✅ الحل النموذجي — بكالوريا 2020 — شعبة الرياضيات

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2020 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** 4 ساعات

الجزء الأول: الأعداد المركبة (10 نقاط)

السؤال 1) 0 نقطة

المميز:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 4 = -12$$

بما أن $\Delta < 0$, الحلول مركبة:

$$z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

الحلول: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ (مرافقان)

السؤال 2) 0 نقطة

العمدة:

$$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$$

العطلة:

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$ (الربع الأول)

الكتابة المثلثية:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

الكتابة الأُسية:

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}$$

بالتبادل: $z_2 = \overline{z_1} = 2e^{-i\pi/3}$

السؤال 3) 0 نقطة

بصيغة موافر: $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$$z_1^5 = 2^5 e^{i\cdot 5\cdot\pi/3} = 32e^{i5\pi/3}$$

تبسيط الزاوية: $5\pi/3 = 2\pi - \pi/3$, إذن $e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}$.

النتيجة: $z_1^5 = 32e^{-i\pi/3}$

بالشكل الجبري: $z_1^5 = 32(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)) = 32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16 - 16i\sqrt{3}$

السؤال 4)

0 نقطة

المعطيات:

- $z_A = 0$
- $z_B = 1 + \sqrt{3}i$
- $z_C = 1 - \sqrt{3}i$

الأطوال:

- $AB = |z_A - z_B| = |z_B| = 2$
- $AC = |z_A - z_C| = |z_C| = 2$
- $BC = |z_B - z_C| = |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$

نتحقق: $AB = AC = 2$ لكن $BC = 2\sqrt{3} \neq 2$.

النتيجة: المثلث ABC **متساوي الساقين** ($AB = AC = 2$) وليس متساوي الأضلاع.

ملاحظة: إذا كان الموضوع يقصد شعاع التدوير، فالزاوية $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ (الفرق بين عطلي z_B و z_C)، لكن هذا لا يجعله متساوياً للأضلاع.

الجزء الثاني: الحساب وقابلية القسمة (10 نقاط)

السؤال 1) 0 نقطة

نظرية فيرما الصغرى: 11 أولي و $1 = \gcd(7, 11)$.

$$7^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

تحليل الأس: $0 + 202 \times 10 = 2020$, إذن:

$$7^{2020} = (7^{10})^{202} \cdot 7^{0} \equiv 1^{202} \cdot 1 \equiv 1 \pmod{11}$$

النتيجة: باقي قسمة 7^{2020} على 11 هو **1** .

السؤال 2) 0 نقطة

1. قابلية الحل: $6 = \text{pgcd}(12, 18) = d$, و $6|6$ ✓

2. تبسيط: نقسم على 6:

$$1 = 3y + 2x$$

3. حل خاص: $x = -1$, $y = 1$: $1 = 3 + 2- = (1)3 + (1-)2$ ✓

4. الحل العام:

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + 3k \\ y &= 1 - 2k \end{aligned}\right\} , \quad \mathbb{Z} \ni k$$

النتيجة: $S = \{\mathbb{Z} \ni k \mid (2k - 3k, 1 + 1-)\}$

السؤال 3) 0 نقطة

حل خاص: $x = 15, y = 0$ $(30 = 0 + 30$ ✓$)$

الحل العام:

$$\left.\begin{array}{l} x = 15 + 3k \\ y = 0 - 2k \end{array}\right\} , \quad \mathbb{Z} \ni k$$

تطبيق القيود $0 \leq x, y$**:**

- $0 \leq 3k + 15 \implies 5- \leq k$

- $0 \leq 2k- \implies 0 \geq k$

إذن $k \in \{5-, 4-, 3-, 2-, 1-, 0\}$.

الحلول في $\mathbb{N}^2$**:**

k	x	y
0	15	0
-1	12	2
-2	9	4
-3	6	6
-4	3	8
-5	0	10

النتيجة: $S = \{(0, 15), (2, 12), (4, 9), (6, 6), (8, 3), (10, 0)\}$