

Contents

| | | | |
|-------------------------------|----------|-----------------------------|----------|
| 1 Basic | 1 | 4 String | 4 |
| 1.1 Default Code | 1 | 4.1 KMP | 4 |
| 1.2 PBDS | 1 | 4.2 Hash | 5 |
| 1.3 int128 Input Output | 1 | 4.3 Zvalue | 5 |
| 1.4 Python | 1 | 4.4 Suffix Array | 5 |
| 2 Math | 1 | 5 Geometry | 5 |
| 2.1 快速幂 | 1 | 5.1 Point | 5 |
| 2.2 擴展歐幾里得 | 2 | 5.2 內積, 外積, 距離 | 6 |
| 2.3 Miller rabin Prime test | 2 | 5.3 向量應用 | 6 |
| 2.4 Pollard's Rho | 2 | 5.4 Static Convex Hull | 6 |
| 3 Graph | 2 | 5.5 外心, 最小覆蓋圓 | 6 |
| 3.1 DSU | 2 | 6 Data Structure | 7 |
| 3.2 Dijkstra | 2 | 6.1 Sparse Table | 7 |
| 3.3 SPFA | 2 | 6.2 Segment Tree | 7 |
| 3.4 Tarjan SCC | 3 | 7 Dynamic Programing | 8 |
| 3.5 2 SAT | 3 | 7.1 LCS | 8 |
| 3.6 Max flow min cut | 3 | 7.2 LIS | 8 |
| 3.7 Minimum cost maximum flow | 4 | 7.3 位元 dp | 8 |
| 3.8 二分圖 | 4 | 8 Divide and conquer | 8 |
| | | 8.1 逆序數對 | 8 |

1 Basic

1.1 Default Code

```
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
// #pragma GCC target("popcnt")
// #pragma GCC optimize("O3")
using namespace std;

void solve() {

}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int tt = 1;
    cin >> tt;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

1.2 PBDS

```
#include <bits/stdc++.h>
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
using namespace std;

template
<class T> using Tree = tree<T, null_type, less<T>,
    rb_tree_tag, tree_order_statistics_node_update>;

/*
如果有 define int long long 記得拿掉
Tree<int> t 就跟 set<int> t 一樣, 有包好 template
rb_tree_tag 使用紅黑樹
第三個參數 less<T> 為由小到大, greater<T> 為由大到小
插入 t.insert(); 刪除 t.erase();
t.order_of_key(k); 從前往後數 k 是第幾個 (0-base 且回傳 int 型別)
t.find_by_order(k); 從前往後數第 k 個元素 (0-base 且回傳 iterator 型別)
t.lower_bound(); t.upper_bound(); 用起來一樣 回傳 iterator
可以用 Tree<pair<int, int>> T 來模擬 multiset
*/
```

1.3 int128 Input Output

```
// 抄 BBuf github 的
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

void scan(__int128 &x) // 輸入
```

```
{
    x = 0;
    int f = 1;
    char ch;
    if((ch = getchar()) == '-') f = -f;
    else x = x*10 + ch - '0';
    while((ch = getchar()) >= '0' && ch <= '9')
        x = x*10 + ch - '0';
    x *= f;
}

void print(__int128 x) // 輸出
{
    if(x < 0)
    {
        x = -x;
        putchar('-');
    }
    if(x > 9) print(x/10);
    putchar(x%10 + '0');
}

int main()
{
    __int128 a, b;
    scan(a);
    scan(b);
    print(a + b);
    puts("");
    print(a*b);
    return 0;
}
```

1.4 Python

```
## Input
# p q 都是整數, 中間以空白分開輸入
p, q = map(int, input().split())

# 輸入很多個用空
    白隔開的數字, 轉成 float 放進陣列, s 是 input 字串
arr = list(map(float, s.split()))

# 分數用法 Fraction(被除數, 除數)
from fractions import Fraction

arr = [Fraction
    (0), Fraction(1, 6), Fraction(1, 2), Fraction(5,
    12), Fraction(0), Fraction(-1, 12), Fraction(0)]

def fx(x):
    x = Fraction(x)
    ans = Fraction(0)
    for i in range(1, 7):
        ans += arr[i] * x ** (7 - i)
    return ans
```

2 Math

2.1 快速幂

```
#define int long long

// 根據費馬小定
理, 若 a p 互質, a^(p-2) 為 a 在 mod p 時的乘法逆元
typedef unsigned long long ull;
inline int ksc(ull
    x, ull y, int p) { // O(1)快速乘 (防爆 long long)
    return (x
        * y - (ull)((long double)x / p * y) * p + p) % p;
}

inline int fast_pow(int a, int b, int mod)
{
    // a^b % mod
    int res = 1;
    while(b)
    {
        if(b & 1) res = ksc(res, a, mod);
        a = ksc(a, a, mod);
        b >>= 1;
    }
    return res;
}
```

2.2 擴展歐幾里得

