الاختبار الفصلي الثالث

المؤسسة: منصة الرياضيات — الأستاذ عدلي أسعد

السنة الدراسية: 2026/2027

المستوى: علوم تجريبية / رياضيات / تقني رياضي

المدة: ساعتان ونصف

التاريخ: جوان 2027

التمرين الأول (4 نقاط) — دراسة دالة شاملة

لتكن $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. احسب حدود f عند -1 و عند $\pm\infty$.

استنتج المستقيمات المقاربة و عيّنها.

احسب $f'(x)$ و ادرس إشارها.

أنشئ جدول تغيرات f.

بيّن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مركز تناظر I, حدد إحداثياته.

ارسم $(\mathcal{C}_f)$ مع المقاربتين في معلم متعامد.

لتكن $g(x) = f(x) - \ln(x+2)$ على $(-1, +\infty)$. بيّن أن $g(x) = 0$ يقبل حلاً وحيدًا على $(-1, +\infty)$.

احسب المساحة المحصورة بين $(\mathcal{C}_f)$ و المحور السيني على المجال $[-2, 1]$ (ملاحظة: $\int f = \dots$).

التمرين الثاني (4 نقاط) — متتالية + متتالية مساعدة

نعتبر (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$. احسب u_1, u_2, u_3 .

بيّن بالتراجع أن $u_n > 0$ لكل n.

لتكن $v_n = \frac{1}{u_n}$. اكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

بيّن أن (v_n) حسابية, حدد أساسها و حدّها الأول.

اكتب v_n ثم u_n بدلالة n.

احسب $\lim u_n$.

ادرس رتابة (u_n) مباشرة.

احسب $\sum_{k=0}^{n} v_k$ ثم استنتج $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$.

التمرين الثالث (4 نقاط) — أعداد مركبة شاملة

لتكن $z = \sqrt{3} - i$. احسب $|z|$ و $\arg(z)$.

اكتب z على الشكل الأسي.

احسب z^6 على الشكل الأسي ثم الجبري.

حل في $\mathbb{C}$: $z^3 = -8i$.

لتكن $Z = z^6$. اكتب $\bar{Z}$ على الشكل الجبري.

لتكن A نقطة التمثيل لـ z في المستوي المركب. احسب OA و الزاوية $(\vec{OA}, \vec{u})$.

لتكن B نقطة التمثيل لـ z^2. احسب AB.

بيّن أن النقاط O, A, B تشكل مثلثًا (ليس بالضرورة متساوي الأضلاع).

التمرين الرابع (4 نقاط) — تكامل + متتالية (صيغة واليس)

احسب $\int_0^1 x^2 e^{-x^3}\,dx$ (تغيير متغير $u = -x^3$).

احسب $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\,dx$ (تغيير متغير $u = \cos x$).

برهن بالتجزئة أن $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ لـ $n \geq 2$.

احسب I_0 و I_1.

احسب I_2, I_3, I_4.

بيّن أن (I_n) متناقصة لـ $n \geq 1$ و استنتج $\lim_n I_n$.

لتكن $J_n = (1+n) I_n I_{n+1}$. بيّن أن J_n ثابتة (مسألة واليس).

استنتج صيغة واليس: $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

التمرين الخامس (4 نقاط) — احتمالات + توزيعات منفصلة

في علبة 10 كرات: 4 حمراء, 5 بيضاء, 1 خضراء. نسحب 3 كرات دفعة واحدة. احسب عدد السحوبات الممكنة.

احسب احتمال الحصول على 3 كرات حمراء.

احسب احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.

احسب احتمال الحصول على لونين مختلفين على الأقل.

لتكن X عدد الكرات البيضاء المسحوبة. حدد توزيع X.

احسب $E(X)$ و $V(X)$.

احسب $P(X \geq 2)$.

احسب $P(X = 1 | X \geq 1)$.