гомеоморфизм ( $\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \rightarrow O$  – непрерывно)

$\Phi$  – параметризация

### Определение

Пусть  $k < m$

$M \subset \mathbb{R}^m$  – простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если

$\exists O \subset \mathbb{R}^k$  – область

$\exists \Phi : O \rightarrow M$

$\Phi \in C^r$  – гомеоморфизм ( $\Phi, \Phi^{-1} : \Phi(O) \rightarrow O$  – непрерывно)

$\forall t \in O \text{ rg } \Phi'(t) = k$

**Пример**

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

$$d\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$$

- Цилиндр

$$x = R \cos t, y = R \sin t, z = z$$

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, z) \xrightarrow{F} (R \cos t, R \sin t, z)$$

$$dF = \begin{pmatrix} -R \sin t & 0 \\ R \cos t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Шар – не является

Возьмем какую-то точку  $a$  в исходном множестве

На шаре ей будет соответствовать точка  $A$

Удалим точку  $a$  и  $A$  из исходного множества и шара соответственно

В исходном множестве возьмем петлю вокруг точки  $a$

Она не может быть стянута в одну точку

С другой стороны, петля вокруг  $a$  на шаре – может

**Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений**

$$M \subset \mathbb{R}^m, 1 \leq k < m$$

$$1 \leq r \leq +\infty$$

Тогда  $\forall p \in M$  эквивалентно:

1.  $\exists U = U(p) \subset \mathbb{R}^m$  (откр. множество)  
 $M \cap U(p)$  – простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$

2.  $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\exists f_1, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$

$$x \in M \cap \tilde{U}(p) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ f_{m-k}(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

и  $\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_{m-k}(p)$  – линейно независимые

**Доказательство  $1 \Rightarrow 2$**

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, \Phi \in C^r$  – параметризация  $M \cap U$

$\phi_1, \dots, \phi_m$  – координатные функции  $\Phi$

$p = \Phi(t^0)$

Н.у.о. пусть  $(\frac{\partial \phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\dots k}$  – невырожденная матрица

(по непрерывности можно считать, что выполнено на всем  $O$ )

$L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  – проекция  $x \mapsto (x_1, \dots, x_k)$

Посмотрим на  $L \circ \Phi$ :

$(L \circ \Phi)' = (\frac{\partial \phi_i}{\partial t_k}(t^0))_{i,j=1\dots k}$

$\det(L \circ \Phi)' \neq 0$  на  $O$

При необходимости сузим  $O$  на окрестность точки  $t^0$ , чтобы  $L \circ \Phi$  было диффеоморфизмом

$W \subset O$  – область определения  $L \circ \Phi$

$V = L \circ \Phi(W) \subset \mathbb{R}^k$

$\exists \Psi = (L \circ \Phi)^{-1}, \Psi \in C^r$

Для  $x \in V$  однозначно задано  $\Phi(\Psi(x)) \in M \cap U$

Т.е. множество  $\Phi(W)$  – график некоторого  $H : V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$

Для  $x' \in V$   $\Phi(\Psi(x)) = (x', H(x')) \Rightarrow H \in C^r$

$\Phi(W)$  – множество, открытое в  $M$ , т.к.  $\Phi$  – гомеоморфизм

Значит  $\exists \tilde{U}$  – открытое в  $\mathbb{R}^m : \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$  (теорема об открытых множествах в пространствах и подпространствах)

Можно считать, что  $\tilde{U} \subset \underbrace{V \times \mathbb{R}^{m-k}}_{\text{открытое в } \mathbb{R}^m}$

(пусть это не так. Тогда возьмем  $U' := U \cap V \times \mathbb{R}^{m-k}$ )

Определим  $f_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}, f_j \in C^r$

Тогда  $x \in \text{Im } M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow \forall j \ f_j(x) = 0$

$\begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_{m-k} \end{pmatrix} = (T_{(m-k) \times k} \ \text{diag}(-1, \dots, -1))$  – градиенты(строки) ли-

нейно независимые

**Доказательство  $2 \Rightarrow 1$**

$(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i=1, \dots, m-k, j=1, \dots, m}$  – матрица, у которой строки – градиенты  $f_i$

Можно считать, что  $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{i=1, \dots, m-k, j=k+1, \dots, m} \neq 0$

Тогда из теоремы о неявном отображении:

$\exists P((p_1, \dots, p_k)) \subset \mathbb{R}^k \exists Q((p_{k+1}, \dots, p_m)) \subset \mathbb{R}^{m-k}$

$\exists H : P \rightarrow Q : \Phi(u, H(u)) = 0$ , где  $u \in P, F = (f_1, \dots, f_{m-k})$ , равносильно

