✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الثاني — الفصل الأول

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

حل التمرين 1 — دراسة دالة كسرية

(1) 1) عند $x \to -3^-$: $2(-3) - 1 = -7$ و $x + 3 \to 0^-$، إذن $f(x) \to +\infty$.

(2) عند $x \to -3^+$: $f(x) \to -\infty$.

(3) عند $x \to \pm\infty$: $f(x) \to \frac{2x}{x} = 2$.

(4) 2) المستقيمات المقاربة: $x = -3$ (عمودية)، $y = 2$ (أفقية).

(5) 3) $f'(x) = \frac{1\cdot(2x-1)-(x+3)2}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$ دائماً.

(6) 4) f تزايد على $(-\infty, -3)$ و على $(-3, +\infty)$.

(7) 5) مع المحور السيني: $f(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. نقطة: $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(8) مع المحور الصادي: $f(0) = -\frac{1}{3}$. نقطة: $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

(9) 6) نقطة التناظر: تقاطع المقاربتين $I(-3, 2)$. للتحقق: $f(-3 + h) + f(-3 - h) = ?$ يجب أن يساوي 4.
نحسب: $f(-3 + h) = \frac{1-(h+3-)2}{h} = \frac{7+2h}{h}$, $f(-3 - h) = \frac{7-2h-}{h-} = \frac{7-2h}{h}$. المجموع $= \frac{7+2h+7+2h-}{h} = \frac{4h}{h} = 4$ ✓.
إذن $I(-3, 2)$ مركز تناظر.

(10) 7) الرسم: منحنى زوالدي بمركز $I(-3, 2)$ مع المقاربتين.

(11) 8) $g(x) = \frac{2x-1}{x+3} - \ln(4 + x)$. $g(0) = -\frac{1}{3} - \ln 4 < 0$. $g(x) \to +\infty - \infty$... عند $x \to +\infty$: $f(x) \to 2$ و $(4 + \ln(x \to +\infty$، إذن $g(x) \to -\infty$.

(12) نحسب $g(-2) = \frac{-5}{1} - \ln 2 = -5 - 0.69 < 0$. لا يعمل. لنعد: نبحث على $(-2, +\infty)$.

(13) $g'(x) = \frac{7}{(x+3)^2} - \frac{1}{x+4}$. عند $x = 0$: $g'(0) = \frac{7}{9} - \frac{1}{4} = \frac{28-9}{36} = \frac{19}{36} > 0$.

(14) للحل الوحيد: نحتاج برهنة أن g رتيبة. $g'(x)$ إشارها معقد — التفصيل يتطلب دراسة أعمق.

حل التمرين 2 — متتالية عودية

(1) 1) $u_1 = 2(1) + 3 = 5$, $u_2 = 2(5) + 3 = 13$, $u_3 = 2(13) + 3 = 29$.

(2) 2) $v_{n+1} = u_{n+1} = 2u_n + 3 = 2(u_n + 3) = 2v_n$.

(3) 3) (v_n) هندسية أساسها $q = 2$ و $v_0 = u_0 + 3 = 4$.

(4) 4) $v_n = 4 \cdot 2^n$. إذن $u_n = v_n - 3 = 4 \cdot 2^n - 3$.

(5) 5) $q = 2 > 1$، إذن $\lim_n v = +\infty$ و $\lim_n u = +\infty$.

(6) 6) $S_n = v_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 4 \cdot \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 4(2^{n+1} - 1)$.

(7) 7) $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum(4 \cdot 2^k - 3) = 4S_n - 3(1+n) = 4 \cdot 4(2^{n+1} - 1) - 3(1+n) = 16 \cdot 2^{n+1} - 16 - 3(1+n) = 2^{n+5} - 3n - 19$.

(8) 8) التهيئة ($n = 0$): $u_0 = 1$, $3 \cdot 2^0 - 3 = 0$. $0 < 1$ ✓.

(9) الفرضية: $u_n < 3 \cdot 2^n - 3$. النتيجة: $u_{n+1} = 2u_n + 3 < 2(3 \cdot 2^n - 3) + 3 = 3 \cdot 2^{n+1} - 6 + 3 = 3 \cdot 2^{n+1} - 3$ ✓.

(10) الخلاصة: بالتراجع، الصيغة صحيحة لكل $n \geq 0$.

حل التمرين 3 — براهين بالتراجع

(1 **1)** $2^n < n^2$ لـ $5 \le n$: التهيئة: $n = 5$: $2^5 = 25 < 32 = 2^5$ ✓.

(2 الفرضية: $2^k < k^2$ لـ $5 \le k$. النتيجة: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < k^2$.

(3 يجب أن نُثبت $2k^2 \le (1+k)^2 = 1 + 2k + k^2$، أي $0 \le 1 - 2k - k^2$ لـ $5 \le k$.

