✅ الحل النموذجي — الفرض الثاني — الفصل الثاني

المؤسسة: منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد | **السنة الدراسية:** 2026/2027

المستوى: علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي | **المدة:** ساعتان | **عدد التمارين:** 4

حل التمرين الأول — الدالة $f(x) = (ax + b)e^{-x}$

2) من الشكل الافتراضي: $f(x) \to 0$ عند $+\infty$ (مقارب أفقي $y = 0$) و $f(x) \to +\infty$ أو $-\infty$ عند $-\infty$ (حسب إشارة a).

3) المنحنى يمر من $A(0;2)$: $f(0) = b \cdot e^{0} = b = 2$.

المماس في A يمر من $B(1;3)$. معامل المماس = $\frac{3-2}{1-0} = 1$. أي $f'(0) = 1$.

$f'(x) = (ae - ax - a)e^{-x} = (ae - ax)e^{-x} - ae^{-x}$. $f'(0) = a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b = 3$.

4) $f(x) = (2 + 3x)e^{-x}$.

5) $f'(x) = (2 - 3x - 3)e^{-x} = (1 - 3x)e^{-x}$. إشارة $e^{-x} > 0$ دائمًا, إذن $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 1/3$. f تزايد على $(-\infty, 1/3]$, تناقص على $[1/3, +\infty)$. الأقصى: $f(1/3) = (2 + 1)e^{-1/3} = 3e^{-1/3} \approx 2,15$.

6) $f(x) = (2 + 3x)e^{-x} = 0$ عند $+\infty$. $y = 0$ مقارب أفقي. إشارة $f(x)$ = إشارة $2 + 3x$: لـ $x < -2/3$, $f > 0$ (فوق), لـ $x > -2/3$, $f > 0$ (تحت).

7) $f(1) = 5e^{-1} \approx 1,84$, $f'(1) = (3 - 1)e^{-1} = 2/e \approx 0,74$. المماس: $y = \frac{2}{e}(1 - x) + \frac{5}{e} = \frac{2x}{e} + \frac{7}{e}$.

8) الرسم: منحنى من $-\infty$ (لأن $2 + 3x \to -\infty$ و $e^{-x} \to +\infty$, المنتج $\to -\infty$) يصعد, يقطع المحور السيني عند $x = -2/3$, يصل القمة $(1/3, 2,15)$, ثم ينزل نحو $y = 0$ من فوق.

حل التمرين الثاني — أعداد مركبة

1) $|z| = \sqrt{1 + 3} = 2$. $\arg(z) = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$.

2) $z = 2e^{-i\pi/6}$.

3) $z^{6} = 2^{6}e^{-i\pi} = 64 \cdot (-1) = -64$.

4) $OA = |z| = 2$.

5) $z^{3} = -i8e^{i\pi/2} = 8i$. الحلول: $z = 2e^{i(-\pi/6 + 2k\pi/3)}$ لـ $k = 0, 1, 2$.

$z_{0} = 2e^{-i\pi/6} = \sqrt{3} - i$.

$z_{1} = 2e^{i\pi/2} = 2i$.

$z_{2} = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i$.

6) $Z = z^{2} = (\sqrt{3} - i)^{2} = 3 - 2i\sqrt{3} + i^{2} = 2 - 2i\sqrt{3}$.

7) $|Z| = |z|^{2} = 4$, إذن $|Z| = Z\bar{Z} = 16^{2}$ ✓.

8) $\arg(z) + \arg(\bar{z}) = -\pi/6 + \pi/6 = 0$. ملاحظة: $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, إذن المجموع دائمًا 0.

حل التمرين الثالث — احتمالات

1) $X \sim \mathcal{B}(3, 0,4)$ (تجارب بيرنولي مستقلة, $p = 4/10 = 0,4$).

2) $P(X = 0) = (6,0)^3 = 0,216$. $P(X = 3) = (4,0)^3 = 0,064$.

3) $E(X) = np = 3 \cdot 0,4 = 1,2$. $V(X) = np(1-p) = 3 \cdot 0,4 \cdot 6,0 = 0,72$.

4) $P(X \le 2) = P(2) + P(3) = (4,0)^2(6,0)\binom{3}{2} + (4,0)^3 = 0,096 \cdot 3,0 + 6,0 \cdot 0,064 + 1728,0 = 0,064 + 0,2368$.

5) صيغة التوزيع ذي الحدين: $P(X = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k} = \binom{3}{k}(4,0)^k(6,0)^{3-k}$ ✓.

6) $P(Y \ge 1) = 1 - (6,0)^n \ge 0,95 \iff (6,0)^n \ge 0,05 \iff n \ln 0,6 \le \ln 0,05 \iff n \ge \frac{\ln 0,05}{\ln 0,6} \approx 6,15$. إذن $n_{\min} = 7$.

7) $P(X = 2 | X \ge 1) = \frac{P(X=2)}{P(X \ge 1)} = \frac{0,288}{1-0,216} = \frac{0,288}{0,784} \approx 0,367$.

8) بدون إعادة: $P(X = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

حل التمرين الرابع — متتالية + تراجع

1) التهيئة: $n = 1$: $\sum_{k=0}^{1} q^k = q + 1 = \frac{q^2 - 1}{q - 1}$ ✓ (لـ $q \neq 1$).

النتيجة: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} q^{n+1} + (1-q)q - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$ ✓.

2) $q = 1/2$: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to 2$.

3) $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{5}{4}$, $u_3 = \frac{9}{8}$.

4) التهيئة: $u_0 = 2 \in (1,2]$ ✓. الفرضية: $1 < u_n \le 2$. النتيجة: $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \in \left(\frac{2}{2}, \frac{3}{2}\right] = (1,1,5] \subset (1,2]$ ✓.

5) $u_n - u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2} > 0$ (لأن $u_n > 1$). (u_n) متناقصة.

محدودة سفلًا بـ 1, إذن متقاربة. $\ell = \frac{\ell + 1}{2} \Rightarrow \ell = 1$.

6) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{2} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{v_n}{2}$. (v_n) هندسية أساسها $1/2$ و $v_0 = 1$. $v_n = (1/2)^n$.

7) $\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{(1/2)^{n+1} - 1}{1/2} = 2 - \frac{1}{2^n}$. $\sum u_k = \sum(1 + v_k) = (1+n) + \sum v_k = 1 + n + 2 - \frac{1}{2^n} = 3 + n - \frac{1}{2^n}$.

8) $\lim \sum v = 2$.