✅ الحل النموذجي المفصّل

الاختبار الفصلي الأول

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

📝 5 تمارين محلولة 📅 ديسمبر 2026 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

حل التمرين الأول — صحيح أو خطأ

1) **صحيح.** $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(-x)$. إذن زوجية.

2) **صحيح.** على $(1,+\infty)$: $x(x - \ln[x(1 - 1] = 1 \iff e = (1 - x(x \iff 0 = e - x - {}^2x$. $\Delta = 1 + 4e$. الحل الموجب $\frac{\sqrt{1+4e}+1}{2} \approx 2,46$. حل وحيد في $(1,+\infty)$ ✓.

3) **خطأ.** ${}_nu$ يأخذ إشارات متناوبة $((-1)^n)$, إذن مهتزة, ليست رتيبة.

4) **صحيح.** $g(x) = x - 1 - {}^xe$. $g'(x) = 1 - {}^xe \geq 0 \iff x \leq 0$. $g(0) = 0$. إذن $g(x) \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$ (الأدنى عند 0).

حل التمرين الثاني — الدالة $f(x) = 2 + e^{-x}(1-x)$

(1) **1)** عند $+\infty$: $e^{-x}(1-x) \to 0$ (الأسية تتفوق), $f(x) \to 2$. عند $-\infty$: $e^{-x} \to +\infty$ و $1-x \to -\infty$, المنتج $\to -\infty$, إذن $f(x) \to -\infty$.

(2) تفسير: $y = 2$ مقارب أفقي عند $+\infty$.

(3) **2)** $f'(x) = -e^{-x} + e^{-x}(1-x) = (-e^{-x})(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(2 - x)$.

(4) $e^{-x} > 0$, إذن $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 2$.

(5) **3)** f تزايد على $(-\infty, 2]$, تناقص على $[2, +\infty)$. القيمة العظمى: $f(2) = 2 + e^{-2} \cdot 1 = 2 + e^{-2} \approx 2,135$.

(6) **4)** $y = 2$ مقارب أفقي. $f(x) - 2 = e^{-x}(1-x)$. إشارته = إشارة $(1-x)$. لـ $x < 1$: $f > 2$ (فوق). لـ $x > 1$: $f < 2$ (تحت).

(7) **5)** $f'(0) = e^{0} \cdot 2 = 2$, $f(0) = 2 + 1 - = 1$. المماس: $y = 1 + 2x$.

(8) **6)** مع المحور الصادي: $f(0) = 1$, نقطة $(0,1)$. مع المحور السيني: $f(x) = 0 \iff e^{-x}(1-x) = -2 \iff 1 - x = -2e^{-x} \iff x + 2e^{-x} = 1$.

(9) بالفحص: $g(x) = x + 2e^{-x} - 1$. $g(0) = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$, $g(-1) = -1 + 2e/1 - \approx -0,26 < 0$. إذن يوجد حل في $(-1,0)$. بالتنصيف: $g(-0.5) = -0.5 + 2e^{-0.5} - 1 \approx -0.5 + 1,21 - 1 = -0.29 < 0$. $g(-0.2) = -0.2 + 2e^{-0.2} - 1 \approx -0.2 + 1.64 - 1 = 0.44 > 0$. إذن نقطة تقاطع $\approx (-0.4, 0)$.

(10) **7)** الرسم: منحنى يصعد من $-\infty$, يمر من $(0,1)$ مع تماس مائل $y = 1 + 2x$, يصل القمة $(2, 2,135)$, ثم ينزل نحو $y = 2$ من فوق.

(11) **8)** f تزايد على $(-\infty, 2)$ من $-\infty$ إلى $f(2) \approx 2,135$. على $(2, -\infty)$, يقطع $y = 1$ مرة واحدة. $f(0) = 1$, إذن $\alpha = 0$... ملاحظة: المعادلة $f(x) = 1$ لها حل $x = 0$ فوريًا! $f(0) = 1$ بالفعل. نُصحّح: $\alpha = 0$.

حل التمرين الثالث — المتتالية (u_n)

(1) 1) $u_1 = \frac{3+2}{2+3} = 1$. $u_2 = \frac{3+2}{2+3} = 1$. (المتتالية ثابتة عند 1!)

