✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الأول — الفصل الثاني

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

📝 4 تمارين محلولة 📅 فيفري 2027 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

حل التمرين 1 — معادلات أسية ولوغاريتمية

(1 $e^x = X$: $X^2 - 7X + 10 = 0$, $\Delta = 49 - 40 = 9$, $X = 5$ أو $X = 2$. إذن $\ln 5 = x$ أو $\ln 2 = x$.

(2 شروط: $x > 1$. $\ln 3 = [(1-x)(1+\ln[(x$ $\iff$ $3 = (1-x)(1+x)$ $\iff$ $4 = x^2$ $\iff$ $x = 2$ أو $x =$ -2. نختار $x = 2$ (لأن $x > 1$).

(3 $e^{x+1} - 2e^{2x} = 1$ $\iff$ $e \cdot e^x - 2e^{2x} = 1$. نضع $e^x = X$: $X^2 - eX - 1 = 0$. $\Delta = e^2 + 8 \approx 15.39$. $X =$ $\frac{\sqrt{e^2+8}+e}{4}$. نختار الموجب: $x = \ln\left(\frac{\sqrt{e^2+8}+e}{4}\right)$.

(4 $\ln x = Y$: $Y^2 - 3Y + 2 = 0 \Rightarrow Y = 1$ أو $Y = 2$. إذن $x = e$ أو $x = e^2$.

(5 $X + 1/X = 3 \Rightarrow X^2 - 3X + 1 = 0$, $X = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. كلاهما موجب. إذن $\ln x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ أو $\ln x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(6 $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}$. ندرس $g(x) = \frac{\ln x}{x}$. g أقصاها عند $x = e$ و $g(e) = 1/e$. إذن الحل الوحيد هو $x = e$.

(7 $h(x) = x - e^x$. $h'(x) = 1 - e^x$. $h' \le 0 \iff x \ge 0$، إذن h تزايد على $(-\infty, 0]$. $h(0) = 1 - 2 =$ $-1 < 0$, $h(2) = 2 - e^2 \approx 3.39 > 0$. إذن $\alpha \in (0, 2)$.

(8 بالتنصيف: $h(1) = 1 - e \approx -0.28 < 0$, $h(1.5) = 1.5 - e^{1.5} \approx 0.98 > 0$. إذن $\alpha \in (1, 1.5)$. تقريب: $\alpha \approx 1.15$.

(9 $\ln 6 - \ln 3 + \ln 2 = \ln 6 - (3 \cdot \ln(2 = \ln 6 - \ln 6 = 0$.

حل التمرين 2 — دالة $f(x) = xe^{-x}$

(1) عند $+\infty$: $\frac{x}{e^x} \to 0$ (الأسية تتفوق). إذن $\lim f = 0$. عند $-\infty$: $e^{-x} \to +\infty$ و $x \to -\infty$، إذن $f(x) \to -\infty$.

(2) $y = 0$ مقاربة أفقية عند $+\infty$. عند $+\infty$: $0 < f(x)$ (لأن $0 < x$ و $0 < e^{-x}$)، إذن $(\mathcal{C}_f)$ تقترب من فوق.

(3) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$.

(4) $e^{-x} > 0$ دائمًا، إذن $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1$. f تزايد على $(-\infty, 1]$، تناقص على $[1, +\infty)$. القيمة العظمى: $f(1) = e^{-1} = 1/e$.

(5) $f'(0) = 1$ و $f(0) = 0$. T: $y = x$.

(6) بالتجزئة: $u = x$، $v' = e^{-x}$، $u' = 1$، $v = -e^{-x}$. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}\,dx$
$= [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (1 - e^{-1}) = 1 - 2/e$.

(7) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A xe^{-x}\,dx = \lim[-xe^{-x}]_0^A = \lim(0 + e^{-A}) - (-1) = 1$.

(8) $u_n = \frac{n+1}{e^n} - 1 \to 1 - 0 = 1$ (لأن $\frac{n}{e^n} \to 0$). إذن $\lim u_n = 1$.

حل التمرين 3 — تكاملات

(1 **1)** $\int_0^1 [x - x^2 + x^3] = 1 - 1 + 1 = 1.$

(2 **2)** $u = \ln x$, $du = dx/x$. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^e = \frac{1}{2}.$

(3 **3)** بالتجزئة: $u = x$, $v' = e^{2x}$. $\int x e^{2x}\, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}.$ $\int_0^1 = \frac{e^2-0}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$

(4 **4)** $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$

(5 **5)** $u = 1 + x^2$, $du = 2x\, dx$. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}[\ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$

(6 **6)** $u = -x^3$, $du = -3x^2\, dx$. $\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}[e^{-x^3}]_0^1 = \frac{e^{-1}-1}{3} = \frac{e-1}{3e}.$

(7 **7)** بالتجزئة: $u = x$, $v' = \sin x$. $\int_0^\pi x \sin x\, dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\, dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.$

(8 **8)** بالتجزئة: $u = x^n$, $v' = x - 1$. $\int_0^1 (x - x^n)\, dx = \left[\frac{x^n(1-x)}{\dots}\right] \dots$

(9 بالأحرى: $\int_0^1 (x - x^n)\, dx = \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ✓

حل التمرين 4 — احتمالات

(1 **1)** عدد السحوبات = $\binom{10}{3} = 120$.

(2 **2)** $P(\text{3حمراء}) = \frac{\binom{5}{3}}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$.

(3 **3)** 3 من نفس اللون = 3 حمراء + 3 بيضاء + 3 سوداء. $P = \frac{0+\binom{3}{3}+\binom{5}{3}}{120} = \frac{10+1}{120} = \frac{11}{120}$.

(4 **4)** 1 من كل لون = $5 \times 3 \times 2 = 30$ طريقة. $P = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

(5 **5)** المكمّمة: $P(\leq 1\text{بيضاء}) = 1 - P(0\text{بيضاء}) = 1 - \frac{\binom{7}{3}}{120} = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$.

(6 **6)** $P(0\text{سوداء}) = \frac{\binom{8}{3}}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

(7 **7)** مع الإعادة: $P(\text{3حمراء}) = (5/10)^3 = 1/8$.

(8 **8)** $P(\text{بيضاء} > 1) = P(0\text{بيضاء}) = \binom{7}{3}/120$. إذن $P(\text{بيضاء} \leq 1) = 1 - \binom{7}{3}/120 = 17/24$ ✓.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

📧 asaadadli9393@gmail.com | الجزائر 🇩🇿