فرض 2

الفرض الثاني — الفصل الأول

منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد

⏱️ المدة: ساعة ونصف 📅 نوفمبر 2026 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

المادة:	الرياضيات — السنة الثالثة ثانوي
النوع:	فرض رقم 2
الفصل الدراسي:	الفصل 1
المدة:	ساعة ونصف
عدد التمارين:	4 تمارين شاملة

📝 **التمرين 1 (5 نقاط) — دراسة دالة كسرية — لتكن $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.**

أدرس حدود f عند -3 (يمين و يسار) و عند $\pm\infty$.

استنتج وجود مستقيمات مقاربة لـ $(\mathcal{C}_f)$ و عيّنها.

احسب $f'(x)$ و ادرس إشارها.

أنشئ جدول تغيرات f على مجال تعريفها.

ادرس تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع المحورين.

بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مركز تناظر، عيّنه.

ارسم $(\mathcal{C}_f)$ مع المستقيمات المقاربة في معلم متعامد.

نضع $g(x) = f(x) - \ln(x + 4)$ على $(-3, +\infty)$. بيّن أن $g(x) = 0$ يقبل حلاً وحيداً على $(-2, +\infty)$.

📝 **التمرين 2 (5 نقاط) — متتالية عودية و متتالية مساعدة — نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2u_n + 3$ لكل $n \in \mathbb{N}$.**

احسب u_1, u_2, u_3 .

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_n = u_n + 3$. اكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

بيّن أن (v_n) متتالية هندسية، حدد أساسها و حدّها الأول.

استنتج كتابة v_n ثم u_n بدلالة n.

احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

احسب $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ بدلالة n.

احسب $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ بدلالة n.

برهن بالتراجع أن $u_n < 3 \cdot 2^n - 3$ لكل $n \geq 0$ (تحقق من الصيغة).

📝 التمرين 3 (5 نقاط) — براهين بالتراجع + متتاليات

برهن بالتراجع أن $2^n < n^2$ لكل $5 \leq n$.

برهن بالتراجع أن $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل $1 \leq n$.

برهن بالتراجع أن $1 + 2n < 3^n$ لكل $1 \leq n$.

لتكن (w_n) المعرفة بـ $w_n = \frac{n^2+1}{n+1}$. احسب w_0, w_1, w_2 .

ادرس رتابة (w_n).

احسب $\lim_{n \to +\infty} w_n$.

بيّن أن $\sqrt{2} \leq w_n$ لكل $1 \leq n$.

هل تتقارب (w_n)؟ عيّن نهايتها إن وُجدت.

📝 التمرين 4 (5 نقاط) — دالة أسية + تكامل — لتكن $f(x) = e^{x-1}(2-x)$ معرفة على $\mathbb{R}$.

احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

احسب $f'(x)$ و أدرس إشارها.

أنشئ جدول تغيرات f.

أوجد معادلة المماس لـ $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة B ذات الفاصلة $x = 1$.

احسب $\int_0^1 (2-x)e^{x-1}\,dx$ بطريقة التكامل بالتجزئة.

بيّن أن المعادلة $f(x) = -1$ يقبل حلاً وحيداً α على $[-\infty, 2]$، أعطِ تقريباً له.

ادرس تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع المحور السيني.

استنتج مساحة المنطقة المحصورة بين $(\mathcal{C}_f)$ و المحور السيني على المجال $[1, 2]$.