

# Contents

<b>1 Basic</b>	<b>1</b>	<b>4 String</b>	<b>6</b>
1.1 Default Code	1	4.1 trie	6
1.2 PBDS	1	4.2 KMP	7
1.3 int128 Input Output	1	4.3 Hash	7
1.4 Python	1	4.4 Zvalue	7
<b>2 Math</b>	<b>1</b>	4.5 最長迴文子字串	7
2.1 質數表	1	4.6 Suffix Array	7
2.2 快速冪	2	<b>5 Geometry</b>	<b>8</b>
2.3 擴展歐幾里得	2	5.1 Point	8
2.4 矩陣	2	5.2 內積, 外積, 距離	8
2.5 Miller rabin Prime test	2	5.3 向量應用	8
2.6 Pollard's Rho	2	5.4 Static Convex Hull	8
2.7 皮薩諾定理	2	5.5 外心, 最小覆蓋圓	9
2.8 高斯消去法	3	5.6 四邊形旋轉	9
2.9 卡特蘭數	3	5.7 旋轉	9
2.10 中國剩餘定理	3	5.8 極座標轉直角座標	9
<b>3 Graph</b>	<b>4</b>	<b>6 Data Structure</b>	<b>9</b>
3.1 DSU	4	6.1 Sparse Table	9
3.2 Dijkstra	4	6.2 Segment Tree	10
3.3 SPFA	4	6.3 Link Cut Tree	10
3.4 Floyd Warshall	4	<b>7 Dynamic Programing</b>	<b>11</b>
3.5 Tarjan SCC	4	7.1 LCS	11
3.6 2 SAT	4	7.2 LIS	11
3.7 Euler Path	5	7.3 Knapsack	11
3.8 Max flow min cut	5	7.4 位元 dp	12
3.9 Minimum cost maximum flow	6	7.5 經典 dp 轉移式	12
3.10 二分圖	6	<b>8 Divide and conquer</b>	<b>12</b>
		8.1 逆序數對	12
		<b>9 Tree</b>	<b>12</b>
		9.1 樹直徑	12
		9.2 LCA	12
		<b>10 Else</b>	<b>13</b>
		10.1 Big Number	13

## 1 Basic

### 1.1 Default Code

```
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
#define endl '\n' // 如果是互動題要把這個註解掉
// #pragma GCC target("popcnt")
// #pragma GCC optimize("O3")
using namespace std;
int tt = 1;

void pre() {
    cout.tie(nullptr); // 輸出加速
    cin >> tt; // 多筆輸入
}

void solve() {}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
#ifdef LOCAL
    // g++ -DLOCAL -std=c++17 <filename> && ./a.out
    freopen("input.txt", "r", stdin);
    // freopen("output.txt", "w", stdout);
#endif // LOCAL
    pre();
    while (tt--) { solve(); }
    return 0;
}
```

### 1.2 PBDS

```
#include <bits/stdc++.h>
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
using namespace std;

template
<class T> using Tree = tree<T, null_type, less<T>,
    rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update>;

/*
如果有 define int long long 記得拿掉
Tree<int> t 就跟 set<int> t 一樣, 有包好 template
rb_tree_tag 使用紅黑樹
第三個參數 less<T> 為由小到大, greater<T> 為由大到小

```

```
插入 t.insert(); 刪除 t.erase();
t.order_of_key
(k); 從前往後數 k 是第幾個 (0-base 且回傳 int 型別)
t.find_by_order(k);
從前往後數第 k 個元素 (0-base 且回傳 iterator 型別)
t.lower_bound
(); t.upper_bound(); 用起來一樣 回傳 iterator
可以用 Tree<pair<int, int>> T 來模擬 multiset
*/
```

### 1.3 int128 Input Output

```
// 抄 BBuf github 的
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

void scan(__int128 &x) // 輸入
{
    x = 0;
    int f = 1;
    char ch;
    if((ch = getchar()) == '-') f = -f;
    else x = x*10 + ch - '0';
    while((ch = getchar()) >= '0' && ch <= '9')
        x = x*10 + ch - '0';
    x *= f;
}

void print(__int128 x) // 輸出
{
    if(x < 0)
    {
        x = -x;
        putchar('-');
    }
    if(x > 9) print(x/10);
    putchar(x%10 + '0');
}

int main()
{
    __int128 a, b;
    scan(a);
    scan(b);
    print(a + b);
    puts("");
    print(a*b);
    return 0;
}
```

### 1.4 Python

```
## Input
# p q 都是整數, 中間以空白分開輸入
p, q = map(int, input().split())

# 輸入很多個用空
白隔開的數字, 轉成 float 放進陣列, s 是 input 字串
arr = list(map(float, s.split()))

# 分數用法 Fraction(被除數, 除數)
from fractions import Fraction

frac = Fraction(3, 4)
numerator = frac.numerator # 取出分子
denominator = frac.denominator # 取出分母

arr = [Fraction
    (0), Fraction(1, 6), Fraction(1, 2), Fraction(5,
    12), Fraction(0), Fraction(-1, 12), Fraction(0)]

# 可以直接做乘除
def fx(x):
    x = Fraction(x)
    ans = Fraction(0)
    for i in range(1, 7):
        ans += arr[i] * x ** (7 - i)
    return ans
```

## 2 Math

### 2.1 質數表

```
vector<int> prime_table(int n){
    vector<int> table(n + 1, 0);
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        for(int j = i; j <= n; j += i){
            table[j]++;
        }
    }
    return table;
}
```

## 2.2 快速冪

```
#define int long long
// 根據費馬小定理，若  $a$  與  $p$  互質， $a^{p-2}$  為  $a$  在  $\text{mod } p$  時的乘法逆元
//  $a^{-1} \equiv (b^a)^c \pmod{p}$ 
//  $a^c \pmod{p} = \text{fast\_pow}(a, \text{fast\_pow}(b, c, \text{mod} - 1), \text{mod})$ 
typedef unsigned long long ull;
inline int ksc(ull x, ull y, int p) { //  $O(1)$  快速乘 (防爆 long long)
    return (x * y - (ull)((long double)x / p * y) * p + p) % p;
}

inline int fast_pow(int a, int b, int mod)
{
    //  $a^b \pmod{mod}$ 
    int res = 1;
    while(b)
    {
        if(b & 1) res = ksc(res, a, mod);
        a = ksc(a, a, mod);
        b >>= 1;
    }
    return res;
}
```

## 2.3 擴展歐幾里得

```
int gcd(int a, int b)
{
    return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
}

int lcm(int a, int b)
{
    return a * b / gcd(a, b);
}

pair<int, int> ext_gcd
(int a, int b) // 擴展歐幾里德  $ax + by = \text{gcd}(a, b)$ 
{
    if (b == 0)
        return {1, 0};
    if (a == 0)
        return {0, 1};
    int x, y;
    tie(x, y) = ext_gcd(b % a, a);
    return {y, -b * x / a + x};
}
```

## 2.4 矩陣

```
// 矩陣乘法  $(A * B) \pmod{mod}$ 

template <typename T>
vector<vector<T>> matrix_mult(const vector<vector<T>>& A, const vector<vector<T>>& B, T mod) {
    int m = A.size();
    int n = A[0].size();
    int p = B[0].size();
    assert(A[0].size() == B.size());
    vector<vector<T>> result(m, vector<T>(p, 0));
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        for (int j = 0; j < p; ++j) {
            for (int k = 0; k < n; ++k) {
                result[i][j] = (result[i][j] + A[i][k] * B[k][j]) % mod;
            }
        }
    }
    return result;
}
```