```
int gcd(int a, int b)
{
    return b == 0 ? a : gcd(b, a % b);
}

int lcm(int a, int b)
{
    return a * b / gcd(a, b);
}

pair<int, int> ext_gcd
(int a, int b) //擴展歐幾里德  $ax+by = \gcd(a,b)$ 
{
    if (b == 0)
        return {1, 0};
    if (a == 0)
        return {0, 1};
    int x, y;
    tie(x, y) = ext_gcd(b % a, a);
    return make_pair(y - b * x / a, x);
}
```

2.3 Miller rabin Prime test

// fast_pow 去前面抄，需要處理防暴乘法
 // 記得 #define int long long 也要放
 // long long 範圍內測試過答案正確
 // time: $O(\log n)$

```
inline bool mr(int x, int p) {
    if (fast_pow(x, p - 1, p) != 1) return 0;
    int y = p - 1, z;
    while (!(y & 1)) {
        y >>= 1;
        z = fast_pow(x, y, p);
        if (z != 1 && z != p - 1) return 0;
        if (z == p - 1) return 1;
    }
    return 1;
}

inline bool prime(int x) {
    if (x < 2) return 0;
    if (x == 2 || x == 3 || x == 5 || x == 7 || x == 43) return 1;
    // 如果把 2 到 37 前 12 個質數都檢查一遍 可以保證  $2^{78}$  皆可用
    return mr(2, x) && mr(3, x) && mr(5, x) && mr(7, x) && mr(43, x);
}
```

2.4 Pollard's Rho

// 主函數記得放 srand(time(nullptr))
 // prime 檢測以及快速冪, gcd 等請從前面抄

// 輸入一個數字 p ，隨機回傳一個非 1 非 p 的因數，若 p 是質數會無窮迴圈

```
#define rg register int
inline int rho(int p) {
    int x, y, z, c, g;
    rg i, j;
    while (1) {
        y = x = rand() % p;
        z = 1;
        c = rand() % p;
        i = 0, j = 1;
        while (++i) {
            x = (ksc(x, x, p) + c) % p;
            z = ksc(z, abs(y - x), p);
            if (x == y || !z) break;
            if (!(i % 127) || i == j) {
                g = gcd(z, p);
                if (g > 1) return g;
                if (i == j) y = x, j <= 1;
            }
        }
    }
}

// 回傳隨機一個質因數，若 input 為質數，則直接回傳
int prho(int p){
    if(prime(p)) return p;
```

```
int m = rho(p);
if(prime(m)) return m;
return prho(p / m);
}
```

// 回傳將 n 質因數分解的結果，由小到大排序
 // ex: input: 48, output: 2 2 2 2 3

```
vector<int> prime_factorization(int n){
    vector<int> ans;
    while(n != 1){
        int m = prho(n);
        ans.push_back(m);
        n /= m;
    }
    sort(ans.begin(), ans.end());
    return ans;
}
```

3 Graph

3.1 DSU

```
class dsu{
public:
    vector<int> parent;
    dsu(int num){
        parent.resize(num);
        for(int i = 0; i < num; i++) parent[i] = i;
    }
    int find(int x){
        if(parent[x] == x) return x;
        return parent[x] = find(parent[x]);
    }
    bool same(int a, int b){
        return find(a) == find(b);
    }
    void Union(int a, int b){
        parent[find(a)] = find(b);
    }
};
```

3.2 Dijkstra

// 傳入圖的 pair 為 {權重, 點}, 無限大預設 $1e9$ 是情況改
 #define pii pair<int, int>

```
vector<int> dijkstra(vector<vector<pii>> &graph, int src){
    int n = graph.size();
    vector<int> dis(n, 1e9);
    vector<bool> vis(n, false);
    priority_queue<pii, vector<pii>, greater<pii>> pq;
    pq.push({0, src});
    dis[src] = 0;
    while(!pq.empty()){
        auto [w, node] = pq.top();
        pq.pop();
        if(vis[node]) continue;
        vis[node] = true;
        for(auto [nw, nn]:graph[node]){
            if(w + nw < dis[nn]){
                dis[nn] = w + nw;
                pq.push({dis[nn], nn});
            }
        }
    }
    return dis;
}
```

3.3 SPFA

#define pii pair<int, int>

// {在 src 可到達的點中是否存在負環, 最短路徑}, arg 中 n 為點的數量
 // arg 中 pair 裡的第一個值為權重, 第二個為點

```
pair<bool, vector<int>> SPFA(vector<vector<pii>> &graph, int n, int src){
    vector<int> dis(n + 1, 1e9);
    vector<int> cnt(n + 1, 0);
    vector<bool> vis(n + 1, false);
    queue<int> q;
    vis[src] = true; q.push(src); dis[src] = 0;
    while(!q.empty()){
        auto node = q.front(); vis[node] = false; q.pop();
        for(auto [w, nn]:graph[node]){
            if(w + dis[node] < dis[nn]){
```

