ملخص شامل: مفاهيم ودوال أصلية مألوفة

أولاً: تعريف الدالة الأصلية وخواصها

f دالة معرفة على مجال I. نقول أن F **دالة أصلية** للدالة f على I إذا وفقط إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I، ومن أجل كل $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

خواص أساسية:

1. كل دالة f مستمرة على مجال I تقبل دوالاً أصلية على هذا المجال.
2. إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن مجموعة الدوال الأصلية لـ f هي $G(x) = F(x) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
3. توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I تحقق الشرط الابتدائي: $F(x_0) = y_0$.

ثانياً: جدول الدوال الأصلية لدوال مألوفة

f دالة مستمرة على مجال I و F دالة أصلية لها على I مع $c \in \mathbb{R}$:

الدوال الأصلية $F(x)$	الدالة $f(x)$	mainDark!15 مجال التعريف I
$ax + c$	$a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2}x^2 + c$	x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$\ln\lvert x\rvert + c$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$\frac{1}{x^n} \quad (n \geq 2)$	$\mathbb{R}^*$
$2\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$-\cos x + c$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x + c$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$e^x + c$	e^x	$\mathbb{R}$

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

العمليات على الدوال الأصلية والمعادلات التفاضلية

أولاً: العمليات على الدوال الأصلية المركبة

الدوال الأصلية $F(x)$	الدالة f	mainDark!15 الشروط على الدالة u
$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	$u'u^n \quad (n\in\mathbb{N}^*)$	/
$\ln\lvert u\rvert+c$	$\frac{u'}{u}$	$u(x)\neq 0$
$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\frac{u'}{u^n} \quad (n\geq 2)$	$u(x)\neq 0$
$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u(x)>0$
e^u+c	$u'e^u$	/
$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\cos(ax+b)$	$a\neq 0$
$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$	$a\neq 0$

ثانياً: حل المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$

- **المعادلة** $y'=f(x)$: حلولها هي الدوال $y=F(x)+c$ حيث F أصلية لـ f و $c\in\mathbb{R}$.
  مثال: حلول $y'=\frac{1}{x^2}$ على $]0;+\infty[$ هي: $y=-\frac{1}{x}+c$.
- **المعادلة** $y''=f(x)$: إذا كانت F أصلية لـ f و G أصلية لـ F فإن حلولها هي:

$$y=G(x)+c_1x+c_2 \quad (c_1,c_2\in\mathbb{R})$$

مثال: حلول $y''=\cos x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال: $y=-\cos x+c_1x+c_2$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

الحساب التكاملي وخواصه الهندسية

أولاً: تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I، و F دالة أصلية لها على I. من أجل كل $a, b \in I$:
يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ **التكامل من** a **إلى** b **للدالة** f ونرمز له بـ:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ثانياً: خواص التكامل الأساسية

لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال I ولتكن $a, b, c \in I$ و $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. **علاقة شال:** $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$
2. **الخطية:** $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ و $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
3. **الترتيب والمقارنة** $(a \leq b)$:
   - إذا كان $f(x) \geq 0$ على $[a; b]$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
   - إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على $[a; b]$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

تطبيق علاقة شال مع القيمة المطلقة

$$\int_0^2 3|x^2 - 1|\,dx = \int_0^1 3(1 - x^2)\,dx + \int_1^2 3(x^2 - 1)\,dx = [3x - x^3]_0^1 + [x^3 - 3x]_1^2 = 2 + 4 = 6$$

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

القيمة المتوسطة، المساحات، والحجوم الدورانية

أولاً: القيمة المتوسطة وحساب المساحات

1) القيمة المتوسطة: القيمة المتوسطة لدالة f مستمرة على $[a;b]$ $(a<b)$ هي:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

2) حساب مساحة حيز مستوٍ A:

- إذا كانت $f(x)\geq 0$ على $[a;b]$ فإن: $A=\int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{u.a})$
- إذا كانت $f(x)\leq 0$ على $[a;b]$ فإن: $A=\int_a^b -f(x)\,dx \quad (\text{u.a})$
- للمنحنيين $f(x)\geq g(x)$ على $[a;b]$: $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \quad (\text{u.a})$

ثانياً: المكاملة بالتجزئة وحجم مجسم دوراني

1) المكاملة بالتجزئة: إذا كانت u و v قابلتين للاشتقاق مع مشتقات مستمرة على $[a;b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

2) حجم مجسم دوراني حول (Ox): للدوران حول محور الفواصل على المجال $[a;b]$:

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \quad (\text{u.v})$$

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

سلسلة التمارين: الجزء الأول

التمرين الأول : (المكاملة بالتجزئة وحساب المساحة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\,\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 2\,\text{cm}$.

1. تحقق من أن: $H : x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية لـ $h : x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$، ثم بيّن أن: $\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$.
2. باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3 - \frac{6}{e}$.
3. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم $(\Delta) : y = x+1$ والمستقيمين $x = -1$ و $x = 0$.

التمرين الثاني : (الدوال اللوغاريتمية والتكامل بالتجزئة)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي $1\,\text{cm}$.

