✅ الحل النموذجي — بكالوريا 2022 — شعبة الرياضيات

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

السنة: 2022 | **الشعبة:** شعبة الرياضيات | **المدة:** 4 ساعات

الجزء الأول: دراسة دالة بمعامل (12 نقطة)

السؤال 1) 0 نقطة

الشرط: المقام $x - 1 = 0 \implies x = 1$.

مجال التعريف: $D_{f_m} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (مستقل عن m).

السؤال 2) 0 نقطة

نوع $\frac{u}{v}$:

- $u = 2x \implies u' = m - x^2$
- $v = 1 - x \implies v' = 1$

$$f'_m = \frac{2x(x-1) - (x^2 - m)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + m}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + m}{(x-1)^2}$$

النقاط الحرجة: $x^2 - 2x + m = 0$

$$\Delta = 4m - 4 = 4(m-1)$$

المناقشة:

- $m > 1$ ($\Delta > 0$): قيمتان قصوى وصغرى محليتان عند $x = 1 \pm \sqrt{m-1}$
- $m = 1$ ($\Delta = 0$): جذر مزدوج عند $x = 1$ (خارج المجال!), f' موجبة
- $m < 1$ ($\Delta < 0$): $f' > 0$ دائماً, f تزايدية قطعاً

السؤال 3) 0 نقطة

الحالة $m = 2 > 1$: $f'_2 > 0$ على D_{f_2} .

$$f_2(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$$

نهايات:

- $\lim_{+\infty} f_2 = +\infty$ (بقيادة x^2/x)
- $\lim_{-\infty} f_2 = -\infty$
- $x \to 1^+$: $f_2 \to -\infty$ (البسط $\to -1$, المقام $\to 0^+$)
- $x \to 1^-$: $f_2 \to +\infty$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'_2	$+$	$\|$	$\|$	$+$	
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	$+\infty$

f_2 تزايدية قطعاً على $]-\infty, 1[$ وعلى $]1, +\infty[$.

السؤال 4) 0 نقطة

القسمة الإقليدية: $1-(1+x)(1-x)=2-{}^{2}x$

إذن: $\frac{1}{x-1}-1+x=\frac{1-}{x-1}+1+x=f_2(x)$

المقاربة المائلة:

$$0=\frac{1-}{x-1}\lim=[(1+x)-f_2(x)]\lim_{\infty\pm\to x}$$

إذن المستقيم $y=1+x$ هو **مقاربة مائلة** لـ f_2 عند $\pm\infty$.

الجزء الثاني: الأعداد المركبة (8 نقاط)

السؤال 1) 0 نقطة

بالكتابة الأُسية: $8=8e^{i\cdot 0+2ik\pi}$, إذن:

- $r=2$ (لأن $r^3=8$)
- $\theta=\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$ $\Longrightarrow$ $2k\pi=3\theta$

الحلول الثلاثة:

- $k=0$: $z_0=2e^{i\cdot 0}=2$
- $k=1$: $z_1=2e^{i2\pi/3}=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$
- $k=2$: $z_2=2e^{i4\pi/3}=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$

النتيجة: $S=\{2,-1+\sqrt{3}i,-1-i\sqrt{3}\}$ (جذور تكعيبية للوحدة × 2)

السؤال 2) 0 نقطة

بطريقة مباشرة:

$$j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i4\pi/3}=j^2$$

$$1+j+j^2=1-1+0=0\ \checkmark$$

بطريقة أخرى: $(1-z)(1+z+z^2)=1-z^3$, إذن j و j^2 جذرا $1+z+z^2=0$, ومجموعهما = -1 (فييتا).

إذن $j+j^2=-1$ $\Longrightarrow$ $1+j+j^2=0$.