$\forall x \in M \cap (P \times Q) F(x) = 0$ , т.е.  $x = (u, H(u))$

Т.е.  $\Phi : P \rightarrow P \times Q \subset \mathbb{R}^m$

$u \mapsto (u, H(u)), H \in C^r$

$\Phi \in C^r$

$\Phi$  – гомеоморфизм, т.к.  $\Phi^{-1}$  – это проекция (а она непрерывна)

$\text{rg } \Phi' = k$

**Следствие (о двух параметризациях)**

Пусть  $M \subset \mathbb{R}^m$  –  $k$ -мерное простое  $C^r$ -гладкое многообразие

$p \in M, \exists U(p)$

$\Phi_1 : O_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p)$  – параметризация,  $\Phi_1 \in C^r$

$\Phi_2 : O_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U(p)$  – параметризация,  $\Phi_2 \in C^r$

(обе действуют инъективно)

Тогда  $\exists$  диффеоморфизм  $\Theta : O_1 \rightarrow O_2, \Theta \in C^r$

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

**Доказательство**

$\exists \Theta = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$  – гомеоморфизм

$\Theta = \Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1 \in C^r$

$\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Phi_2 \in C^r$

**Лемма**

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m, O$  – открытое множество

$\Phi$  – это  $C^1$ -параметризация некоторого  $M$  – простого гладкого многообразия в  $\mathbb{R}^m$

$t_0 \in O, \Phi(t_0) = p \in M$

Тогда  $\Phi'(t_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  – не зависит от  $\Phi$  и представляет собой  $k$ -мерное линейное подпространство в  $\mathbb{R}^m$

**Доказательство**

$\forall \Phi$  – гладкая параметризация  $\text{rg } \Phi' = k$  – образ  $k$ -мерный

Пусть есть  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – две параметризации

$\exists \psi$  – диффеоморфизм

$\psi : O_1 \rightarrow O_2$

$\Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$

$\Phi'_1 = \Phi'_2 \psi'$

Заметим, что  $E = (\psi^{-1}\psi)' = (\psi^{-1})'\psi'$

Тогда  $\psi'$  и  $(\psi^{-1})'$  – обратимые  
 $\Phi'_1(\mathbb{R}^k) = \Phi'_2\psi'(\mathbb{R}^k) = \Phi'_2(\mathbb{R}^k)$  (т.к.  $\psi(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$ )

### Определение

$M$  – простое  $k$ -мерное гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$

$p \in M$ ,  $\Phi$  – параметризация,  $\Phi(t_0) = p$

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^m$  подпространство  $\Phi'(t_0)(\mathbb{R}^k)$

Оно называется *касательным подпространством* к  $M$  в точке  $p$

Обозначается  $T_pM$

Множество  $p + T_pM$  будем называть *аффинным* пространством (касательное линейное многообразие)

### Замечание

1. Если есть  $v \in T_pM$ , то  $\exists$  гладкий путь  $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_v(0) = p$  и  $\gamma'_v(0) = v$

#### Доказательство

$\text{rg } \Phi'(t_0) = k \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^k : \Phi'(t_0)u = v$

$\tilde{\gamma}_v(s) = t_0 + t_0 + us$

$\gamma_v = \Phi \circ \tilde{\gamma}_v$

$\gamma'_v(0) = \Phi'\tilde{\gamma}'_v(0) = \Phi'(u) = v$

2.  $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$  – гладкий путь

$\gamma(0) = p$

Тогда  $\gamma'(0) \in T_pM$

#### Доказательство

Что-то рукомахательное

3. Рассмотрим касательное пространство к графику

$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y = f(x))$  – поверхность в  $\mathbb{R}^{m+1}$  – это простое  $k$ -мерное гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^{m+1}$ :

$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $\Phi(x) = (x, f(x))$  – параметризация

Тогда линейное касательное многообразие в  $(x_0, y_0)$ , где  $y = f(x_0)$ ,

задается уравнением  $y - y_0 = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0)(x_m - x_m^0)$

#### Доказательство

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} & E_m & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} f \end{pmatrix}$$

$$a \in \mathbb{R}^m$$

$$\Phi'(x) \cdot a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} a + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} a \end{pmatrix}$$

Линейное многообразие – множество векторов, перпендикулярных вектору  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0), -1 \right)$

Тогда надо проверить, что  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} f(x_0), -1 \right) \cdot \Phi'(x)a = 0$

4.  $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $O$  – открытое

$p \in O$

$U(p)$  –  $m - 1$ -мерное простое гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$  заданное уравнением  $f(x) = 0$

При это выполняется:

