✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الأول — الفصل الأول

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

📝 3 تمارين محلولة 📅 أكتوبر 2026 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

حل التمرين الأول — صحيح أو خطأ

1) **1) خطأ.** $(1 = (3x - \ln(1 = (1 - \ln((2x + x + x)) = 1 + |x - \ln| + \ln(2x + x + 1)$. ليس بالضرورة $\ln(1\,2 \leq -x)$. مثلًا عند $x = 0$: $0 = \ln 1$ و $0 = \ln 1\,2$ — متساويان. عند $x = -1$: $\ln 2 = \ln 2$ و $\ln 2 < \ln 4 = \ln 2\,2$. إذن العبارة خاطئة.

2) **2) خطأ.** $f(x) = \frac{4x}{xe} = x^4 e^{-x}$. عند $x \to 0$: $f(0) = 0$. ليست النهاية 3. (النهاية الحقيقية هي 0.)

3) **3) صحيح.** نضع $X = e^x$: $2 + 3X - X^2 = 0 \Rightarrow (2 - X)(1 - X) = 0 \Rightarrow X = 1$ أو $X = 2$. أي $x = 0$ أو $x = \ln 2$. حلّان متمايزان ✓.

4) **4) صحيح.** $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2 - xe^{-x})$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$ أو $x = 2$. عند $x = 2$: f تغيّر إشارتها من + إلى −، إذن قيمة حدّية عظمى ✓.

حل التمرين الثاني — دراسة الدالة g و f

(1) **1)** عند $+\infty$: $x^2-1 \to -\infty$ و $(x-x)\ln(1-1) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$. بدراسة أعمق: x^2 يتفوق، إذن $g(x) \to -\infty$.

(2) عند $-\infty$: $x^2-1 \to -\infty$ و $(x-x)\ln(1-1) \to +\infty \cdot +\infty = +\infty$. لكن الأساسي: $(x-\ln(1-x(1+x^2-$ $+\infty \to (x-\ln(1$ ببطء، إذن $g(x) \to -\infty$.

(3) **2)** نحسب $g'(x)$: $g'(x) = -(x-\ln(1-2x) - (x-1)\cdot\frac{-1}{x-1} = -(x-\ln(1-2x) + 1$. إذن $g'(x) = -1$ $(x-\ln(1-2x$.

(4) $g''(x) = -2 + \frac{1}{x-1}$. $g''(x) = 0 \iff x-1 = 1/2 \iff x = 1/2$. $g''(x) < 0$ لـ $x > 1/2$، $g''(x) > 0$ لـ $x < 1/2$. إشارة g' تتغير حسب x.

(5) جدول التغيرات: g يبدأ من $-\infty$، يرتفع، ثم ينخفض إلى $-\infty$. نقطة قصوى عند تقريب $x = 0$.

(6) **3)** g تزايد ثم تناقص (حسب جدول التغيرات).

(7) **4)** $g(0,2) = 0,96 + 0,91 \approx \ln 0,8 \cdot 8 + 0,96 \approx (-0,223) \cdot 8 + 0,96 - 0,91 = 0,25 > 0$. $g(0,3) = 0,91 + 0,91 \approx \ln 0,7 \cdot 7 + 0,91 \approx (-0,357) \cdot 7 + 0,91 - 0,25 = 0,66 > 0$.

(8) بعد إعادة الفحص: نحتاج قيمًا أكبر. $g(0,9) = (1-0,81) + 1,1 \ln 0,9 = 1 - 0,81 - 1,9 = -0,23 < 0$. $g(0,8) = 0,36 + 0,2 \ln 0,8 = 0,36 - 0,32 = 0,04 > 0$. إذن $\alpha \in (0,8 ; 0,9)$. [ملاحظة: السؤال الأصلي يحتاج تعديل في القيم]

(9) **5)** $g(x) < 0$ على $(-\infty, \alpha)$ و $g(x) > 0$ على $(\alpha, +\infty)$. (مع $\alpha \approx 0,84$)

(10) **6)** نهايات f على $[0,1[$: عند 1^+: $(x+\ln(1-x) \to -\infty$، إذن $f(x) \to 0^-$. عند 0^-: $(x+\ln(1-x) \to 0^-$، إذن $f(x) \to -\infty$.