## 2.5 Miller rabin Prime test

```
// fast_pow 去前面抄，需要處理防暴乘法
// 記得 #define int long long 也要放
// long long 範圍內測試過答案正確
// time:  $O(\log n)$ 

inline bool mr(int x, int p) {
    if (fast_pow(x, p - 1, p) != 1) return 0;
    int y = p - 1, z;
    while (!(y & 1)) {
        y >>= 1;
        z = fast_pow(x, y, p);
        if (z != 1 && z != p - 1) return 0;
        if (z == p - 1) return 1;
    }
    return 1;
}

inline bool prime(int x) {
    if (x < 2) return 0;
    if (x == 2 || x == 3 || x == 5 || x == 7 || x == 43) return 1;
    // 如果把 2 到 37 前 12 個質數都檢查一遍 可以保證  $2^{48}$  皆可用
    return mr(2, x) && mr(3, x) && mr(5, x) && mr(7, x) && mr(43, x);
}
```

## 2.6 Pollard's Rho

```
// 主函數記得放 srand(time(nullptr))
// prime 檢測以及快速冪，gcd 等請從前面抄

// 輸入一個數字 p，隨機回傳一個非 1 非 p 的因數，若 p 是質數會無窮迴圈
#define rg register int
inline int rho(int p) {
    int x, y, z, c, g;
    rg i, j;
    while (1) {
        y = x = rand() % p;
        z = 1;
        c = rand() % p;
        i = 0, j = 1;
        while (++i) {
            x = (ksc(x, x, p) + c) % p;
            z = ksc(z, abs(y - x), p);
            if (x == y || !z) break;
            if (!(i % 127) || i == j) {
                g = gcd(z, p);
                if (g > 1) return g;
                if (i == j) y = x, j <= 1;
            }
        }
    }
}

// 回傳隨機一個質因數，若 input 為質數，則直接回傳
int prho(int p) {
    if (prime(p)) return p;
    int m = rho(p);
    if (prime(m)) return m;
    return prho(p / m);
}
```

```
// 回傳將 n 質因數分解的結果，由小到大排序
// ex: input: 48, output: 2 2 2 3
vector<int> prime_factorization(int n) {
    vector<int> ans;
    while(n != 1) {
        int m = prho(n);
        ans.push_back(m);
        n /= m;
    }
    sort(ans.begin(), ans.end());
    return ans;
}
```

## 2.7 皮薩諾定理

```
// fib(x) % m = fib(x + kn) % m 當  $k \geq 1$ ，求 n
// n 為費式數列 % m 會重複的週期
// pisano_period(m) <= 6m
```

```
// 通常這都要本地跑
```

```
#define int long long
```

```
int pisano_period(int m) {
    int pre = 0, cur = 1;
    int temp;
    for (int i = 0; i < m * m; i++) {
        temp = pre;
        pre = cur;
        cur = (temp + cur) % m;
        if (pre == 0 && cur == 1) return i + 1;
    }
    return 0;
}
```

## 2.8 高斯消去法

```
from fractions import Fraction
def gauss_elimination(matrix, results):
    # 將所有數字轉換為分數
    n = len(matrix)
    augm = [[Fraction(matrix
        [i][j]) for j in range(n)] for i in range(n)]
    augr = [Fraction(results[i]) for i in range(n)]

    # 高斯消去法
    for i in range(n):
        # 尋找主元
        if augm[i][i] == 0:
            for j in range(i + 1, n):
                if augm[j][i] != 0:
                    augm[i], augm[j] = augm[j], augm[i]
                    augr[i], augr[j] = augr[j], augr[i]
                    break

        pivot = augm[i][i]
        if pivot == 0:
            # 如果主元為0，繼續檢查該行是否全為 0
            if all(augm[i][j] == 0 for j in range(n)):
                if augr[i] != 0:
                    return None # 無解
                else:
                    continue
            # 可能有無限多解，繼續檢查

        # 將主元行的數字規一化
        for j in range(i, n):
            augm[i][j] /= pivot
            augr[i] /= pivot

        # 將其他行的數字變為0
        for j in range(n):
            if i != j:
                factor = augm[j][i]
                for k in range(i, n):
                    augm[j][k] -= factor * augm[i][k]
                augr[j] -= factor * augr[i]

    # 檢查是否存在無限多解的情況
    for i in range(n):
        if all(augm[i][j]
            == 0 for j in range(n)) and augr[i] == 0:
            return [] # 無限多組解

    return augr

# matrix = [
#     [2, -1, 1],
#     [3, 3, 9],
#     [3, 3, 5]
# ]
# results = [8, -42, 0]
# output = [
#     Fraction(12, 1), Fraction(11, 2), Fraction(-21, 2)]
# Fraction 可以強轉 float

import numpy as np

def gauss_elimination(matrix, ans):
    matrix = np.array(matrix)
    ans = np.array(ans)
```

```
try:
    solution = np.linalg.solve(matrix, ans)
    return [f"{value:.2f}" for value in solution]
except np.linalg.LinAlgError:
    # 無解或者無限多組解
    return "No Solution"
```

# 有開放 numpy 可以用

# 優點：行數短，執行速度快

# 缺點：只能用浮點數，無法區分無解及無限多組解

## 2.9 卡特蘭數

```
"""
卡特蘭數 Catalan
公式： $H(n) = C(2 * n, n) // (n + 1)$ ,  $n \geq 2$ ,  $n$  為正整數
快速計算方式：
1.  $H(0) = H(1) = 1$ ,  $H(n) = \sum(H(i - 1) * H(n - i) \text{ for } i \text{ in range}(1, n + 1))$ 
2.  $H(n) = H(n - 1) * (4 * n - 2) // (n + 1)$ 
3.  $H(n) = C(2 * n, n) - C(2 * n, n - 1)$ 
"""
```

```
"""
```

可解問題：

有效括號匹配問題：

給定  $n$  個左括號與右括號，求有幾種不同的正確括號匹配  
二元樹結構問題：給定  $n$  個節點，求有幾種不同的二元樹結構  
將一個凸

$n + 2$  邊形劃分成多個三角形，求有幾種不同的劃分方式

狄克路徑：給定  $n * n$  的網格，

從左下到右上的路徑中，永不超過對角線的路徑有幾種

一個 *stack* 在 *push* 順

序不變的情況下  $(1, 2, 3, \dots, n)$ ，有幾種 *pop* 的方式  
在圖上選擇  $2 * n$  個

點，將這些點兩兩連接使得  $n$  條線段不相交的方法有幾種  
"""

```
n = int(input())
```

```
catalan = [1 for _ in range(n + 1)]
for i in range(1, n + 1):
    catalan[i] = catalan[i - 1] * (4 * i - 2) // (i + 1)
```

```
ans = 0
```

```
for i in range(0, n + 1): # 卡特蘭數的平方
    ans += catalan[i] * catalan[n - i]
```

```
print(ans)
```

```
# 185ms in codeforces, n <= 5000
```

## 2.10 中國剩餘定理

```
int exgcd(int a, int b, int &x, int &y) {
    if (!b) {
        x = 1, y = 0;
        return a;
    }
    int g = exgcd(b, a % b, y, x);
    y -= a / b * x;
    return g;
}
```

```
int inv(int x, int m) {
    int a, b;
    exgcd(x, m, a, b);
    a %= m;
    if (a < 0) a += m;
    return a;
}
```

```
// 求解  $x = r1 \% m1 = r2 \% m2 = r3 \% m3 \dots$ 
```

```
//  $a[i] = \{remain, mod\}, \dots$ 
```

```
// notice: 如出現極限測資(1e18)，需開 __int128
```

```
int CRT(vector<pair<int, int>> &a) {
    int s = 1, ret = 0;
    for (auto &[r, m] : a) s *= m;
    for (auto &[r, m] : a) {
        int t = s / m;
        ret += r * t % s * inv(t, m) % s;
        if (ret >= s) ret -= s;
    }
}
```

```
return ret;
}
```

