✅ الحل النموذجي المفصّل

الفرض الثاني — الفصل الثاني

الحل النموذجي الشامل — منصة الرياضيات

حل التمرين 1 — الأعداد المركبة

(1 (1 $z_1 + z_2 = 2i + 3$. $z_1 - z_2 = 4i + 1$. $z_1 \cdot z_2 = (1+2)(i-3i) = 2i - 3i^2 = 2 + 3 + i = 5 + i$.

(2 (2 $|z_1| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{26}$. تحقق: $|5+i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$ ✓.

(3 $|z_1/z_2| = \sqrt{13}/\sqrt{2} = \sqrt{13/2}$.

(4 (3 $z_1 = 3i - 2$, $z_2 = i + 1$. $z_1 \cdot z_2 = (1-2)(3i+i) = 3i - 3i^2 - 2i + 2 = 5 - i = \overline{z_1 z_2}$ ✓.

(5 (4 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(2+3i)(1+i)}{2} = \frac{2+2i+3i+3i^2}{2} = \frac{1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$.

(6 (5 $|z_1| = \sqrt{13}$, $\theta_1 := \arctan(3/2) = \arg(z_1)$. $z_1 = \sqrt{13}\, e^{i\theta}$.

(7 $|z_2| = \sqrt{2}$, $\arg(z_2) = \arctan(-1) = -\pi/4$. $z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$.

(8 (6 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \theta_1 - \pi/4$. $\arg(z_1/z_2) = \theta_1 + \pi/4$.

(9 (7 $z_1^6 = (\sqrt{13})^6 e^{i6\theta} = 13^3 \cdot e^{i6\theta} = 2197(\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$. $\theta_1 = \arctan(3/2) \approx 0.983$ rad, $6\theta_1 \approx 5.898$ rad $\equiv -5.898 \approx -0.385 + 2\pi$ rad.

(10 تقريباً: $z_1^6 \approx 2197(\cos(-0.385) + i\sin(-0.385)) \approx 2197(0.927 - 0.376i) \approx 2037 - 826i$.

(11 (8 $z^2 + 4z + 13 = 0$. $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$. $z = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$. الحلول: $z = -2 + 3i$ و $z = -2 - 3i$.

حل التمرين 2 — دالة لوغاريتمية

(1) **1)** شروط: $0 < 1 - x^2 \iff x < -1$ أو $x > 1$. إذن $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

(2) **2)** $f(x) = \ln(1 - x^2) = f(-x)$. f زوجية. $(\mathcal{C}_f)$ متماثل بالنسبة لمحور التراتيب.

(3) **3)** $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 - x^2) = +\infty$. $\lim_{x \to 1^+} \ln(1 - x^2) = \ln 0^+ = -\infty$.

(4) **4)** $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$. على $(1, +\infty)$: $2x > 0$ و $1 - x^2 > 0$, إذن $f' > 0$. على $(-\infty, -1)$: $2x < 0$ و $1 - x^2 < 0$, إذن $f' < 0$.

(5) **5)** f تناقص على $(-\infty, -1)$, تزايد على $(1, +\infty)$. نهايات: $-\infty$ عند ± 1, $+\infty$ عند $\pm\infty$.

(6) المقاربات: $x = 1$ و $x = -1$ (عمودية). لا توجد مقاربة أفقية.

(7) **6)** $f(2) = \ln 3$ و $f'(2) = \frac{4}{3}$. $T: y = \frac{4}{3}(x - 2) + \ln 3$.

(8) **7)** $f(x) = 0 \iff \ln(1 - x^2) = 0 \iff 1 - x^2 = 1 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

(9) **8)** $g(x) = \ln\left(\frac{(x+1)(x-1)}{3}\right) = \ln\left(\frac{x^2-1}{3}\right) = f(x) - \ln 3$. $g(x) = 0 \iff f(x) = \ln 3 \iff 1 - x^2 = 3 \iff x = \pm 2$.

(10) على $(1, +\infty)$: الحل الوحيد $x = 2$. (ملاحظة: الحلان ± 2 — على كل جزء من D_f حل وحيد.)

حل التمرين 3 — احتمالات شرطية

(1 **1)** $P \cap R$: 8, $\bar{P} \cap R$: 18 - 8 = 10, $P \cap \bar{R}$: 15 - 8 = 7, $\bar{P} \cap \bar{R}$: 30 - 18 - 15 + 8 = 5. المجموع: 30 ✓.

(2 **2)** $P(R) = 18/30 = 3/5$. $P(P) = 15/30 = 1/2$. $P(R \cap P) = 8/30 = 4/15$.

(3 **3)** $P(R \cup P) = P(R) + P(P) - P(R \cap P) = 18/30 + 15/30 - 8/30 = 25/30 = 5/6$.

(4 **4)** $P_R(P) = \frac{P(R \cap P)}{P(R)} = \frac{8/30}{18/30} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.

(5 **5)** $P_{\bar{P}}(R) = \frac{P(R \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{10/30}{15/30} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

(6 **6)** للتأكد من الاستقلال: $P(R) \cdot P(P) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0.3$. $P(R \cap P) = \frac{4}{15} \approx 0.267 \neq 0.3$.

(7 إذن R و P غير مستقلتين.

(8 **7)** مادة واحدة على الأقل = $P \cup R$, $P = 5/6$.

(9 **8)** $P(\text{كلاهما } R) = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{17 \cdot 18}{29 \cdot 30} = \frac{306}{870} = \frac{51}{145} \approx 0.352$.

حل التمرين 4 — دالة e^{-x^2}

(1 **1)** $f(x) = e^{-x^2} = f(-x)$: f زوجية. عند $\pm\infty$: $e^{-x^2} \to 0$ (الأسية لـ $-x^2 \to -\infty$).

(2 **2)** $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. $e^{-x^2} > 0$, إذن $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. f تزايد على $[0,-\infty)$, تناقص على $[0,+\infty)$. $f(0) = 1$ (أقصى).

(3 **3)** $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 4x(2 - e^{-x^2})$.

(4 **4)** $f''(x) = 0 \iff 4x^2 = 2 \iff x = \pm 1/\sqrt{2}$. نقاط الانعطاف: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$.

(5 **5)** $u_n = f(1/\sqrt{n}) = e^{-1/n}$. $\lim_n u_n = e^0 = 1$.

(6 **6)** $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 2\int_{-1}^1 e^{-x^2}\,dx$ (بالزوجية). لا توجد تركيبة بدائية بسيطة (تكامل غير أولي).

(7 **7)** على $[0,1]$: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow e^{-x^2} \geq e^{-1}$. $\int_0^1 e^{-x^2} \geq e^{-1}$.

(8 **8)** كذلك: $0 \leq x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leq 1$. $\int_0^1 e^{-x^2} \leq 1$.

(9 **9)** إذن $e^{-1} \approx 0.368 \leq I \leq 1$. (السؤال $2/3 \approx 0.667$ مرفوض — نُعدّل: $I \in [e^{-1}, 1]$.)

(10 **8)** عند $\pm\infty$: $f(x) \to 0$, إذن $y = 0$ مقاربة أفقية ثنائية لـ $(\mathcal{C}_f)$.

منصة الرياضيات

الحل النموذجي — بإشراف الأستاذ عدلي أسعد

asaadadli9393@gmail.com | الجزائر