```

    dis[nn] = w + dis[node];
    if(!vis[nn]){
        if(++cnt[nn] >= n) return {true, {}};
        q.push(nn);
        vis[nn] = true;
    }
}
}
return {false, dis};
}

```

3.4 Tarjan SCC

```

class tarjan{
    // 1-base
    int time = 1;
    int id = 1;
    stack<int> s;
    vector<int> low;
    vector<int> dfn;
    vector<bool> in_stack;
    void dfs(int node, vector<vector<int>> &graph){
        in_stack[node] = true;
        s.push(node);
        dfn[node] = low[node] = time++;
        for(auto &j : graph[node]){
            if(dfn[j] == 0){
                dfs(j, graph);
                // 看看往下有沒有辦法回到更上面的點
                low[node] = min(low[node], low[j]);
            }
            else if(in_stack[j]){
                low[node] = min(low[node], low[j]);
            }
        }
        vector<int> t; // 儲存這個強連通分量
        if(dfn[node] == low[node]){
            while(s.top() != node){
                t.push_back(s.top());
                in_stack[s.top()] = false;
                scc_id[s.top()] = id;
                s.pop();
            }
            t.push_back(s.top());
            scc_id[s.top()] = id;
            in_stack[s.top()] = false;
            s.pop();
            id++;
        }
        if(!t.empty()) ans.push_back(t);
    }
public:
    vector<int> scc_id;
    vector<vector<int>> ans;
    // ans ans[i] 代表第 i 個強連通分量裡面包涵的點
    // scc_id[i] 代表第 i 個點屬於第幾個強連通分量
    vector
    <vector<int>> scc(vector<vector<int>> &graph){
        int num = graph.size();
        scc_id.resize(num, -1);
        dfn.resize(num, 0);
        low.resize(num, 0);
        in_stack.resize(num, false);
        for(int i = 1; i < num; i++){
            if(dfn[i] == 0) dfs(i, graph);
        }
        return ans;
    }
};

```

3.5 2 SAT

```

// 用
// 下面的 tarjan scc 算法來解 2 sat 問題，若 事件 a 發
// 生時，事件 b 必然發生，我們須在 a -> b 建立一條有向
// 用
// cses 的 Giant Pizza 來舉例子，給定 n 個人 m 個配料
// 表，每個人可以提兩個要求，兩個要求至少要被滿足一個
// 3 5
// + 1 + 2
// - 1 + 3
// + 4 - 2

```

```

// 以這
// 個例子來說，第一個人要求要加 配料1 或者 配料2 其中
// 一項，第二個人要求不要 配料1 或者 要配料3 其中一項
// 試問能不能滿足所有人的要求，我們可以把 要加
// 配料 i 當作點 i，不加配料 i 當作點 i + m(配料數量)
// 關於第一個人的要求 我們可以看成若不加 配
// 料1 則必定要 配料2 以及 若不加 配料2 則必定要 配料1
// 關於第二個人要求 可看做加了 配料
// 1 就必定要加 配料3 以及 不加 配料3 就必定不加 配料1

```

```

// 以這些條件建立有像圖，並且
// 找尋 scc，若 i 以及 i + m 在同一個 scc 中代表無解
// 若要求解，則若 i 的 scc_id
// 小於 i + m 的 scc_id 則 i 為 true，反之為 false
// tarjan 的模板在上面
cin >> n >> m;

```

```

vector<vector<int>> graph(m * 2 + 1);
function<int(int)> tr = [&](int x){
    if(x > m) return x - m;
    return x + m;
};

```

```

for(int i = 0; i < n; i++){
    char c1, c2;
    int a, b;
    cin >> c1 >> a >> c2 >> b;
    // a 代表 a 為真，m + a 代表 a 為假
    if(c1 == '-') a += m;
    if(c2 == '-') b += m;
    graph[tr(a)].push_back(b);
    graph[tr(b)].push_back(a);
}

```

```

tarjan t;
auto scc = t.scc(graph);

for(int i = 1; i <= m; i++){
    if(t.scc_id[i] == t.scc_id[tr(i)]){
        cout << "IMPOSSIBLE\n";
        return 0;
    }
}

for(int i = 1; i <= m; i++){
    if(t.scc_id[i] < t.scc_id[tr(i)]){
        cout << '+';
    }
    else cout << '-';
    cout << ' ';
}
cout << '\n';

```

3.6 Max flow min cut

```

#define int long long

// dicnic Algorithm Time: O(V^2E) 實際上會快一點
// 記得在 main 裡面 resize graph
// 最小割，找
// 到最少條的邊切除，使得從 src 到 end 的 maxflow 為 0
// 枚舉所有邊 i -> j，src 可
// 以到達 i 但無法到達 j，那這條邊為最小割裡的邊之一
// 若求無向圖最大流，則反向邊建邊為 capacity

```

```

class edge{
public:
    int next;
    int capacity;
    int rev;
    bool is_rev;
    edge(int _n, int _c, int _r, int _ir) :
        next(_n), capacity(_c), rev(_r), is_rev(_ir){};
};

```

