الموضوع الشامل — الفصل الثالث (التكامل + المعادلات التفاضلية + هندسة الفضاء + الحساب)

الأستاذ عدلي أسعد — منصة الرياضيات

السنة: 2027 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** 3 ساعات | **المعامل:** 7 | **المجموع:** 21/20

⚠️ يُمنع استعمال الآلة الحاسبة في بعض المواضيع. اقرأ التعليمات بعناية. ساعة الرسم المعتمدة هي CTM-991ES.

التمرين الأول (5 نقاط) — تكاليل (بالتجزئة + تغيير متغير + مساحة)

السؤال 1) — 1.5 نقطة

احسب بالتجزئة: $I = \int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$.

السؤال 2) — 1 نقطة

احسب بتغيير المتغير: $K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$.

السؤال 3) — 1 نقطة

احسب $L = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$ (تغيير متغير $\cos x = u$).

السؤال 4) — 0.5 نقطة

احسب المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ و المحور السيني على $[0, 2]$.

السؤال 5) — 1 نقطة

احسب المساحة المحصورة بين منحنى $y = x$ و منحنى $y = x^2$ على $[0, 1]$.

التمرين الثاني (5 نقاط) — معادلة تفاضلية + حل بالشرط الإبتدائي

السؤال 1) 0.75 نقطة

حلّ المعادلة التفاضلية $(E) : y' + 2y = 0$.

السؤال 2) 2 نقطة

حلّ $(E') : y' + 2y = e^{-x}$ بطريقة تغيير الدالة الثابتة.

(نضع $y = C(x)e^{-2x}$ حيث $C(x)$ دالة قابلة للاشتقاق.)

السؤال 3) 0.75 نقطة

حدّد الحلّ الوحيد f الذي يحقّق $f(0) = 2$.

السؤال 4) 0.75 نقطة

احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و بيّن أنّ $f(x) > 0$ على $\mathbb{R}$.

السؤال 5) 0.75 نقطة

احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$.

التمرين الثالث (5 نقاط) — هندسة في الفضاء (جداء سلمي/شعاعي + مستوي + مسافة)

السؤال 1) 0.75 نقطة

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, نعتبر النقاط:

$$A(1;2;3),\quad B(2;-1;1),\quad C(3;0;-1),\quad D(0;1;4)$$

أحسب إحداثيات المتجهات $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, و $\vec{AD}$.

السؤال 2) 1 نقطة

أحسب الجداء السلمي $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$.

السؤال 3) 1.25 نقطة

أحسب الجداء الشعاعي $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

السؤال 4) 0.75 نقطة

أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

السؤال 5) 1.25 نقطة

أحسب:

أ) المسافة من D إلى المستوي (ABC).

ب) الجداء المختلط $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]$ و استنتج حجم الرباعي $ABCD$.

التمرين الرابع (5 نقاط) — حساب و قابلية القسمة + نظرية فيرما

السؤال 1) 1.5 نقطة

برهن بالتراجع أنّ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ قابل للقسمة على 7 لكل $1 \leq n$.

السؤال 2) 1.5 نقطة

احسب باقي قسمة 2^{2024} على 7 (استعمل نظرية فيرما).

السؤال 3) 1.25 نقطة

احسب $\gcd(84, 30)$ باستعمال خوارزمية إقليدس, ثم أوجد عددين u, v بحيث $\gcd(84, 30) = 30v + 84u$ (نظرية بيزو).

السؤال 4) 0.75 نقطة

بيّن أنّ $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ حيث $\gcd(a, b) = d$ و $0 < a, b$.

السؤال 5) 1 نقطة

احسب باقي قسمة 5^{2025} على 7.