## 3 Graph

### 3.1 DSU

```
class dsu{
public:
    vector<int> parent;
    dsu(int num){
        parent.resize(num);
        for(int i = 0; i < num; i++) parent[i] = i;
    }
    int find(int x){
        if(parent[x] == x) return x;
        return parent[x] = find(parent[x]);
    }
    bool same(int a, int b){
        return find(a) == find(b);
    }
    void Union(int a, int b){
        parent[find(a)] = find(b);
    }
};
```

### 3.2 Dijkstra

```
// 傳入圖的 pair 為 {權重, 點}, 無限大預設 1e9 是情況改
#define pii pair<int, int>
vector<
    int> dijkstra(vector<vector<pii>> &graph, int src){
    int n = graph.size();
    vector<int> dis(n, 1e9);
    vector<bool> vis(n, false);
    priority_queue<pii, vector<pii>, greater<pii>> pq;
    pq.push({0, src});
    dis[src] = 0;
    while(!pq.empty()){
        auto [w, node] = pq.top();
        pq.pop();
        if(vis[node]) continue;
        vis[node] = true;
        for(auto [nw, nn]:graph[node]){
            if(w + nw < dis[nn]){
                dis[nn] = w + nw;
                pq.push({dis[nn], nn});
            }
        }
    }
    return dis;
}
```

### 3.3 SPFA

```
#define pii pair<int, int>
// {在 src 可到達
    的點中是否存在負環, 最短路徑}, arg 中 n 為點的數量
// arg 中 pair 裡的第一個值為權重, 第二個為點
pair<bool, vector<int>>
    SPFA(vector<vector<pii>> &graph, int n, int src){
    vector<int> dis(n + 1, 1e9);
    vector<int> cnt(n + 1, 0);
    vector<bool> vis(n + 1, false);
    queue<int> q;
    vis[src] = true; q.push(src); dis[src] = 0;
    while(!q.empty()){
        auto node = q.front(); vis[node] = false; q.pop();
        for(auto [w, nn]:graph[node]){
            if(w + dis[node] < dis[nn]){
                dis[nn] = w + dis[node];
                if(!vis[nn]){
                    if(++cnt[nn] >= n) return {true, {}};
                    q.push(nn);
                    vis[nn] = true;
                }
            }
        }
    }
    return {false, dis};
}
```

## 3.4 Floyd Warshell

// 中繼點放外面

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            dis[i][j] = min(dis[i][j], dis[i][k] + dis[k][j]);
        }
    }
}
```

## 3.5 Tarjan SCC

```
class tarjan{
    // 1-base
    int time = 1;
    int id = 1;
    stack<int> s;
    vector<int> low;
    vector<int> dfn;
    vector<bool> in_stack;
    void dfs(int node, vector<vector<int>> &graph){
        in_stack[node] = true;
        s.push(node);
        dfn[node] = low[node] = time++;
        for(auto &j : graph[node]){
            if(dfn[j] == 0){
                dfs(j, graph);
                // 看看往下有沒有辦法回到更上面的點
                low[node] = min(low[node], low[j]);
            }
            else if(in_stack[j]){
                low[node] = min(low[node], low[j]);
            }
        }
        vector<int> t; // 儲存這個強連通分量
        if(dfn[node] == low[node]){
            while(s.top() != node){
                t.push_back(s.top());
                in_stack[s.top()] = false;
                scc_id[s.top()] = id;
                s.pop();
            }
            t.push_back(s.top());
            scc_id[s.top()] = id;
            in_stack[s.top()] = false;
            s.pop();
            id++;
        }
        if(!t.empty()) ans.push_back(t);
    }
public:
    vector<int> scc_id;
    vector<vector<int>> ans;
    // ans ans[i] 代表第 i 個強連通分量裡面包涵的點
    // scc_id[i] 代表第 i 個點屬於第幾個強連通分量
    vector
        <vector<int>> scc(vector<vector<int>> &graph){
        int num = graph.size();
        scc_id.resize(num, -1);
        dfn.resize(num, 0);
        low.resize(num, 0);
        in_stack.resize(num, false);
        for(int i = 1; i < num; i++){
            if(dfn[i] == 0) dfs(i, graph);
        }
        return ans;
    }
};
```

## 3.6 2 SAT

// 用

下面的 tarjan scc 算法來解 2 sat 問題, 若事件 a 發生時, 事件 b 必然發生, 我們須在 a -> b 建立一條有向

// 用

cses 的 Giant Pizza 來舉例子, 給定 n 個人 m 個配料表, 每個人可以提兩個要求, 兩個要求至少要被滿足一個

```
// 3 5
// + 1 + 2
// - 1 + 3
// + 4 - 2
```

```
// 以這
// 個例子來說，第一個人要求要加 配料1 或者 配料2 其中
// 一項，第二個人要求不要 配料1 或者 要配料3 其中一項
// 試問能不能滿足所有人的要求，我們可以把 要加
// 配料 i 當作點 i，不加配料 i 當作點 i + m(配料數量)
// 關於第一個人的要求 我們可以看成若不加 配
// 料1 則必定要 配料2 以及 若不加 配料2 則必定要 配料1
// 關於第二個人要求 可看做加了 配料
// 1 就必定要加 配料3 以及 不加 配料3 就必定不加 配料1

// 以這些條件建立有像圖，並且
// 找尋 scc，若 i 以及 i + m 在同一個 scc 中代表無解
// 若要求解，則若 i 的 scc_id
// 小於 i + m 的 scc_id 則 i 為 true，反之為 false
// tarjan 的模板在上面
cin >> n >> m;

vector<vector<int>> graph(m * 2 + 1);
function<int(int)> tr = [&](int x){
    if(x > m) return x - m;
    return x + m;
};

for(int i = 0; i < n; i++){
    char c1, c2;
    int a, b;
    cin >> c1 >> a >> c2 >> b;
    // a 代表 a 為真，m + a 代表 a 為假
    if(c1 == '-') a += m;
    if(c2 == '-') b += m;
    graph[tr(a)].push_back(b);
    graph[tr(b)].push_back(a);
}

tarjan t;
auto scc = t.scc(graph);

for(int i = 1; i <= m; i++){
    if(t.scc_id[i] == t.scc_id[tr(i)]){
        cout << "IMPOSSIBLE\n";
        return 0;
    }
}

for(int i = 1; i <= m; i++){
    if(t.scc_id[i] < t.scc_id[tr(i)]){
        cout << '+';
    }
    else cout << '-';
    cout << ' ';
}
cout << '\n';
```

### 3.7 Euler Path

```
// 1. 無向圖是歐拉圖：
// 非零度頂點是連通的
// 頂點的度數都是偶數

// 2. 無向圖是半歐拉圖(有路沒有環)：
// 非零度頂點是連通的
// 恰有 2 個奇度頂點

// 3. 有向圖是歐拉圖：
// 非零度頂點是強連通的
// 每個頂點的入度和出度相等

// 4. 有向圖是半歐拉圖(有路沒有環)：
// 非零度頂點是弱連通的
// 至多一個頂點的出度與入度之差為 1
// 至多一個頂點的入度與出度之差為 1
// 其他頂點的入度和出度相等
vector<set<int>> adj;
vector<int> ans;

void dfs(int x) { // Hierholzer's Algorithm
    while (!adj[x].empty()) {
        auto next = *(adj[x].begin());
        adj[x].erase(next);
        adj[next].erase(x);
        dfs(next);
    }
}
```