$f(p) = 0$

$\text{grad } f(p) \neq 0$

Тогда линейное касательное многообразие в точке  $p$  есть (\*)  $f'_{x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + f'_{x_m}(p)(x_m - p_m) = 0$

**Доказательство**

Н.у.о. пусть  $f'_{x_m}(p) \neq 0$

$\exists \phi : U(p_1, \dots, p_{m-1}) \subset \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  – вычисляет последнюю координату

$f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U(p)$ , где  $x_m = \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$

Т.е.  $U(p)$  – есть график  $\phi$  над  $U(p_1, \dots, p_{m-1})$

Тогда уравнение касательного линейного многообразия (\*\*)  $x_m -$

$$\begin{aligned}
p_m &= \phi'_{x_1}(x_1 - p_1) + \dots + \phi'_{x_{m-1}}(x_{m-1} - p_{m-1}) \\
\text{Мы знаем, что } f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) &= 0 \\
f'_{x_1} + f'_{x_m} \phi'_{x_1} &= \dots = f'_{x_{m-1}} + f'_{x_m} \phi'_{x_{m-1}} = 0 \\
\text{Домножим } (**) \cdot f'_{x_m} &= (*), \text{ ч.т.д.}
\end{aligned}$$

## 6.1 Относительный (= условный) экстремум

### Определение

$$f : E \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$M_\Phi = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : \Phi(x) = 0\}$$

( $\Phi(x) = 0$  – уравнения связи)

$$x_0 \in E$$

$$\Phi(x_0) = 0, \text{ т.е. } x_0 \in M_\Phi$$

$x_0$  – точка относительного локального максимума, если  $x_0$  – локальный

максимум  $f \Big|_{M_\Phi}$

Т.е.  $\exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) : \Phi(x) = 0 \quad f(x_0) \geq f(x)$

## 7 Экспонента

### Определение

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, R = +\infty$$

### Свойства

$$1. \exp(0) = 1$$

$$2. \exp(z)' = \exp(z)$$

$$3. \overline{\exp(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z})$$

$$4. \forall z, w \in \mathbb{C} \quad \exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

**Доказательство**



$$\begin{aligned} \exp z \exp w &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z^k}{k!} + \frac{z^{k-1}w^1}{(k-1)!1!} + \dots + \frac{w^k}{k!} \right) = \dots - \\ &\text{по теореме Коши о произведении рядов} \\ \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{k!z^k}{k!} + \frac{k!z^{k-1}w^1}{(k-1)!1!} + \dots + \frac{k!w^k}{k!} \right) \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (C_k^0 z^k + C_k^1 z^{k-1} w^1 + \\ &\dots + C_k^k w^k) \frac{1}{k!} = \sum \frac{(z+w)^k}{k!} \end{aligned}$$

Тогда из 1, 2, 4  $\exp$  – показательная функция из теоремы о существовании показательной функции

**Следствие**

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \exp(z) \neq 0$$

**Доказательство**

$$\text{Пусть } \exists z : \exp(z) = 0$$

$$\text{Тогда } \forall w \quad \exp(z+w) = \exp(z) \exp(w) = 0$$

$$\text{Пусть } w = u - z$$

$$\text{Тогда } \forall u \quad \exp(z+u-z) = \exp(u) = \exp(z) \exp(u-z) = 0$$

$\exp(u) \equiv 0$  – что неверно

Пусть  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Обозначим } e^{ix} = \alpha(x) + i\beta(x)$$

$$\text{Тогда } e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \alpha(x) - i\beta(x)$$

$$\alpha(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\beta(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{Тогда } \alpha(x) = \frac{1}{2} \sum \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ (похоже на } \cos x \text{)}$$

$$\beta(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \text{ (похоже на } \sin x \text{)}$$

(желающие могут думать, что  $x \in \mathbb{C}$ )

$$\text{Заметим, что } \alpha(x+y) = \alpha(x)\alpha(y) - \beta(x)\beta(y)$$

$$\beta(x+y) = \alpha(x)\beta(y) + \alpha(y)\beta(x)$$

$$\alpha^2(x) + \beta^2(y) = 1$$

$$(e^{ix})' = ie^{ix}$$

Отображение  $ie^{ix}$  – вектор скорости

Тогда  $e^{ix}$  описывает движение с постоянной скоростью по окружности единичной длины

## 8 Теория меры

### 8.1 Системы множеств

#### Обозначение

1.  $A \sqcup B$  – дизъюнктивное объединение
2.  $2^X$  – множество всех подмножеств  $X$

