✅ الحل النموذجي — بكالوريا 2023 — شعبة الرياضيات

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2023 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** 3 ساعات

الجزء الأول: الأعداد المركبة (7 نقاط)

السؤال 1) 1 نقطة

المقدار:

$$2 = \sqrt{1+3} = \sqrt{{}^{2}1 + {}^{2}(\sqrt{3})} = |z|$$

العلّة:

$$[2\pi] \quad \frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \arctan = \arg(z)$$

الشكل الأسي: ${}^{i\pi/6}2e = z$

السؤال 2) 1.5 نقطة

الشكل الأسي (صيغة موافري):

$$64- = (1-) \cdot 64 = {}^{i\pi}e \cdot 64 = {}^{i6\pi/6}e \cdot {}^{6}2 = {}^{6}({}^{i\pi/6}2e) = {}^{6}z$$

الشكل الجبري:

- ${}^{i\pi}e = -1$
- إذن ${}^{6}z = -64 = 0i + 64-$

السؤال 3) 2 نقطة

حساب المميّز:

$$\Delta = {}^{2}(\sqrt{3}2) - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 12 = 4- = {}^{2}(2i)$$

الحلول:

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{3}2}{2} = i \pm \sqrt{3}$$

إذن الحلّان: ${}_{1}z = i + \sqrt{3}$ و ${}_{2}z = i - \sqrt{3} = \overline{{}_{1}z}$

السؤال 4) 2.5 نقطة

أ) الإحداثيات:

- $A(\sqrt{3}; 1)$
- $B(\sqrt{3}; -1)$

ب) إثبات أن OAB متساوي الأضلاع:

- $2 = |{}_1z| = OA$
- $2 = |{}_2z| = OB$
- $2 = |2i| = |{}_2z - {}_1z| = AB$
- إذن $2 = AB = OB = OA$, المثلث متساوي الأضلاع ✓

ج) الزاوية:

- $\pi/3 = (\pi/6-) - \pi/6 = \arg(z_2) - \arg(z_1) = \arg(z_1/z_2)$
- إذن $\widehat{AOB} = \pi/3 \text{ rad} = 60^\circ$

الجزء الثاني: المعادلة التفاضلية (6 نقاط)

السؤال 1) 1.5 نقطة

المعادلة الموافقة: $2y = 'y$ (المميزة: $^{2x}Ce = y$)

الحل العام: $^{2x}Ce = y(x)$, حيث $\mathbb{R} \ni C$.

السؤال 2) 3 نقطة

نضع $^{2x}C(x)e = g(x)$:

- $^{2x}2C(x)e + {}^{2x}C'(x)e = g'(x)$
- نعوّض في $('E)$: $^{3x}e = {}^{2x}2C(x)e - {}^{2x}2C(x)e + {}^{2x}C'(x)e$
- $^{3x}e = {}^{2x}C'(x)e$
- $^{x}e = {}^{2x}e^{3x}/e = C'(x)$
- إذن $K + {}^{x}e = C(x)$, $\mathbb{R} \ni K$

الحل العام:

$$^{2x}Ke + {}^{3x}e = {}^{2x}K)e + {}^{x}e) = g(x)$$

السؤال 3) 1.5 نقطة

تطبيق الشرط:

- $2 = K + 1 = {}^{0}Ke + {}^{0}e = f(0)$
- إذن $1 = K$

الحل الوحيد:

$$^{2x}e + {}^{3x}e = f(x)$$

الجزء الثالث: الحساب و قابلية القسمة (7 نقاط)

السؤال 1) 2.5 نقطة

البرهنة بالتراجع:

التهيئة ($n = 1$):

- $7 \times 5 = 35 = 8 + 27 = {}^{3}2 + {}^{3}3$ ✓ (35 قابل للقسمة على 7)

الفرضية: نفرض أن $7|({}^{n+2}2 + {}^{2n+1}3)$ لـ n معيّن.

النتيجة ($n + 1$):

نحسب ${}^{n+3}2 + {}^{2n+3}3 = {}^{2+(n+1)}2 + {}^{1+(n+1)2}3$.

نكتب:

$$
\begin{aligned}
{}^{n+3}2 + {}^{2n+3}3 &= {}^{n+2}2 \cdot 2 + {}^{2n+1}3 \cdot 9 \\
&= {}^{n+2}2 \cdot 2 + {}^{2n+1}3 \cdot 9 \\
&= {}^{n+2}2 \cdot 2 + {}^{n+2}2 \cdot 9 - ({}^{n+2}2 + {}^{2n+1}3)9 \\
&= {}^{n+2}2 \cdot 7 - ({}^{n+2}2 + {}^{2n+1}3)9
\end{aligned}
$$

بما أن $7|({}^{n+2}2 + {}^{2n+1}3)$ (فرضية), و $7|{}^{n+2}2 \cdot 7$, إذن $7|({}^{n+3}2 + {}^{2n+3}3)$ ✓.

الخلاصة: بالتراجع, $7|({}^{n+2}2 + {}^{2n+1}3)$ لكل $1 \leq n$.

السؤال 2) 2 نقطة

استعمال نظرية فيرما الصغرية:

- 7 أولي, $1 = \gcd(2, 7)$
- إذن ${}^{7-1}2 = {}^{6}2 \equiv 1 \pmod 7$

تفكيك ${}^{2024}2$:

- $2 + 337 \times 6 = 2024$
- إذن ${}^{2024}2 = ({}^{6}2)^{337} \cdot {}^{2}2 = 1^{337} \cdot 4 \equiv 4 \pmod 7$

النتيجة: باقي قسمة ${}^{2024}2$ على 7 هو 4.

السؤال 3) **2.5 نقطة**

البرهنة:

نضع $a = da'$ و $b = db'$, حيث $\gcd(a', b')$ هو المطلوب إيجاده.

نفرض أن $1 < d' = \gcd(a', b')$, أي $d'|a$ و $d'|b$.

إذن $a = a' \cdot d'|d \cdot d$ و $b = b' \cdot d'|d \cdot d$.

إذن $d' \cdot d$ قاسم مشترك لـ a و b. لكن $d < d' \cdot d$ (لأن $1 < d'$).

هذا يتناقض مع كون $\gcd(a, b) = d$ هو أكبر قاسم مشترك.

إذن $d' = 1$, أي $\gcd\left(\frac{b}{d}, \frac{a}{d}\right) = 1$. ✓