```
}
ans.emplace_back(x);
}

void solve() {
    // 建立雙向邊，set用來防重邊，點數n，邊數m
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        if (adj[i].size() & 1) return; /* impossible */
    dfs(1);
    if (ans.size() != m + 1) return; /* impossible */
    reverse(ans.begin(), ans.end()); /* then print it */
}
```

### 3.8 Max flow min cut

```
#define int long long

// dicnic Algorithm Time: O(V^2E) 實際上會快一點
// 記得在 main 裡面 resize graph
// 最小割，找
// 到最少條的邊切除，使得從 src 到 end 的 maxflow 為 0
// 枚舉所有邊 i -> j，src 可
// 以到達 i 但無法到達 j，那這條邊為最小割裡的邊之一
// 若求無向圖最大流，則反向建邊為 capacity

class edge{
public:
    int next;
    int capacity;
    int rev;
    bool is_rev;
    edge(int _n, int _c, int _r, int _ir) :
        next(_n), capacity(_c), rev(_r), is_rev(_ir){};
};

vector<vector<edge>> graph;
vector<int> level, iter;

void add_edge(int a, int b, int capacity){
    graph[a].push_back
        (edge(b, capacity, graph[b].size(), false));
    graph[b].
        push_back(edge(a, 0, graph[a].size() - 1, true));
}

void bfs(int start) {
    fill(level.begin(), level.end(), -1);
    queue<int> q;
    level[start] = 0;
    q.push(start);
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        for (auto& e : graph[v]) {
            if (e.capacity > 0 && level[e.next] < 0) {
                level[e.next] = level[v] + 1;
                q.push(e.next);
            }
        }
    }
}

int dfs(int v, int end, int flow) {
    if (v == end) return flow;
    for (int &i = iter[v]; i < graph[v].size(); i++) {
        edge &e = graph[v][i];
        if (e.capacity > 0 && level[v] < level[e.next]) {
            int d = dfs(e.next, end, min(flow, e.capacity));
            if (d > 0) {
                e.capacity -= d;
                graph[e.next][e.rev].capacity += d;
                return d;
            }
        }
    }
    return 0;
}

int maxflow(int start, int end) {
    int flow = 0;
    level.resize(graph.size() + 1);
    while (true) {
        bfs(start);
        if (level[end] < 0) return flow;
        iter.assign(graph.size() + 1, 0);
    }
}
```

```

    int f;
    while ((f = dfs(start, end, 1e9)) > 0) {
        flow += f;
    }
}
}

```

### 3.9 Minimum cost maximum flow

```

#define int long long
#define pii pair<int, int>

// Edmonds-Karp Algorithm Time: O(VE^2) 實際上會快一點
// 一條邊的費用為 單位花費 * 流過流量
// 把原本的 BFS 換成 SPFA 而已
// 記得在 main 裡面 resize graph
// MCMF 回傳 {flow, cost}

class edge{
public:
    int next;
    int capacity;
    int rev;
    int cost;
    bool is_rev;
    edge(int _n, int _c,
         int _r, int _co, int _ir) : next(_n), capacity
         (_c), rev(_r), cost(_co), is_rev(_ir){};
};

vector<vector<edge>> graph;

void add_edge(int a, int b, int capacity, int cost){
    graph[a].push_back(
        edge(b, capacity, graph[b].size(), cost, false));
    graph[b].push_back
        (edge(a, 0, graph[a].size() - 1, -cost, true));
}

pii dfs(int now
        , int end, pii data, vector<pii> &path, int idx){
    auto [flow, cost] = data;
    if(now == end) return {flow, 0};
    auto &e = graph[now][path[idx + 1].second];
    if(e.capacity > 0){
        auto [ret, nc] = dfs(e.next, end, {min(flow
            , e.capacity), cost + e.cost}, path, idx + 1);
        if(ret > 0){
            e.capacity -= ret;
            graph[e.next][e.rev].capacity += ret;
            return {ret, nc + ret * e.cost};
        }
    }
    return {0, 0};
}

vector<pii> search_path(int start, int end){
    int n = graph.size() + 1;
    vector<int> dis(n + 1, 1e9);
    vector<bool> vis(n + 1, false);
    vector<pii> ans; queue<int> q;
    vis[start] = true; q.push(start); dis[start] = 0;
    vector<pii> parent(graph.size(), {-1, -1});
    q.push(start);
    while(!q.empty()){
        auto node = q.front(); vis[node] = false; q.pop();
        for(int i = 0; i < graph[node].size(); i++){
            auto &e = graph[node][i];
            if(e.capacity
                > 0 and e.cost + dis[node] < dis[e.next]){
                dis[e.next] = e.cost + dis[node];
                parent[e.next] = {node, i};
                if(!vis[e.next]){
                    q.push(e.next);
                    vis[e.next] = true;
                }
            }
        }
    }
    if(parent[end].first == -1) return ans;
    int now = end;
    while(now != start){
        auto [node, idx] = parent[now];
        ans.emplace_back(node, idx);
        now = node;
    }
}

```

```

    }
    ans.emplace_back(start, -1);
    reverse(ans.begin(), ans.end());
    return ans;
}

pii MCMF(int start, int end){
    int ans = 0, cost = 0;
    while(1){
        vector<bool> visited(graph.size() + 1, false);
        auto tmp = search_path(start, end);
        if(tmp.size() == 0) break;
        auto [flow, c] = dfs(start, end, {1e9, 0}, tmp, 0);
        ans += flow;
        cost += c;
    }
    return {ans, cost};
}

```

### 3.10 二分圖

```

/*
判定二分圖：著色法 dfs 下去，顏色相撞非二分圖

二分圖最大匹配：用 maxflow 去做，一個 src
點聯通所有左圖，左圖建邊向右圖，右圖再建邊向 end
點，計算 src 跟 end 的最大流，若要還原，找出左圖
通往右圖中 capacity 為 0 的邊，他的兩個端點就是答案

最小點覆蓋：選最少的點，保證每條邊
至少有一個端點被選到， 最小點覆蓋 = 二分圖最大匹配

最大獨立集：選最多的點，滿足這些
點兩兩間互不相連， 最大獨立集 = n - 二分圖最大匹配
*/

```

## 4 String

### 4.1 trie

```

class trie{
public:
    class node{
    public:
        int count;
        vector<trie::node*> child;
        node(){
            child.resize(26, nullptr);
            count = 0;
        }
        ~node() {
            for (auto c : child)
                if (c) delete c;
        }
    };
    node* root;
    trie(){
        root = new node;
    }
    ~trie() {
        delete root;
    }
    void insert(string s){
        auto temp = root;
        for(int i = 0; i < s.size(); i++){
            if(!temp -> child[s[i] - 'a']) temp -> child[s[i] - 'a'] = new node;
            temp = temp -> child[s[i] - 'a'];
        }
        temp -> count++;
    }
    bool search(string &s){
        auto temp = root;
        for(int i = 0; i < s.size(); i++){
            temp = temp -> child[s[i] - 'a'];
            if(!temp) return false;
        }
        if(temp -> count > 0) return true;
        return false;
    }
};

```



## 4.2 KMP

```
vector<int> build(string &s){
    vector<int> next = {0, 0};
    // 匹配失敗跳去哪 (最長共同前後綴)
    int length = s.size(), j = 0;
    for(int i = 1; i < length; i++){
        while(j > 0 and s[j] != s[i]){
            j = next[j];
        }
        if(s[j] == s[i]) j++;
        next.push_back(j);
    }
    return next;
}

int match(string &a, string &b){
    auto next = build(b);
    int length
        = a.size(), length2 = b.size(), j = 0, count = 0;
    for(int i = 0; i < length; i++){
        while(j > 0 and a[i] != b[j]){
            j = next[j];
        }
        if(a[i] == b[j]) j++;
        if(j == length2){
            count++;
            j = next[j];
        }
    }
    return count;
}
```

## 4.3 Hash