(11) تفسير هندسي: $\mathcal{C}$ يقبل مقاربة أفقية $y = 0$ عند 1^+ و مقاربة عمودية $x = 0$ عند 0^-.

(12) **7)** $f'(x) = \frac{\ln(1+x)\cdot\frac{1}{x+1}x^2 - 1\cdot 2x(1+x)\ln^2(1+x)\,(x+1)}{x^4(1+x)^2\ln^2(1+x)} = \frac{x(1+x)\ln(1+x) - 2x(1+x)\ln^2(1+x)}{x^4(1+x)^2\ln^2(1+x)}$

(13) بعد التبسيط: $f'(x) = \frac{\ln(1+x)\,1-2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$ ... (التفصيل في الاشتقاق).

(14) بالأحرى من العلاقة $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$ نستعمل إشارة g: $f' < 0$ حيث $g > 0$ و $f' > 0$ حيث $g < 0$.

(15) جدول تغيرات f: تناقص على $[-1,0]$ (لأن $g > 0$ هناك $\to f' < 0$).

(16) **8 أ)** المقارب المائل: $f(x) - (1+x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - x - 1 \to 0$ عند $x \to -1^+$ (إذ $\ln(1+x) \to -\infty$ فـ $\ln/1 \to 0$ و $1 + x \to 0$). إذن (Δ) مقارب مائل (في الحقيقة مقاربة أفقية $y = 1$ عند الفحص).

(17) **8 ب)** $f(x) - (1+x)$ إشارته تعتمد على $\frac{\ln(1+x)\,(x+1)-1}{\ln(1+x)}$. عند -1^+: موجب (لأن $1 - 0 = 1 > 0$ و $\ln > 0$) $\to$ سالب. إذن $\mathcal{C}_f$ تحت (Δ).

حل التمرين الثالث — المتتالية العودية

(1) **1)** $u_1 = \frac{1}{2}(3) = 1 + \frac{5}{2}$. $u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{9}{4}$. $u_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{8} = 1 + \frac{17}{8}$.

(2) **2)** $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - 1 + \frac{1}{2}u_n = (2 - u_n)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}v_n$. (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و $v_0 = 1$.

(3) **3)** $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$. $u_n = 2 + v_n = 2 + \frac{1}{2^n}$.

(4) **4)** $\lim u_n = 2$ (لأن $\frac{1}{2^n} \to 0$).

(5) **5)** $S_n = v_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 \cdot \frac{(1/2)^{n+1}-1}{1/2} = 2\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{2^n} - 2$.

(6) **6)** **التهيئة:** $u_0 = 3 \in [2,3)$ ✓. **الفرضية:** $2 < u_n \le 3$. **النتيجة:** $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n \in \left[1 + 2 \cdot \frac{1}{2}, 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = [2,5/2) \subset [2,3)$ ✓.

(7) **7) أ) مباشرة:** $u_n - u_{n+1} = u_n - 1 + \frac{1}{2}u_n = \frac{u_n}{2} - 1$. بما أن $2 < u_n$, $u_n/2 - 1 > 0$. إذن (u_n) متناقصة.

(8) **ب) عبر (v_n):** $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n > v_n$ (لأن $v_n > 0$), إذن (v_n) متناقصة, و بالتالي $(u_n) = 2 + (v_n)$ متناقصة.

(9) **8)** $w_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. $\ln w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln u_k$. بما أن $1 < 2 < u_k$, $\ln u_k > 0$, إذن $\ln w_n \to +\infty$, إذن $w_n \to +\infty$. المتتالية (w_n) غير متقاربة.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

📧 asaadadli9393@gmail.com | الجزائر 🇩🇿