✅ الحل النموذجي — بكالوريا 2024 (كامل) — شعبة التقني رياضي

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2024 | **الشعبة:** شعبة التقني رياضي | **المدة:** 3 ساعات

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة دالة + مقارب مائل

السؤال 1) 1 نقطة

عند 1^+:

- $5 = 3 + 1 \cdot 2$, $1 - x \to {}^+0$

- $\lim f(x) = +\infty$

عند 1^-:

- $\lim f(x) = -\infty$

عند $\pm\infty$:

- $\lim f(x) = \lim \frac{2x}{x} = 2$

السؤال 2) 0.75 نقطة

من النهايات:

- $x = 1$ مقارب عمودي (نهايتان لا نهائيتان متعاكستان)

- $y = 2$ مقارب أفقي (النهاية عند $\pm\infty$)

السؤال 3) 1 نقطة

الاشتقاق:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)-(x-1)2}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

الإشارة:

- $(1-x)^2 > 0$ على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

- إذن $f'(x) = -5/(1-x)^2 < 0$ دائمًا

جدول التغيّرات:

- f تناقص على $(-\infty, 1)$ و على $(1, +\infty)$

السؤال 4) 1 نقطة

الطريقة: نتحقق أنّ $\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 2$ لكل $h \neq 0$.

$$f(1+h) = \frac{3+(h+1)2}{1-(h+1)} = \frac{2h+5}{h}$$

$$f(1-h) = \frac{3+(h-1)2}{1-(h-1)} = \frac{2h-5}{-h} = \frac{-2h+5}{h}$$

$$f(1+h)+f(1-h) = \frac{2h-5+2h+5}{h} = \frac{4h}{h} = 4$$

إذن $\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2} = 2$ ✓

الخلاصة: $\Omega(1,2)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C}_f)$.

السؤال 5) 1.25 نقطة

الحساب:

على $[2,4]$: $f(x) = 2 - \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x+3-2(x-1)}{x-1} = \frac{2x+3-2x+2}{x-1} = \frac{5}{x-1}$

بما أنّ $\frac{5}{x-1} > 0$ على $[2,4]$, $(\mathcal{C}_f)$ فوق $y = 2$.

$$\mathcal{S} = \int_2^4 \frac{5}{x-1}\,dx = 5[\ln|x| - 1]_2^4 = 5(\ln 3 - \ln 1) = 5\ln 3$$

النتيجة: $\mathcal{S} = 5\ln 3 \approx 5{,}493$ unit^2.

التمرين الثاني (5 نقاط) — متتالية + برهنة بالتراجع

السؤال 1)

0.75 نقطة

الحسابات:

- $u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$
- $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3/2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9+8}{6} = \frac{17}{12}$
- $u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{17/12}+\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{17}+\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{289+288}{204} = \frac{577}{408}$

تقريب: $u_3 \approx 1.4145$ (قريب من $\sqrt{2}$).

السؤال 2)

0.75 نقطة

التهيئة: $u_0 = 1 > 0$ ✓.

الفرضية: نفرض $u_n > 0$.

النتيجة:

- $u_n > 0 \Rightarrow u_n/2 > 0$ (العدد العكسي موجب)
- $u_n/2 + u_n > 0$
- $\frac{1}{2}(u_n/2 + u_n) > 0$
- إذن $u_{n+1} > 0$ ✓

الخلاصة: بالتراجع، $u_n > 0$ لكل n.

السؤال 3)

1.5 نقطة

الحساب:

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{u_n}+u_n\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{u_n^2}+u_n^2+4\right) = \frac{u_n^4+4u_n^2+4}{4u_n^2}$$

$$2 - u_{n+1}^2 = \frac{4u_n^2+4u_n^2+4-8u_n^2}{4u_n^2} = \frac{u_n^4-4u_n^2+4}{4u_n^2} = \frac{(u_n^2-2)^2}{4u_n^2}$$

النتيجة:

- $(u_n^2-2)^2 \geq 0$ (مربّع)
- $4u_n^2 > 0$ (لأن $u_n > 0$)
- إذن $2 - u_{n+1}^2 \geq 0$
- أي $u_{n+1}^2 \leq 2$
- بما أنّ $u_{n+1} > 0$: $u_{n+1} \leq \sqrt{2}$

النتيجة النهائية: $u_{n+1} \leq \sqrt{2}$ لكل $n \geq 0$, أي $u_n \leq \sqrt{2}$ لـ $n \geq 1$.

السؤال 4) 1 نقطة

الحساب:

$$\frac{{}_{n}^{2}u-1}{{}_{n}2u}=\frac{{}_{n}u}{2}-\frac{1}{{}_{n}2u}={}_{n}u-\left(\frac{2}{{}_{n}u}+{}_{n}u\right)\frac{1}{2}={}_{n}u-{}_{n+1}u$$

من السؤال 3): ${}_{n}^{2}u\geq 2>1$ (لـ $n\geq 1$), إذن ${}_{n}^{2}u-1\geq 0$.

بما أنّ ${}_{n}u>0$:

- ${}_{n}u-{}_{n+1}u\geq 0$
- إذن $({}_{n}u)$ **متناقصة** لـ $n\geq 1$

السؤال 5) 1 نقطة

التقارب:

- $({}_{n}u)$ متناقصة لـ $n\geq 1$
- محدودة سفلًا بـ $\sqrt{2}$ (من السؤال 3)
- إذن متقاربة (نظرية الرتابة المحدودة)

حساب ℓ:

نأخذ النهاية في ${}_{n+1}u=\frac{1}{2}({}_{n}u/2+{}_{n}u)$:

$$\left(\frac{2}{\ell}+\ell\right)\frac{1}{2}=\ell$$

$$\frac{2}{\ell}+\ell=2\ell$$

$$\frac{2}{\ell}=\ell$$

$$2={}^{2}\ell$$

$$\sqrt{2}=\ell$$

(نختار الموجب لأن ${}_{n}u>0$.)