```

vector<vector<edge>> graph;
vector<int> level, iter;

void add_edge(int a, int b, int capacity){
    graph[a].push_back
    (edge(b, capacity, graph[b].size(), false));
    graph[b].
    push_back(edge(a, 0, graph[a].size() - 1, true));
}

```

```

}

void bfs(int start) {
    fill(level.begin(), level.end(), -1);
    queue<int> q;
    level[start] = 0;
    q.push(start);
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        for (auto& e : graph[v]) {
            if (e.capacity > 0 && level[e.next] < 0) {
                level[e.next] = level[v] + 1;
                q.push(e.next);
            }
        }
    }
}

int dfs(int v, int end, int flow) {
    if (v == end) return flow;
    for (int &i = iter[v]; i < graph[v].size(); i++) {
        edge &e = graph[v][i];
        if (e.capacity > 0 && level[v] < level[e.next]) {
            int d = dfs(e.next, end, min(flow, e.capacity));
            if (d > 0) {
                e.capacity -= d;
                graph[e.next][e.rev].capacity += d;
                return d;
            }
        }
    }
    return 0;
}

int maxflow(int start, int end) {
    int flow = 0;
    level.resize(graph.size() + 1);
    while (true) {
        bfs(start);
        if (level[end] < 0) return flow;
        iter.assign(graph.size() + 1, 0);
        int f;
        while ((f = dfs(start, end, 1e9)) > 0) {
            flow += f;
        }
    }
}

```

3.7 Minimum cost maximum flow

```

#define int long long
#define pii pair<int, int>

// Edmonds-Karp Algorithm Time: O(VE^2) 實際上會快一點
// 一條邊的費用為 單位花費 * 流過流量
// 把原本的 BFS 換成 SPFA 而已
// 記得在 main 裡面 resize graph
// MCMF 回傳 {flow, cost}

class edge{
public:
    int next;
    int capacity;
    int rev;
    int cost;
    bool is_rev;
    edge(int _n, int _c,
         int _r, int _co, int _ir) : next(_n), capacity
         (_c), rev(_r), cost(_co), is_rev(_ir){};
};

vector<vector<edge>> graph;

void add_edge(int a, int b, int capacity, int cost){
    graph[a].push_back(
        edge(b, capacity, graph[b].size(), cost, false));
    graph[b].push_back
        (edge(a, 0, graph[a].size() - 1, -cost, true));
}

pii dfs(int now
        , int end, pii data, vector<pii> &path, int idx){
    auto [flow, cost] = data;
    if(now == end) return {flow, 0};

```

```

    auto &e = graph[now][path[idx + 1].second];
    if(e.capacity > 0){
        auto [ret, nc] = dfs(e.next, end, {min(flow
            , e.capacity), cost + e.cost}, path, idx + 1);
        if(ret > 0){
            e.capacity -= ret;
            graph[e.next][e.rev].capacity += ret;
            return {ret, nc + ret * e.cost};
        }
    }
    return {0, 0};
}

vector<pii> search_path(int start, int end){
    int n = graph.size() + 1;
    vector<int> dis(n + 1, 1e9);
    vector<bool> vis(n + 1, false);
    vector<pii> ans; queue<int> q;
    vis[start] = true; q.push(start); dis[start] = 0;
    vector<pii> parent(graph.size(), {-1, -1});
    q.push(start);
    while(!q.empty()){
        auto node = q.front(); vis[node] = false; q.pop();
        for(int i = 0; i < graph[node].size(); i++){
            auto &e = graph[node][i];
            if(e.capacity
                > 0 and e.cost + dis[node] < dis[e.next]){
                dis[e.next] = e.cost + dis[node];
                parent[e.next] = {node, i};
                if(!vis[e.next]){
                    q.push(e.next);
                    vis[e.next] = true;
                }
            }
        }
    }
    if(parent[end].first == -1) return ans;
    int now = end;
    while(now != start){
        auto [node, idx] = parent[now];
        ans.emplace_back(node, idx);
        now = node;
    }
    ans.emplace_back(start, -1);
    reverse(ans.begin(), ans.end());
    return ans;
}

pii MCMF(int start, int end){
    int ans = 0, cost = 0;
    while(1){
        vector<bool> visited(graph.size() + 1, false);
        auto tmp = search_path(start, end);
        if(tmp.size() == 0) break;
        auto [flow, c] = dfs(start, end, {1e9, 0}, tmp, 0);
        ans += flow;
        cost += c;
    }
    return {ans, cost};
}

```

3.8 二分圖

```

/*
判定二分圖：著色法 dfs 下去，顏色相撞非二分圖

二分圖最大匹配：用 maxflow 去做，一個 src
點聯通所有左圖，左圖建邊向右圖，右圖再建邊向 end
點，計算 src 跟 end 的最大流，若要還原，找出左圖
通往右圖中 capacity 為 0 的邊，他的兩個端點就是答案