(4 لـ $k = 5$: $0 < 14 = 1 - 10 - 25$ ✓، و الدالة $1 - 2k - k^2$ تزايدية لـ $1 \le k$. ✓

(5 **2)** $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$: التهيئة: $n = 1$: $1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ ✓.

(6 النتيجة: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (1+n) = \left(1 + \frac{n}{2}\right)(1+n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ ✓.

(7 **3)** $1 + 2n < 3^n$: التهيئة: $n = 1$: $3 < 3$ خطأ! نبدأ من $2 \le n$.

(8 $n = 2$: $5 < 9$ ✓. الفرضية: $1 + 2k < 3^k$. النتيجة: $3 \cdot 3^k = 3^{k+1} > (1+2k)3 = 3 + 6k$.

(9 يجب: $3 + 2k = 1 + (1+k)2 \le 3 + 6k \iff 0 \le 4k$ ✓ لكل $0 \le k$.

(10 **4)** $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{5}{3}$.

(11 **5)** $w_n - w_{n+1} = \frac{1+(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1} = \frac{(n+2)(n^2+1)-(n+1)[1+(n+1)^2]}{(n+1)(n+2)}$.

(12 البسط: $(2+n)(1+n^2) - (1+n)(2+2n+n^2) = 2 + 4n + 3n^2 + n^3 - 2 - n - 2n^2 - n^3 = 3n + n^2 = n(n+3) \ge 0$ لـ $0 \le n$.

(13 إذن (w_n) متزايدة.

(14 **6)** $\lim w_n = \lim \frac{n^2}{n} = +\infty$.

(15 **7)** $w_n - \sqrt{2}$: ندرس $w_n^2 - 2 = \frac{2(n+1)-(n^2+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{n^4+2n^2+1-2n^2-4n-2}{(n+1)^2} = \frac{n^4-4n-1}{(n+1)^2}$.

(16 لـ $2 \le n$: $0 < 7 = 1 - 8 - 16 \le 1 - 4n - n^4$. إذن $w_n^2 > 2$ و $w_n > 0 \Rightarrow w_n > \sqrt{2}$ ✓.

(17) 8) (w_n) متزايدة و غير محدودة $(\to +\infty)$، إذن غير متقاربة.

حل التمرين 4 — دالة أسية + تكامل

(1) 1) $f(x) = e^{x-1}(2-x)$. عند $-\infty$: الأسية تتفوق، إذن $\lim f = 0^-$ (لأن $e^{x-1} \to 0$ و $2-x \to -\infty$، لكن الناتج: e^{x-1} يتفوق على القوة، النهاية 0).

(2) عند $+\infty$: $f(x) \to +\infty$ (الأسية تتفوق).

(3) 2) $f'(x) = e^{x-1}(2-x) + e^{x-1} = e^{x-1}(2-x+1) = e^{x-1}(3-x)$.

(4) $e^{x-1} > 0$ دائماً، إذن $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1$.

(5) 3) f تناقص على $(-\infty, 1]$، تزايد على $[1, +\infty)$. القيمة الصغرى: $f(1) = -e^0 = -1$.

(6) 4) $f'(1) = 0$، إذن المماس أفقي: $y = f(1) = -1$.

(7) 5) بالتجزئة: $u = 2-x$, $v' = e^{x-1}$, $u' = 1$, $v = e^{x-1}$.

(8) $\int_0^1 (2-x)e^{x-1}\,dx = [e^{x-1}(2-x)]_0^1 - \int_0^1 e^{x-1}\,dx = -1 \cdot 1 - e^{-1}(2-1) = -1 + 2e^{-1} - [e^{x-1}]_0^1 = -3e^{-1} + 2 = -(e^{-1} - 1)$.

(9) 6) على $(-\infty, 1]$: f تناقصية من 0 إلى -1. $f(x) = -1$ يحصل عند $x = 1$ فقط. على $[1, 2]$: f تزايد من -1 إلى 0. على $(-\infty, 1]$: $f(x) \geq -1$ (لأن f تناقص و يصل -1 كأدنى).

(10) في الحقيقة، $f(1) = -1$ هو الأدنى المطلق، إذن $f(x) \geq -1$ دائماً. المعادلة $f(x) = -1$ لها حل وحيد $\alpha = 1$.

(11) 7) $f(x) = 0 \iff 2-x = 0 \iff x = 2$. نقطة تقاطع وحيدة: $(2, 0)$.

(12) 8) على $[1, 2]$: $f(x) \geq 0$ (لأن $2-x \geq 0$ و $e^{x-1} > 0$).

(13) المساحة = $-\int_1^2 (2-x)e^{x-1}\,dx = -[e^{x-1}(2-x)]_1^2 + \int_1^2 e^{x-1}\,dx = -((1-0) - (-e)) + [e^{x-1}]_1^2 = (1 - e) = e - 2$.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

📧 asaadadli9393@gmail.com | الجزائر 🇩🇿