1. بيّن أن: $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.
2. تحقق أن: $H : x \mapsto 2x\ln x - 2x$ هي دالة أصلية لـ $h : x \mapsto 2\ln x$ على $]0;+\infty[$.
3. باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن: $\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x\,dx = (1-\ln 2)^2$.
4. احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات: $y = x$، $x = 1$ و $x = 2$.

التمرين الثالث : (حساب التكامل والمساحات لدالة أسية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. بيّن أن: $\int_0^{\ln 4}(4e^x - e^{2x})\,dx = \frac{9}{2}$.
2. احسب مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات: $y = 2x - 2$، $x = 0$ و $x = \ln 4$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

سلسلة التمارين: الجزء الثاني

التمرين الرابع : (المكاملة بالتجزئة ومحور الفواصل)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$، مع $\|\vec{i}\| = 2\,\text{cm}$.

1. باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن: $\int_1^2 (x+1)\ln x\,dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.
2. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$.

التمرين الخامس : (حصر وتكامل دالة كسرية أسية)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أن: $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$.
2. بيّن أنه من أجل كل $x \in [0;1]$: $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{x}{e-2}$.
3. لتكن A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.
   * بيّن أن: $1 - \frac{2}{e} \leq A \leq \frac{1}{2(e-2)}$.

التمرين السادس : (الوضعية النسبية وحساب المساحة)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$، وجدول تغيراتها:

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. أثبت أن $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث $2.2 < \alpha < 2.3$، واستنتج إشارة $g(x)$.

(II) لتكن $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$ على $[0;e[\cup]e;+\infty[$ مع وحدة رسم $2\,\text{cm}$.

1. بيّن أن: $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = \ln 2$.
2. بيّن أن: $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$، وادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ $(\Delta) : y = x$ على $[1;\sqrt{e}]$.
3. احسب بـ cm^2 المساحة المحددة بـ (C_f)، (Δ)، والمستقيمين $x = 1$ و $x = \sqrt{e}$.

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

سلسلة التمارين: الجزء الثالث

التمرين السابع : (التكامل بالتجزئة واللوغاريتم)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}$.
وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول هي 1 cm.

1. بيّن أن: $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}\,dx=1$.
2. استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.
3. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$.

التمرين الثامن : (مسألة شاملة ذات تمثيل بياني)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم احسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-1+(x-2)e^x$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: 2 cm).

1. احسب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. بيّن أن $f'(x)=g(x)$ وشكّل جدول تغيرات الدالة f.
3. أثبت أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$، وادرس الوضع النسبي بينه وبين (C_f).
4. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1.35<\alpha<1.40$.
5. أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $[-3;2]$.

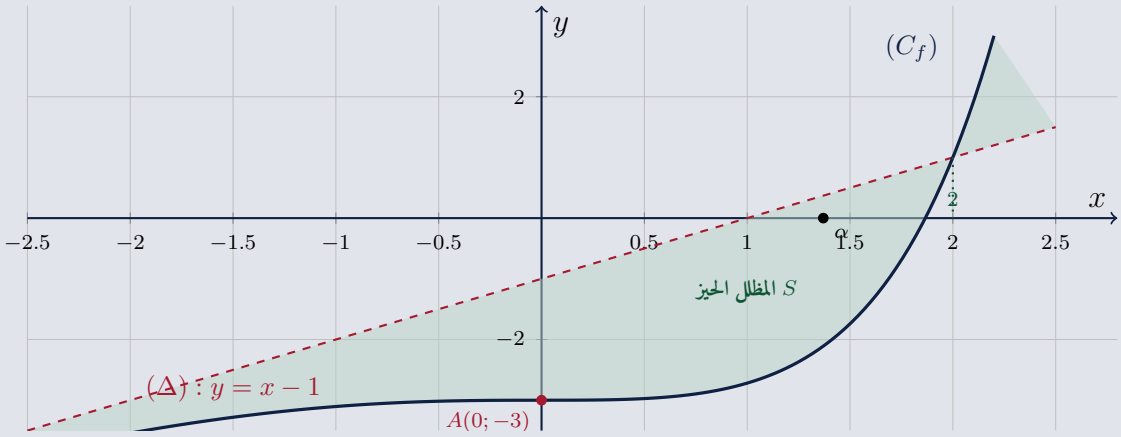
إعداد الأستاذ: عدلي أسعد

المسألة الشاملة والتمثيل البياني للحساب التكاملي

تابع للتمرين الثامن : (حساب المساحة والحجم الدوراني)

الجزء الثالث:

1. باستعمال التكامل بالتجزئة، احسب التكامل: $J = \int_0^2 (x-2)e^x \, dx$.
2. فسر هندسياً التكامل: $I = \int_0^2 [x - 1 - f(x)] \, dx$.
3. احسب مساحة الحيز المستوي S المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ)، والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$ بـ cm^2.
4. احسب حجم المجسم الدوراني V الناتج عن دوران المستقيم المقارب (Δ) حول محور الفواصل من $x = 0$ إلى $x = 2$.



بالتوفيق والنجاح لجميع أبنائنا الطلبة في البكالوريا

إعداد الأستاذ: عدلي أسعد