#### Определение

$\mathcal{P} \subset 2^X$  – полукольцо, если

1.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \quad A \cap B \in \mathcal{P}$
2.  $\emptyset \in \mathcal{P}$
3.  $\forall A, A' \in \mathcal{P} \quad \exists$  конечное  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P} : A \setminus A' = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$

#### Определение

$[a, b) \subset \mathbb{R}^m$  – ячейка, если  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \quad a_i \leq x_i < b_i\}$

#### Пример

$X = \mathbb{R}^m, \mathcal{P}$  – множество ячеек

$\mathcal{P}$  – полукольцо

#### Свойства

1.  $A, B \in \mathcal{P}$   
Отсюда не следует, что  $A^C \in \mathcal{P}, A \cup B \in \mathcal{P}, A \setminus B \in \mathcal{P}, A \oplus B \in \mathcal{P}$
2.  $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$   
Тогда  $A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$  представимо в виде дизъюнктивного объединения элементов  $\mathcal{P}$

#### Определение

$\mathcal{A} \subset 2^X$  – алгебра, если

1.  $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$
2.  $X \in \mathcal{A}$

### Свойства

1.  $X \setminus X = \emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$
3.  $A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}$
4.  $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C \in \mathcal{A}$
5.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
6. Алгебра – полукольцо

### Определение

$\mathcal{A} \subset 2^X$  – сигма-алгебра, если

1.  $\mathcal{A}$  – алгебра
2.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$

### Свойства

1.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i^C \right)^C \in \mathcal{A}$
2.  $E \in \mathcal{A}$  – сигма-алгебра  
Тогда  $\{A \in \mathcal{A} : A \subset E\}$  – сигма-алгебра

## 8.2 Объем

### Определение

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – аддитивна, если

1.  $\mu$  не принимает одновременно  $+\infty$  и  $-\infty$
2.  $\mu(\emptyset) = 0$
3.  $A = \sqcup_{\text{конеч.}} A_i, A_i \in \mathcal{P} \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i$

**Определение**

$\mathcal{P}$  – полукольцо

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

$\mu$  – аддитивная,  $\mu \geq 0$

Тогда  $\mu$  – объем

**Замечание**

Если  $X \in \mathcal{P}$ ,  $\mu X < +\infty$  –  $\mu$  конечный объем

**Замечание**

Если  $\mathcal{P}$  – алгебра, то свойство 3 можно заменить на:

$A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$

**Пример**

Классический объем в  $\mathbb{R}^m$ :

$\mathcal{P}^m$  – ячейки в  $\mathbb{R}^m$

$$\mu[a, b) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

**Замечание**

Если  $B \subset A$ , то  $\mu B \leq \mu A$  – монотонность

**Доказательство**

Если в алгебре, то  $A = B \sqcup (A \setminus B) \Rightarrow \mu A = \mu B + \mu(A \setminus B) \geq \mu B$

**Теорема**

$\mathcal{P}$  – полукольцо,  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – объем

Тогда выполняется

1. Усиленная монотонность:  $\forall A \in \mathcal{P}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} : A \supset \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  Тогда

$$\sum_{i=1}^n \mu A_i \leq \mu A$$

2. Конечная полуаддитивность  
 $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} \ A \subset \bigsqcup_{i=1}^n A_i$

$$\text{Тогда } \mu A \leq \sum_{i=1}^n \mu A_i$$

3.  $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}, \mu B < +\infty$  – конечное  
 Тогда  $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$

**Доказательство**

$$1. A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{\text{конеч.}} B_j \quad A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \sqcup \left( \bigsqcup_{\text{конеч.}} B_j \right) \Rightarrow \mu A = \sum \mu A_i + \left( \sum \mu B_j \right) \geq \sum \mu A_i$$

$$2. B_i = A \cap A_i \in \mathcal{P}$$

Тогда  $A = \bigcup B_i$

Сделаем эти  $B_i$  дизъюнктными

$$C_1 = B_1$$

$$C_2 = B_2 \setminus B_1, \dots, C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right)$$

$$\text{Тогда } A = \bigsqcup C_k$$

$$\text{По замечанию } C_k = B_k \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i \right) = \bigsqcup_{k_j - \text{конеч.}}^{k-1} D_{k_j} \quad \text{Теперь } A = \bigsqcup_{k,j} D_{k_j}$$

$$\mu A = \sum_{k,j} \mu D_{k_j}$$

$$\sum_j \mu D_{k_j} \leq \mu B_k \leq \mu A_k$$

$$\text{Отсюда } \mu A \leq \sum_k \mu A_k$$

$$3. \quad (a) \quad B \subset A$$

Это аддитивность

$$(b) \quad B \not\subset A$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), A \cap B \in \mathcal{B}$$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B \geq \mu A$$

