✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الأول — الفصل الثاني

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

📝 4 تمارين محلولة 📅 فيفري 2027 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

حل التمرين الأول — معادلات

(1 $e^x = X$: $6 + 5X - X^2 = 0$ ، $(2 - X)(3 - X) = 0$ ، $X = 2$ أو $X = 3$. إذن $x = \ln 2$ أو $x = \ln 3$.

(2 شروط: $x > 2$. $\ln 6 = [(2 - x)(1 + \ln[(x$ $\iff$ $6 = (2 - x)(1 + x)$ $\iff$ $6 = 2 - x - x^2$ $\iff$ $x^2 - x - 8 = 0$. $\Delta = 1 + 32 = 33$. $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$. نختار $x > 2$: $x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \approx 3,37$.

(3 $Y = \ln x$: $Y^2 - 4Y + 3 = 0$ ، $(1 - Y)(3 - Y) = 0$ ، $Y = 1$ أو $Y = 3$. إذن $x = e$ أو $x = e^3$.

(4 $X = e^x$ ، $1/X = e^{-x}$. $X + 1/X = 3 \iff X^2 - 3X + 1 = 0$. $X = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (كلاهما موجب). إذن $x = \ln\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ أو $x = \ln\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

(5 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. g أقصاها عند $x = e$ و $g(e) = 1/e$. إذن الحل الوحيد $x = e$.

(6 $h(x) = x - e^x$. $h'(x) = 1 - e^x \leq 0 \iff x \geq 0$. h تزايد على $(-\infty, 0]$, تناقص على $[0, +\infty)$.
$h(0) = -2$ ، $h(2) = 5 - e^2 \approx -2,39 < 0$. إذن $\alpha \in (0, 2)$. بالتنصيف: $h(1) = 4 - e \approx -1,28 > 0$.
$h(1,5) = 5,4 - e^{1,5} \approx -0,02 > 0$ ، $h(1,6) = 6,4 - e^{1,6} \approx 0,05 > 0$. إذن $\alpha \approx 1,5$.

(7 $h(x) < 0$ على $(-\infty, \alpha)$ و $h(x) > 0$ على $(\alpha, +\infty)$. (الأدنى $h(0) = -2$, أقصى نسبي على $(-\infty, 0)$.)

(8 $\ln 4 + \ln 5 - \ln 20 = \ln(4 \cdot 5/20) = \ln 1 = 0$.

حل التمرين الثاني — الدالة $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$

(1) **1)** عند $+\infty$: $\frac{x^2}{e^x} \to 0$ (الأسية تتفوق), إذن $f(x) \to 0^+$. عند $-\infty$: $1-x^2 \to +\infty$ و $e^{-x} \to +\infty$, إذن $f(x) \to +\infty$. تفسير: $y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty$.

(2) **2)** $f(-x) = (1-x^2)e^{x} = \pm f(x)$. ليست زوجية و لا فردية.

(3) **3)** $f'(x) = -2xe^{-x} - (1-x^2)e^{-x} = (-2x+1)e^{-x} = (-x^2+2x+1)e^{-x}$ ✓.

(4) **4)** $-x^2+2x+1=0 \iff 1-2x-x^2=0 \iff x=\pm\sqrt{2}-1$. الجذور: $x_1 = -\sqrt{2}-1 \approx -2,41$ و $x_2 = \sqrt{2}-1 \approx 0,41$. $-x^2+2x+1>0$ على (x_1, x_2).

(5) إذن $f'>0$ على (x_1, x_2), $f'<0$ على $(-\infty, x_1)$ و $(x_2, +\infty)$.

(6) **5)** f تناقص على $[-\infty, -\sqrt{2}-1]$, تزايد على $[-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1]$, تناقص على $[\sqrt{2}-1, +\infty)$.