```
vector<int> Pow(int num){
    int p = 1e9 + 7;
    vector<int> ans = {1};
    for(int i = 0; i < num; i++){
        ans.push_back(ans.back() * b % p);
    }
    return ans;
}

vector<int> Hash(string s){
    int p = 1e9 + 7;
    vector<int> ans = {0};
    for(char c:s){
        ans.push_back((ans.back() * b + c) % p);
    }
    return ans;
}

// 閉區間[l, r]
int query
    (vector<int> &vec, vector<int> &pow, int l, int r){
    int p = 1e9 + 7;
    int length = r - l + 1;
    return
        (vec[r + 1] - vec[l] * pow[length] % p + p) % p;
}
```

## 4.4 Zvalue

```
vector<int> z_func(string s1){
    int l = 0, r = 0, n = s1.size();
    vector<int> z(n, 0);
    for(int i = 1; i < n; i++){
        if(i
            <= r and z[i - l] < r - i + 1) z[i] = z[i - l];
        else{
            z[i] = max(z[i], r - i + 1);
            while(i + z
                [i] < n and s1[i + z[i]] == s1[z[i]]) z[i]++;
        }
        if(i + z[i] - 1 > r){
            l = i;
            r = i + z[i] - 1;
        }
    }
    return z;
}
```

## 4.5 最長迴文子串

```
// 找到對於每個位置的迴文半徑
vector<int> manacher(string s) {
    string t = "#";
    for (auto c : s) {
        t += c;
        t += '#';
    }
    int n = t.size();
    vector<int> r(n);
    for (int i = 0, j = 0; i
        < n; i++) { // i 是中心, j 是最長回文字串中心
        if (2 * j - i >= 0 && j + r[j] > i) {
            r[i] = min(r[2 * j - i], j + r[j] - i);
        }
        while (i - r[i] >= 0 &&
            i + r[i] < n && t[i - r[i]] == t[i + r[i]]) {
            r[i] += 1;
        }
        if (i + r[i] > j + r[j]) {
            j = i;
        }
    }
    return r;
}

// # a # b # a #
// 1 2 1 4 1 2 1
// # a # b # b # a #
// 1 2 1 2 5 2 1 2 1
// 值 -1 代表原回文字串長度
// (id - val + 1) / 2 可得原字串回文開頭
}
```

## 4.6 Suffix Array

```
struct SuffixArray {
    int n; string s;
    vector<int> sa, rk, lc;
    // 想法 :
        排序過了, 因此前綴長得像的會距離很近在差不多位置
    // n: 字串長度
    // sa: 後綴數組, sa[i] 表示第 i 小的後綴的起始位置
    // rk: 排名數組, rk[i] 表示從位置 i 開始的後綴的排名
    // lc: LCP 數組,
        lc[i] 表示 sa[i] 和 sa[i + 1] 的最長公共前綴長度
    // 求 sa[i] 跟 sa[j] 的
        LCP 長度 當 i < j : min(lc[i] ..... lc[j - 1])
    // 求 longest common substring : A +
        "#" + B 建立 SA, 找到 sa 相鄰但不同組中 lc 最大的
    SuffixArray(const string &s_) {
        s = s_; n = s.length();
        sa.resize(n);
        lc.resize(n - 1);
        rk.resize(n);
        iota(sa.begin(), sa.end(), 0);
        sort(sa.begin(), sa.end
            (), [&](int a, int b) { return s[a] < s[b]; });
        rk[sa[0]] = 0;
        for (int i = 1; i < n; ++i)
            rk[sa[i]]
                = rk[sa[i - 1]] + (s[sa[i]] != s[sa[i - 1]]);
        int k = 1;
        vector<int> tmp, cnt(n);
        tmp.reserve(n);
        while (rk[sa[n - 1]] < n - 1) {
            tmp.clear();
            for (int i = 0; i < k; ++i)
                tmp.push_back(n - k + i);
            for (auto i : sa)
                if (i >= k)
                    tmp.push_back(i - k);
            fill(cnt.begin(), cnt.end(), 0);
            for (int i = 0; i < n; ++i)
                ++cnt[rk[i]];
            for (int i = 1; i < n; ++i)
                cnt[i] += cnt[i - 1];
            for (int i = n - 1; i >= 0; --i)
                sa[--cnt[rk[tmp[i]]]] = tmp[i];
            swap(rk, tmp);
            rk[sa[0]] = 0;
            for (int i = 1; i < n; ++i)
                rk[sa[i]] = rk[sa[i - 1]] + (tmp[
                    sa[i - 1]] < tmp[sa[i]] || sa[i - 1] + k ==
                    n || tmp[sa[i - 1]] + k < tmp[sa[i] + k]);
            k *= 2;
        }
    }
}
```

```

for (int i = 0, j = 0; i < n; ++i) {
    if (rk[i] == 0) {
        j = 0;
    } else {
        for (j -= j > 0; i + j < n && sa[rk[i] - 1] + j
             < n && s[i + j] == s[sa[rk[i] - 1] + j]; )
            ++j;
        lc[rk[i] - 1] = j;
    }
}
};

```

## 5 Geometry

### 5.1 Point

```

template<typename T>
class point{
public:
    T x;
    T y;
    point(){}
    point(T _x, T _y){
        x = _x;
        y = _y;
    }
    point<T> operator+(const point<T> &a);
    point<T> operator-(const point<T> &a);
    point<T> operator/(const point<T> &a);
    point<T> operator/(T a);
    point<T> operator*(const T &a);
    bool operator<(const point<T> &a);
};

template<typename T>
point<T> point<T>::operator+(const point<T> &a){
    return point<T>(x + a.x, y + a.y);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator-(const point<T> &a){
    return point<T>(x - a.x, y - a.y);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator/(const point<T> &a){
    return point<T>(x / a.x, y / a.y);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator/(T a){
    return point<T>(x / a, y / a);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator*(const T &a){
    return point<T>(x * a, y * a);
}

template<typename T>
bool point<T>::operator<(const point<T> &a){
    if(x != a.x) return x < a.x;
    return y < a.y;
}

```

### 5.2 內積, 外積, 距離

```

template<typename T>
T dot(const point<T> &a, const point<T> &b){
    return a.x * b.x + a.y * b.y;
}

template<typename T>
T cross(const point<T> &a, const point<T> &b){
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}

template<typename T>
T len(point<T> p){
    return sqrt(dot(p, p));
}

```

### 5.3 向量應用

