✅ الحل النموذجي — الفرض الأول — الفصل الثاني (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** ساعتان

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة دالة أسية

السؤال 1) 1 نقطة

عند $+\infty$: $\lim(x(1-\lim e^{x-2} = +\infty$, $+\infty = +\infty$, إذن $f \to +\infty$.

عند $-\infty$:

- نضع $X = -x \to +\infty$
- $f(x) = e^{X-2}(1-X) = -e^{X-2}(1+X) = -e^{-2} \cdot e^{X}$
- $\lim(X/e^{X}(1+\lim(X = 0$ (الأسية تتفوق)
- إذن $f(x) \to 0$

السؤال 2) 1 نقطة

الاشتقاق:

$$f'(x) = e^{x-2}(1-x) + e^{x-2} = e^{x-2} \cdot x$$

الإشارة:

- $e^{x-2} > 0$ دائمًا
- $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$
- $f' < 0$ على $(-\infty, 0)$, $f' > 0$ على $(0, +\infty)$

السؤال 3) 1 نقطة

جدول التغيّرات:

- f تناقص على $(-\infty, 0]$, تزايد على $[0, +\infty)$
- القيمة الصغرى: $f(0) = (-1) \cdot e^{-2} = -e^{-2} \approx -0,135$

السؤال 4) 1 نقطة

الحساب:

- $f(1) = 0 \cdot e^{-1} = 0$, $A(1, 0)$
- $f'(1) = 1 \cdot e^{-1} = 1/e$

المماس: $y = \frac{1}{e}(1-x)$, أي $y = \frac{x-1}{e}$.

السؤال 5) 1 نقطة

الحل:

$$f(x) = 0 \iff e^{x-2}(1-x) = 0$$

بما أنّ $e^{x-2} > 0$ دائمًا, $f(x) = 0 \iff 1-x = 0 \iff x = 1$.

النتيجة: حل وحيد $\alpha = 1$.

التمرين الثاني (5 نقاط) — معادلات أسية ولوغاريتمية

السؤال 1) 1 نقطة

التحويل:

نضع $X = e^{x}$ $(X > 0)$:

$$X = 2 \text{ أو } X = 3 \Rightarrow 0 = (X-2)(X-3) \Rightarrow 0 = 6 + 5X - X^{2}$$

الحلول:

- $x = \ln 2$ أو $x = \ln 3$

السؤال 2) 1.5 نقطة

شروط الوجود:

- $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0$
- $x < 2 \Rightarrow 2 - x > 0$
- إذن $x < 2$

الحل:

$$(x\ln[(1+x)(2-x)] = \ln 6 \iff (1+x)(2-x) = 6$$

$$x^{2} - x - 2 = 6 \iff x^{2} - x - 8 = 0$$

$$\Delta = 1 + 32 = 33, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

نختار $x < 2$: $x = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \approx 3{,}37$ ✓

(الحل الآخر $x = \frac{1-\sqrt{33}}{2} \approx -2{,}37$ مرفوض)

السؤال 3) 1 نقطة

التحويل:

نضع $\ln x = Y$ $(Y \in \mathbb{R})$:

$$Y = 1 \text{ أو } Y = 3 \Rightarrow 0 = (Y-1)(Y-3) \Rightarrow 0 = 3 + 4Y - Y^{2}$$

الحلول:

- $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^{3}$

السؤال 4) 1 نقطة

التحويل:

نضع $e^x = X$ $(0 < X)$:

$$0 = 1 + 3X - X^2 \iff 3 = \frac{1}{X} + X$$

الجذور:

$$\frac{\sqrt{5} \pm 3}{2} = X \quad ,5 = 4 - 9 = \Delta$$

كلاهما موجب, إذن:

- $x_1 = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$
- $x_2 = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$

السؤال 5) 0.5 نقطة

الحساب:

$$\ln 3 = \ln\left(\frac{24}{8}\right) = \ln\left(\frac{4 \cdot 6}{8}\right) = \ln 8 - \ln 4 + \ln 6$$

النتيجة: $\ln 3$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — متتالية هندسية ذات أساس e

السؤال 1) 1.5 نقطة

أ) الطبيعة الهندسية:

$$^{2}e = \frac{^{(n+1)2}e}{^{2n}e} = \frac{_{n+1}u}{_{n}u}$$

إذن $(_{n}u)$ متتالية هندسية أساسها $^{2}e = q$.

