✅ الحل النموذجي — الفرض الأول — الفصل الأول (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** ساعتان

التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة دالة من الدرجة 3

السؤال 1) 0.75 نقطة

عند $+\infty$:

- الحد المهيمن: $x^3 \to +\infty$
- $\lim f(x) = +\infty$

عند $-\infty$:

- $x^3 \to -\infty$
- $\lim f(x) = -\infty$

السؤال 2) 1.5 نقطة

الاشتقاق:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

إشارة $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \iff x = 0$ أو $x = 2$
- $f'(x) > 0$ على $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- $f'(x) < 0$ على $(0, 2)$

جدول التغيّرات:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $f(0) = 4$ (قيمة عظمى محلية)
- $f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$ (قيمة صغرى محلية)

السؤال 3) 1 نقطة

الحساب:

- $f'(2) = 3 \cdot 2 \cdot (2 - 2) = 0$
- $f(2) = 0$

المماس أفقي: $y = 0$ (المحور السيني).

النتيجة: $(T) : y = 0$.

السؤال 4) 1.75 نقطة

على $[0, 2]$: $0 \leq f(x)$ (لأن $0 < 4 = f(0)$ و $0 = f(2)$, f تناقص).

$$\mathcal{S} = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (4 + 3x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left[x^3 + 4x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(8 + 8 - \frac{16}{4}\right) - 0 = 4$$

النتيجة: $\mathcal{S} = 4$ unit^2.

التمرين الثاني (5 نقاط) — المتتاليات الحسابية والهندسية

السؤال 1) 1.5 نقطة

أ) الحد العام:

$$3n+5 = r\cdot n + {}_0u = {}_nu$$

ب) الحسابات:

- $35 = 10\cdot 3+5 = {}_{10}u$
- $220 = \frac{40\cdot 11}{2} = \frac{(5+35)\cdot 11}{2} = \frac{({}_{10}u\ {}_0u+u)(10+1)}{2} = {}_{10}S$

السؤال 2) 2 نقطة

أ) الحد العام:

$$\frac{16}{{}_n2} = {}^n\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 16 = {}^nq\cdot {}_0v = {}_nv$$

ب) الحسابات:

- $1/2 = 16/32 = {}_5v$
- $\left(\frac{1}{{}_{n+1}2}-1\right)32 = \frac{{}^{n+1}(1/2)-1}{1/2}\cdot 16 = \frac{{}^{n+1}q-1}{q-1}\cdot {}_0v = {}_nT$

ج) النهاية:

- ${}^{n+1}(1/2) \to 0$ (لأن $|1/2| < 1$)
- $\lim_n T = 32$

السؤال 3) 1.5 نقطة

الحساب:

$$\frac{16}{{}_n2}+(3n+5) = {}_nw$$

$$\frac{16}{{}_{n+1}2}-3 = \frac{32}{{}_{n+1}2}-\frac{16}{{}_{n+1}2}+3 = \frac{16}{{}_n2}-\frac{16}{{}_{n+1}2}+3 = {}_nw - {}_{n+1}w$$

بما أن $\frac{16}{{}_{n+1}2} \geq \frac{16}{2} = 8$ لـ $0 \leq n$, لكن $\frac{16}{{}_{n+1}2}-3$:

- عند $n=0$: $3-8=-5<0$ → تناقص
- عند $3\leq n$: $3-1=2>0$ → تزايد

$({}_nw)$ ليست رتيبة على $\mathbb{N}$, لكنها تزايدية لـ $3\leq n$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — حساب النهايات

السؤال 1) 2.5 نقطة

أ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-5x+1}{x^2-4x+7}=\frac{3}{1}=3$ (نسبة الحدود الأعلى)

ب) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4$ (نبسّط بـ $(x-2)$)

ج) $\lim_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+3x}=\lim\frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}}=\lim\frac{3}{1+\sqrt{1+3/x}}=\frac{3}{2}$ (نضرب بالمرافق)

د) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\frac{\sin 3x}{3x}\cdot3=1\cdot3=3$ (نهاية شهيرة)

هـ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=+\infty$ (الأسية تتفوق)

السؤال 2) 1.25 نقطة

الحساب:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x+1}{x^2+x}=\lim\frac{x^3}{x^2}=+\infty$$

التفسير الهندسي:

- المنحنى $y=\frac{x^3-2x+1}{x^2+x}$ يقبل فرعًا لا متناهية الارتفاع عند $+\infty$
- لدراسة المقارب المائل: نقسم مطولاً
- $\frac{x^3-2x+1}{x^2+x}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x}$
- إذن $y=x-1$ مقارب مائل, و الباقي $\frac{2x+1}{x^2+x}\to0$
- الوضع النسبي: $\frac{2x+1}{x^2+x}>0$ لـ $x>0$ ← فوق المقارب

السؤال 3) 1.25 نقطة

الحساب:

$$\frac{n^2(1+\frac{1-)^n}{2n})}{n(1+\frac{1}{n})}=\frac{n^2+(-1)^n}{n+1}=\frac{\frac{1-)^n}{2n}+1}{\frac{1}{n}+1}\cdot n$$

- $\frac{1-)^n}{2n}\to0$ (محدود بـ $1/n^2\to0$)
- $\frac{1}{n}\to0$
- النسبة $\to1$
- إذن $\lim=+\infty$ (نضرب $n\to+\infty$ في 1)

التمرين الرابع (5 نقاط) — براهين بالتراجع

السؤال 1) 1.5 نقطة

التهيئة ($n = 5$): $2^5 = 25 < 32 = 2^5$ ✓

الفرضية: نفرض $2^n < n^2$ لـ $5 \leq n$.

النتيجة ($n + 1$):

$$2^{2n} < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

يجب أن نُثبت $1 + 2n + n^2 = (1+n)^2 \leq 2^{2n}$:

$$0 \leq 1 - 2n - n^2 = 1 - 2n - n^2 - 2^{2n}$$

لـ $3 \leq n$: $0 \leq 2 \leq 2 - (1-n)^2$ ✓

إذن $(1+n)^2 < 2^{n+1}$ ✓

الخلاصة: بالتراجع, $2^n < n^2$ لكل $5 \leq n$.

السؤال 2) 1.25 نقطة

التهيئة ($n = 1$): $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ ✓

الفرضية: نفرض $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

النتيجة ($n + 1$):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (1+n) = \left(1 + \frac{n}{2}\right)(1+n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

✓

الخلاصة: بالتراجع, الصيغة صحيحة لكل $1 \leq n$.

السؤال 3) 1.25 نقطة

التهيئة ($n = 1$): $3^1 = 3 < 3$ خطأ! نبدأ من $n = 2$.

التهيئة ($n = 2$): $3^2 = 9 > 5 = 1 + 2 \cdot 2$ ✓

الفرضية: نفرض $3^n > 1 + 2n$.

النتيجة ($n + 1$):

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 + 6n = (1+2n)3$$

يجب: $3 + 6n > 3 + 2n = 1 + (1+n)2 \iff 0 < 4n$ ✓ (لـ $1 \leq n$)

إذن $3^{n+1} > 1 + (1+n)2$ ✓

الخلاصة: بالتراجع, $3^n > 1 + 2n$ لكل $2 \leq n$.

السؤال 4) **1 نقطة**

التهيئة ($n = 1$): $\frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ ✓

الفكرة: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (تحليل جزئي)

الفرضية: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

النتيجة:

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{k(k+1)} \sum_{k=1}^{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{{}^{2}(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+2)(n+1)} =$$

✓

الخلاصة: بالتراجع, الصيغة صحيحة لكل $n \geq 1$.