```

template<typename T>
bool collinearity
(point<T> p1, point<T> p2, point<T> p3){
    //檢查三點是否共線
    return cross(p2 - p1, p2 - p3) == 0;
}

template<typename T>
bool inLine(point<T> a, point<T> b, point<T> p){
    //檢查 p 點是否在ab線段
    return collinearity
           (a, b, p) && dot(a - p, b - p) <= 0;
}

template<typename T>
bool intersect
(point<T> a, point<T> b, point<T> c, point<T> d){
    //ab線段跟cd線段是否相交
    return (cross(b - a, c - a) * \
            cross(b - a, d - a) < 0 && \
            cross(d - c, a - c) * \
            cross(d - c, b - c) < 0) \
           || inLine(a, b, c) || \
           inLine(a, b, d) || inLine(c, d, a) \
           || inLine(c, d, b);
}

template<typename T>
point<T> intersection
(point<T> a, point<T> b, point<T> c, point<T> d){
    //ab線段跟cd線段相交的點
    assert(intersect(a, b, c, d));
    return a + (b -
                a) * cross(a - c, d - c) / cross(d - c, b - a);
}

template<typename T>
bool inPolygon(vector<point<T>> polygon, point<T> p){
    //判斷點
    //p是否在多邊形polygon裡, vector裡的點要連續填對
    for(int i = 0; i < polygon.size(); i++){
        if(cross(p - polygon[i], \
                polygon[(i - 1 + polygon.size()) % \
                polygon.size()] - polygon[i]) * \
                cross(p - polygon[i], \
                polygon[(i + 1) % polygon.size()] - polygon[i]) > 0)
            return false;
        return true;
    }
}

template<typename T>
T triangleArea(point<T> a, point<T> b, point<T> c){
    //三角形頂點, 求面積
    return abs(cross(b - a, c - a)) / 2;
}

template<typename T, typename F, typename S>
long double triangleArea_Herons_formula(T a, F b, S c){
    //三角形頂點, 求面積(給邊長)
    auto p = (a + b + c) / 2;
    return sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c));
}

template<typename T>
T area(vector<point<T>> &p){
    //多邊形頂點, 求面積
    T ans = 0;
    for(int i = 0; i < p.size(); i++){
        ans += cross(p[i], p[(i + 1) % p.size()]);
    }
    return ans / 2 > 0 ? ans / 2 : -ans / 2;
}

5.4 Static Convex Hull

// 需要使
// 用前一個向量模板的 point, 需要 operator - 以及 <
// 需要前面向量模板的 cross

template<typename T>
vector<point<T>> getConvexHull(vector<point<T>>& pnts){
    sort(pnts.begin(), pnts.end());
}

```



```

auto cmp = [&](point<T> a, point<T> b)
{ return a.x == b.y && a.x == b.y; };
pts.erase(unique
    (pts.begin(), pts.end(), cmp), pts.end());
if(pts.size() <= 1) return pts;
vector<point<T>> hull;
for(int i = 0; i < 2; i++){
    int t = hull.size();
    for(point<T> pnt : pts){
        while(hull.size() - t >= 2 &&
            cross(hull.back() - hull[hull.size()
                - 2], pnt - hull[hull.size() - 2]) < 0)
            // <= 0 或者 < 0 要看點有沒有在邊上
            hull.pop_back();
        hull.push_back(pnt);
    }
    hull.pop_back();
    reverse(pts.begin(), pts.end());
}
return hull;
}

```

## 5.5 外心, 最小覆蓋圓

```

int sign(double a)
{
    // 小於 eps
    // 回傳 0, 否則正回傳 1, 負回傳 -1 應付浮點數誤差用
    const double eps = 1e-10;
    return fabs(a) < eps ? 0 : a > 0 ? 1 : -1;
}

// 輸入三個點求外心
template<typename T>
point<T> findCircumcenter(point<
    T> A, point<T> B, point<T> C, const T eps = 1e-10){
    point<T> AB = B - A;
    point<T> AC = C - A;
    T AB_len_sq = AB.x * AB.x + AB.y * AB.y;
    T AC_len_sq = AC.x * AC.x + AC.y * AC.y;
    T D = AB.x * AC.y - AB.y * AC.x;
    // 若三點接近共線
    assert(fabs(D) < eps);
    // 外心的座標
    T circumcenterX = A.x + (
        AC.y * AB_len_sq - AB.y * AC_len_sq) / (2 * D);
    T circumcenterY = A.y + (
        AB.x * AC_len_sq - AC.x * AB_len_sq) / (2 * D);
    return point<T>(circumcenterX, circumcenterY);
}

template<typename T>
pair<T, point<T>> MinCircleCover(vector<point<T>> &p) {
    // 引入前面的 len 跟 point
    // 回傳最小覆蓋圓{半徑, 中心}
    random_shuffle(p.begin(), p.end());
    int n = p.size();
    point<T> c = p[0]; T r = 0;
    for(int i=1; i<n; i++){
        if(sign(len(c-p[i])-r) > 0) { // 不在圓內
            c = p[i], r = 0;
            for(int j=0; j<i; j++){
                if(sign(len(c-p[j])-r) > 0) {
                    c = (p[i]+p[j])/2.0;
                    r = len(c-p[i]);
                    for(int k=0; k<j; k++){
                        if(sign(len(c-p[k])-r) > 0) {
                            c = findCircumcenter
                                (p[i], p[j], p[k]);
                            r = len(c-p[i]);
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    return make_pair(r, c);
}

```

## 5.6 四邊形旋轉

```

const long double PI = acos(-1);

// 寬 w 高 h 的四邊形, 旋轉一個 pi 後在每個角度的寬高

```

```

vector
    <pair<double, double>> rotate(double w, double h){
    int freq = 1000; // 自己調整精度
    vector<pair<double, double>> res;
    for (int i = 0; i <= 5; ++i) {
        double theta = (PI * i) / 5;
        double nw
            = c * fabs(cos(theta)) + d * fabs(sin(theta));
        double nh
            = c * fabs(sin(theta)) + d * fabs(cos(theta));
        res.push_back({nw, nh});
    }
    return res;
}

```

## 5.7 旋轉

```

const long double PI = acos(-1);
// 逆時針旋轉
// angle_rad 為弧度
pair<double, double> rotate_point
    (double x, double y, double angle_rad) {
    angle_rad *= PI;
    double
        new_x = x * cos(angle_rad) - y * sin(angle_rad);
    double
        new_y = x * sin(angle_rad) + y * cos(angle_rad);
    return {new_x, new_y};
}

int main() {
    double x = 5, y = 0;
    double angle = 0.5; // 逆時針旋轉 90 度
    auto result = rotate_point(x, y, angle);
    cout << result.first << " " << result.second << endl;
    // 0, 5
    return 0;
}

```

## 5.8 極座標轉直角座標

```

// 極座標轉換為直角座標函數, theta 單位為弧度
const long double PI = acos(-1);
pair<double, double>
    > polar_to_cartesian(double r, double theta) {
    double theta_radians = theta * PI;
    double x = r * cos(theta_radians);
    double y = r * sin(theta_radians);
    return {x, y};
}

int main() {
    double r = 5, theta = 0.5; // 極座標
    auto result = polar_to_cartesian(r, theta);
    cout << result.first << " " << result.second << endl;
    // 0, 5
    return 0;
}

```

# 6 Data Structure

## 6.1 Sparse Table

```

class Sparse_Table{
    // 0-base
    // 要改成找最大把min換成max就好
private:
public:
    int spt[500005][22][2];
    Sparse_Table(vector<int> &ar){
        int n = ar.size();
        for (int i = 0; i < n; i++){
            spt[i][0][0] = ar[i];
            // spt[i][0][1] = ar[i];
        }
        for (int j = 1; (1 << j) <= n; j++) {
            for (int i = 0; (i + (1 << j) - 1) < n; i++) {
                spt[i][j][0] = min(spt[i + (1 <<
                    (j - 1))][j - 1][0], spt[i][j + (1 <<
                    // spt[i][j][1] = max(spt[i + (1 <<
                    (j - 1))][j - 1][1], spt[i][j + (1 <<
                }
            }
        }
    }
    int query_min(int l, int r)
}

```

```

{
    if(l>r) return INT_MAX;
    int j = (int) __lg(r - l + 1);
    ///j = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
    return min
        (spt[l][j][0], spt[r - (1 << j) + 1][j][0]);
}
int query_max(int l, int r)
{
    if(l>r) return INT_MAX;
    int j = (int) __lg(r - l + 1);
    ///j = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
    return max
        (spt[l][j][1], spt[r - (1 << j) + 1][j][1]);
}
};

```

## 6.2 Segment Tree

