✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الثاني — الفصل الأول

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

📝 4 تمارين محلولة 📅 نوفمبر 2026 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

حل التمرين الأول — صحيح أو خطأ

1) **1) خطأ.** شروط: $x > 1$ و $x < -2$, أي $x < 1$. $\ln 4 = [(2+x)(1-\ln[(x \iff 4 = (2+x)(1-x) \iff$ $0 = 6 - x + {}^2x \iff x = 2$ أو $x = -3$. نختار $x < 1$: حل وحيد $x = 2$ ✓ — العبارة صحيحة في الواقع (تحقق).

2) **2) صحيح.** $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{{}^2x}$. $f'(x) = 0 \iff x = 1$. f' يغير الإشارة من $-$ إلى $+$ عند $x = 1$, إذن قيمة حدّية صغرى! في الواقع: f' سالب على $(-\infty, 1)$ و موجب على $(1, +\infty)$, إذن $x = 1$ صغرى وليس عظمى. العبارة خطأ.

3) **3) صحيح.** $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. المجموع: $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ ✓ (سلسلة تيليسكوبية).

4) **4) خطأ.** $h(x) = e^x - x$. $h'(x) = e^x - 1$. $h' \geq 0 \iff x \geq 0$, h تزايد على $[0, +\infty)$. $h(0) = 1 - > 0$, $h(2) = e^2 - 4 > 0$. إذن يوجد $\alpha \in (0, 2)$ بحيث $h(\alpha) = 0$ ✓ — العبارة خاطئة (يوجد حل).

حل التمرين الثاني — الدالة $f(x) = ax + b + e^{-x}$

(1) **1)** $f'(x) = -e^{-x} - a$. $f'(x) - f(x) = -e^{-x} + a - e^{-x} + b + ax = -2e^{-x} + (a-b) + ax$.

(2) أو: $f'(x) = -e^{-x} - a$ و $f(x) = ax + b + e^{-x}$. نلاحظ أن $f'(x) - a = -e^{-x}$, إذن $f'(x) - a + b + ax = f(x)$, أي $f'(x) = a(x + 1) + b - f(x)$.

(3) **2)** المماس في $A(0,3)$ أفقي يعني $f'(0) = 0$, أي $-e^{0} - a = 0 \Rightarrow a = 1$. كذلك $f(0) = 3$, أي $1 + b = 3 \Rightarrow$ $b = 2$.

(4) **3)** $f(x) = x + 2 + e^{-x}$. نهايات: عند $+\infty$: $e^{-x} \to 0$, $f(x) \sim x \to +\infty$. عند $-\infty$: $e^{-x} \to +\infty$, $f(x) \to$ $+\infty$.

(5) **4)** $f(x) - (2 + x) = e^{-x} \to 0$ عند $+\infty$. إذن $(\Delta) : y = x + 2$ مقارب مائل عند $+\infty$.

(6) عند $-\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \to 1 - 0 + (-\infty)/(-\infty)$. الأسية تتفوق, $\frac{e^{-x}}{x} \to +\infty$. إذن لا يوجد مقارب مائل عند $-\infty$.

(7) **5)** $f'(x) = -e^{-x} - 1$. $f'(x) \geq 0 \iff -e^{-x} \geq 1 \iff x \leq 0 \iff$. إذن f تناقص على $(-\infty, 0]$, تزايد على $[0, +\infty)$. الأدنى: $f(0) = 3$.

(8) **6)** $f(x) - (2 + x) = e^{-x} > 0$ دائمًا. إذن $(\mathcal{C})$ فوق (Δ) دائمًا.

(9) **7)** الرسم: منحنى يمر من $(0, 3)$, يقبل $(\Delta) : y = x + 2$ مقاربًا مائلًا من فوق, يرتفع من $+\infty$ (عند $-\infty$, الأسية) ثم ينخفض إلى $(0, 3)$ ثم يرتفع مجددًا على شكل خط $y = x + 2$.

(10) **8)** على $[0, +\infty)$: f تزايد من 3 إلى $+\infty$, إذن المعادلة $f(x) = 4$ يقبل حلًّا وحيدًا $\beta > 0$. $f(0) = 3 < 4$, $f(2) = 4 + e^{-2} \approx 4,135 > 4$. إذن $\beta \in (0, 2)$. تقريب: $f(1,5) = 3,5 + e^{-1,5} \approx 3,5 + 0,223 = 3,723 > 4$. $\beta \in (1,5, 2)$. $f(1,7) = 3,7 + e^{-1,7} \approx 3,7 + 0,183 = 3,883 > 4$. $\beta \approx 1,8$.

حل التمرين الثالث — براهين بالتراجع

(1 التهيئة: $n=1$: $1=1=\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)^2$ ✓. النتيجة: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$
$(1+n)^2=\left[(n+1)+\frac{n^2}{4}\right]^2$. $\frac{n^2+4n+4}{4}=\left(\frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)^2$ ✓.

(2 التهيئة: $n=5$: $5^2=25<32=2^5$ ✓. الفرضية: $k^2<2^k$. النتيجة: $(k+1)^2\le 2^{k+1}=2\cdot 2^k$
$\iff 1+2k+k^2\le 2^k \iff 0\le 1-2k-k^2$. لـ $k\ge 3$: $0\le 2\le 2-(k-1)^2$ ✓. لـ $k\ge 5$ ✓.

(3 $u_0=1$, $u_1=\frac{2}{2}=1$, $u_2=\frac{5}{3}$.

(4 $u_{n+1}-u_n=\frac{n^2+1}{n+1}-\frac{1+(n+1)^2}{n+2}=\frac{(n+2)(n^2+1)-(n+1)[1+(n+1)^2]}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^3+3n^2+4n+2-n^3-2n^2-n-2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}$
$\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\ge 0$ لـ $n\ge 0$. إذن (u_n) متزايدة. $\lim u_n=\lim\frac{n^2}{n}=+\infty$.

(5 $u_n^2=2-\frac{2(n+1)-(n^2+1)}{(n+1)^2}=\frac{n^4+2n^2+1-2n^2-4n-2}{(n+1)^2}=\frac{n^4-4n-1}{(n+1)^2}$. لـ $n\ge 2$: $n^4\ge 16$, $1+4n\le 9$, إذن $2-u_n^2>0$,
$u_n<\sqrt{2}$ (لأن $u_n>0$).

(6 (u_n) متزايدة و غير محدودة ($\to+\infty$), إذن $(v_n)=(\sqrt{2}-u_n)\to+\infty$, غير متقاربة.

حل التمرين الرابع — النهايات

(1 $\lim\frac{x^3-2x+1}{x^2+x}=\lim\frac{x^3}{x^2}=+\infty$.

(2 $e^{2x}=1+2x+2x^2+...$, إذن $\frac{e^{2x}-1-2x}{x^2}\to 2$ (ت aylor رتبة 2).

(3 $\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{x^2-x^2-3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{-3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{-3}{\sqrt{1+3/x}+1}\to\frac{-3}{2}$.

(4 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$ (شهيرة).

(5 $\frac{2^n}{n!}\to 0$ (المضروب يتفوق).

(6 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=e^{n\ln(1-1/n^2)}$. $\ln(1-1/n^2)\sim -1/n^2$, $(-1/n^2)\cdot n=-1/n\to 0$. إذن النهاية $e^0=1$.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

📧 asaadadli9393@gmail.com | الجزائر 🇩🇿