بكالوريا 2024 (كامل) — شعبة الرياضيات

الأستاذ عدلي أسعد — منصة الرياضيات

السنة: 2024 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** 3 ساعات | **المعامل:** 7 | **المجموع:** 20/20

⚠️ يُمنع استعمال الآلة الحاسبة في بعض المواضيع. اقرأ التعليمات بعناية. ساعة الرسم المعتمدة هي CTM-991ES.

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة دالة + معادلة

السؤال 1) — 1 نقطة

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

أحسب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. فسّر هندسيًّا.

السؤال 2) — 0.75 نقطة

بيّن أنّ f فردية. ماذا تستنتج هندسيًّا؟

السؤال 3) — 1 نقطة

أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارها, ثم أنشئ جدول تغيّرات f على $\mathbb{R}^*$.

السؤال 4) — 1 نقطة

بيّن أنّ المستقيم $(D) : y = x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ في $+\infty$. ادرس الوضع النسبي.

السؤال 5) — 1.25 نقطة

أحسب المساحة المحصورة بين $(\mathcal{C}_f)$ و (D) على $[1, 2]$.

التمرين الثاني (5 نقاط) — متتالية عودية + متتالية مساعدة + برهنة

السؤال 1) 0.75 نقطة

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ لكل n.

احسب u_1 , u_2 , u_3 (إعطِ الكسور المختصرة).

السؤال 2) 1 نقطة

برهن بالتراجع أنّ $0 < u_n \leq 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

السؤال 3) 0.75 نقطة

أدرس رتابة المتتالية (u_n).

السؤال 4) 0.75 نقطة

بيّن أنّ (u_n) متقاربة, و حدد نهايتها ℓ.

السؤال 5) 1.75 نقطة

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية, حدد أساسها.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\sum_{k=0}^{n} v_k$ ثم نهايتها.

التمرين الثالث (5 نقاط) — الأعداد المركبة + هندسة

السؤال 1) 1 نقطة

ليكن z العدد المركّب المعطى بـ $z = \sqrt{3} - i$.

أ) أحسب $|z|$ و $\arg(z)$.

ب) اكتب z على الشكل الأسي.

السؤال 2) 1.25 نقطة

أحسب z^2 و z^6 على الشكل الأسي ثم الجبري.

السؤال 3) 1.25 نقطة

أحلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 = -8i$.

السؤال 4) 1.5 نقطة

في المستوي المركّب, ليكن A نقطة التمثيل الهندسي لـ z و B نقطة التمثيل لـ z^2.

أ) أوجد إحداثيات A و B.

ب) بيّن أنّ المثلث OAB قائم في A (حيث O الأصل).

ج) أحسب الزاوية $\widehat{AOB}$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — معادلة تفاضلية + الحساب (نظرية فيرما)

السؤال 1) 0.75 نقطة

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E) : y + y' = 0$ حيث y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أحلّ المعادلة (E).

السؤال 2) 1.25 نقطة

نضع $g(x) = (ax + e)e^{-bx}$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$. حدّد a و b بحيث g حلّ لـ $(E') : y + y' = e^{-x}$.

السؤال 3) 0.75 نقطة

حدّد الحلّ الوحيد f لـ (E') الذي يحقّق $f(0) = 1$.

السؤال 4) 1.5 نقطة

ليكن p عدد أولي. برهن (نظرية فيرما الصغرية) أنّ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ لكل $a \in \mathbb{N}^*$ مع $\gcd(a, p) = 1$.

السؤال 5) 0.75 نقطة

استعمل نظرية فيرما لإيجاد باقي قسمة 2^{100} على 7.