

Matematično-fizikalni praktikum

Avtor: Andraž Seničar

Naloga 7: Newtonov zakon

Datum: september 2024

1 Uvod

Gibanje masne točke v polju sil v eni dimenziji opišemo z diferencialno enačbo drugega reda, z Newtonovim zakonom

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F.$$

Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m \frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = F$$

in tako jo tudi rešujemo: kot sistem dveh enačb prvega reda.

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0) = x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, \dots$).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor...) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je f le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak n velikosti h , $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak y_n in $v_n = y'_n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot [f(y_n) + f(y_{n+1})]. \end{aligned}$$

Alternativno lahko to shemo zapišemo tudi s pomočjo dodatnih vmesnih točk in preskakujemo med lego in hitrostjo z zamikom $h/2$ (od tod angleško ime 'leapfrog' za ta zapis):

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_{n+1/2} \\ v_{n+3/2} &= v_{n+1/2} + h \cdot f(y_{n+1}). \end{aligned}$$

V še enem drugačnem zapisu je metoda poznana tudi kot metoda “Središčne razlike” (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

kjer prvo točko y_1 izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljam tudi za primere, ko je f tudi funkcija ’časa’ x , $f(x,y)$, le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

2 Naloga

1. Uporabi čim več metod za izračun nihaja matematičnega nihala z začetnim pogojem $\vartheta(0) = \vartheta_0 = 1$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem in kako se le-te kvarijo z večjim številom nihajev. Nariši tudi ustrezne fazne portrete.
2. Dodatno: raziski še resonančno krivuljo vzbujenega dušenega matematičnega nihala

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = v \cos \omega_0 t, \quad (1)$$

kjer je β koeficient dušenja, v in ω_0 pa amplituda in frekvenca vzbujanja. Opazuj obnašanje odklonov in hitrosti nihala pri dušenju $\beta = 0.5$, vzbujevalni frekvenci $\omega_0 = 2/3$ in amplitudo vzbujanja na območju $0.5 < v < 1.5$. Opazuj tudi histerezno obnašanje krivulje pri velikih amplitudah vzbujanja.

3 Reševanje

3.1 Matematično nihalo

Nihanje matematičnega nihala lahko opišemo z diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \vartheta,$$

kjer je $\omega_0^2 = g/l$ in je g gravitacijski pospešek ter l dolžina nihala. Če so odmiki majhni, lahko enačbo linearno aproksimiramo in dobimo harmonične rešitve kot:

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega_0 t + \Phi_0)$$

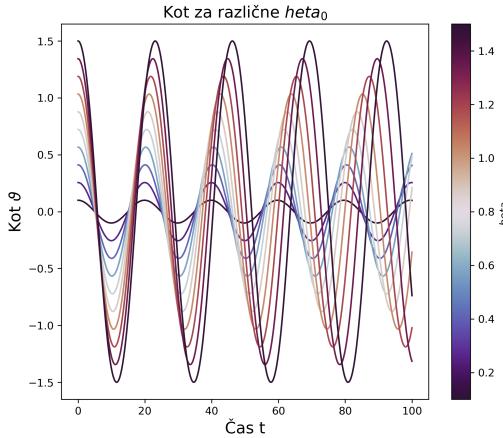
Točno rešitev te enačbe lahko izračunamo s pomočjo eliptičnega integrala prve vrste $K(m)$, kar nam da rešitev

$$\vartheta(t) = 2 \arcsin \left[\sin \frac{\vartheta_0}{2} \operatorname{sn} \left\{ K \left(\sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right) - \omega_0 t ; \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} \right\} \right],$$

kjer je $\operatorname{sn}(u, m)$ eliptična sinus funkcija.

3.1.1 Analitična rešitev matematičnega nihala

Narišimo nekaj referenčnih grafov s pomočjo analitične rešitve za različne vrednosti ϑ_0 .



