# ✅ الحل النموذجي — الفرض الثاني — الفصل الأول (تنسيق بكالوريا)

الحل النموذجي الرسمي المفصّل — الأستاذ عدلي أسعد

**السنة:** 2027 | **الشعبة:** شعبة العلوم التجريبية | **المدة:** ساعتان

## التمرين الأول (5 نقاط) — دراسة شاملة لدالة

**السؤال 1)** 0.75 نقطة

**النهايات:**

- $2 + 3x - {}^{3}x = 2 + x + 4x - {}^{2}2x - {}^{2}2x + {}^{3}x = (2 + x)(1 + 2x - {}^{2}x) = f(x)$
- $\infty- = \lim_{\infty-} f \ ,\infty+ = \lim_{\infty+} f$

**السؤال 2)** 1.5 نقطة

**الاشتقاق:**

$$(1 + x)(1 - x)3 = (3 + 3x)(1 - x) = [(1 - x) + (2 + x)2](1 - x) = {}^{2}(1 - x) + (2 + x)(1 - x)2 = f'(x)$$

**إشارة $f'$:**

- $0 = f'(x) \iff 1 = x$ أو $1- = x$
- $0 < {}'f$ على $(\infty+ ,1) \cup (1- ,\infty-)$
- $0 > {}'f$ على $(1 ,1-)$

**جدول التغيّرات:**

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $0$ | $+$ |
| | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | |

- $f(-1) = 1 \cdot 4 = 4$ (عظمى)
- $f(1) = 3 \cdot 0 = 0$ (صغرى)

**السؤال 3)** 1.25 نقطة

**حل المعادلة:**

$$0 = (2 + x)^2(1 - x) = f(x) \iff 1 = x \text{ (جذر مزدوج) أو } x = -2$$

**إشارة $f$:**

- ${}^{2}(1 - x) \geq 0$ دائمًا
- $(2 + \operatorname{sgn}(x = \operatorname{sgn}(f)$
- $0 < f(x)$ على $(\infty+ ,2-) \setminus \{1\}$
- $0 > f(x)$ على $(2- ,\infty-)$
- $0 = f(x)$ عند $x = -2 ,1$

**السؤال 4)** 0.75 نقطة

**الحساب:**

- $f(0) = 2 \cdot 1 = 2$ ✓ ($A$ على المنحنى)

- $f'(0) = 3(1-0)(1+0) = -3$

**المماس:** $y = -3x + 2$.

**السؤال 5)** 0.75 نقطة

**عناصر الرسم:**

- النقاط: $(0, -2)$, $(-1, 4)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$

- المنحنى يمر من $-\infty$, يرتفع إلى $(-1, 4)$ (عظمى)

- ينخفض إلى $(1, 0)$ (صغرى), يلامس المحور السيني عند $x = 1$

- يرتفع نحو $+\infty$

الشكل: منحنى مع نقطة عظمى ثم صغرى (تلامس).

## التمرين الثاني (5 نقاط) — متتالية عودية + مساعدة

**السؤال 1)** 0.75 نقطة

**الحسابات:**

- $u_1 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
- $u_2 = \frac{3/2+1}{2} = \frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$
- $u_3 = \frac{5/4+1}{2} = \frac{9/4}{2} = \frac{9}{8}$

**السؤال 2)** 1 نقطة

**التهيئة ($n=0$):** $u_0 = 2 \in (1,2]$ ✓

**الفرضية:** نفرض $1 < u_n \geq 2$.

**النتيجة:** $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}$

- من $1 < u_n$: $2 < 1 + u_n$, إذن $1 < u_{n+1}$ ✓
- من $2 \geq u_n$: $3 \geq 1 + u_n$, إذن $2 \geq 3/2 \geq u_{n+1}$ ✓

إذن $2 \geq u_{n+1} > 1$ ✓

**الخلاصة:** بالتراجع, $2 \geq u_n > 1$ لكل $n$.

**السؤال 3)** 1 نقطة

**الحساب:**

$$\frac{u_n - 1}{2} = u_n - \frac{u_n + 1}{2} = u_n - u_{n+1}$$

بما أن $1 < u_n$ (من السؤال 2): $u_n - 1 > 0$, إذن $u_n - u_{n+1} > 0$.

$(u_n)$ **متناقصة** .

**التقارب:**

- متناقصة + محدودة سفلًا بـ 1
- إذن متقاربة (نظرية الرتابة المحدودة)

**السؤال 4)** 1 نقطة

**الحساب:**

$$\frac{v_n}{2} = \frac{u_n - 1}{2} = 1 - \frac{u_n + 1}{2} = 1 - u_{n+1} = v_{n+1}$$

إذن $(v_n)$ **متتالية هندسية** أساسها $q = \frac{1}{2}$ .