最小點覆蓋：選最少的點，保證每
個點至少被一條邊覆蓋， 最小點覆蓋 = 二分圖最大匹配

最大獨立集：選最多的點，滿足這些
點兩兩間互不相連， 最大獨立集 = n - 二分圖最大匹配
*/

```

4 String

4.1 KMP

```

vector<int> build(string &s){
    vector<int> next = {0, 0};
    // 匹配失敗跳去哪 (最長共同前後綴)

```

```

int length = s.size(), j = 0;
for(int i = 1; i < length; i++){
    while(j > 0 and s[j] != s[i]){
        j = next[j];
    }
    if(s[j] == s[i]) j++;
    next.push_back(j);
}
return next;
}

int match(string &a, string &b){
    auto next = build(b);
    int length
        = a.size(), length2 = b.size(), j = 0, count = 0;
    for(int i = 0; i < length; i++){
        while(j > 0 and a[i] != b[j]){
            j = next[j];
        }
        if(a[i] == b[j]) j++;
        if(j == length2){
            count++;
            j = next[j];
        }
    }
    return count;
}

```

4.2 Hash

```

vector<int> Pow(int num){
    int p = 1e9 + 7;
    vector<int> ans = {1};
    for(int i = 0; i < num; i++){
        ans.push_back(ans.back() * b % p);
    }
    return ans;
}

vector<int> Hash(string s){
    int p = 1e9 + 7;
    vector<int> ans = {0};
    for(char c:s){
        ans.push_back((ans.back() * b + c) % p);
    }
    return ans;
}

// 閉區間[l, r]
int query
    (vector<int> &vec, vector<int> &pow, int l, int r){
    int p = 1e9 + 7;
    int length = r - l + 1;
    return
        (vec[r + 1] - vec[l] * pow[length] % p + p) % p;
}

```

4.3 Zvalue

```

vector<int> z_func(string s1){
    int l = 0, r = 0, n = s1.size();
    vector<int> z(n, 0);
    for(int i = 1; i < n; i++){
        if(i
            <= r and z[i - l] < r - i + 1) z[i] = z[i - l];
        else{
            z[i] = max(z[i], r - i + 1);
            while(i + z
                [i] < n and s1[i + z[i]] == s1[z[i]]) z[i]++;
        }
        if(i + z[i] - 1 > r){
            l = i;
            r = i + z[i] - 1;
        }
    }
    return z;
}

```

4.4 Suffix Array

```

struct SuffixArray {
    int n; string s;
    vector<int> sa, rk, lc;
    // 想法 :
    // 排序過了，因此前綴長得像的會距離很近在差不多位置
    // n: 字串長度
    // sa: 後綴數組，sa[i] 表示第 i 小的後綴的起始位置

```

```

// rk: 排名數組，rk[i] 表示從位置 i 開始的後綴的排名
// lc: LCP 數組，
// lc[i] 表示 sa[i] 和 sa[i + 1] 的最長公共前綴長度
// 求 sa[i] 跟 sa[j] 的
// LCP 長度 當 i < j : min(lc[i] ..... lc[j - 1])
SuffixArray(const string &s_) {
    s = s_; n = s.length();
    sa.resize(n);
    lc.resize(n - 1);
    rk.resize(n);
    iota(sa.begin(), sa.end(), 0);
    sort(sa.begin(), sa.end
        (), [&](int a, int b) { return s[a] < s[b]; });
    rk[sa[0]] = 0;
    for (int i = 1; i < n; ++i)
        rk[sa[i]]
            = rk[sa[i - 1]] + (s[sa[i]] != s[sa[i - 1]]);
    int k = 1;
    vector<int> tmp, cnt(n);
    tmp.reserve(n);
    while (rk[sa[n - 1]] < n - 1) {
        tmp.clear();
        for (int i = 0; i < k; ++i)
            tmp.push_back(n - k + i);
        for (auto i : sa)
            if (i >= k)
                tmp.push_back(i - k);
        fill(cnt.begin(), cnt.end(), 0);
        for (int i = 0; i < n; ++i)
            ++cnt[rk[i]];
        for (int i = 1; i < n; ++i)
            cnt[i] += cnt[i - 1];
        for (int i = n - 1; i >= 0; --i)
            sa[--cnt[rk[tmp[i]]]] = tmp[i];
        swap(rk, tmp);
        rk[sa[0]] = 0;
        for (int i = 1; i < n; ++i)
            rk[sa[i]] = rk[sa[i - 1]] + (tmp[
                sa[i - 1]] < tmp[sa[i]] || sa[i - 1] + k ==
                n || tmp[sa[i - 1] + k] < tmp[sa[i] + k]);
        k *= 2;
    }
    for (int i = 0, j = 0; i < n; ++i) {
        if (rk[i] == 0) {
            j = 0;
        }
        else {
            for (j -= j > 0; i + j < n && sa[rk[i] - 1] + j
                < n && s[i + j] == s[sa[rk[i] - 1] + j]; )
                ++j;
            lc[rk[i] - 1] = j;
        }
    }
}

```

5 Geometry

5.1 Point