Slika 1: Rešitve za nihanje preprostega nihala za različne začetne odmike ϑ_0

3.2 Primerjava metod

3.2.1 Numerične rešitve

V nalogi smo primerjali podobne metode za numerično integracijo:

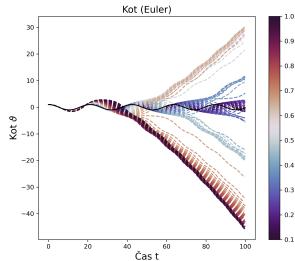
1. Eulerjeva metoda
2. Heunova metoda
3. Adams-Bashforth-Moulton metoda
4. Runge-Kutta 4. reda

Rešitve diferencialne enačbe poiščemo z numerično integracijo. Natančnost rešitve bo seveda odvisna od dolžine koraka. Poračunamo rešitve za veliko različnih dolžin korakov in odmik za prvih nekaj nihajev in za prvih nekaj ω_0 . Hitro vidimo, da bomo za natančne rešitve z Eulerjevo metodo potrbovali zelo majhen korak, medtem ko so druge metode precej zanesljive tudi za malo večje korake.

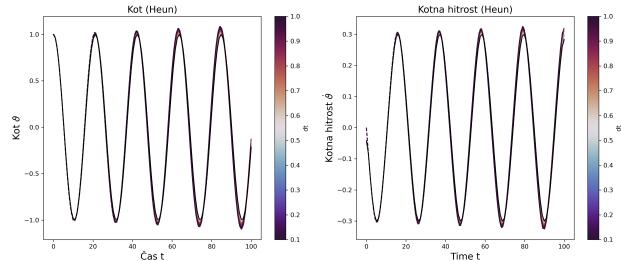
Poleg opisanih smo preverjali še dve t.i. simplektični metodi, ki se uporabljata za reševanje problemov oblike $d^2y/dt^2 = f(y)$, ki ohranljajo energijo:

1. Verlet simplektična metoda 2. reda,
2. PERFL: Position Extended Forest-Ruth Like simplektična metoda 4. reda.

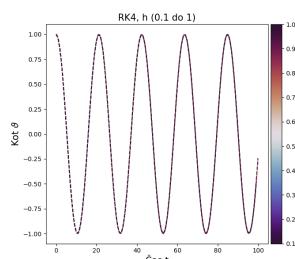
Zaradi mnogo boljše natančnosti od prejšnjih metod sem se tu odločil narisati namesto grafa v odvisnosti od ω_0 , rajši še en grah v odvisnosti od velikosti koraka h , tako da vidimo pri kateri velikosti koraka začnejo te metode odstopati od analitične rešitve.



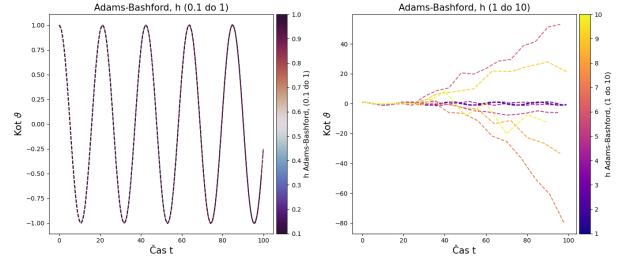
(a) Eulerjeva metoda za različne dolžine koraka h



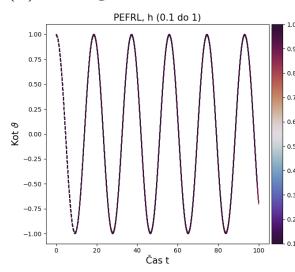
(b) Heunova metoda za različne dolžine koraka h



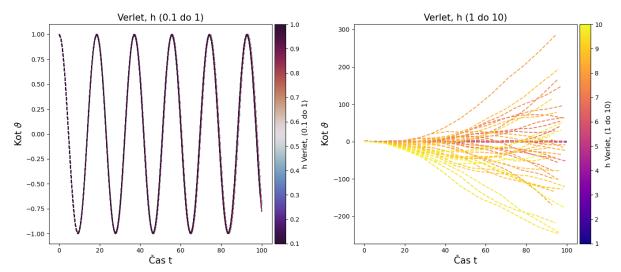
(c) Runge-Kutta metoda za različne dolžine koraka h