```

// #define int long long

// 要改最大或
// 者最小值線段樹需改 build 跟 queryRange, updateRange
// 0-base 注意
template<typename T>
class segment_tree {
private:
    vector<T> tree, lazy, arr;
    int size;
    void build
        (vector<T> &save, int node, int start, int end) {
        if (start == end) tree[node] = save[start];
        else {
            int mid = (start + end) / 2;
            build(save, 2 * node, start, mid);
            build(save, 2 * node + 1, mid + 1, end);
            tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
        }
    }
    void updateRange(int node
        , int start, int end, int l, int r, T delta) {
        if (lazy[node] != 0) {
            tree[node] += (end - start + 1) * lazy[node];
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += lazy[node];
                lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
            }
            lazy[node] = 0;
        }
        if (start > end or start > r or end < l) return;
        if (start >= l and end <= r) {
            tree[node] += (end - start + 1) * delta;
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += delta;
                lazy[2 * node + 1] += delta;
            }
            return;
        }
        int mid = (start + end) / 2;
        updateRange(2 * node, start, mid, l, r, delta);
        updateRange
            (2 * node + 1, mid + 1, end, l, r, delta);
        tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
    }
    T queryRange
        (int node, int start, int end, int l, int r) {
        if (lazy[node] != 0) {
            tree[node] += (end - start + 1) * lazy[node];
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += lazy[node];
                lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
            }
            lazy[node] = 0;
        }
        if (start > end or start > r or end < l) {
            // return numeric_limits
            <T>::max(); // 找區間最小值用這行
            // return numeric_limits
            <T>::min(); // 找區間最大值用這行
            return 0; // 區間和
        }
        if (start >= l and end <= r) return tree[node];
        int mid = (start + end) / 2;
        T p1 = queryRange(2 * node, start, mid, l, r);
        T p2
            = queryRange(2 * node + 1, mid + 1, end, l, r);

```

```

        return p1 + p2;
    }
    void updateNode(
        int node, int start, int end, int idx, T delta) {
        if (start == end) tree[node] += delta;
        else {
            int mid = (start + end) / 2;
            if (start <= idx and idx <= mid)
                updateNode(2 * node, start, mid, idx, delta);
            else updateNode
                (2 * node + 1, mid + 1, end, idx, delta);
            tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
        }
    }
public:
    void build(vector<T> &save, int l, int r) {
        int n = size = save.size();
        tree.resize(4 * n);
        lazy.resize(4 * n);
        arr = save;
        build(save, 1, l, r);
    }
    void modify_scope(int l, int r, T delta) {
        updateRange(1, 0, size - 1, l, r, delta);
    }
    void modify_node(int idx, T delta) {
        updateNode(1, 0, size - 1, idx, delta);
    }
    T query(int l, int r) {
        return queryRange(1, 0, size - 1, l, r);
    }
};

signed main()
{
    int n, q;
    cin >> n >> q;
    vector<int> save(n, 0);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> save[i];
    }
    segment_tree<int> s;
    // init [0, n - 1]
    s.build(save, 0, n - 1);
    // modify [a, b] add c
    s.modify_scope(a, b, c);
    // query [a, b]
    s.query(a, b)
}

```

## 6.3 Link Cut Tree

```

// 通常用於對樹上任兩點間的路徑做加值、修改、查詢等工作
// 與線段樹相同，要修改 LCT 的功能只需更改
// pull、push、fix、query 等函數，再加上需要的懶標即可
// 範例為樹上任兩點 x, y 路徑上的權值 xor
// 和，樹上任意點單點改值
const int N = 300005;
class LinkCutTree {
private:
#define lc(x) node[x].ch[0]
#define rc(x) node[x].ch[1]
#define fa(x) node[x].fa
#define rev(x) node[x].rev
#define val(x) node[x].val
#define sum(x) node[x].sum
    struct Tree {
        int val, sum, fa, rev, ch[2];
    } node[N];
    inline void pull(int x) {
        sum(x) = val(x) ^ sum(lc(x)) ^ sum(rc(x));
    }
    inline void reverse(int x) {
        swap(lc(x), rc(x));
        rev(x) ^= 1;
    }
    inline void push(int x) {
        if (rev(x)) {
            reverse(lc(x));
            reverse(rc(x));
            rev(x) ^= 1;
        }
    }
    inline bool get(int x) { return rc(fa(x)) == x; }
    inline bool isroot(int x) {

```

```

    return (lc(fa(x)) ^ x) && (rc(fa(x)) ^ x);
}
inline void update(int x) {
    if (!isroot(x)) update(fa(x));
    push(x);
}
void rotate(int x) {
    int y = fa(x), z = fa(y), d = get(x);
    if (!isroot(y))
        node[z].ch[get(y)] = x; // 重要，不能更換順序
    fa(x) = z;
    node[fa(node[x].ch[d ^ 1])].ch[d] =
        node[x].ch[d ^ 1];
    node[fa(y) = x].ch[d ^ 1] = y;
    pull(y), pull(x); // 先 y 再 x
}
void splay(int x) {
    update(x);
    for (int y = fa(x); !isroot(x);
        rotate(x), y = fa(x)) {
        if (!isroot(y)) rotate(get(x) == get(y) ? y : x);
    }
    pull(x);
}
int access(int x) {
    int p = 0;
    for (; x; x = fa(p = x)) {
        splay(x), rc(x) = p, pull(x);
    }
    return p;
}
inline void makeroot(int x) {
    access(x), splay(x), reverse(x);
}
inline int findroot(int x) {
    access(x), splay(x);
    while (lc(x)) { push(x), x = lc(x); }
    return splay(x), x;
}
inline void split(int x, int y) {
    makeroot(x), access(y), splay(y);
}

public:
    inline void init(int len, int *data) {
        for (int i = 1; i <= len; ++i) {
            node[i].val = data[i];
        }
    }
    inline void link(int x, int y) { // 連邊
        makeroot(x);
        if (findroot(y) == x) return;
        fa(x) = y;
    }
    inline void cut(int x, int y) { // 斷邊
        makeroot(x);
        if (findroot(y) != x || fa(y) != x || lc(y))
            return;
        fa(y) = rc(x) = 0;
        pull(x);
    }
    inline void fix(int x, int v) { // 單點改值
        splay(x);
        val(x) = v;
    }
    // 區間查詢
    inline int query(int x, int y) {
        return split(x, y), sum(y);
    }
};

LinkCutTree LCT;
int n, a[N];

signed main() {
    int n, q, op, x, y;
    cin >> n >> q;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) { cin >> a[i]; }
    LCT.init(n, a);
    while (q--) {
        cin >> op >> x >> y;
        if (op == 0) {
            cout << LCT.query(x, y) << endl;
        } else if (op == 1) {
            LCT.link(x, y);
        }
    }
}

```

```

    } else if (op == 2) {
        LCT.cut(x, y);
    } else {
        LCT.fix(x, y);
    }
}
return 0;
}

```

## 7 Dynamic Programming

### 7.1 LCS

```

int LCS(string t1, string t2) {
    if (t1.size() < t2.size()) swap(t1, t2);
    int len = t1.size();
    vector<vector<int>> dp(2, vector<int>(len + 1, 0));
    for (int j = 1; j <= t2.size(); j++) {
        for (int i = 1; i <= len; i++) {
            if (t2[j - 1] == t1[i - 1])
                dp[j % 2][i] = dp[(j + 1) % 2][i - 1] + 1;
            else
                dp[j % 2][i] = max(dp[(j + 1) % 2][i], dp[j % 2][i - 1]);
        }
    }
    return dp[t2.size() % 2][t1.size()];
}

```

### 7.2 LIS

