✅ الحل النموذجي — الفرض الثاني — الفصل الثاني (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** ساعتان

التمرين الأول (5 نقاط) — الأعداد المركبة (شكل جبري + أسي)

السؤال 1) — 1.25 نقطة

المقدار: $\sqrt{2}2 = \sqrt{4+4} = |z|$

العلّة: $\pi/4 = \arctan(1) = \arctan(2/2) = \arg(z)$ (الربع الأول).

الشكل الأسي: $z = \sqrt{2}2 \cdot e^{i\pi/4}$

السؤال 2) — 1.5 نقطة

الشكل الأسي (صيغة موافري):

$$z^4 = (\sqrt{2}2)^4 \cdot e^{i4\pi/4} = 64 \cdot e^{i\pi} = -64$$

الشكل الجبري: $-64 = -64 + 0i$

السؤال 3) — 1.25 نقطة

الطريقة:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2i-2}{8} = \frac{2i-2}{8} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

النتيجة: $\frac{1}{4} - \frac{i}{4}$.

السؤال 4) — 1 نقطة

المميّز: $\Delta = 32 - 16 = 16 = (4i)^2$

الحلول: $z = \frac{-4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$

التمرين الثاني (5 نقاط) — احتمالات + توزيع ذي الحدين

السؤال 1) 1.5 نقطة

عدد السحوبات: $\binom{10}{3} = 120$

P(3حمراء):

- عدد الحالات المواتية: $\binom{3}{3} = 1$

- $P = \frac{1}{120}$

ملاحظة: 3 كرات "مختلفة اللون كليا" — لكن لدينا لونان فقط (أحمر و أبيض), فـ"مختلفة اللون كليا" غير ممكنة. لِنُصحّح إلى "3 كرات من لون واحد": $P = \frac{\binom{7}{3}+\binom{3}{3}}{120} = \frac{1+35}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$

السؤال 2) 1.5 نقطة

النوع: $X \sim \mathcal{B}(4, 0.3)$ $(0.3 = 3/10 = p)$

الأمل: $E(X) = np = 4 \cdot 0.3 = 1.2$

التباين: $V(X) = (p - np(1 = 4 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.84$

السؤال 3) 1 نقطة

$P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}(0.3)(0.7)^2 = 6 \cdot 0.09 \cdot 0.49 = 0.2646$$

$P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.7)^4 = 1 - 0.2401 = 0.7599$$

السؤال 4) 1 نقطة

الصيغة:

$$P(X = 2|X \geq 1) = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{0.2646}{0.7599} \approx 0.348$$

أي حوالي 34,8%.

التمرين الثالث (5 نقاط) — متتالية باستعمال الدالة الأسية

السؤال 1) 1.5 نقطة

التهيئة: $u_0 = 1 \in (0, 1]$ ✓

الفرضية: $0 < u_n \leq 1$.

النتيجة: $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{2}$

- إيجابية: $e^{u_n} > 0$ ✓

- $u_{n+1} \leq 1 \iff e^{u_n} \leq 2 \iff u_n \leq \ln 2 \approx 0.69$.

ملاحظة: الشرط $u_n \leq \ln 2 < 1$ أقوى. لكن نلاحظ:

- $u_0 = 1$, $u_1 = e/2 \approx 1.36$ (يتجاوز 1!)

- إذن المتتالية ليست محصورة في $(0, 1]$.

لِنُعدّل: $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}-1}{2}$.

- $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, ... ثابتة.

لِنُعدّل مرة أخرى: $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{3}$.

- $u_0 = 0$, $u_1 = 1/3$, $u_2 = e^{1/3}/3 \approx 0.393$, $u_3 \approx 0.410$

- $u_{n+1} \leq 1 \iff e^{u_n} \leq 3 \iff u_n \leq \ln 3 \approx 1.099$

بما أن $\ln 3 > 1$, يكفي $u_n \leq 1$. إذن بالتراجع: $0 < u_n \leq 1$ لـ $1 \leq n$ ✓.

(هذا تمرين تعليمي — السؤال يحتاج ضبط دقيق.)

السؤال 2) 1.25 نقطة

باستعمال القيمة $u_0 = 0$ و $e^{u_n}/3 = u_{n+1}$:

$$u_n - u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{3} = \frac{e^{u_n} - 3u_n}{3}$$

ندرس $h(x) = e^x - 3x$ على $[0, 1]$:

- $h(0) = 1 > 0$

- $h(1) = e - 3 \approx -0.28 < 0$

- إذن h يغير إشارتها على $[0, 1]$, $\exists \alpha \in (0, 1)$ بحيث $h(\alpha) = 0$

ملاحظة: الرتابة معقدة. لا يمكن استنتاج بسيط.

السؤال 3) 1.25 نقطة

المعادلة: $e^x - 3x = 0 \iff e^x = 3x \iff x = \frac{e^x}{3}$

نضع $h(x) = e^x - 3x$.

- $h(0) = 1 > 0$

- $h(1) = e - 3 > 0$

- $h(2) = e^2 - 6 < 0$

IVT: يوجد حلّان على $[0, +\infty)$: $\alpha_1 \in (0, 1)$ و $\alpha_2 \in (1, 2)$.

ملاحظة: في الواقع, يوجد حلّان. السؤال يطلب حلاً وحيدًا — ربما على $[0, 1]$ فقط.

السؤال 4) 1 نقطة

إذا كانت (u_n) متقاربة إلى ℓ, فإنّ $f(\ell) = \ell$, أي $e^{\ell}/3 = \ell$.

حلّان ممكنان (السؤال 3): $\alpha_1 \approx 0.62$ و $\alpha_2 \approx 1.51$.

بما أنّ $u_n \in [0, 1]$, النهاية هي $\alpha_1 \approx 0.62$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — معادلات أسية و لوغاريتمية

السؤال 1) 1.25 نقطة

الشروط: $1 < x$ و $x < -2 \Rightarrow 1 < x$

الحل:

$$4 = (2+x)(1-x) \iff \ln 4 = [(2+x)(1-\ln[(x$$

$$0 = (2-x)(3+x) \iff 0 = 6 - x + x^2 \iff 4 = 2 - x + x^2$$

الحلول: $x = 2$ (مقبول, $1 <$) أو $x = -3$ (مرفوض).

النتيجة: $x = 2$.

السؤال 2) 1 نقطة

التحويل: $X = e^x$, $0 = (4-X)(1-X) \Rightarrow 0 = 4 + 5X - X^2$

الحلول: $X = 1$ أو $X = 4 \Rightarrow x = 0$ أو $x = \ln 4$.

السؤال 3) 1 نقطة

التحويل: $Y = \ln x$, $0 = (3-Y)(2-Y) \Rightarrow 0 = 6 + 5Y - Y^2$

الحلول: $Y = 2$ أو $Y = 3 \Rightarrow x = e^2$ أو $x = e^3$.

السؤال 4) 1 نقطة

الأولى: الأسية تتفوق على القوة: $\lim \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

الثانية: القوة تتفوق على اللوغاريتم: $\lim \frac{\ln x}{x} = 0$.

السؤال 5) 0.75 نقطة

التكامل:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

النتيجة: $1 = \ln e - \ln 1 = \ln(e/1)$ ✓