(d) Adams-Bashford metoda za različne dolžine koraka h



(e) PEFRL metoda za različne dolžine koraka h

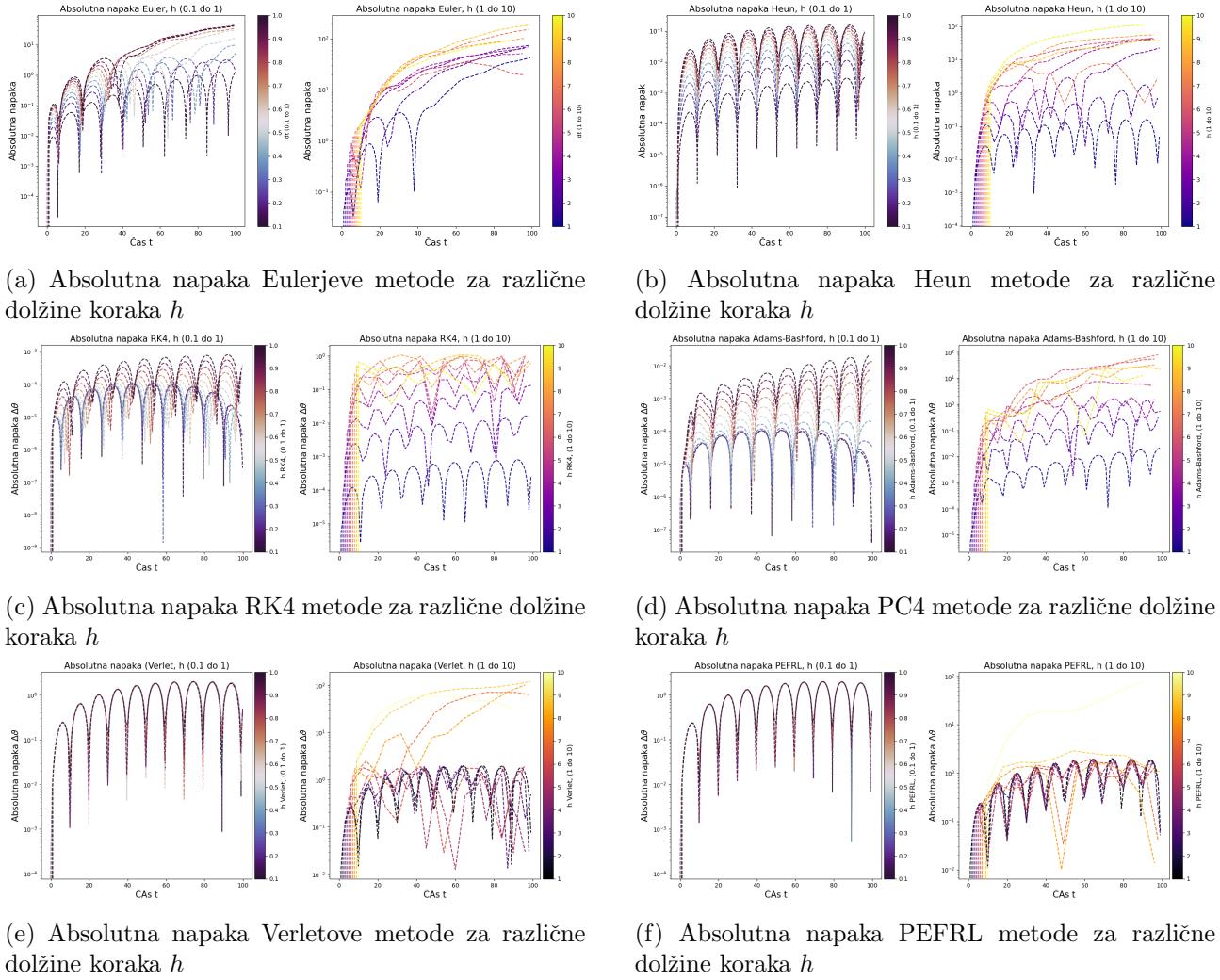


(f) Verlet metoda za različne dolžine koraka h

Slika 2: Primerjava numeričnih rešitev enačb z različnimi metodami za različne dolžine koraka h .