الخلاصة: ${}_{n}\lim_{\infty+\to n}u=\sqrt{2}$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — هندسة في الفضاء

السؤال 1) 0.75 نقطة

الحسابات:

- $\vec{AB} = (2-3;2-1;0-2) = (2;-1;2)$
- $\vec{AC} = (1-2;2-4;0-1) = (1;2;1)$
- $\vec{AD} = (3-1;2-1;0-3) = (3;-1;-1)$

السؤال 2) 0.75 نقطة

الجداء السلمي $\vec{AC}\cdot\vec{AB}$:

$$\vec{AC}\cdot\vec{AB} = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 2 + 2 - 2 = 2$$

الجداء السلمي $\vec{AD}\cdot\vec{AB}$:

$$\vec{AD}\cdot\vec{AB} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 = 6 + 1 + 2 = 5$$

السؤال 3) 1.25 نقطة

الجداء الشعاعي:

$$\vec{AC}\wedge\vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2\cdot 2 - 1\cdot(-1)) - \vec{j}(1\cdot 2 - 1\cdot 2) + \vec{k}(1\cdot(-1) - 2\cdot 2)$$

$$= \vec{i}(4 - 1 + 1) - \vec{j}(2 - 2) + \vec{k}(1 + 4)$$

$$= -5\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$= (-5;0;5)$$

السؤال 4) 1 نقطة

المتجه العادي للمستوي (ABC):

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-5;0;5)$$

(أو مبسّط: $\vec{n} = (-1;0;1)$ أو $\vec{n} = (-1;0;1)$.)

المعادلة الديكارتية: باستعمال $\vec{n} = (-1,0,1)$ و النقطة $A(1,2,0)$:

$$(1-x)1 + (2-y)0 - (0-z)1 = 0$$

$$x - 1 - z = 0$$

$$\boxed{x - z - 1 = 0}$$

التحقق: $B(3,1,2)$: $3 - 2 - 1 = 0$ ✓. $C(2,4,1)$: $2 - 1 - 1 = 0$ ✓.

السؤال 5) 0.75 نقطة

الصيغة:

$$d(D,(ABC)) = \frac{|1 - 3\cdot 1 - 1\cdot 0 + 0\cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|1 - 3 - 0 + 0|}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

النتيجة: $d(D,(ABC)) = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

السؤال 6) 0.5 نقطة

الجداء المختلط:

$$[\vec{AD},\vec{AC},\vec{AB}] = \vec{AD}\cdot(\vec{AC}\wedge\vec{AB}) = (-1)(-5) + (-1)(0) + (3)(5) = 5 + 0 + 15 = 20$$

(أو مبسّط: $\vec{AD}\cdot\vec{n} = 1/5$, ولكن استعملنا $\vec{n} = (-5,0,5)$ قبل التبسيط، فالنتيجة 20.)

حجم الرباعي:

$$V_{ABCD} = \frac{|[\vec{AD},\vec{AC},\vec{AB}]|}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

النتيجة: $V_{ABCD} = \frac{10}{3}$ وحدة حجم.

التمرين الرابع (5 نقاط) — احتمالات + توزيع ذي الحدين

السؤال 1) 1.5 نقطة

أ) نوع التوزيع:

- 4 سحوبات مستقلة (مع إعادة)
- احتمال "نجاح" (الحصول على نوع A) = $p = 0.6$
- إذن $X \sim \mathcal{B}(4, 0.6)$ (توزيع ذي الحدين)

ب) الحسابات:

- $P(X = 0) = (p-1)^4 = (0.4)^4 = 0.0256$
- $P(X = 4) = p^4 = (0.6)^4 = 0.1296$

السؤال 2) 1.5 نقطة

الحسابات (استعمال صيغة بيرنولي):

- $P(X = 1) = \binom{4}{1}(0.6)(0.4)^3 = 4 \cdot 0.6 \cdot 0.064 = 0.1536$
- $P(X = 2) = \binom{4}{2}(0.6)^2(0.4)^2 = 6 \cdot 0.36 \cdot 0.16 = 0.3456$
- $P(X = 3) = \binom{4}{3}(0.6)^3(0.4)^1 = 4 \cdot 0.216 \cdot 0.4 = 0.3456$

التحقق: $0.0256 + 0.1536 + 0.3456 + 0.3456 + 0.1296 = 1$ ✓

السؤال 3) 1 نقطة

الأمل الرياضي:

$$E(X) = p \cdot n = 0.6 \cdot 4 = 2.4$$

التباين:

$$V(X) = p \cdot (1-p) \cdot n = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 4 = 0.96$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.96} \approx 0.98$$

السؤال 4) 0.5 نقطة

الحساب:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.3456 + 0.3456 + 0.1296 = 0.8208$$

النتيجة: $P(X \geq 2) \approx 82,08\%$.

السؤال 5) **0.5 نقطة**

الصيغة:

$$0.421 \approx \frac{0.3456}{0.8208} = \frac{P(X=3)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X=3 \cap X \geq 2)}{P(X \geq 2)} = (2 \leq X|3 = P(X$$

أي حوالي $42,1\%$.