(2) 2) التهيئة: $u_0 = 1 \in (0,1]$ ✓. الفرضية: $1 \geq u_n > 0$. النتيجة: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+3}$. إذا $u_n \in (0,1]$, $3u_n + 2 \in (2,5]$ و $2u_n + 3 \in (3,5]$. $u_{n+1} \in (2/5,5/3]$. ليس من الضروري في $(0,1]$... للتحقق: $u_1 = 1 \in (0,1]$ ✓. لكن الحساب العام يحتاج مراجعة.

(3) بالأحرى: $1 \geq u_{n+1} \iff 3u_n + 2 \geq 2u_n + 3 \iff 1 \geq u_n$ ✓. و $0 < u_{n+1}$ واضح. إذن بالتراجع $1 \geq u_n > 0$ ✓.

(4) 3) $u_n - u_{n+1} = \frac{3u_n+2-u_n(2u_n+3)}{2u_n+3} = \frac{3u_n+2-2u_n^2-3u_n}{2u_n+3} = \frac{2-2u_n^2}{2u_n+3} = \frac{(1-u_n^2)2}{2u_n+3}$. بما أن $1 \geq u_n > 0$, $1 - u_n^2 \geq 0$, إذن $u_n - u_{n+1} \geq 0$. (u_n) متزايدة.

(5) ملاحظة: في الواقع $u_n = 1$ ثابتة من $n = 0$.

(6) 4) متزايدة و محدودة علويًا بـ 1, متقاربة. $\ell = \frac{3\ell+2}{2\ell+3} \Rightarrow 2\ell + 3\ell = 2 + \ell(3 \Rightarrow 2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell = 1$ (نختار الموجب).

(7) 5) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{3u_n+2}{2u_n+3}-1}{\frac{3u_n+2}{2u_n+3}+1} = \frac{2u_n+3-3u_n-2}{2u_n+3+3u_n+2} = \frac{u_n-1}{5u_n+5} = \frac{u_n-1}{5(u_n+1)} = \frac{v_n}{5}$.

(8) إذن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ و $v_0 = \frac{1-1}{1+1} = 0$. (ملاحظة: $u_0 = 1$ يعني $v_0 = 0$, متتالية معدومة!)

(9) تُصحّح: $u_0 = 1$ يعني $v_n = 0$ لكل n, ولا معلومة مفيدة. السؤال يحتاج $u_0 = 1$. لنفترض $u_0 = \frac{1}{2}$ مثلاً.

(10) 6) $v_n = (1/5)^n \cdot v_0$, $u_n = \frac{v_n-1}{v_n+1}$.

(11) 7) $\lim_n v = 0$ (لأن $|1/5| < 1$), إذن $\lim_n u = 1$.

(12) 8) $|u_n - 1| = \left|1 - \frac{v_n-1}{v_n+1}\right| = \left|\frac{2v_n}{v_n+1}\right| = \frac{2|v_n|}{|v_n+1|}$. إذا v_n صغير, $2|v_n| \approx 2 \cdot (1/5)^n \geq (1/5)^{n-1}$. التقارب من الرتبة 1 بمعدل $1/5$.

حل التمرين الرابع — نهايات و تكاملات

(1 $\sin x = x - x^3/6 + \dots$, $\frac{\sin x - x}{x^3} \to -1/6$.

(2 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e^2 \cdot 1 = e^2$.

(3 $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$.

(4 بالتجزئة: $u = x$, $v' = e^{-x}$. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^{-1} + 1$
$e/2 - 1 = 1$.

(5 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

حل التمرين الخامس — احتمالات

(1 $P(\text{لونان مختلفان}) = P(\text{أحمر ثم أبيض}) + P(\text{أبيض ثم أحمر}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

(2 $P(\text{لون واحد}) = P(\text{أحمران}) + P(\text{أبيضان}) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{20+6}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$.

(3 تحقق: $13/28 + 15/28 = 28/28 = 1$ ✓.

(4 $X \sim \mathcal{B}(4, 5/8)$ (تجارب بيرنولي مستقلة, احتمال النجاح = احتمال أحمر = 5/8).

(5 $E(X) = np = 4 \cdot 5/8 = 5/2 = 2.5$. $V(X) = np(1-p) = 4 \cdot 5/8 \cdot 3/8 = 15/16 \approx 0,9375$.

(6 $P(X = 3) = \binom{4}{3}(5/8)^3(3/8) = 4 \cdot 125/512 \cdot 3/8 = 1500/4096 = 375/1024 \approx 0,366$.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

asaadadli9393@gmail.com | الجزائر