✅ الحل النموذجي — بكالوريا 2020 — شعبة العلوم التجريبية

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2020 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** 3 ساعات

الجزء الأول: دراسة دالة أسية (8 نقاط)

السؤال 1) 1.5 نقطة

عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1-x)e^{x}$$

- $\lim(x - 1) = +\infty$, $\lim e^{x} = +\infty$
- إذن $\lim f(x) = +\infty$

عند $-\infty$:

- نضع $t = -x \to +\infty$, $f(x) = (1-t)e^{-t} = \frac{t+1}{e^{t}}$
- $\lim \frac{t+1}{e^{t}} = 0$ (الأسية تتفوق على القوة)
- إذن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

السؤال 2) 2 نقطة

الاشتقاق:

$$f'(x) = (1-x)e^{x} + e^{x} = e^{x} \cdot x$$

إشارة $f'(x)$:

- $e^{x} > 0$ دائمًا على $\mathbb{R}$
- إذن إشارة $f'(x)$ = إشارة x
- $f'(x) < 0$ على $(-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ على $(0, +\infty)$, $f'(0) = 0$

جدول التغيّرات:

- f تناقص على $(-\infty, 0]$, تزايد على $[0, +\infty)$
- القيمة الصغرى: $f(0) = 1 - e^{0} = -1$

السؤال 3) 1.5 نقطة

المقاربة:

- من السؤال 1): $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- إذن المستقيم $y = 0$ مقارب أفقي لمنحنى f عند $-\infty$

الوضع النسبي:

- $f(x) - 0 = (1-x)e^{x}$
- إشارة $f(x)$ = إشارة $(1-x)$ (لأن $e^{x} > 0$)
- لـ $x > 1$: $f(x) < 0$, المنحنى تحت المحور السيني
- لـ $x < 1$: $f(x) > 0$, المنحنى فوق المحور السيني
- عند $x = 1$: نقطة تقاطع مع المحور السيني

السؤال 4)

3 نقطة

التكامل بالتجزئة:

- نضع $u = 1 - x$, $v' = e^x$

- $u' = 1$, $v = e^x$

- صيغة التكامل بالتجزئة: $\int u'v = [uv] - \int uv'$

$$I = \int_0^1 e^x\,dx - [e(1-x)]_0^1$$

$$= [e^x]_0^1 - (e^0 \cdot (1-) - e^1 \cdot 0)$$

$$= (1-e) - (1+0)$$

$$= 1 + e - 1 = e - 2$$

النتيجة: $I = e - 2 \approx -0.718$

الجزء الثاني: المتتاليات (6 نقاط)

السؤال 1) — 1 نقطة

الحسابات المباشرة:

- $\frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = {}_1u$
- $\frac{10}{9} = \frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = {}_2u$
- $\frac{28}{27} = \frac{18}{27} + \frac{10}{27} = \frac{2}{3} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{3} = {}_3u$

السؤال 2) — 2 نقطة

أ) ${}_{n+1}v$ بدلالة ${}_nv$:

$${}_nv\,\frac{1}{3} = (1 - {}_nu)\,\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - {}_nu\,\frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{3} + {}_nu\,\frac{1}{3} = 1 - {}_{n+1}u = {}_{n+1}v$$

ب) الطبيعة الهندسية:

- من السؤال أ): ${}_nv\,\frac{1}{3} = {}_{n+1}v$
- إذن $({}_nv)$ **متتالية هندسية** أساسها $q = \frac{1}{3}$
- حدّها الأول: ${}_0v = 1 - {}_0u = 1 - 2 = 1$

السؤال 3) — 1.5 نقطة

الصيغة الصريحة لـ ${}_nv$:

$${}_nv = {}_0v \cdot {}^nq = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{{}_n3}$$

الصيغة الصريحة لـ ${}_nu$:

$${}_nu = {}_nv + 1 = 1 + \frac{1}{{}_n3}$$

النهاية:

- بما أن $|\frac{1}{3}| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{{}_n3} = 0$
- إذن $\lim_{n\to+\infty} {}_nu = 1$

السؤال 4) — 1.5 نقطة

مجموع حدود المتتالية الهندسية:

$${}_nS = {}_0v \cdot \frac{{}^nq - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{{}^n(1/3) - 1}{1/3 - 1} = \frac{{}^n1/3 - 1}{2/3} = \left(\frac{1}{{}_{n+1}3} - 1\right)\frac{3}{2}$$

النهاية:

- $\lim({}^{n+1}(1/3)) = 0$ (لأن $|1/3| < 1$)
- إذن $\lim_n S = \frac{3}{2}$

الجزء الثالث: الاحتمالات (6 نقاط)

السؤال 1) 1 نقطة

عدد السحوبات:

- إجمالي الكرات: $5 + 3 = 8$ كرات
- نسحب 2 دفعة واحدة (دون ترتيب ودون إعادة)
- عدد السحوبات الممكنة: $\binom{8}{2} = \frac{7\times 8}{2} = 28$

السؤال 2) 1.5 نقطة

الحادثة: "كرتين من نفس اللون" = (كرتين حمراوين) + (كرتين بيضاوين)

- كرتان حمراوان: $\binom{5}{2} = 10$ طريقة
- كرتان بيضاوان: $\binom{3}{2} = 3$ طريقة
- إجمالي الحالات المواتية: $10 + 3 = 13$

$$P(\text{نفس اللون}) = \frac{13}{28}$$

السؤال 3) 2 نقطة

الحادثة المكمّمة:

- "كرة حمراء واحدة على الأقل" = ~~لا كرة حمراء~~
- الحادثة المضادة: "كلتا الكرتين بيضاوين"
- كرتان بيضاوان: $\binom{3}{2} = 3$ طريقة

$$P(0 \text{ حمراء}) = \frac{3}{28}$$

$$P(1 \leq \text{حمراء}) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$$

السؤال 4) 1.5 نقطة

نوع التوزيع:

- تجربتان مستقلتان (سحب مع إعادة)
- احتمال الحصول على كرة حمراء في كل سحب: $p = \frac{5}{8}$
- إذن $X \sim \mathcal{B}(2, 5/8)$ (توزيع ذي الحدين)

الأمل الرياضي:

$$E(X) = p \cdot n = \frac{5}{8} \cdot 2 = \frac{5}{4} = 1.25$$