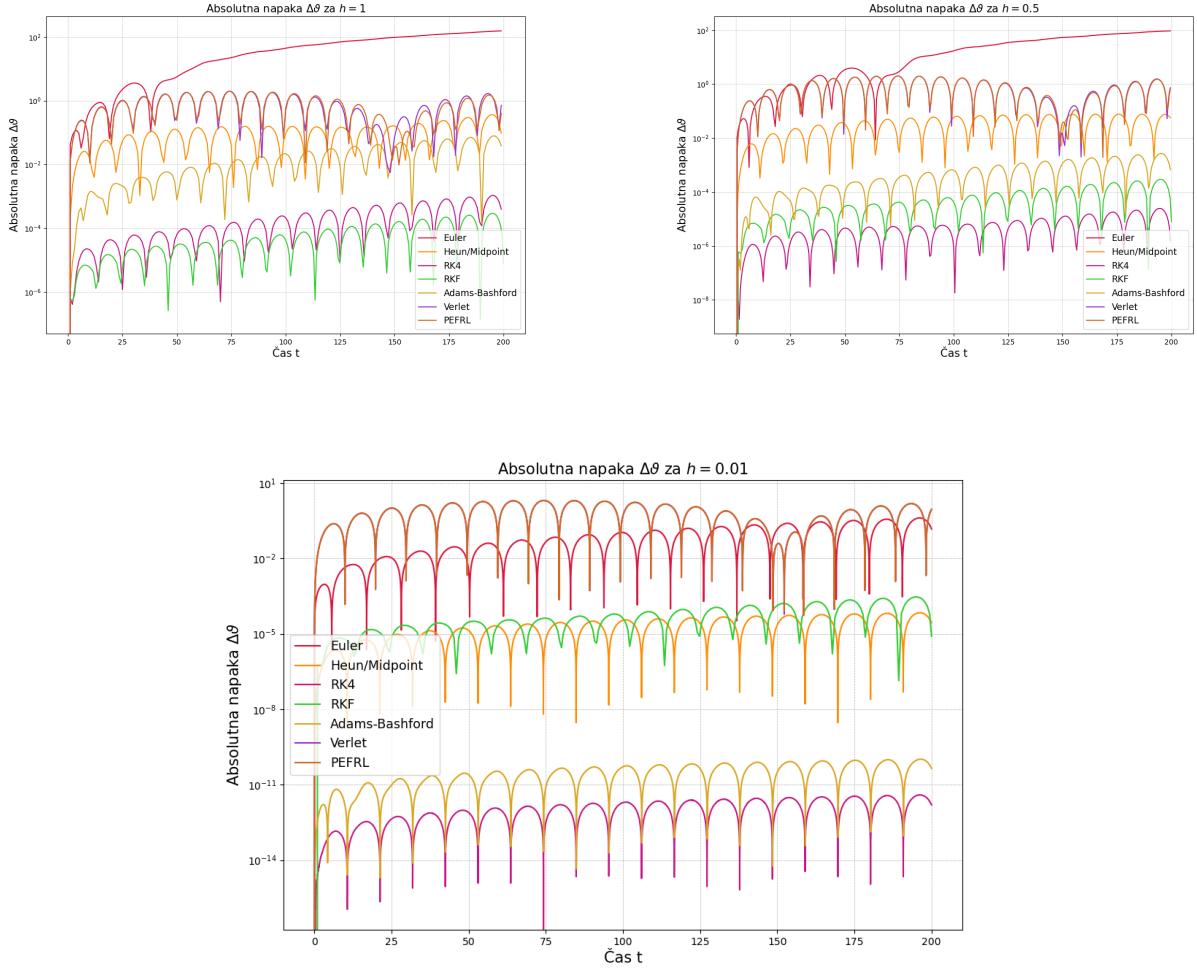
3.2.2 Red natančnosti metod

Videli smo da se motede začnejo v nekaterih primerih precej hitro kvariti (Eulerjeva naprimer). zato smo za boljše metode namesto grafa hitrosti risali raje za večje korake da smo lahko videli kdaj se metode začnejo kvariti. Dobra ideja bi bila da bi tudi primerjali med sabo metode kot absolutno napako, da lahko lažje vidimo odstopanje od analitične rešitve za različne metode.



Slika 3: Primerjava absolutnih napak za različne metode integracije pri različnih dolžinah koraka h .

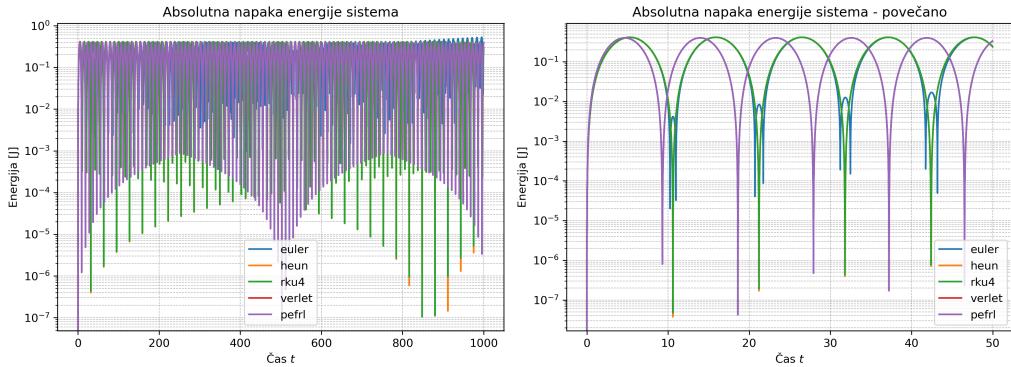
Preden se lotimo drugih lastnosti metod prikažimo skupen graf časovne odvisnosti absolutne napake glede na analitično rešitev. Sedaj lahko primerjamo najboljše metode glede na napako pri koraku $h = (0.01, , 1.5)$. Najbolj natančne so tu metode so različne glede na velikost koraka, ki ga izberemo. Tu smo še dodali Runge-Kutta-Felberg metodo, ki je nismo prej izrisali, saj se točno ujema z grafi, ker ima adaptiven korak h , spremeni ga z vsako iteracijo približka.



Slika 4: Primerjava numeričnih rešitev z različnimi metodami za različne dolžine koraka h .

3.3 Odstopanje energije

Preden se odločimo za najboljšo metodo preverimo še eno fizikalno lastnost matematičnega nihala in sicer ohranitve energije. Pri matematičnem nihalu se izmenjujeta po vrednosti kinetična in potencialna energija, katerih vsota je konstantna. Želeli bi si, da bi naše metode skozi računanje tudi ohranjale energijo. Tu nam priskočijo na pomoč simplektične metode. Prikažimo torej, kako se spreminja energija skozi čas pri različnih metodah.

