فرض 2

الفرض الثاني — الفصل الثالث

منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد

⏱️ المدة: ساعة ونصف 📅 ماي 2027 🎓 علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

المادة:	الرياضيات — السنة الثالثة ثانوي
النوع:	فرض رقم 2
الفصل الدراسي:	الفصل 3
المدة:	ساعة ونصف
عدد التمارين:	4 تمارين شاملة

📝 **التمرين 1 (5 نقاط) — أعداد مركبة + هندسة + دالة — لتكن $z_1 = i + 2$ و $z_2 = 2i - 3$.**

احسب $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري.

احسب $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 z_2|$ و تحقق من المتطابقة.

اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

احسب z_1^4 على الشكل الأسي ثم الجبري.

لتكن A و B نقطتا التمثيل الهندسي لـ z_1 و z_2 . احسب المسافة AB.

احسب $\arg(z_1/z_2)$ و استنتج الزاوية $\widehat{AOB}$.

حل في $\mathbb{C}$: $z^3 = -8$.

لتكن $Z = \frac{z_1}{z_2}$. احسب $Z^2 + Z^7$.

📝 **التمرين 2 (5 نقاط) — دالة + تكامل + تطبيق — لتكن $f(x) = x^2 e^{-x}$ معرفة على $\mathbb{R}$.**

احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

احسب $f'(x)$ و بيّن أن $f'(x) = 2(x - xe^{-x})$.

أنشئ جدول تغيرات f.

احسب $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$ بطريقة التكامل بالتجزئة المتكرر.

لتكن $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$. برهن بالتجزئة أن $I_n = nI_{n-1}$.

احسب I_0, I_1, I_2, I_3.

بيّن أن $I_n = n!$ لكل $0 \leq n$ (بالتعبير).

بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مركز تناظر عند $x = 2$ (لا, هذا خطأ — ليست فردية و لا زوجية).

📝 **التمرين 3 (5 نقاط) — احتمالات + توزيعات منفصلة — في علبة 5 كرات حمراء, 3 كرات بيضاء, 2 كرات خضراء (10 كرات). نسحب 4 كرات دفعة واحدة.**

كم عدد السحوبات الممكنة؟

احسب احتمال الحصول على 4 كرات حمراء.

احسب احتمال الحصول على 4 كرات من نفس اللون.

احسب احتمال الحصول على لونين مختلفين على الأقل.

احسب احتمال الحصول على كرة واحدة من كل لون (إذا أمكن).

احسب احتمال عدم وجود كرة بيضاء.

لتكن X المتغيرة العشوائية "عدد الكرات البيضاء المسحوبة". حدد توزيع X.

احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

📝 التمرين 4 (5 نقاط) — متتالية + برهنة بالتراجع + نهايات

برهن بالتراجع أن $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ لـ $q \neq 1$ و $n \geq 0$.

برهن بالتراجع أن $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ لـ $n \geq 1$.

لتكن (u_n) معرفة بـ $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. ادرس رتابة (u_n).

احسب $\lim u_n$.

لتكن $(v_n) = nu_n$. احسب v_n صراحةً ثم $\lim v_n$.

برهن أن $u_n \geq 1$ لكل n (دون التراجع).

بيّن أن (u_n) متقاربة برتبة 2 (تقريب تaylor).

احسب $\lim_{n \to +\infty} n(u_n - 1)$.