### 8.3 Мера

#### Определение

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – мера, если  $\mu$  – объем и  $\mu$  – счетно-аддитивна:

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}, A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \in \mathcal{P}, \mu A = \sum \mu A_i$$

#### Замечание

1. Можно считать, что индексация с помощью любого произвольного счетного множества

2. Счетная аддитивность не следует из конечной

**Пример**

$X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{P}$  – множество ограниченных множеств и их дополнений

$$\mu(\text{огр}) = 0, \mu(\text{неогр}) = 1$$

В этом множестве нет счетной аддитивности, но есть конечная

**Пример (дискретная мера)**

$X$  – любое множество,  $\mathcal{P} = 2^X$

$$A_1, A_2, \dots \in X$$

$$h_1, h_2, \dots > 0$$

$$\mu U := \sum_{i: A_i \in E} h_i - \text{мера}$$

**Теорема 1**

$\mu : \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность
2. Имеет место счетная полуаддитивность

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}$$

$$A \in \mathcal{P}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu A \leq \sum \mu A_i$$

**Доказательство  $1 \Rightarrow 2$**

Как в предыдущей теореме

**Доказательство  $2 \Rightarrow 1$**

Проверим, что  $\mu$  – мера

$$\text{Пусть } A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Из свойства 2 } \mu A \leq \sum \mu A_i$$

$$\text{Из усиленной монотонности } \mu A \geq \sum \mu A_i$$

**Следствие**

$$A \in \mathcal{P}, A_n \in \mathcal{P}, \mu A_n = 0$$

$$A \subset \bigcup A_n$$

$$\text{Тогда } \mu A = 0$$

**Теорема 2**

$\mathcal{A}$  – алгебра

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2.  $\mu$  – непрерывна снизу

$$A, A_i \in \mathcal{A}$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

### Теорема 3

$\mathcal{A}$  – алгебра

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  – конечным объем

Тогда эквивалентны:

1.  $\mu$  – мера, т.е. имеет место счетная аддитивность

2.  $\mu$  – непрерывна сверху

$$A, A_i \in \mathcal{A}$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$$

$$\text{Тогда } \mu A = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu A_i$$

### Контр-пример для неконечного объема

$\mu$  – дискретная мера

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mu(k) = 1$$

$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \mu A = \sum_{k \in A} 1$$

$$\mu(\mathbb{R}) = +\infty$$

$$A_i = [i, +\infty)$$

$$\mu A_i = +\infty$$

$$A = \bigcap A_i = \emptyset$$

$$\mu A = 0 \quad // \text{todo}$$

## 8.4 Криволинейный интеграл в $\mathbb{R}^m$

### Определение

Векторное поле  $V : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – непрерывное

### Определение

Интеграл векторного поля по пути  $I(V, \gamma) := \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$   $V =$

$(V_1, \dots, V_m)$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$

$$I(V, \gamma) = \int_a^b \sum_i V_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt$$

Обозначение:  $I(V, \gamma) = \int_\gamma V_1 dx_1 + \dots + V_m dx_m$

### Свойства

1. Линейность по полю:

$$I(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \gamma) = \alpha_1 I(V_1, \gamma) + \alpha_2 I(V_2, \gamma)$$

2. Аддитивность по дроблению:

$$a < c < b$$

$$\gamma_1 = \gamma \Big|_{[a, c]}, \quad \gamma_2 = \gamma \Big|_{[c, b]}$$

$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

Отсюда может рассматривать кусочно-гладкие пути

3. Замена переменной

$$\gamma : [a, b] \rightarrow E \subset \mathbb{R}^m$$

$$\phi : [p, q] \rightarrow [a, b], \phi \in C^1$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [p, q] \rightarrow E$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma) = I(V, \tilde{\gamma})$$

### Доказательство

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \rangle \phi'(s) ds = \int_p^q \langle V(\gamma(\phi(s))), \gamma'(\phi(s)) \phi'(s) \rangle ds$$

4.  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$$

$$\text{Определим } \gamma = \gamma_2 \gamma_1 : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$



$$I(V, \gamma) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$$

5. Противоположный путь

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\gamma_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m - \text{обратный путь}$$

$$\gamma_-(t) = \gamma(a + b - t)$$

$$\text{Тогда } I(V, \gamma_-) = -I(V, \gamma)$$

6. Оценка интеграла пути

$$|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in \gamma([a, b])} |V(x)| l(\gamma), \text{ где } \gamma([a, b]) - \text{носитель пути, } l(\gamma) - \text{длина пути}$$

**Доказательство**

$$\int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \leq \int_a^b |V(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max |V(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$