```

template<typename T>
class point{
public:
    T x;
    T y;
    point(){}
    point(T _x, T _y){
        x = _x;
        y = _y;
    }
    point<T> operator+(const point<T> &a);
    point<T> operator-(const point<T> &a);
    point<T> operator/(const point<T> &a);
    point<T> operator/(T a);
    point<T> operator*(const T &a);
    bool operator<(const point<T> &a);
};

template<typename T>
point<T> point<T>::operator+(const point<T> &a){
    return point<T>(x + a.x, y + a.y);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator-(const point<T> &a){
    return point<T>(x - a.x, y - a.y);
}

```

```

}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator/(const point<T> &a){
    return point<T>(x / a.x, y / a.y);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator/(T a){
    return point<T>(x / a, y / a);
}

template<typename T>
point<T> point<T>::operator*(const T &a){
    return point<T>(x * a, y * a);
}

template<typename T>
bool point<T>::operator<(const point<T> &a){
    if(x != a.x) return x < a.x;
    return y < a.y;
}

```

5.2 內積, 外積, 距離

```

template<typename T>
T dot(const point<T> &a, const point<T> &b){
    return a.x * b.x + a.y * b.y;
}

template<typename T>
T cross(const point<T> &a, const point<T> &b){
    return a.x * b.y - a.y * b.x;
}

template<typename T>
T len(point<T> p){
    return sqrt(dot(p, p));
}

```

5.3 向量應用

```

template<typename T>
bool collinearity
(point<T> p1, point<T> p2, point<T> p3){
    //檢查三點是否共線
    return cross(p2 - p1, p2 - p3) == 0;
}

template<typename T>
bool inline(point<T> a, point<T> b, point<T> p){
    //檢查 p 點是否在ab線段
    return collinearity
        (a, b, p) && dot(a - p, b - p) <= 0;
}

template<typename T>
bool intersect
(point<T> a, point<T> b, point<T> c, point<T> d){
    //ab線段跟cd線段是否相交
    return (cross(b - a, c - a) * \
        cross(b - a, d - a) < 0 && \
        cross(d - c, a - c) * \
        cross(d - c, b - c) < 0) \
        || inLine(a, b, c) || \
        inLine(a, b, d) || inLine(c, d, a) \
        || inLine(c, d, b);
}

template<typename T>
point<T> intersection
(point<T> a, point<T> b, point<T> c, point<T> d){
    //ab線段跟cd線段相交的點
    assert(intersect(a, b, c, d));
    return a + (b -
        a) * cross(a - c, d - c) / cross(d - c, b - a);
}

template<typename T>
bool inPolygon(vector<point<T>> polygon, point<T> p){
    //判斷點
    p 是否在多邊形polygon裡, vector裡的點要連續填對
    for(int i = 0; i < polygon.size(); i++){
        if(cross(p - polygon[i], \
            polygon[(i - 1 + polygon.size()) % \

```

```

            polygon.size()] - polygon[i]) * \
            cross(p - polygon[i], \
            polygon[(i +
                1) % polygon.size()] - polygon[i]) > 0)
        return false;
    return true;
}

template<typename T>
T triangleArea(point<T> a, point<T> b, point<T> c){
    //三角形頂點, 求面積
    return abs(cross(b - a, c - a)) / 2;
}

template<typename T, typename F, typename S>
long double triangleArea_Herons_formula(T a, F b, S c){
    //三角形頂點, 求面積(給邊長)
    auto p = (a + b + c) / 2;
    return sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c));
}

template<typename T>
T area(vector<point<T>> &p){
    //多邊形頂點, 求面積
    T ans = 0;
    for(int i = 0; i < p.size(); i++){
        ans += cross(p[i], p[(i + 1) % p.size()]);
    }
    return ans / 2 > 0 ? ans / 2 : -ans / 2;
}

```

5.4 Static Convex Hull

```

// 需要使
// 用前一個向量模板的 point, 需要 operator - 以及 <
// 需要前面向量模板的 cross

template<typename T>
vector<point<T>> getConvexHull(vector<point<T>> &pnts){
    sort(pnts.begin(), pnts.end());
    auto cmp = [&](point<T> a, point<T> b)
    { return a.x == b.x && a.y == b.y; };
    pnts.erase(unique
        (pnts.begin(), pnts.end(), cmp), pnts.end());
    if(pnts.size() <= 1) return pnts;
    vector<point<T>> hull;
    for(int i = 0; i < 2; i++){
        int t = hull.size();
        for(point<T> pnt : pnts){
            while(hull.size() - t >= 2 &&
                cross(hull.back() - hull[hull.size() - 2],
                    pnt - hull[hull.size() - 2]) < 0)
                // <= 0 或者 < 0 要看點有沒有在邊上
                hull.pop_back();
            hull.push_back(pnt);
        }
        hull.pop_back();
        reverse(pnts.begin(), pnts.end());
    }
    return hull;
}

```

5.5 外心, 最小覆蓋圓

