الفرض الأول — الفصل الثالث (تنسيق بكالوريا)

الأستاذ عدلي أسعد — منصة الرياضيات

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** ساعتان | **المعامل:** 5 | **المجموع:** 20/20

⚠️ يُمنع استعمال الآلة الحاسبة في بعض المواضيع. اقرأ التعليمات بعناية. ساعة الرسم المعتمدة هي CTM-991ES.

التمرين الأول (5 نقاط) — حساب التكاليل

السؤال 1) — 1.5 نقطة

احسب $\int_0^1 xe^{x-}\,dx$ بالتجزئة.

السؤال 2) — 1.5 نقطة

احسب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ بالتجزئة.

السؤال 3) — 1.25 نقطة

احسب $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ (تغيير متغير).

السؤال 4) — 0.75 نقطة

احسب $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ (تغيير متغير).

التمرين الثاني (5 نقاط) — دالة + تكامل + مساحة

السؤال 1) 0.75 نقطة

لتكن $f(x) = 1 - x^2$ على $[-1, 1]$. احسب $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

السؤال 2) 1.25 نقطة

ارسم f على $[-1, 1]$ و استنتج المساحة بين المنحنى و المحور السيني.

السؤال 3) 1 نقطة

لتكن $g(x) = x^2 - 1$ على $[-1, 1]$. احسب المساحة بين g و المحور السيني.

السؤال 4) 1 نقطة

احسب المساحة المحصورة بين f و g على $[-1, 1]$.

السؤال 5) 1 نقطة

بيّن أنّ $\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$ باستعمال الزوجية.

التمرين الثالث (5 نقاط) — متتالية باستعمال التكامل

السؤال 1) 0.5 نقطة

لتكن $I_n = \int_0^1 x^n\,dx$ لـ $n \in \mathbb{N}$.

أحسب I_0 و I_1.

السؤال 2) 1 نقطة

برهن أنّ $I_n = \frac{1}{n+1}$ لكل $n \geq 0$.

السؤال 3) 0.5 نقطة

احسب $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

السؤال 4) 1.5 نقطة

لتكن $J_n = \int_0^1 (1 - x^n)\,dx$. بيّن أنّ $J_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

السؤال 5) 1.5 نقطة

احسب $\lim_{n \to +\infty} J_n$ و استنتج $\lim(n \cdot J_n)$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — تكاليل + تغيير متغير متقدّم

السؤال 1) 1.5 نقطة

احسب $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ بالتجزئة.

السؤال 2) 0.5 نقطة

احسب $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ (شهيرة).

السؤال 3) 0.75 نقطة

احسب $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

السؤال 4) 1.25 نقطة

احسب $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$ (تغيير متغير).

السؤال 5) 1 نقطة

احسب $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ (تكامل غير منتظم).