- حدّها الأول: $v_0 = u_0 - 1 = 1$

**السؤال 5)**

1.25 نقطة

**الصيغ الصريحة:**

- $v_n = v_0 \cdot q^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$
- $u_n = v_n + 1 = 1 + \frac{1}{2^n}$

**النهاية:**

- $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ (لأن $|1/2| < 1$)
- إذن $\lim_n u = 1$ ✓

## التمرين الثالث (5 نقاط) — الاستمرارية + مبرهنة القيم الوسيطة

**السؤال 1)** 2 نقطة

**أ) الاتصال عند 1:**

$$2 = (1+x)\lim_{x\to 1} = \frac{x^2-1}{x-1}\lim_{x\to 1}$$

للاتصال: $2 = a = g(1)$, إذن $\boxed{a = 2}$.

**ب) القابلية للاشتقاق:**

$$1 = \frac{{}^2(x-1)}{{}^2(x-1)}\lim = \frac{x^2-2x+1}{{}^2(x-1)}\lim = \frac{2(x-1)-(x^2-1)}{{}^2(x-1)}\lim = \frac{2-\frac{x^2-1}{x-1}}{x-1}\lim_{x\to 1} = \frac{g(x)-g(1)}{x-1}\lim_{x\to 1}$$

إذن $1 = g'(1)$ (موجودة), $g$ قابلة للاشتقاق عند 1 ✓.

**السؤال 2)** 1.5 نقطة

**التطبيق:**

- $h$ متصلة على $[0, 1]$ (دالة كثيرية الحدود)
- $0 < 1 = 1 + 0 - 0 = h(0)$
- $0 > 1- = 1 + 3 - 1 = h(1)$
- $[1, 1-] = [h(1), h(0)] \ni 0$

حسب مبرهنة القيم الوسيطة (IVT), يوجد $c \in [0, 1]$ بحيث $0 = h(c)$ ✓.

**ملاحظة:** الحل $c \approx 0.347$ (يحسب بالتنصيف).

**السؤال 3)** 1.5 نقطة

**الدراسة:**

- $f(x) = x - {}^5x + 3x + 1$
- $f'(x) = 5x - {}^4 + 3$
- $f'(x) = 0 \iff 3/5 = {}^4x \iff x = \pm(3/5)^{1/4}$
- النقاط الحرجة: $x_1 = -0,880$ و $x_2 = 0,880$ (تقريبًا)

**قيم $f$ عند النقاط الحرجة:**

- $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$
- $f(x_1) \approx -1,46 + 2,64 = 1 = 2,18 > 0$ (عظمى محلية)
- $f(x_2) \approx 0,55 - 2,64 = -1 = 2,09 < 0$ (صغرى محلية)

**التطبيق:**

- على $(-\infty, x_1)$: $f$ تزايد من $-\infty$ إلى $2,18$ → حل وحيد $\alpha_1 < x_1$
- على $(x_1, x_2)$: $f$ تناقص من $2,18$ إلى $-1,09$ → حل وحيد $\alpha_2 \in (x_1, x_2)$
- على $(x_2, +\infty)$: $f$ تزايد من $-1,09$ إلى $+\infty$ → حل وحيد $\alpha_3 > x_2$

إذن المعادلة يقبل **3 حلول** ✓.

## التمرين الرابع (5 نقاط) — مبرهنة رول + لاغرنج

**السؤال 1)** 1.5 نقطة

**شروط رول:**

1. $f$ متصلة على $[-2,2]$ ✓ (دالة كثيرية الحدود)
2. $f$ قابلة للاشتقاق على $(-2,2)$ ✓
3. $f(2) = 0 = f(-2)$ ✓

إذن يوجد $c \in (-2,2)$ بحيث $f'(c) = 0$.

**العثور على $c$:**

$2x = f'(x)$, $0 = f'(c) \iff 0 = c$ ✓ $(0 = c \in (-2,2))$

**السؤال 2)** 1.5 نقطة

**شروط لاغرنج:**

1. $g$ متصلة على $[1,e]$ ✓
2. $g$ قابلة للاشتقاق على $(1,e)$ ✓

**التطبيق:**

$$g'(c) = \frac{g(e) - g(1)}{e - 1}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln e - \ln 1}{e - 1}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{0 - 1}{e - 1}$$

$$c = e - 1 \approx 1{,}718 \in (1,e)$$

✓

**السؤال 3)** 2 نقطة

**الفكرة:** نطبّق لاغرنج على $f(t) = \ln(t+1)$ على $[0,x]$.

- $f$ متصلة على $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على $(0,x)$
- $f'(t) = \frac{1}{t+1}$

**حسب لاغرنج:** يوجد $c \in (0,x)$ بحيث:

$$\frac{1}{c+1} = f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(x+1)-0}{x}$$

$$\frac{x}{c+1} = \ln(x+1)$$

**الترتيب:**

- $0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < 1+x$
- $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c+1} < 1$
- $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{c+1} < x$
- $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ ✓