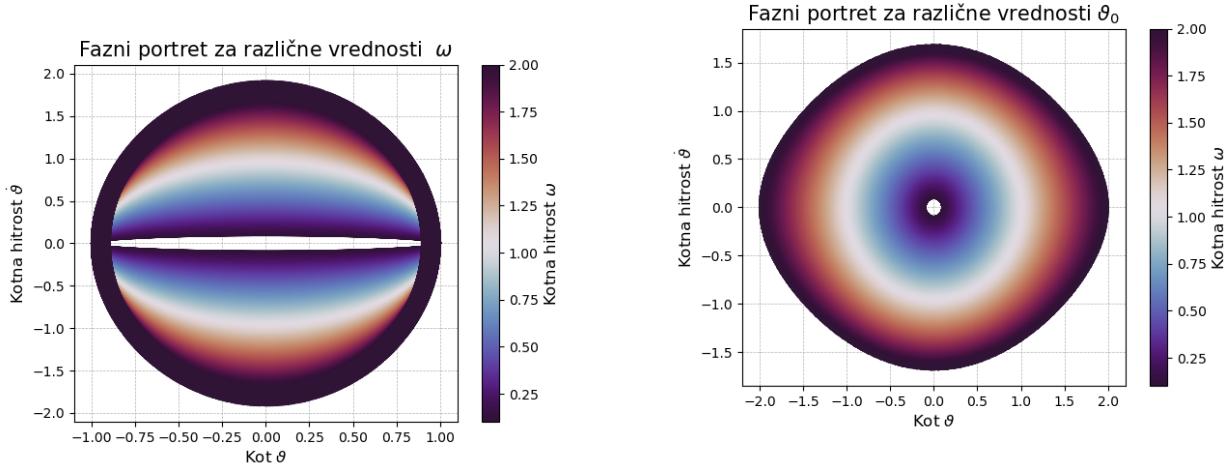


Sedaj si lahko izberemo primo metodo za določen problem. V našem primeru matematičnega nihala

bi lahko za željeno natančnost 10^3 v splošnem izbrali eno od metod PEFRL, Runge-Kutta 4. reda ali Runge-Kutta-Fehlberg s korakom $h = 0.1$ ki ohranjajo energijo. V približku majhnih kotov pa b lahko izbrali le metodo PEFRL, saj edina dobro ohrani energijo sistema.

3.3.1 Fazni portret

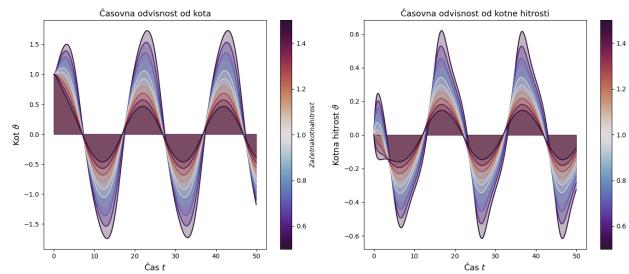
Sedaj lahko preverimo še fazne portrete matematičnega nihala. Portrete lahko seveda narišemo z vsemi metodami, a z boljšimi metodami in dovolj kratkimi koraki niso kaj prida zanimivi, saj bi izgledali identični. Zato izberimo malo daljše korake in narišimo portrete za več nihajnih časov, saj že vemo, da se napaka numeričnih rešitev s časom povečuje.



Slika 5: Fazni portreti matematičnega nihala pri začetnih pogojih $\vartheta_0 = 1$ in $\dot{\vartheta}_0 = 0$.

3.4 Vzbujeno dušeno matematično nihalo

Enačbo vzbujenega nihala rešimo preko metode Runge-Kutta 4. reda s korakom 0.1 in pri začetnih pogojih ki smo jih že napisali v opisu naloge ($\vartheta_0 = 1$, $\dot{\vartheta}_0 = 0$). Izberemo frekvenci $\omega = 1$ in $\omega_0 = 2/3$ in $\beta = 0.5$ narišemo rešitve pri različnih vrednostih amplitude vzbujanja $0.5 < v < 1.5$.



Slika 6: Odmiki nihala od ravnovesne lege za različne koeficiente dušenja, brez vzbujanja (levo) in odmiki brez dušenja, za različne frekvence vzbujanja, če vzbujamo nihanje z amplitudo $A = 0.5$ (desno).