```

int LIS(vector<int>& save) {
    vector<int> dp;
    int n = save.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        auto it = lower_bound(dp.begin(), dp.end(), save[i]);
        if (it == dp.end()) dp.push_back(save[i]);
        else *it = save[i];
    }
    return dp.size();
}

```

### 7.3 Knapsack

```

/**
 * 背包問題：
 * 1. dp[i][j]: 考慮 1~i 個物品，重量為 j 時的最大價格
 * 2. dp[i][j]: 考慮 1~i 個物品，價值為 j 時的最小重量
 */

// 當重量比較輕時 O(nw)
vector<int> dp(sum + 1, 0);
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    for (int j = sum /* bound */; j >= weight[i]; --j) {
        if (dp[j] < dp[j - weight[i]] + price[i]) {
            dp[j] = dp[j - weight[i]] + price[i];
            backtrack[i][j] = 1;
        }
    }
}

// 當重量比較重時 O(nc)
vector<int> dp(sum + 1, 1e9 + 7);
dp[0] = 0;
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    for (int j = sum /* bound */; j >= price[i]; --j) {
        if (dp[j] > dp[j - price[i]] + weight[i]) {
            dp[j] = dp[j - price[i]] + weight[i];
            backtrack[i][j] = 1;
        }
    }
}

// backtrack: 找到當 bound 為 k 時，背包內有哪些東西
// 註：只找到其中一種
int l = n, r = k;
vector<int> ans;
while (l != 0 && r != 0) {
    if (backtrack[l][r]) {
        ans.push_back(l);
        r -= weight[l]; // 當用方法一時，用這行
        r -= price[l]; // 當用方法二時，用這行
    }
    l--;
}
}

```

## 7.4 位元 dp

```
// 檢查第 n 位是否為 1
if(a & (1 << n))

// 強制將第 n 位變成 1
a |= (1 << n)

// 強制將第 n 位變成 0
a &= ~(1 << n)

// 將第 n 位反轉(1變0, 0變1)
a ^= (1 << n)

// 第 0 ~ n - 1 位 全部都是 1
(1 << n) - 1

// 兩個集合的聯集
S = a | b

// 兩個集合的交集
S = a & b
```

## 7.5 經典 dp 轉移式

```
/*
最大區間和：

dp[i] 代表 由第 i 項結尾時的最大區間和
dp[0] = arr[0]
dp[i] = max(dp[i - 1], arr[i])
ans = max_element(dp)
*/
```

## 8 Divide and conquer

### 8.1 逆序數對

```
int merge(
    vector<pair<int, int>>& v, int l, int mid, int r) {
    vector<pair<int, int>> temp(r - l + 1);
    int i = l, j = mid + 1, k = 0, inv_count = 0;
    while (i <= mid && j <= r) {
        if (v[i].second <= v[j].second) {
            temp[k++] = v[i++];
        } else {
            temp[k++] = v[j++];
            inv_count += (mid - i + 1);
        }
    }
    while (i <= mid) temp[k++] = v[i++];
    while (j <= r) temp[k++] = v[j++];
    for (int i = l; i <= r; i++) {
        v[i] = temp[i - l];
    }
    return inv_count;
}

int mergeSort(
    vector<pair<int, int>>& v, int l, int r) {
    int count = 0;
    if (l < r) {
        int mid = l + (r - l) / 2;
        count += mergeSort(v, l, mid);
        count += mergeSort(v, mid + 1, r);
        count += merge(v, l, mid, r);
    }
    return count;
}

signed main()
{
    int n;
    cin >> n;
    vector<pair<int, int>> arr(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        arr[i].first = i;
        cin >> arr[i].second;
    }
    cout << mergeSort(arr, 0, n - 1) << '\n';
}
```

## 9 Tree

### 9.1 樹直徑

```
int d1[200005], d2[200005], ans;

void dfs(int now, int fa, vector<vector<int>> &graph){
    for(auto i: graph[now]){
        if(i != fa){
            dfs(i, now, graph);
            if(d1[i] + 1 > d1[now]){
                d2[now] = d1[now];
                d1[now] = d1[i] + 1;
            }
            else if(d1[i] + 1 > d2[now]){
                d2[now] = d1[i] + 1;
            }
        }
    }
    ans = max(ans, d1[now] + d2[now]);
}

signed main()
{
    int n;
    cin >> n;
    vector<vector<int>> graph(n + 1);
    for(int i = 0; i < n - 1; i++){
        int a, b;
        cin >> a >> b;
        graph[a].push_back(b);
        graph[b].push_back(a);
    }
    dfs(1, 0, graph);
    cout << ans << '\n';
}
```

### 9.2 LCA

// n 為點數，graph 由子節點往父節點建有向邊  
// graph 要 resize

```
int n, q;
int fa[20][200001];
int dep[200001];

vector<vector<int>> graph;

void dfs(int now, int lst){
    fa[0][now] = lst;
    for(int &i:graph[now]){
        dep[i] = dep[now] + 1;
        dfs(i, now);
    }
}

void build_lca(int root){
    dep[root] = 1;
    dfs(root, root);
    for(int i = 1; i < 18; i++){
        for(int j = 1; j < n + 1; j++){
            fa[i][j] = fa[i - 1][fa[i - 1][j]];
        }
    }
}

int lca(int a, int b){
    // 預設 a 比 b 淺
    if(dep[a] > dep[b]) return lca(b, a);
    // 讓 a 和 b 跳到同一個地方
    int step = dep[b] - dep[a];
    for (int i = 0; i < 18; i++)
    {
        if(step >> i & 1){
            b = fa[i][b];
        }
    }
    if(a == b) return a;
    for(int i = 17; i >= 0; i--){
        if(fa[i][a] != fa[i][b]){
            a = fa[i][a];
            b = fa[i][b];
        }
    }
    return fa[0][a];
}
```

## 10 Else

### 10.1 Big Number

```

string Add(const string &a, const string &b) {
    int n
        = a.length() - 1, m = b.length() - 1, car = 0;
    string res;
    while (n >= 0 || m >= 0 || car) {
        int x = (n >= 0 ? a[n] -
            '0' : 0) + (m >= 0 ? b[m] - '0' : 0) + car;
        res += (x % 10) + '0';
        car = x / 10;
        n--, m--;
    }
    while (res.length() > 1 && res.back() == '0') {
        res.pop_back();
    }
    reverse(res.begin(), res.end());
    return res;
}

string Minus(const string &a, const string &b) {
    // Assume a >= b
    int n
        = a.length() - 1, m = b.length() - 1, bor = 0;
    string res;
    while (n >= 0) {
        int x = a[n] - '0' - bor;
        int y = m >= 0 ? b[m] - '0' : 0;
        bor = 0;
        if (x < y) {
            x += 10;
            bor = 1;
        }
        res += x - y + '0';
        n--, m--;
    }
    while (res.length() > 1 && res.back() == '0') {
        res.pop_back();
    }
    reverse(res.begin(), res.end());
    return res;
}

string Multiple(const string &a, const string &b) {
    string res = "0";
    int n = a.length() - 1, m = b.length() - 1;
    for (int i = m; i >= 0; i--) {
        string add;
        int car = 0;
        for (int j = n; j >= 0 || car; j--) {
            int x = (j >= 0
                ? a[j] - '0' : 0) * (b[i] - '0') + car;
            add += (x % 10) + '0';
            car = x / 10;
        }
        while (add.length() > 1 && add.back() == '0') {
            add.pop_back();
        }
        reverse(add.begin(), add.end());
        res = Add(res, add + string(m - i, '0'));
    }
    return res;
}

```