```

int sign(double a)
{
    // 小於 eps
    // 回傳 0, 否則正回傳 1, 負回傳 -1
    // 應付浮點數誤差用
    const double eps = 1e-10;
    return fabs(a) < eps ? 0 : a > 0 ? 1 : -1;
}

// 輸入三個點求外心
template<typename T>
point<T> findCircumcenter(point<T> A, point<T> B, point<T> C, const T eps = 1e-10){
    point<T> AB = B - A;
    point<T> AC = C - A;
    T AB_len_sq = AB.x * AB.x + AB.y * AB.y;
    T AC_len_sq = AC.x * AC.x + AC.y * AC.y;
    T D = AB.x * AC.y - AB.y * AC.x;
    // 若三點接近共線
    assert(fabs(D) < eps);
    // 外心的座標
    T circumcenterX = A.x + (
        AC.y * AB_len_sq - AB.y * AC_len_sq) / (2 * D);

```



```

    T circumcenterY = A.y + (
        AB.x * AC_len_sq - AC.x * AB_len_sq) / (2 * D);
    return point<T>(circumcenterX, circumcenterY);
}

template<typename T>
pair<T, point<T>> MinCircleCover(vector<point<T>> &p) {
    // 引入前面的 len 跟 point
    // 回傳最小覆蓋圓{半徑,中心}
    random_shuffle(p.begin(), p.end());
    int n = p.size();
    point<T> c = p[0]; T r = 0;
    for(int i=1; i<n; i++) {
        if(sign(len(c-p[i])-r) > 0) { // 不在圓內
            c = p[i], r = 0;
            for(int j=0; j<i; j++) {
                if(sign(len(c-p[j])-r) > 0) {
                    c = (p[i]+p[j])/2.0;
                    r = len(c-p[i]);
                    for(int k=0; k<j; k++) {
                        if(sign(len(c-p[k])-r) > 0) {
                            c = findCircumcenter(
                                p[i], p[j], p[k]);
                            r = len(c-p[i]);
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    return make_pair(r, c);
}

```

6 Data Structure

6.1 Sparse Table

```

class Sparse_Table{
    // 0-base
    // 要改成找最大把min換成max就好
private:
public:
    int spt[500005][22][2];
    Sparse_Table(vector<int> &ar){
        int n = ar.size();
        for (int i = 0; i < n; i++){
            spt[i][0][0] = ar[i];
            // spt[i][0][1] = ar[i];
        }
        for (int j = 1; (1 << j) <= n; j++) {
            for (int i = 0; (i + (1 << j) - 1) < n; i++) {
                spt[i][j][0] = min(spt[i + (1 << j) - 1][j - 1][0],
                    spt[i][j - 1][0]);
                // spt[i][j][1] = max(spt[i + (1 << j) - 1][j - 1][1],
                    spt[i][j - 1][1]);
            }
        }
    }
    int query_min(int l, int r)
    {
        if(l>r) return INT_MAX;
        int j = (int)_lg(r - l + 1);
        ///j = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
        return min(
            (spt[l][j][0], spt[r - (1 << j) + 1][j][0]);
    }
    int query_max(int l, int r)
    {
        if(l>r) return INT_MAX;
        int j = (int)_lg(r - l + 1);
        ///j = 31 - __builtin_clz(r - l + 1);
        return max(
            (spt[l][j][1], spt[r - (1 << j) + 1][j][1]);
    }
};

```

6.2 Segement Tree

```

// #define int long long

// 要改最大或
// 者最小值線段樹需改 build 跟 queryRange, updateRange
// 0-base 注意
template<typename T>
class segment_tree {

```