ب) الحدود:

- $_{0}u = {}^{0}e = 1$
- $_{1}u = {}^{2}e \approx 7,39$
- $_{2}u = {}^{4}e \approx 54,6$

السؤال 2) 1 نقطة

مجموع المتتالية الهندسية:

$$_{n}S = {}_{0}u \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{(^{2}e)^{n+1} - 1}{^{2}e - 1} = \frac{^{(n+1)2}e - 1}{^{2}e - 1} = \frac{e^{(n+1)2} - 1}{e^{2} - 1}$$

(نستعمل $^{2}e - 1 = -(1 - {}^{2}e)$ لتبسيط الإشارة.)

السؤال 3) 0.75 نقطة

النهاية:

- $^{(n+1)2}e \to +\infty$ (الأسية تتفوق)
- إذن $_{n}S \to +\infty$

النتيجة: $\lim_{n} S = +\infty$ (المجموع متشعّب).

السؤال 4) 1 نقطة

الحساب:

$$_{n}v = {}^{2n}\ln e = {}_{n}\ln u = 2n$$

النتيجة: $_{n}v = 2n$, إذن $(_{n}v)$ متتالية حسابية أساسها $r = {}_{n+1}v - {}_{n}v = 2$ و حدّها الأول $_{0}v = 0$.

السؤال 5) 0.75 نقطة

مجموع المتتالية الحسابية:

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{k}v = \frac{(_{n}v_{0} + v)(n+1)}{2} = \frac{(0 + 2n)(n+1)}{2} = n(n+1)$$

النتيجة: $\sum_{k=0}^{n} {}_{k}v = n(n+1)$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — تكاليل الدالة الأسية

السؤال 1) 0.75 نقطة

الحساب:

$$\frac{e^2-1}{2} = \frac{{}^{0}e^2 - e}{2} = {}_{0}^{1}\left[\frac{{}^{2x}e}{2}\right] = e^{2x}\,dx \int_{0}^{1}$$

النتيجة: $\frac{e^2-1}{2}$.

السؤال 2) 1.25 نقطة

التكامل بالتجزئة:

- $x = u$,${}^{x}e = {}'v$
- $1 = {}'u$,${}^{x}e = v$

$$1 = (1-e) - (0-e) = e^x\,dx \int_{0}^{1} - {}_{0}^{1}[{}^{x}xe] = xe^x\,dx \int_{0}^{1}$$

النتيجة: 1.

السؤال 3) 1.5 نقطة

التكامل بالتجزئة (مرة 1):

- $x^2 = u$,${}^{x}e = {}'v$
- $xe^x\,dx \int 2 - {}^{x}x^2e = 2xe^x\,dx \int - {}^{x}x^2e = x^2e^x\,dx \int$

استعمال النتيجة السابقة:

$$2 - e = 1 \cdot 2 - 0 - e = xe^x\,dx \int_{0}^{1} 2 - {}_{0}^{1}[{}^{x}x^2e] = x^2e^x\,dx \int_{0}^{1}$$

النتيجة: $2 - e \approx 0,718$.

السؤال 4) 1 نقطة

تغيير المتغير:

- $x = u$,${}^{x}e + 1 = u$,$e^x\,dx = du$
- عند $x = 0$: $u = 2$
- عند $x = \ln 2$: $u = 2 + 1 = 3$

$$\frac{3}{2}\ln = \ln 2 - \ln 3 = {}_{2}^{3}[\ln u] = du\,\frac{1}{u} \int_{2}^{3} = dx\,\frac{{}^{x}e}{{}^{x}e + 1} \int_{0}^{\ln 2}$$

النتيجة: $\frac{3}{2}\ln$.

السؤال 5) **0.5 نقطة**

تغيير المتغير:

- $u = -x^2$, $du = -2x\,dx$

- $x\,dx = -\frac{du}{2}$

- عند $x = 0$: $u = 0$

- عند $x = 1$: $u = -1$

$$-\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = -\int_0^{-1} e^u\,\frac{1}{2}\,du = \int_{-1}^0 e^u\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{e-1}{2e}$$

النتيجة: $\frac{e-1}{2e}$.