(7) القيم القصوى: $f(-\sqrt{2}-1) \approx f(-0,41) = (-0,83)(e^{-0,41}) \approx -1,24$ (صغرى). $f(\sqrt{2}-1) \approx f(2,41) = 4,83 \cdot e^{-2,41} \approx 0,43$ (عظمى).

(8) **6)** $f'(0) = (1+0+0)\cdot 1 = 1$, $f(0) = -1$. المماس: $y = x-1$.

(9) **7)** مع المحور الصادي: $f(0) = -1$, نقطة $(0,-1)$. مع المحور السيني: $f(x)=0 \iff 1-x^2=0 \iff x=\pm 1$. نقطتان: $(-1,0)$ و $(1,0)$.

(10) **8)** الرسم: منحنى من $+\infty$ ينخفض إلى $(-\sqrt{2}-1, -1,24)$ (صغرى), يمر من $(-1,0)$, يصعد إلى $(\sqrt{2}+1, 0,43)$ (عظمى), يمر من $(1,0)$, ثم ينخفض نحو $y=0$.

حل التمرين الثالث — أعداد مركبة

(1 **1)** $z_1 + z_2 = i + 3$. $z_1 z_2 = (1+2)(2i-3i) = 2 - 3i + 4i - 6 = i - 8$.

(2 **2)** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(1+2i)(2+3i)}{5} = \frac{2+4i+3i+6i}{5} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$.

(3 **2)** $|z_1| = \sqrt{13}$, $|z_2| = \sqrt{5}$, $|z_1 z_2| = \sqrt{65}$. تحقق: $|i-8| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$ ✓.

(4 **3)** $z_1 = \sqrt{13}\, e^{i \arctan(3/2)}$, $z_2 = \sqrt{5}\, e^{-i \arctan 2}$.

(5 **4)** $z_1^4 = (\sqrt{13})^4 e^{i4\arctan(3/2)} = 169 \cdot e^{i4\theta}$ حيث $\theta = \arctan(3/2)$.

(6 بالصيغة التفاضلية: $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$. $\cos\theta = 2/\sqrt{13}$, $\cos^2 = 4/13$, $\cos^4 = 16/169$.

$\cos 4\theta = 1 + 32/13 - 128/169 = 169/(169+416-128) = -119/169$. $\sin 4\theta =$

$4\sin\theta\cos\theta(\cos^2 - \sin^2) = 4 \cdot (2/\sqrt{13}) \cdot (3/\sqrt{13}) \cdot (-9/13) = -216/169$.

(7 إذن $z_1^4 = 169 \cdot (-119/169 + 216i/169) = -119 - 216i$.

(8 (5 $\Delta = 20 - 4 = 16 - = (4i)^2$. $z = \frac{2+4i}{2} = 1 \pm 2i$.

(9 (6 $Z = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$. $\bar{Z} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$. $Z + \bar{Z} = -\frac{8}{5}$. $Z - \bar{Z} = \frac{14}{5}i$.

حل التمرين الرابع — التكاملات

(1 $\int_0^1 (x - x^2 + x^3)\,dx = 1 - 1 + 1 = 1$.

(2 بالتجزئة: $u = \ln x$, $v' = x^2/1$. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx = -e/1 + \left[-x/1\right]_1^e + 1 = -(1 + e/1) + 1 = -e/1$. [ملاحظة: $-e/1 = -1 + 1 - e/1$]

(3 $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$. $\int_0^{\pi/2} \sin x(1 - \cos^2 x)\,dx = -\int_1^0 (1 - u^2)\,du = \left[u - u^3/3\right]_0^1 = 1 - 1/3 = 2/3$.

(4 $u = 1 + e^x$, $du = e^x\,dx$. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left[\ln(1 + e^x)\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 - \ln 3$.

(5 $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|$. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = -\ln(\sqrt{2}/2) = \ln 1 + \ln(2/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$.

(6 $u = -x^3$, $du = -3x^2\,dx$. $\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-x^3}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{3} = \frac{e-1}{3e}$.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

asaadadli9393@gmail.com | الجزائر