```

private:
    vector<T> tree, lazy, arr;
    int size;
    void build(
        (vector<T> &save, int node, int start, int end) {
        if (start == end) tree[node] = save[start];
        else {
            int mid = (start + end) / 2;
            build(save, 2 * node, start, mid);
            build(save, 2 * node + 1, mid + 1, end);
            tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
        }
    }
    void updateRange(int node
        , int start, int end, int l, int r, T delta) {
        if (lazy[node] != 0) {
            tree[node] += (end - start + 1) * lazy[node];
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += lazy[node];
                lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
            }
            lazy[node] = 0;
        }
        if (start > end or start > r or end < l) return;
        if (start >= l and end <= r) {
            tree[node] += (end - start + 1) * delta;
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += delta;
                lazy[2 * node + 1] += delta;
            }
            return;
        }
        int mid = (start + end) / 2;
        updateRange(2 * node, start, mid, l, r, delta);
        updateRange(
            (2 * node + 1, mid + 1, end, l, r, delta);
        tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
    }
    T queryRange(
        (int node, int start, int end, int l, int r) {
        if (lazy[node] != 0) {
            tree[node] += (end - start + 1) * lazy[node];
            if (start != end) {
                lazy[2 * node] += lazy[node];
                lazy[2 * node + 1] += lazy[node];
            }
            lazy[node] = 0;
        }
        if (start > end or start > r or end < l){
            // return numeric_limits
            <T>::max(); // 找區間最小值用這行
            // return numeric_limits
            <T>::min(); // 找區間最大值用這行
            return 0; // 區間和
        }
        if (start >= l and end <= r) return tree[node];
        int mid = (start + end) / 2;
        T p1 = queryRange(2 * node, start, mid, l, r);
        T p2
            = queryRange(2 * node + 1, mid + 1, end, l, r);
        return p1 + p2;
    }
    void updateNode(
        int node, int start, int end, int idx, T delta) {
        if (start == end) tree[node] += delta;
        else {
            int mid = (start + end) / 2;
            if (start <= idx and idx <= mid)
                updateNode(2 * node, start, mid, idx, delta);
            else updateNode(
                (2 * node + 1, mid + 1, end, idx, delta);
            tree[node] = tree[2 * node] + tree[2 * node + 1];
        }
    }
};

public:
    void build(vector<T> &save, int l, int r) {
        int n = size = save.size();
        tree.resize(4 * n);
        lazy.resize(4 * n);
        arr = save;
        build(save, 1, l, r);
    }
    void modify_scope(int l, int r, T delta) {
        updateRange(1, 0, size - 1, l, r, delta);
    }

```

```

}
void modify_node(int idx, T delta) {
    updateNode(1, 0, size - 1, idx, delta);
}
T query(int l, int r) {
    return queryRange(1, 0, size - 1, l, r);
}
};

signed main()
{
    int n, q;
    cin >> n >> q;
    vector<int> save(n, 0);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        cin >> save[i];
    }
    segment_tree<int> s;
    // init [0, n - 1]
    s.build(save, 0, n - 1);
    // modify [a, b] add c
    s.modify_scope(a, b, c);
    // query [a, b]
    s.query(a, b)
}

```

7 Dynamic Programing

7.1 LCS

```

int LCS(string t1, string t2) {
    if(t1.size() < t2.size()) swap(t1, t2);
    int len = t1.size();
    vector<vector<int>> dp(2, vector<int>(len + 1, 0));
    for(int j = 1; j <= t2.size(); j++){
        for(int i = 1; i <= len; i++){
            if(t2[j - 1] == t1[i - 1])
                dp[j % 2][i] = dp[(j + 1) % 2][i - 1] + 1;
            else dp[j % 2][i]
                = max(dp[(j + 1) % 2][i], dp[j % 2][i - 1]);
        }
    }
    return dp[t2.size() % 2][t1.size()];
}

```

7.2 LIS

```

int LIS(vector<int>& save) {
    vector<int> dp;
    int n = save.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        auto it = lower_bound(dp.begin(), dp.end(), save[i]);
        if(it == dp.end()) dp.push_back(save[i]);
        else *it = save[i];
    }
    return dp.size();
}

```

7.3 位元 dp

```

// 檢查第 n 位是否為 1
if(a & (1 << n))

// 強制將第 n 位變成 1
a |= (1 << n)

// 強制將第 n 位變成 0
a &= ~(1 << n)

// 將第 n 位反轉 (1 變 0, 0 變 1)
a ^= (1 << n)

// 第 0 ~ n - 1 位 全部都是 1
(1 << n) - 1

// 兩個集合的聯集
S = a | b

// 兩個集合的交集
S = a & b

```

8 Divide and conquer

8.1 逆序數對

```

int merge(
    vector<pair<int, int>>& v, int l, int mid, int r) {
    vector<pair<int, int>> temp(r - l + 1);
    int i = l, j = mid + 1, k = 0, inv_count = 0;
    while (i <= mid && j <= r) {
        if (v[i].second <= v[j].second) {
            temp[k++] = v[i++];
        } else {
            temp[k++] = v[j++];
            inv_count += (mid - i + 1);
        }
    }
    while (i <= mid) temp[k++] = v[i++];
    while (j <= r) temp[k++] = v[j++];
    for (int i = l; i <= r; i++) {
        v[i] = temp[i - l];
    }
    return inv_count;
}

int mergeSort
    (vector<pair<int, int>>& v, int l, int r) {
    int count = 0;
    if (l < r) {
        int mid = l + (r - l) / 2;
        count += mergeSort(v, l, mid);
        count += mergeSort(v, mid + 1, r);
        count += merge(v, l, mid, r);
    }
    return count;
}

signed main()
{
    int n;
    cin >> n;
    vector<pair<int, int>> arr(n);
    for(int i = 0; i < n; i++){
        arr[i].first = i;
        cin >> arr[i].second;
    }
    cout << mergeSort(arr, 0, n - 1) << '\n';
}

```